DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Salah satu kasus khusus dari permasalahan program linier adalah Masalah transportasi. Masalah transportasi memiliki prosedur perhitungan yang lebih sederhana dengan tujuan aplikasi ekonomis [1]. Variasi dari permasalahan program linier yang dalam hal ini adalah masalah transportasi, dikembangkan untuk memecahkan berbagai permasalahan yang berhubungan dengan transportasi dan distribusi persediaan atau sumber daya dari berbagai sumber (pusat persediaan) ke berbagai tujuan (pusat konsumen) [2]. Dalam dunia industri, masalah transportasi cukup memainkan peran penting untuk menentukan alokasi optimal pada pendistribusian suatu produk tunggal dari beberapa titik persediaan menuju beberapa titik permintaan. Pengaplikasian masalah transportasi pada suatu industri atau perusahaan akan berguna untuk membantu kegiatan pendistribusian suatu produk tunggal agar menghasilkan keuntungan yang optimal. Dengan adanya metode untuk menyelesaikan masalah transportasi, proses pendistribusian suatu produk tunggal oleh industri atau perusahaan akan lebih efektif dan efisien. Beberapa metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah transportasi antara lain, untuk menemukan solusi fisibel yaitu dengan Metode Pojok Barat Laut (*North West Corner Method*), Metode Biaya Terendah (*Least Cost Method*), dan VAM (*Vogel's Approximation Method*) [3]. Setelah menemukan solusi fisibel, maka selanjutnya dilakukan uji keoptimalan dengan Metode Batu Loncat (*Stepping Stone*) atau Metode MODI (*Modified Distribution*) untuk menghasilkan solusi optimal [4].

Seiring berjalannya waktu, masalah transportasi bertransformasi menjadi lebih kompleks dengan adanya penambahan jenis komoditas yang dikirimkan. Oleh karena itu, masalah transportasi klasik di perbesar menjadi multi-dimensi. Dalam hal ini, persediaan dan permintaan juga dapat bervariasi, karena kendala persediaan, permintaan, dan komoditas bervariasi. Oleh karena itu, dibutuhkan suatu penambahan untuk memperbaiki batasan pada kendala persediaan, permintaan, dan komoditas. Jika pada masalah transportasi klasik sebuah komoditas di kirimkan dari sumber menuju tujuan. Jumlah dari banyaknya persediaan di sumber sama dengan jumlah banyaknya permintaan di tujuan dengan tujuan untuk menentukan jumlah komoditas yang akan di distribusikan sehingga total biaya transportasi minimum. [5] Dahiya dan Verma memperkenalkan masalah transportasi terbatas dengan kendala pada batasan. [6] Nomani AM, Ali I, dan Ahmed A, memperkenalkan sebuah pendekatan baru untuk menyelesaikan masalah transportasi multi objektif. [7] Haley pernah menjabarkan adanya sebuah solusi untuk menyelesaikan masalah transportasi multi indeks. [8,9] Haley memperkenalkan prosedur solusi masalah transportasi tiga dimensi yang merupakan perluasan dari metode modifikasi distribusi. [10] Khurana mempelajari masalah Trans-*shipment* tiga dimensi. [11] Gupta dan Arora memperkenalkan masalah transportasi tiga dimensional terbatas.

Pada tahun 2018, Khurana, Adlakha, dan Lev memperkenalkan metode solusi yang digunakan untuk menyelesaikan masalah transportasi tiga dimensi dengan kendala aksial dengan batas pada persediaan, permintaan, dan jenis komoditas. Masalah transportasi tiga dimensi dapat juga disebut sebagai masalah multi-indeks. Masalah multi-indeks dapat digambarkan sebagai meminimalkan biaya transportasi dari p komoditas yang berbeda (k = 1, 2, …, p) dengan m asal (i = 1, 2, …, m) ke n tujuan (j = 1, 2, …, n). dari masalah tersebut kemudian menimbulkan kondisi pada banyaknya jenis kombinasi yang tersedia dan dibutuhkan. Selain itu dapat juga menimbulkan serangkaian pembatasan pada satu komoditas yang dikirimkan dengan metode yang berbeda. Oleh karena itu, Khurana, Adlakha, dan Lev memperkenalkan sebuah formulasi untuk menyelesaikan masalah transportasi tiga dimensi dengan kendala aksial dengan batas pada persediaan, permintaan, dan komoditas. Metode penyelesaian untuk mengalokasikan tiap sel pada masalah transportasi tiga dimensi dengan kendala aksial dengan batas pada persediaan, permintaan, dan komoditas menggunakan metode Haley [8].

Dalam penyusunan Tugas Akhir ini, membahas tentang pembentukan matriks pada masalah transportasi seimbang tiga dimensi dengan kendala persediaan, permintaan, dan komoditas pada kasus minimum yang kemudian dilanjutkan dengan membentuk penyelesaian matriks tersebut untuk menentukan solusi optimal dengan menggunakan metode Haley. Selanjutnya penyelesaian dengan menggunakan alat bantu program *solver* GAMS serta Lindo dalam menentukan solusi optimal pada masalah transportasi tiga dimensi seimbang tiga dimensi dengan kendala persediaan, permintaan, dan komoditas pada kasus minimum.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan pada latar belakang maka, permasalahan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Bagaimana masalah penyelesaian transportasi seimbang tiga dimensi dengan batas persediaan, permintaan dan komoditas pada kasus minimum dengan menggunakan Metode Haley?
2. Bagaimana masalah penyelesaian transportasi seimbang tiga dimensi dengan kendala persediaan, permintaan, dan komoditas untuk kasus minimum dengan alat bantu program *solver* GAMS dan Lindo yang efektif?

1.3 Pembatasan Masalah

Dalam penelitian ini, pembatasan masalahnya hanya terbatas pada penggunaan program *solver* GAMS, Lingo dan pengerjaan secara manual pada penyelesaian masalah transportasi seimbang tiga dimensi dengan kendala persediaan, permintaan, dan komoditas dengan menggunakan metode Haley untuk kasus minimum.

1.4 Tujuan Penulisan

Tugas akhir ini memiliki tujuan penulisan antara lain:

1. Mempelajari dan mengkaji program *solver* GAMS dan Lindo untuk membantu menyelesaikan masalah transportasi tiga dimensi dengan kendala persediaan, permintaan, dan komoditas yang seimbang dengan untuk kasus minimum.
2. Mempelajari dan mengkaji metode Haley pada masalah transportasi seimbang tiga dimensi dengan kendala persediaan, permintaan dan komoditas untuk kasus minimum.

1.5 Metode Penulisan

Metode yang digunakan penulis dalam penyusunan Tugas Akhir adalah sebagai berikut:

1. Tinjauan pustaka (*study literature*), dengan mempelajari dan mengkaji materi-materi dasar yang berhubungan dengan masalah transportasi tiga dimensi beserta metode penyelesaiannya seperti membentuk model awal dan langkah penyelesaian Metode Haley pada masalah transportasi seimbang tiga dimensi dengan kendala persediaan, permintaan, dan komoditas untuk kasus minimum.
2. Mempelajari dan mengkaji penggunaan program *solver* GAMS dan Lindo sebagai alat bantu untuk penyelesaian masalah transportasi seimbang tiga dimensi dengan kendala persediaan, permintaan, dan komoditas untuk kasus minimum.

3. Menerapkan penggunaan Metode Haley serta program *solver* GAMS dan Lindo pada masalah transportasi tiga dimensi seimbang dengan kasus minimum melalui contoh-contoh.

1.6 Sistematika Penulisan

Penulisan Tugas Akhir ini memiliki sistematika penulisan yang terbagi menjadi empat bab yaitu, Bab I berisi pendahuluan yang menjelaskan tentang latar belakang, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan penulisan, metode penulisan, dan sistematika penulisan. Bab II berisi teori penunjang yang memuat teori dasar untuk menunjang pembahasan mengenai program linier, metode simpleks, pengertian masalah transportasi, metode menentukan solusi fisibel, metode menentukan solusi optimal, dan masalah transportasi terbatas tiga dimensi. Bab III berisi pembahasan menjelaskan tentang pembentukan model awal masalah transportasi tiga dimensi seimbang dengan kendala persediaan, permintaan, dan komoditas untuk kasus minimum, penggunaan Metode Haley untuk menemukan solusi dari penyelesaian masalah transportasi tiga dimensi dengan kendala persediaan, permintaan, dan komoditas yang seimbang untuk kasus minimum, pembahasan langkah penyelesaian menggunakan GAMS untuk menyelesaikan masalah transportasi tiga dimensi dengan kendala persediaan, permintaan, dan komoditas yang seimbang dengan untuk kasus minimum, pembahasan langkah penyelesaian menggunakan Lindo untuk menyelesaikan masalah transportasi tiga dimensi dengan kendala persediaan, permintaan, dan komoditas yang seimbang untuk kasus minimum, serta perbandingan antara pengerjaan secara manual dan program *solver*. Bab IV Penutup, pada bab ini berisi tentang kesimpulan dan saran dari hasil pembahasan Tugas Akhir ini.

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas solusi masalah transportasi tiga dimensi dengan batasan ketersediaan pada sumber, permintaan di tujuan, dan berbagai komoditas. Metode yang digunakan untuk menyelesaikan masalah transportasi tiga dimensi dengan batas ketersediaan pada sumber, permintaan di tujuan, dan berbagai komoditas adalah metode Haley [8].

3.1. Masalah transportasi terbatas tiga dimensi dengan kendala aksial

Masalah transportasi merupakan kasus khusus masalah program linier dalam riset operasi yang memiliki tujuan utama untuk mengoptimalkan pendistribusian suatu produk dari beberapa sumber ke banyak tujuan yang berbeda sesuai dengan permintaan terntentu sehingga total biaya transportasi yang dikeluarkan dapat dioptimalkan. Masalah transportasi memiliki peran penting dalam sektor industri untuk meminimalkan total biaya yang dikeluarkan saat melakukan pendistribusian produk atau memaksimumkan keuntungan yang didapat.

Pada umumnya, masalah transportasi disajikan sebagai masalah transportasi dua dimensi dapat diselesaikan dengan dua tahapan. Tahap pertama untuk mencari solusi fisibel, yaitu tahap mencari kemungkinan pengalokasian distribusi dari tiap tujuan agar seluruh kapasitas sumber ke tujuan dapat teralokasikan dengan optimal. Tahap kedua untuk mencari solusi optimal, dimana tahap ini melakukan perbaikan dari alokasi yang didapat dari solusi fisibel sehingga solusi optimum. Sedangkan masalah transportasi tiga dimensi dapat diselesaikan dengan tiga tahapan. Tahap pertama yaitu membentuk model permasalahannya. Kemudian tahap kedua yaitu mencari solusi fisibel dimana tahap ini mencari kemungkinan pengalokasian distribusi yang memperhatikan batasan persediaan, permintaan, dan komoditas agar seluruh kapasitas dapat teralokasikan dengan baik. Tahap ketiga yaitu mencari solusi optimal sehingga keuntungan yang di dapat optimal.

Masalah "*Three Axial Sums*" berkaitan dengan transportasi dari berbagai komoditas dalam satu gudang yang berbeda ke tujuan yang berbeda dimana total ketersediaan, permintaan, dan kuantitas komoditas yang akan diangkut ditentukan. Masalah transportasi tiga dimensi yang memiliki batas ketersediaan, permintaan, dan beragam komoditas dapat ditulis sebagai berikut [9]:

T1 : Minimumkan $\sum_I \sum_J \sum_K c_{ijk} x_{ijk}$

$$a_i \leq \sum_J \sum_K x_{ijk} \leq A_i, \qquad i \in I \tag{3.1}$$

$$b_j \leq \sum_I \sum_K x_{ijk} \leq B_j, \qquad j \in J \tag{3.2}$$

$$e_k \leq \sum_I \sum_J x_{ijk} \leq E_k, \qquad k \in K \tag{3.3}$$

$$l_{ijk} \leq x_{ijk} \leq u_{ijk} \qquad i \in I, j \in J, k \in K \tag{3.4}$$

Dimana $I = \{1,2,\dots,m\}$, $J = \{1,2,\dots,n\}$, $K = \{1,2,\dots,p\}$ merupakan kumpulan masing-masing asal, tujuan dan komoditas. a_i dan A_i adalah minimum dan maximum ketersediaan di asal pada *i*, kemudian b_j dan B_j adalah minimum dan maksimum permintaan pada *j* di tujuan. e_k dan E_k adalah minimum dan maksimum ketersediaan pada *k* komoditas dan c_{ij} merupakan biaya unit transportasi dari asal *i* menuju detinasi j. Asumsikan l_{ijk} dan u_{ijk} menjadi batas bawah dan atas pada rute (i, j) untuk jenis komoditas ke-*k*.

Untuk menyelesaikan masalah pada **T1**, masalah transportasi tiga dimensi terkait diformulasikan dengan dummy titik supply, dummy tujuan dan komoditi ekstra. Masalah transportasi tiga dimensi terkait diberikan sebagai berikut [11]:

Diketahui:

$I' = \{1, 2, \dots, m+1\}$ menunjukkan $m + 1$ untuk asal.

$J' = \{1, 2, \dots, n+1\}$ menunjukkan $n + 1$ untuk tujuan.

$K' = \{1, 2, \dots, p+1\}$ menunjukkan $p + 1$ untuk komoditas.

T2: Minimumkan $\sum_{I'}\sum_{J'}\sum_{K'} c'_{ijk} y_{ijk}$

Dengan kendala:

$\sum_{i\in I'} y_{ijk} = A'_{jk}, \forall j \in J'; \forall k \in K'$ (3.5)

$\sum_{j\in J'} y_{ijk} = B'_{ki}, \forall i \in I'; \forall k \in K'$ (3.6)

$\sum_{k\in K'} y_{ijk} = E'_{ij}, \forall i \in I'; \forall j \in J'$ (3.7)

$l_{ijk} \leq y_{ijk} \leq u_{ijk} \quad \forall i \in I, j \in J, k \in K$ (3.8)

$0 \leq y_{in+1k} \leq B_{ki} - b_{ki}, \forall i \in I; \forall k \in K$ (3.9)

$0 \leq y_{m+1jk} \leq A_{jk} - a_{jk}, \forall j \in J; \forall k \in K$ (3.10)

$0 \leq y_{ijp+1} \leq E_{ij} - e_{ij}, \forall i \in I; \forall j \in J$ (3.11)

$y_{in+1p+1} \geq 0, \forall i \in I$ (3.12)

$y_{m+1jp+1} \geq 0, \forall j \in J$ (3.13)

$y_{m+1n+1k} \geq 0, \forall k \in K$ (3.14)

$y_{m+1n+1p+1} \geq 0$ (3.15)

Dimana,

$A'_{jk} = A_{jk}, \forall j \in J; \forall k \in K$ (3.16)

$A'_{n+1k} = \sum_{i\in I} B_{ki}, \forall k \in K$ (3.17)

$B'_{ki} = B_{ki}, \forall i \in I; \forall k \in K$ (3.18)

$B'_{km+1} = \sum_{j\in J} A_{jk}, \forall k \in K$ (3.19)

$E'_{ij} = E_{ij}, \forall i \in I; \forall j \in J$ (3.20)

$E'_{in+1} = \sum_{k\in K} B_{ki}, \forall i \in I$ (3.21)

$B'_{p+1i} = \sum_{j\in J} E_{ij}, \forall i \in I$ (3.22)

$A_{n+1p+1} = B_{p+1m+1} = E_{m+1n+1} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} E_{ij}, \forall i \in I; \forall j \in J$ (3.23)

$A'_{jp+1} = \sum_{i\in I} E_{ij}, \forall j \in J$ (3.24)

$E'_{m+1j} = \sum_{k\in K} A_{jk}, \forall j \in J$ (3.25)

Kemudian penambahan dummy untuk biaya unit transportasi terkait diberikan sebagai berikut:

$$\left.\begin{array}{ll} c'_{ijk} = c_{ijk}, & i \in I,\ j \in J,\ k \in K \\ c'_{ijp+1} = M\ , & i \in I,\ j \in J \\ c'_{in+ik} = c'_{m+1jk} = 0\ , & i \in I,\ j \in J,\ k \in K \\ c'_{in+1p+1} = c'_{m+1jp+1} = c'_{m+1n+1k} = 0, & i \in I',\ j \in J',\ k \in K' \end{array}\right\} \quad (3.26)$$

Pada persamaan (3.26) dapat diartikan sebagai berikut:

a. Dummy biaya unit transportasi dari sumber *i* ke tujuan *j* untuk komoditas *k* sama dengan biaya unit transportasi untuk pendistribusian komoditas *k* yang asli.

b. Dummy biaya unit transportasi dari sumber *i* ke tujuan *j* dengan $k = p + 1$ sama dengan M (suatu bilangan positif yang besar).

c. Dummy biaya unit transportasi dengan dari sumber *i* dengan kendala permintaan *n* ditambah dari sumber *i* untuk komoditas *k* sama dengan dummy biaya unit transportasi dengan kendala penawaran *m* ditambah satu dan tujuan *j* untuk komoditas *k* akan sama dengan nol.

d. Dummy biaya unit transportasi dari sumber *i* dengan kendala permintaan *n* ditambah satu dikali komoditas *k* sama dengan dummy biaya unit transportasi dengan kendala penawaran ditambah satu dikali tujuan dengan *k = p + 1* sama dengan dummy biaya unit transportasi dengan kendala penawaran ditambah satu dikali kendala permintaan ditambah satu dikali komoditas sama dengan nol.

Kemudian pada permasalahaan **T2,** masalah *'Three Axial Sum"* dapat di formulasikan ulang sebagai transformasi masalah transportasi multi indeks dengan menggunakan definisi dari Haley [10] dimana terdapat penambahan dummy titik ketersediaan, dummy titik permintaan, dummy komoditas, dan dummy biaya unit transportasi untuk setiap $m + 2, n + 2, p + 2$ seperti dibawah:

$$\begin{array}{l} c''_{ijk} = c'_{ijk}\ (i \le m + 1, j \le n + 1, k \le p + 1), c''_{m+2n+2p+2} = 0 \\ c''_{ijp+2} = 0\ (i \le m + 1, j \le n + 1), c''_{in+2p+2} = M\ (i \le m + 1), \\ c''_{in+2k} = 0\ (i \le m + 1, k \le p + 1), c''_{m+2jp+2} = M\ (j \le n + 1), \\ c''_{m+2jk} = 0\ (j \le n + 1, k \le p + 1), c''_{m+2n+2k} = M\ (k \le p + 1) \end{array} \quad (3.27)$$

Untuk dummy titik ketersediaan, dummy permintaan, dan dummy komoditas diberikan sebagai berikut:

Tentukan $R = \max_{i,j,k}(A'_i, B'_j, E'_k)$ maka,

$A_{jk} = R\ (j \leq n+1; k \leq p+1)$, $\quad B_{ki} = R\ (k \leq p+1; i \leq m+1)$,

$E_{ij} = R\ (i \leq m+1; j \leq n+1)$,

$A_{n+2k} = (m+1)R - E'_k (k \leq p+1)$,

$A_{jp+2} = (m+1)R - B'_j (j \leq n+1)$,

$B_{p+2i} = (n+1)R - A'_i (i \leq m+1)$,

$B_{km+2} = (n+1)R - E'_k (k \leq p+1)$,

$E_{m+2j} = (p+1)R - B'_j (j \leq n+1)$,

$E_{in+2} = (p+1)R - A'_i (i \leq m+1)$,

$A_{n+2p+2} = B_{p+2m+2} = E_{m+2n+2} = R$.

Kemudian masalah **T3** dimodifikasi dengan Batasan yang dan fungsi tujuannya sebagai meminimumkan $\sum_{i=1}^{m+2}\sum_{j=1}^{n+2}\sum_{k=1}^{p+2} c'_{ijk} y_{ijk}$. Penyelesaian masalah pada **T3** dapat dengan sangat baik terselesaikan menggunakan metode Haley [8]. Jumlah variable tidak nol x_{ijk} pada solusi fisibel dasar untuk masalah transportasi penuh adalah $mnp - (m-1)(n-1)(p-1)$. Kemudian untuk masalah transportasi penuh, langkah pertama yaitu menemukan solusi fisibel, kemudian biaya bayangan u_{jk}, v_{ki}, w_{ij} untuk sel dasar dievaluasi sehingga $u_{jk} + v_{ki} + w_{ij} = c_{ijk}$. Terdapat $mn + np + pm$ biaya bayangan dan hanya $mn + np + pm - m - n - p - 1$ yang merupakan variable tak nol x_{ijk}.

Jadi $m + n + p - 1$ dummy biaya diatur sebagai nol.

Definisi 3.1.

Solusi -M- fisibel untuk *constrained transportation problem* [9]:

Sebuah solusi fisibel $\{y_{ijk}\}$, $i \in I'$, $j \in J'$, $k \in K'$ pada **T2** disebut M-solusi fisibel jika $y_{ijp+1} = 0$, $i \in I$, $j \in J$.

Teorema 3.1.

Terdapat korespondensi satu-satu diantara solusi fisibel pada **T1** dan sebuah solusi M-fisibel pada permasalahan **T2** [9].

<u>Bukti:</u>

Diketahui $\{y_{ijk}\}$ merupakan solusi M-fisibel pada permasalahan **T2**. Ditetapkan $\{x_{ijk}\}, i \in I,\ j \in J,\ k \in K$ sebagai transformasi berikut:

$$x_{ijk} = y_{ijk} \quad \forall\, i \in I, j \in J, k \in K \tag{3.28}$$

Karena $l_{ijk} \leq y_{ijk} \leq u_{ijk}\ \ \forall\, i \in I, j \in J, k \in K$, (3.28) menyriratkan bahwa $l_{ijk} \leq y_{ijk} \leq u_{ijk}\ \ \forall\, i \in I, j \in J, k \in K$.

Lalu $\sum_{J'} \sum_{K'} y_{ijk} = A_i' \quad \forall\ i \in I \subset I'$

$$\Rightarrow \sum_J \sum_K y_{ijk} + \sum_K y_{in+1k} + \sum_J y_{ijp+1} + y_{in+1p+1} = A_i \ \ \forall\, i \in I$$

[karena $A'_i = A_i\ \ \forall\, i \in I$]

$$\Rightarrow \sum_J \sum_K y_{ijk} = A_i - \left(\sum_K y_{in-1k} + \sum_J y_{ijp+1} + y_{in+1p+1}\right) \ \ \forall\, i \in I$$

$$\Rightarrow a_i \leq \sum_J \sum_K y_{ijk} \leq A_i \quad \forall\, i \in I$$

Sejak $0 \leq \sum_K y_{in+1k} + \sum_J y_{ijp+1} + y_{in+1p+1} \leq A_i - a_i\ \ \forall\, i \in I$, akan tetapi $x_{ijk} = y_{ijk} \quad \forall\, i \in I, j \in J, k \in K$

$$\Rightarrow a_i \leq \sum_J \sum_K x_{ijk} \leq A_i \quad \forall\, i \in I$$

Demikian pula, dapat ditunjukkan bahwa

$$b_j \leq \sum_I \sum_K x_{ijk} \leq B_j \quad \forall\, j \in J; \quad e_k \leq \sum_I \sum_J x_{ijk} \leq E_k \quad \forall\, k \in K$$

Jadi, x_{ijk} yang di definisikan sebagai (3.28) merupakan solusi fisibel untuk permasalahan **T1**.

Sebaliknya, $\{x_{ijk}\}, i \in I,\ j \in J,\ k \in K$ didefinisikan sebagai solusi fisibel pada permasalahan **T1.**

Di definisikan $y_{ijk} = x_{ijk} \quad \forall\, i \in I, j \in J, k \in K$ (3.29)

$$\sum_K y_{m+1jk} + \sum_I y_{ijp+1} + y_{m+1jp+1} = B_j - \sum_I \sum_K y_{ijk} \quad \forall\, j \in J \tag{3.30}$$

$$\sum_K y_{in+1k} + \sum_J y_{ijp+1} + y_{in+1p+1} = A_i - \sum_J \sum_K y_{ijk} \quad \forall\, i \in I \tag{3.31}$$

$$\sum_J y_{m+1jk} + \sum_I y_{in+1k} + y_{m+1n+1k} = E_k - \sum_I \sum_J y_{ijk} \quad \forall\, k \in K \tag{3.32}$$

Dan

$$\sum_{K'} y_{m+1n+1k} = \sum_{I}\sum_{J}\sum_{K} x_{ijk} + \sum_{i}\sum_{j} y_{ijp+1} \tag{3.33}$$

Karena, $l_{ijk} \leq x_{ijk} \leq u_{ijk} \;\; \forall\, i \in I, j \in J, k \in K$, maka $l_{ijk} \leq y_{ijk} \leq u_{ijk} \;\; \forall\, i \in I, j \in J, k \in K$.

(3.1) dan (3.31) menyiratkan bahwa $0 \leq \sum_K y_{in+1k} + \sum_J y_{ijp+1} + y_{in+1p+1} \leq A_i - a_i \;\; \forall\, i \in I$ dan

(3.2) dan (3.30) menyiratkan bahwa $0 \leq \sum_K y_{m+1jk} + \sum_I y_{ijp} + y_{m+1jp+1} \leq B_j - b_j \;\; \forall\, j \in J$ dan

(3.3) dan (3.31) menyiratkan bahwa $0 \leq \sum_J y_{m+1jk} + \sum_I y_{in+1k} + y_{m+1n+k} \leq E_k - e_k \quad \forall\, k \in K$

Dari semua ketidaksamaan diatas, menurut definisi M-fisibel, penjumlahan kedua akan menjadi nol sebagai $y_{ijp+1} = 0 \quad \forall\, i \in I,\ j \in J,$ jelas bahwa $\sum_{K'} y_{m+1n+1k} = \sum_I \sum_J \sum_K x_{ijk} + \sum_i \sum_j y_{ijp+1} = \sum_I \sum_J \sum_K x_{ijk} \geq 0$ (menurut M-fisibel) demikian $\sum_K y_{m+1n+1k} \geq 0 \quad \forall\, k \in K'$ dengan mempertimbangankan untuk $i \in I$ maka,

$\sum_{J'} \sum_{K'} y_{ijk} = \sum_J \sum_K y_{ijk} + \sum_K y_{in+1k} + \sum_J y_{ijp+1} + y_{in+1p+1}$

$= \sum_J \sum_K x_{ijk} + \sum_K y_{in+1k} + \sum_J y_{ijp+1} + A_i - \sum_I \sum_K x_{ijk} - \sum_K y_{in+1k} - \sum_J y_{ijp+1}$ dengan menggunakan (3.29) dan (3.31)

$= A_i = A_i' \qquad \forall\, i \in I$

Untuk $i = m + 1$,

$\sum_{J'} \sum_{K'} y_{m+1jk} = \sum_J \sum_K y_{m+1jk} + \sum_K y_{m+1n+1k} + \sum_J y_{m+1jp+1} + y_{m+1n+1p+1}$

$= \sum_J \sum_K y_{m+1jk} + \sum_{K'} y_{m+1n+1k} + \sum_J (B_j - \sum_I \sum_K x_{ijk} - \sum_K y_{m+1jk} - \sum_i y_{ijp+1})$ dengan menggunakan (3.1) dan (3.30)

$= \sum_I \sum_J \sum_K x_{ijk} + \sum_J B_j - \sum_I \sum_J \sum_K x_{ijk}$ dengan menggunakan (3.33)

$= \sum_{J} B_j$

Dengan demikian, $\sum_{I'} \sum_{K'} y_{ijk} = B'_j \quad \forall\, j \in J \;\; dan \; \sum_{I'} \sum_{K'} y_{ijk} = \sum_I A_i, \quad j = n+1$ dengan mempertimbangkan $k \in K$

Untuk $k = p + 1$

$\sum_{I'} \sum_{J'} y_{ijp+1} = \sum_I \sum_J y_{ijp+1} + \sum_I y_{in+1p+1} + \sum_J y_{m+1jp+1} + y_{m+1n+1p+1}$

$= \sum_I \sum_J y_{ijp+1} + \sum_I y_{in+1p+1} + y_{m+1n+1p+1} + \sum_J (B_j - \sum_I \sum_K x_{ijk} - \sum_K y_{m+1jk} - \sum_i y_{ijp+1})$ (dari (3.30))

$= \sum_I \sum_J y_{ijp+1} + \sum_I y_{in+1p+1} + y_{m+1n+1p+1} + \sum_J B_j - \sum_I \sum_J \sum_K y_{ijk} - \sum_J \sum_K y_{m+1jk} - \sum_I \sum_J y_{ijp+1}$

$= \sum_I y_{in+1p+1} + y_{m+1n+1p+1} + \sum_J B_j - \sum_I \sum_J \sum_K y_{ijk} - \sum_J \sum_K y_{m+1jk}$

$= \sum_I y_{in+1p+1} + y_{m+1n+1p+1} + \sum_J B_j - \sum_I \sum_J \sum_K y_{ijk} - \sum_J \sum_K y_{m+1jk} + \sum_K y_{m+1n+1k} - \sum_K y_{m+1n+1k}$

$= \sum_I y_{in+1p+1} + y_{m+1n+1p+1} + \sum_J B_j - \sum_I \sum_J \sum_K y_{ijk} - \sum_{J'} \sum_K y_{m+1jk} + \sum_K y_{m+1n+1k}$

$= \sum_I y_{in+1p+1} + \sum_K y_{m+1n+1k} + y_{m+1n+1p+1} + \sum_J B_j - \sum_I \sum_J \sum_K y_{ijk} - \sum_{J'} \sum_K y_{m+1jk} - \sum_I \sum_K y_{in+1k} + \sum_I \sum_K y_{in+1k}$

$= \sum_I y_{in+1p+1} + \sum_K y_{m+1n+1k} + y_{m+1n+1p+1} + \sum_I \sum_K y_{in+1k} + \sum_J B_j - \sum_K \left(\sum_I \sum_J y_{ijk} + \sum_{J'} y_{m+1jk} + \sum_i y_{in+1k} \right)$

$= \sum_I y_{in+1p+1} + \sum_{K'} y_{m+1n+1k} + \sum_I \sum_K y_{in+1k} + \sum_J B_j - \sum_K E_k$ (dari (3.32))

$= \sum_I y_{in+1p+1} + \sum_I \sum_J \sum_K x_{ijk} + \sum_I \sum_J y_{ijp+1} + \sum_I \sum_K y_{in+1k} + \sum_J B_j - \sum_K E_k$ (dari (3.33))

$= \sum_I \sum_J \sum_K x_{ijk} + \sum_I \sum_J y_{ijp+1} + \sum_I \sum_{K'} y_{in+1k} + \sum_J B_j - \sum_K E_k$

$= \sum_I \left(\sum_J \sum_K x_{ijk} + \sum_J y_{ijp+1} + \sum_{K'} y_{in+1k} \right) + \sum_J B_j - \sum_K E_k$ (didapat dari (3.29) dan (3.31))

$$= \sum_I A_i + \sum_J B_j - \sum_K E_k$$

Jadi, $\{y_{ijk}\}\ I' \times J' \times K'$ yang didefinisikan dengan persamaan (3.29) sampai (3.33) merupakan solusi M-fisibel dari permasalahan **T2.**

Teorema 3.2.

Nilai-nilai fungsi tujuan dari **T1** pada solusi fisibel dan **T2** pada solusi fisibel yang sesuai adalah sama [9].

<u>Bukti:</u>

Diketahui $\{x_{ijk}\}\ I' \times J' \times K'$ merupakan solusi fisibel yang cocok untuk **T1** dan $\{y_{ijk}\}\ I' \times J' \times K'$ merupakan solusi fisibel yang cocok untuk **T2** dengan nilai fungsi tujuan sebagai **Z**. maka,

$$Z = \sum_{I'} \sum_{J'} \sum_{K'} c'_{ijk} y_{ijk}$$

$$= \sum_I \sum_J \sum_K c'_{ijk} y_{ijk} + \sum_I \sum_K c'_{in+1k} y_{in+1k} + \sum_J \sum_K c'_{m+1jk} y_{m+1jk} + \sum_I \sum_J c'_{ijp+1} y_{ijp+1} + \sum_J c'_{m+1jp+1} y_{m+1jp+1} + \sum_I c'_{in+1p+1} y_{in+1p+1} + \sum_K c'_{m+in+1k} y_{m+in+1k} + c'_{m+1n+1p+1} y_{m+1n+1p+1}$$

$$= \sum_I \sum_J \sum_K c'_{ijk} y_{ijk} + \sum_I \sum_J c'_{ijp+1} y_{ijp+1} + c'_{m+1n+1p+1} y_{m+1n+1p+1}$$

(dari persamaan (3.26))

$$= \sum_I \sum_J \sum_K c'_{ijk} y_{ijk}$$

Penyelesaian diatas diselesaikan berdasarkan M-fisibel dan sebagai $c'_{ijk} = c_{ijk} \quad i \in I, j \in J,\ k \in K$. Jadi terbukti bahwa nilai fungsi tujuan **T1** pada $\{x_{ijk}\}\ I' \times J' \times K'$.

Teorema 3.3.

Untuk setiap solusi optimal pada **T1,** terdapat juga solusi optimal pada **T2** dan begitupun sebaliknya [9].

Bukti:

Diketahui $\{x_{ijk}^{o}\}_{I\times J\times K}$ merupakan solusi optimal untuk **T1** menghasilkan nilai fungsi objektif Z^{o} dan $\{t_{ijk}^{o}\}_{I'\times J'\times K'}$ merupakan solusi fisibel yang sesuai untuk **T2**. Nilai yang dihasilkan oleh $\{t_{ijk}^{o}\}$ adalah Z^{o} (dilihat dari **Teorema 3.2**). Jika memungkinkan, diketahui $\{t_{ijk}^{o}\}$ bukan solusi optimal untuk **T2**. Karena itu, terdapat sebuah solusi fisibel t'_{ijk}, katakanlah untuk **T2** dengan nilai $Z' < Z^{o}$. Diketahui $\{x'_{ijk}\}$ merupakan solusi disibel yang sesuai untuk **T1.** Kemudian dengan **Teorema 3.2**,

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{k\in K} c_{ijk}x'_{ijk} = Z'$$

Kontradiksi dengan asumsi tadi bahwa $\{x_{ijk}^{o}\}_{I\times J\times K}$ merupakan solusi optimal untuk **T1**. Demikian pula, solusi fisibel yang optimal untuk **T2** akan memberikan **T1** solusi optimal.

Solusi layak untuk masalah **T2** akan ada jika jumlah produk yang berbeda diterima oleh semua tujuan, jumlah produk yang dipasok dari semua asal ke semua tujuan, dan jumlah jenis produk berbeda yang dipasok dari semua asal adalah sama. Secara matematis [11],

$$\sum_{i\in I'}\sum_{k\in K'} B'_{ki} = \sum_{i\in I'}\sum_{j\in J'} E'_{ij} = \sum_{j\in J'}\sum_{k\in K'} A'_{jk}$$

Untuk membuktikan persamaan diatas, diberikan teorema seperti dibawah ini:

Teorema 3.4.

$$\sum_{i\in I'}\sum_{k\in K'} B'_{ki} = \sum_{i\in I'}\sum_{j\in J'} E'_{ij}$$

Bukti:

Ditunjukkan bahwa produk yang berbeda disediakan oleh *i* asal sama dengan jumlah produk yang diterima oleh semua tujuan dari *i* asal.

Jika $\sum_{k\in K'} B'_{ki} = \sum_{j\in J'} E'_{ij}$.

Maka, $\sum_{k\in K'} B'_{ki} = \sum_{k\in K'} B'_{ki} + B'_{p+1,i}$

$= E'_{i,n+1} + \sum_{j\in J'} E_{ij}$, $\forall i \in I$ dengan (3.21) dan (3.22)

$= E'_{i,n+1} + \sum_{j\in J'} E'_{ij}$ dengan (3.20)

$$= \sum_{j\in J'} E'_{ij}$$

$$\Rightarrow \sum_{k\in K'} B'_{ki} = \sum_{j\in J'} E'_{ij}$$

Jika dijumlahkan $i \in I'$, didapatkan $\sum_{i\in I'} \sum_{k\in K'} B'_{ki} = \sum_{i\in I'} \sum_{j\in J'} E'_{ij}$.

Teorema 3.5.

$$\sum_{j\in J'} \sum_{k\in K'} A'_{jk} = \sum_{i\in I'} \sum_{k\in K'} B'_{ki}$$

<u>Bukti:</u>

Ditunjukkan bahwa banyaknya jenis komoditas *k* yang diterima oleh semua tujuan adalah sama dengan banyaknya jenis komoditas *k* yang dipasok dari semua asal.

Jika $\sum_{j\in J'} A'_{jk} = \sum_{i\in I'} B'_{ki}$,

Maka, $\sum_{j\in J'} A'_{jk} = \sum_{j\epsilon J} A'_{jk} + A'_{n+1,k}$

$= B'_{k,m+1} + \sum_{i\in I'} B_{ki}$, $\forall k \in K$ dengan (3.16), (3.17), dan (3.19)

$= B'_{k,m+1} + \sum_{i\in I'} B'_{ki}$ dengan (3.18)

$$= \sum_{i\in I'} B'_{ki}$$

$$\Rightarrow \sum_{j\in J'} A'_{jk} = \sum_{i\in I'} B'_{ki}$$

Jika dijumlahkan dengan $k \in K'$, maka didapatkan

$\sum_{j\in J'} \sum_{k\in K'} A'_{jk} = \sum_{i\in I'} \sum_{k\in K'} B'_{ki}$.

Teorema 3.6.

$$\sum_{j\in J'}\sum_{i\in I'} E'_{ij} = \sum_{j\in J'}\sum_{k\in K'} A'_{jk}$$

Bukti:

Ditunjukkan bahwa jumlah produk yang dipasok dari semua asal menuju j tujuan sama dengan jumlah produk yang diterima oleh j tujuan.

Jika $\sum_{i\in I'} E'_{ij} = \sum_{k\in K'} A'_{jk}$,

Maka, $\sum_{i\in I'} E'_{ij} = \sum_{i\epsilon I} E'_{ij} + E'_{m+1,j}$

$= A'_{j,p+1} + \sum_{k\in K'} A_{jk}$, $\forall j \in J$ dengan (3.20), (3.24), dan (3.25)

$= A'_{j,p+1} + \sum_{k\in K'} A'_{jk}$ dengan (3.16)

$$= \sum_{k\in K'} A'_{jk}$$

$$\Rightarrow \sum_{i\in I'} E'_{ij} = \sum_{k\in K'} A'_{jk}$$

Jika dijumlahkan dengan $j \in J'$, maka didapatkan

$\sum_{j\in J'}\sum_{i\in I'} E'_{ij} = \sum_{j\in J'}\sum_{k\in K'} A'_{jk}$.

Contoh 3.1 :

Sebuah perusahaan minuman bersoda memproduksi dua jenis minuman kaleng yaitu MK 1, dan MK 2, pada dua pabrik di lokasi yang berbeda dengan kapasitas persediaan perbulan di Pabrik A untuk setiap jenis minuman kaleng sebanyak 20 unit. Kapasitas persediaan di Pabrik B untuk setiap jenis minuman kaleng sebanyak 30 unit. Perusahaan tersebut menyediakan kebutuhan untuk dua supermarket di lokasi yang berbeda dengan kebutuhan setiap jenis minuman kaleng pada Supermarket 1 sebanyak 30 unit. Sedangkan pada Supermarket 2 sebanyak 20 unit. Kemudian untuk kuantitas minuman kaleng yang di distribusikan dari Pabrik menuju Supermarket untuk MK 1 sebanyak 25 unit dan MK 2 sebanyak 25 unit. Biaya transportasi untuk pengiriman minuman kaleng dari pabrik ke setiap supermarket (dalam ribuan rupiah) ditunjukan dengan tabel berikut:

TABEL 3. 1 Tabel Biaya Transportasi Perusahaan Minuman Bersoda

Sumber ke Tujuan	Komoditas (dalam ribuan rupiah)	
	MK 1	MK 2
Pabrik A ke Supermarket 1	4	8
Pabrik A ke Supermarket 2	10	12
Pabrik B ke Supermarket 1	5	10
Pabrik B ke Supermarket 2	6	12

Perusahaan minuman bersoda tersebut memiliki permasalahan yaitu bagaimana mengirimkan dua jenis minuman kaleng dari setiap pabrik ke supermarket dengan biaya transportasi yang minimum.

Permasalahan model diatas dapat dibentuk menjadi model yang matematis seperti di bawah ini:

Variabel keputusan x_{ijk} : Banyaknya barang yang dikirim dari sumber-*i* ke tujuan-*j* untuk setiap komoditas-*k* dengan $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$, dan $k = 1, 2, \dots, p$.

Dimisalkan **T1** merupakan model matematis awal dari masalah transportasi diatas.

T1 : Minimumkan $\sum_I^2 \sum_J^2 \sum_K^2 c_{ijk} x_{ijk}$

$$= 4x_{111} + 8x_{112} + 10x_{121} + 12x_{122} + 5x_{211} + 10x_{212} + 6x_{221} + 12x_{222}$$

Dengan batasan persediaan :

$$\sum_{J=1}^{2} \sum_{K=1}^{2} x_{ijk} \leq 20$$

$$\sum_{J=1}^{2} \sum_{K=1}^{2} x_{ijk} \leq 30$$

Dengan batasan permintaan :

$$\sum_{I=1}^{2}\sum_{K=1}^{2} x_{ijk} \leq 30$$

$$\sum_{I=1}^{2}\sum_{K=1}^{2} x_{ijk} \leq 20$$

Dengan batasan komoditas :

$$\sum_{I=1}^{2}\sum_{J=1}^{2} x_{ijk} \leq 25$$

$$\sum_{I=1}^{2}\sum_{J=1}^{2} x_{ijk} \leq 25$$

Kemudian dari permasalahan *"Three Axial Sum"* pada **T1** diubah ke dalam bentuk permasalahan multi-indeks dengan penambahan dummy pada persediaan, permintaan, dan komoditas serta penambahan dummy pada biaya pengiriman barang. Dimisalkan **T2** merupakan formulasi ulang dari permasalahan pada **T1**.

T2: Minimumkan $\sum_{I'=1}^{3}\sum_{I'=1}^{3}\sum_{K'=1}^{3} c'_{ijk} y_{ijk}$

Dengan kendala:

$\sum_{i\in I'} y_{ijk} = A'_{jk}, \forall j \in J'; \forall k \in K'$ (kendala persediaan)

$\sum_{j\in J'} y_{ijk} = B'_{ki}, \forall i \in I'; \forall k \in K'$ (kendala permintaan)

$\sum_{k\in K'} y_{ijk} = E'_{ij}, \forall i \in I'; \forall j \in J'$ (kendala komoditas)

Dimana,

$A'_{jk} = 20, 30$

$A'_{3k} = 50$

$B'_{ki} = 30, 20$

$B'_{k3} = 50$

$E'_{ij} = 25, 25$

$E'_{i3} = 50$

$B'_{3i} = 50$

$A_{33} = B_{33} = E_{33} = 50$

$A'_{j3} = 50$

$E'_{3j} = 50$

Sedangkan untuk penambahan dummy pada biaya pengiriman minuman kaleng perusahaan tersebut menjadi:

$c'_{ijk} = c_{ijk}, \qquad i \in I,\ \ j \in J,\ \ k \in K$
$c'_{ij3} = M\ , \qquad i \in I,\ \ j \in J$
$c'_{i3k} = c'_{3jk} = 0\ , \qquad i \in I,\ \ j \in J,\ \ k \in K$
$c'_{i33} = c'_{3j3} = c'_{33k} = 0, \qquad i \in I',\ \ j \in J',\ \ k \in K'$

Kemudian permasalahan **T2** ditransformasikan ulang dengan penambahan dummy pada persediaan, permintaan, dan komoditas serta penambahan dummy pada biaya pengiriman barang dengan menggunakan definisi Haley [9]. Dimisalkan **T3** merupakan formulasi ulang dari permasalahan pada **T2**.

T3: Minimumkan $\sum_{I''=1}^{4}\sum_{J''=1}^{4}\sum_{K''=1}^{4} c'_{ijk}y_{ijk}$

Dengan kendala:

$\sum_{i\in I'} y_{ijk} = A'_{jk}, \forall j \in J'; \forall k \in K'$ (kendala persediaan)

$\sum_{j\in J'} y_{ijk} = B'_{ki}, \forall i \in I'; \forall k \in K'$ (kendala permintaan)

$\sum_{k\in K'} y_{ijk} = E'_{ij}, \forall i \in I'; \forall j \in J'$ (kendala komoditas)

Dimana,

$R = 50$, maka:

$A_{jk} = 50\ (j \le 3; k \le 3), \qquad B_{ki} = 50\ (k \le 3; i \le 3),$

$E_{ij} = 50\ (i \le 3; j \le 3),$

$A_{4k} = (3)50 - E'_k(k \le 3),$

$\quad = 125, 125, 100$

$A_{j4} = (3)50 - B'_j(j \le 3),$

$\quad = 120, 130, 100$

$B_{4i} = (3)50 - A'_i(i \leq 3),$

$= 130, 120, 100$

$B_{k4} = (3)50 - E'_k(k \leq 3),$

$= 125, 125, 100$

$E_{4j} = (3)50 - B'_j(j \leq 3),$

$= 120, 130, 100$

$E_{i4} = (3)50 - A'_i(i \leq 3),$

$= 130, 120, 100$

$A_{44} = B_{44} = E_{44} = 50.$

dummy biaya unit transportasi untuk setiap $m + 2, n + 2, p + 2$ seperti dibawah:

$c''_{ijk} = c'_{ijk}\ (i \leq 3, j \leq 3, k \leq 3), c''_{444} = 0$

$c''_{ij4} = 0\ (i \leq 3, j \leq 3), c''_{i44} = M\ (i \leq 3),$

$c''_{i4k} = 0\ (i \leq 3, k \leq 3), c''_{4j4} = M\ (j \leq 3),$

$c''_{4jk} = 0\ (j \leq 3, k \leq 3), c''_{44k} = M\ (k \leq 3)$

3.2. Meminimumkan biaya distribusi masalah transportasi tiga dimensi dengan kendala persediaan, permintaan, dan komoditas yang seimbang menggunakan Metode Haley

Berbagai kasus masalah transportasi tiga dimensi dapat ditemukan di kehidupan nyata. Misalnya (1) biaya penyimpanan yang tinggi di suatu sumber dapat mendorong manajer untuk memasok semua jumlah berlebih komoditas jenis *k* ke beberapa tujuan; (2) seorang manajer mungkin ingin memiliki inventaris di sumber untuk menangani krisis; (3) permintaan di beberapa tujuan mungkin lebih besar daripada ketersediaan di *i* sumber, menciptakan kebutuhan untuk meningkatkan produksi di sumbernya dan masih belum memenuhi permintaan dari beberapa tujuan, atau seorang manajer mungkin mencoba memenuhi permintaan di tujuan dengan produksi yang berlebihan. Salah satu kasus yang paling sering dijumpai adalah biaya distribusi yang tinggi sehingga komoditas-*k* tidak dapat di distribusikan dengan baik dari sumber-*i* ke tujuan-*j*.

Haley memperkenalkan prosedur penyelesaian masalah transportasi multi indeks yang merupakan perluasan dari metode modifikasi distribusi [11]. Metode Haley disebut juga sebagai modifikasi dari MODI dimana dalam pengerjaannya juga menerapkan beberapa langkah yang sama seperti metode *NorthWest Corner*. Pengisian sel dengan menggunakan Metode Haley dimulai dari pojok kiri atas sel dengan memasukkan nilai terkecil dengan memperhatikan batas pengiriman untuk setiap komoditas agar memenuhi kendala pada persediaan, permintaan, dan komoditas. Dalam hal ini, akan di bahas proses meminimumkan biaya distribusi masalah transportasi tiga dimensi dengan batas persediaan, permintaan, dan komoditas dengan menggunakan metode Haley sebagai berikut:

Langkah 1. : Bangun tabel biaya distribusi per unit dari sumber menuju tujuan untuk setiap komoditas seperti pada Tabel 3.2

TABEL 3. 2 Tabel biaya distribusi T1

	j_1			j_2			n			a_i	A_i
	x_{111}			x_{121}			x_{1n1}				
i_1		x_{112}			x_{122}			x_{1n2}		a_1	A_1
			x_{11p}			x_{12p}			x_{1np}		
	x_{211}			x_{221}			x_{2n1}				
i_2		x_{212}			x_{222}			x_{2n1}		a_2	A_2
			x_{21p}			x_{22p}			x_{2np}		
	x_{m11}			x_{m21}			x_{mn1}				
m		x_{m12}			x_{m21}			x_{mn2}		a_m	A_m
			x_{m1p}			x_{m2p}			x_{mnp}		
b_j	b_1			b_2			b_n				
B_j	B_1			B_2			B_n				

Dengan E_1, E_2, …, p

Langkah 2. : Transformasikan tabel pada langkah 1 dengan mengerjakan permasalahan pada **T2.** Bangun tabel sesuai hasil transformasi seperti pada Tabel 3.3.

TABEL 3. 3 Tabel biaya distribusi T2.

	j_1			...			j_{n+1}			A_i
i_1	x_{111}			...			0			A_i
		...			...			0		
			M			...			0	
⋮	⋮			⋮			⋮			⋮
		⋮			⋮			⋮		
			⋮			⋮			⋮	
i_{m+1}	0			0			0			A_{m+1}
		0			0			0		
			0			0			0	
B_j	B_1			...			B_{n+1}			

Dengan $E_1, \ldots, E_{p+1}$

Langkah 3. : Formulasikan ulang tabel pada langkah 2 dengan menggunakan definisi Haley [9] kemudian bangun tabel seperti pada Tabel 3.4

Langkah 4. : Kemudian selesaikan permasalahan masalah transportasi tiga dimensi pada tabel 3.4 dengan menggunakan metode Haley [8].

Langkah 5. : Pengisian sel dengan menggunakan metode Haley hampir sama dengan cara *NorthWest Corner* dan *Least Cost.* Perhatikan bahwa sel yang berisikan M dianggap 0 dengan menggunakan definisi M-Fisibel. Pengisian sel dimulai dari pojok kiri atas. Isi sel mulai dari pojok kiri atas (x_{111}) dengan memperhatikan (A_{11}, B_{11}, E_{11}) dan batas atas dan batas bawah masing-masing komoditas untuk setiap pengiriman dari sumber menuju tujuan.

Langkah 6. : Ulangi langkah 4 dan 5 hingga semua kendala terpenuhi. Jika semua kendala telah terpenuhi maka solusi fisibel tercapai.

Langkah 7. : Jika solusi fisibel tercapai maka kita dapat mencari solusi optimumnya dengan memasukan hasil yang didapat dari perhitungan solusi fisbel untuk memenuhi fungsi objektif permasalahan transportasi tiga dimensi dengan kendala persediaan, permintaan, dan komoditas dengan batas produksi untuk setiap komoditas.

TABEL 3. 4 Tabel biaya distribusi T3.

	j_1	…	j_{n+1}	j_{n+2}	B_{ki}
i_1	x_{111} … M E_{ij} 0	…	0 0 0 E_{ij} 0	0 0 0 E_{ij} M	B_{ki} B_{ki} … B_{ki}
⋮	⋮	…	⋮	⋮	⋮
i_{m+1}	0 0 0 E_{ij} 0	…	0 0 0 E_{ij} 0	0 0 0 E_{ij} M	B_{ki} B_{ki} … B_{ki}
i_{m+2}	0 0 0 E_{ij} M	…	0 0 0 E_{ij} M	M M M E_{ij} M	B_{ki} B_{ki} … B_{ki}
A_{jk}	A_{jk} A_{jk} … A_{jk}	…	…	A_{jk} A_{jk} … A_{jk}	

3.3. Meminimumkan biaya distribusi masalah transportasi tiga dimensi dengan kendala persediaan, permintaan, dan komoditas yang seimbang menggunakan alat bantu program *solver* GAMS dan Lingo

Untuk menyelesaikan permasalahan transportasi tiga dimensi dengan kendala persediaan, permintaan, dan komoditas akan lebih mudah dengan menggunakan program solver seperti GAMS atau Lingo, hal ini di karenakan GAMS dan Lingo dapat membentuk matriks dengan dimensi yang lebih besar sehingga sangat berguna untuk perusahaan yang memang memerlukan hal ini untuk menyelesaikan permasalahan transportasi di perusahaan tersebut. Langkah-langkah dalam menggunakan program solver seperti GAMS dan Lingo untuk menyelesaikan masalah transportasi tiga dimensi dengan kendala persediaan, permintaan, dan komoditas hampir mirip. Langkah-langkah dalam menggunakan program solver GAMS dijelaskan seperti dibawah ini:

Langkah 1. : Tulis persamaan sesuai dengan **T1.** Kemudian transformasikan persamaan **T1** hingga menjadi persamaan pada **T3.**

Langkah 2. : Kemudian buka program solver GAMS IDE, masukkan *positive variable* pada program *solver* GAMS. Dalam masalah transportasi tiga dimensi dengan kendala persediaan, permintaan, dan komoditas positif variabelnya adalah X111, x112, …, xmnp.

Langkah 3. : Masukkan variabel fungsi objektif.

Langkah 4. : Kemudian masukkan *equations* sesuai dengan persamaan **T3.** Dalam program *solver* GAMS untuk memasukkan algoritma *equations* dalam bahasa pemrograman GAMS harus di definisikan terlebih dahulu menggunakan sebuah nama.

Langkah 5. : Bentuk model dengan menggunakan bahasa pemrograman GAMS dengan melibatkan positif variabel, *equations,* serta variabel fungsi objektif.

Langkah 6. : Masukkan *solver* LP untuk *Linear programming* kemudian minimaasi model yang telah dibentuk.

Langkah 7. : Klik file kemudian klik *Run* untuk melihat apakah program dapat berjalan. Jika model terprogram dengan baik maka GAMS IDE akan menampilkan hasil perhitungan berupa *output*.

Sedangkan langkah-langkah menggunakan program solver Lingo dalam menyelesaikan masalah transportasi tiga dimensi dengan kendala persediaan, permintaan, dan komoditas seperti berikut:

Langkah 1. : Tulis persamaan sesuai dengan **T1.** Kemudian transformasukan persamaan **P1** hingga menjadi persamaan pada **T3.**

Langkah 2. : Awali program dengan mengetikkan Model, kemudian masukkan fungsi objektif pada **T3.**

Langkah 3. : Masukkan kendala pada **T3** ke Lingo.

Langkah 4. : Kemudian masukkan @GIN untuk setiap variable keputusan agar hasil yang didapat bulat.

Langkah 5. : Ketikkan *End* untuk mengakhiri model. Kemudian klik *solve* pada Lingo. Lingo secara otomatis akan mendeteksi model yang di bentuk kemudian menyelesaikannya sesuai dengan model yang dibentuk.

3.4. Aplikasi dari masalah transportasi tiga dimensi dengan kendala persediaan, permintaan, dan komoditas dengan batas produksi masing-masing komoditas

Sebuah rumah tangga produsen (RTP) memproduksi mie dengan tiga bahan dasar yang berbeda. Mie yang diproduksi berbahan dasar dari tepung ubi ungu (k=1), tepung *cassava* (k=2), dan tepung terigu (k=3). Tepung ubi ungu dan tepung *cassava* dikenal sebagai tepung yang baik terutama bagi penderita tukak lambung. Mie tersebut diproduksi di tiga tempat yang berbeda yaitu, Tangerang Selatan (i = 1), Jakarta Timur (i = 2), dan Bekasi (i = 3). Kemudian mie di distribusikan menuju Jakarta Selatan (j = 1), Karawang (j = 2), dan Depok (j = 3). Biaya distribusi (dalam Ribu Rupiah) per komoditas untuk mie dari tepung ubi ungu (k = 1) adalah 8, untuk mie dari tepung *cassava* (k = 2) adalah 5, dan mie dari tepung terigu (k = 3) adalah 4 yang dikirimkan dari Tangerang Selatan (i = 1) menuju Jakarta Selatan (j = 1). Sedangkan biaya distribusi dari Tangerang Selatan (i =1) menuju Karawang (j = 2) untuk masing-masing komoditas adalah mie dari tepung ubi ungu (k = 1) 20, mie dari tepung *cassava* (k = 2) adalah 15, dan mie dari tepung terigu (k = 3) adalah 10. Biaya distribusi dari Tangerang Selatan (i = 1) menuju Depok (j =3) untuk mie dari tepung ubi ungu (k = 1) adalah 10, mie dari tepung *cassava* (k = 2) adalah 7 dan mie dari tepung terigu (k = 3) adalah 5. Sedangkan biaya distribusi dari Jakarta Timur (i = 2) menuju Jakarta Selatan (j = 1) untuk mie dari tepung ubi ungu (k = 1) adalah 8, untuk mie dari tepung *cassava* (k = 2) adalah 5, dan mie dari tepung terigu (k = 3) adalah 4. Biaya distribusi dari Jakarta Timur (i = 2) menuju Karawang (j = 2) untuk mie dari tepung ubi ungu (k = 1) adalah 12, untuk mie dari tepung *cassava* (k = 2) adalah 10, dan mie dari tepung terigu (k = 3) adalah 8. Biaya distribusi dari Jakarta Timur (i = 2) menuju Depok (j = 3) untuk mie dari tepung ubi ungu (k = 1) adalah 10, untuk mie dari tepung *cassava* (k = 2) adalah 9, dan mie dari tepung terigu (k = 3) adalah 4. Biaya distribusi dari Bekasi (i = 3) menuju Jakarta Selatan (j = 1) untuk mie dari tepung ubi ungu (k = 1) adalah 30, untuk mie dari tepung *cassava* (k = 2) adalah 25, dan mie dari tepung terigu (k = 3) adalah 20. Biaya distribusi dari Bekasi (i = 3) menuju Karawang (j = 2) untuk mie dari tepung ubi ungu (k = 1) adalah 100, untuk mie dari tepung *cassava* (k = 2) adalah 8, dan mie dari tepung terigu (k = 3) adalah 3. Biaya distribusi dari Bekasi (i = 3) menuju Depok (j = 3) untuk mie dari tepung ubi ungu (k = 1) adalah 20, untuk mie dari tepung *cassava* (k = 2) adalah 10, dan mie dari tepung terigu (k = 3) adalah 8. Limit persediaan untuk setiap komoditas di Tangerang Selatan (i = 1) adalah 30 dan 40. Sedangkan limit persediaan untuk setiap komoditas di Jakarta Timur (i = 2) adalah 15 dan 30. Limit persediaan untuk setiap komoditas di Bekasi (i = 3) adalah 10 dan 20. Limit permintaan untuk setiap komoditas di Jakarta Selatan (j = 1) adalah 15 dan 25. Sedangkan limit permintaan untuk setiap komoditas di Karawang (j = 2) adalah 20 dan 25. Limit permintaan untuk setiap komoditas di Depok (j = 3) adalah 25 dan 40. Kemudian limit komoditas yang didistribusikan untuk mie dari tepung ubi ungu (k = 1) adalah 20 dan 30. Untuk mie yang terbuat dari tepung *cassava* (k = 2) adalah 30 dan 40 dan mie dari tepung terigu adalah 15 dan 20. Kemudian batas atas dan bawah untuk setiap persediaan, permintaan, dan masing-masing komoditas dapat dilihat seperti tabel dibawah:

TABEL 3. 5 Tabel batas atas dan bawah mie dari berbagai jenis

x_{111}	1	12	x_{211}	0	7	x_{311}	1	3
x_{112}	2	10	x_{212}	1	10	x_{312}	0	9
x_{113}	0	8	x_{213}	1	8	x_{313}	2	11
x_{121}	2	10	x_{221}	2	5	x_{321}	3	7
x_{122}	0	7	x_{222}	0	9	x_{322}	0	6
x_{123}	2	10	x_{223}	1	7	x_{323}	1	8
x_{131}	0	8	x_{231}	2	6	x_{331}	1	4
x_{132}	3	5	x_{232}	1	10	x_{332}	0	10
x_{133}	2	6	x_{233}	0	4	x_{333}	1	9

Pemilik rumah tangga produsen menginginkan distribusi komoditas yang optimal dengan biaya yang minimum.

1. **Mencari solusi optimal dengan menggunakan metode Haley**

Permasalahan transportasi diatas dapat dikategorikan sebagai masalah transportasi tiga dimensi dengan kendala persediaan, permintaan dan komoditas. Untuk menyelesaikan permasalahan diatas menggunakan cara manual maka hal pertama yang harus dilakukan adalah membangun model pertama. Asumsikan setiap sumber menjadi O1, O2, dan O3. Kemudian setiap tujuan menjadi D1, D2, dan D3.

T1: minimumkan $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} c_{ijk}x_{ijk}$ ke

$30 \le \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} x_{ijk} \le 40$, $15 \le \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} x_{ijk} \le 30$,

$10 \le \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} x_{ijk} \le 20$ (kendala persediaan)

$15 \le \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} x_{ijk} \le 25$, $20 \le \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} x_{ijk} \le 25$,

$25 \le \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} x_{ijk} \le 40$ (kendala permintaan)

$20 \le \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_{ijk} \le 30$, $30 \le \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_{ijk} \le 40$,

$15 \le \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_{ijk} \le 20$ (kendala komoditas).

Kemudian batas atas dan bawah mie untuk setiap jenisnya dapat dijabarkan sebagai berikut:

$1 \leq x_{111} \leq 12, 2 \leq x_{112} \leq 10, 0 \leq x_{113} \leq 8$, dari O1 ke D1;

$2 \leq x_{121} \leq 10, 0 \leq x_{122} \leq 7, 2 \leq x_{123} \leq 10$ dari O1 to D2;

$0 \leq x_{131} \leq 8,\ 3 \leq x_{132} \leq 5,\ 2 \leq x_{133} \leq 6$ dari O1 ke D3;

$0 \leq x_{211} \leq 7, 1 \leq x_{212} \leq 10, 1 \leq x_{213} \leq 8$ dari O2 ke D1;

$2 \leq x_{221} \leq 5, 0 \leq x_{222} \leq 9, 1 \leq x_{223} \leq 7$ dari O2 ke D2;

$2 \leq x_{231} \leq 6, 1 \leq x_{232} \leq 10, 0 \leq x_{233} \leq 4$ dari O2 ke D3;

$1 \leq x_{311} \leq 3, 0 \leq x_{312} \leq 9, 2 \leq x_{313} \leq 11$ dari O3 ke D1;

$3 \leq x_{321} \leq 7, 0 \leq x_{322} \leq 6, 1 \leq x_{323} \leq 8$ dari O3 ke D2;

$1 \leq x_{331} \leq 4, 0 \leq x_{332} \leq 10, 1 \leq x_{333} \leq 9$ dari O3 ke D3

Kemudian, bangun tabel biaya per unit untuk setiap komoditas dari sumber menuju tujuan sebagai berikut:

TABEL 3. 6 Tabel biaya distribusi awal RTP

	j = 1			j = 2			j = 3			a_i	A_i
	8			20			10				
i=1		5			15			7		30	40
			4			10			5		
	8			12			10				
i=2		5			10			9		15	30
			4			8			4		
	30			10			20				
i=3		25			8			10		10	20
			20			3			8		
b_j	15			20			25				
B_j	25			25			40				

Dengan $E_1 = 30, E_2 = 40, E_3 = 20$

Selanjutnya, transformasikan persamaan pada **T1** dengan menambahkan dummy persediaan, dummy permintaan dan dummy komoditas maka persamaannya menjadi:

T2: minimumkan $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{4} c'_{ijk}\, y_{ijk}$

$$\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{4} y_{ijk} = A'_i \qquad i = 1,2,3,4$$

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{k=1}^{4} y_{ijk} = B'_j \qquad j = 1,2,3,4$$

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} y_{ijk} = E'_k \qquad k = 1,2,3,4$$

Dimana,

- $A'_i = \begin{cases} A_i, & i \in I \\ \sum_J B_{J,} & i = m + 1 \end{cases}$;

  Maka, $A'_i = \begin{cases} 40, 30, 20, & i \in i \\ 90, & i = 4 \end{cases}$

- $B'_j = \begin{cases} B_j\ , & j \in J \\ \sum_I A_i\ , & j = n + 1 \end{cases}$;

  Maka, $B'_j = \begin{cases} 25, 25, 40, & j \in j \\ 90, & j = 4 \end{cases}$

- $E'_k = \begin{cases} E_k, & k \in K \\ \sum_I A_i + \sum_J B_J - \sum_K E_k\ , & k = p + 1 \end{cases}$;

  Maka, $E'_k = \begin{cases} 30, 40, 20, & k \in k \\ 90, & k = 4 \end{cases}$

Untuk setiap batas atas dan bawah komoditas per unit dari sumber menuju tujuan

$l_{ijk} \leq y_{ijk} \leq u_{ijk} \qquad i \in I, j \in J, k \in K$

$0 \leq \sum_K y_{in+1k} + \sum_J y_{ijp+1} + y_{in+1p+1} \leq A_i - a_i\ , \qquad i \in I$

$0 \leq \sum_K y_{m+1jk} + \sum_I y_{ijp+1} + y_{m+1jp+1} \leq B_j - b_j\ , \qquad j \in J$

$0 \leq \sum_J y_{m+1jk} + \sum_I y_{in+1k} + y_{m+1n+1k} \leq E_k - e_k\ , \qquad k \in K$

$\sum_k y_{m+1n+1k} \geq 0 \quad k \in K$

Jika di transformasikan ke dalam permasalahan menjadi:

$1 \leq y_{111} \leq 12, 2 \leq y_{112} \leq 10, 0 \leq y_{113} \leq 8, 2 \leq y_{121} \leq 10,$

$0 \leq y_{122} \leq 7, 2 \leq y_{123} \leq 10, 0 \leq y_{131} \leq 8, 3 \leq y_{132} \leq 5, 2 \leq y_{133} \leq 6,$

$0 \leq y_{211} \leq 7, 1 \leq y_{212} \leq 10, 1 \leq y_{213} \leq 8, 2 \leq y_{221} \leq 5, 0 \leq y_{222} \leq 9,$

$1 \leq y_{223} \leq 7, 2 \leq y_{231} \leq 6, 1 \leq y_{232} \leq 10, 0 \leq y_{233} \leq 4,$

$1 \leq y_{311} \leq 3, 0 \leq y_{312} \leq 9, 2 \leq y_{313} \leq 11, 3 \leq y_{321} \leq 7, 0 \leq y_{322} \leq 6,$

$1 \leq y_{323} \leq 8, 1 \leq y_{331} \leq 4, 0 \leq y_{332} \leq 10, 1 \leq y_{333} \leq 9,$

$y_{141} + y_{142} + y_{143} + y_{144} \leq 10$

$y_{241} + y_{242} + y_{243} + y_{244} \leq 15$

$y_{341} + y_{342} + y_{343} + y_{344} \leq 10$

$y_{411} + y_{412} + y_{413} + y_{414} \leq 10$

$y_{421} + y_{422} + y_{423} + y_{424} \leq 5$

$y_{431} + y_{432} + y_{433} + y_{434} \leq 15$

$y_{141} + y_{241} + y_{341} + y_{441} \leq 10$

$y_{142} + y_{242} + y_{342} + y_{442} \leq 10$

$y_{143} + y_{243} + y_{343} + y_{443} \leq 5$, $y_{144} + y_{244} + y_{344} + y_{444} \geq 0.$

Sedangkan untuk penambahan dummy biaya distribusi per unit untuk setiap komoditas dari sumber menuju tujuan diselesaikan seperti dibawah:

$$\left.\begin{array}{ll} c'_{ijk} = c_{ijk}, & i \in i,\ j \in j,\ k \in k \\ c'_{ij4} = M\ , & i \in i,\ j \in j \\ c'_{i4k} = c'_{4jk} = 0\ , & i \in i,\ j \in j,\ k \in k \\ c'_{i44} = c'_{4j4} = c'_{44k} = 0, & i \in i',\ j \in j',\ k \in k' \end{array}\right\}$$

Maka Tabel transformasi biaya distribusi per unit untuk setiap komoditas dari sumber menuju tujuan menjadi:

TABEL 3. 7 Tabel biaya tranformasi transportasi RTP T2.

	j=1	j=2	j=3	j=4	A_i
i=1	8	20	10	0	40
	5	15	7	0	
	4	10	5	0	
	M	M	M	0	
i=2	8	12	10	0	30
	5	10	9	0	
	4	8	4	0	
	M	M	M	0	
i=3	30	10	20	0	20
	25	8	10	0	
	20	3	8	0	
	M	M	M	0	
i=4	0	0	0	0	90
	0	0	0	0	
	0	0	0	0	
	0	0	0	0	
B_j	25	25	40	90	

Dengan $E_1 = 30, E_2 = 40, E_3 = 20, E_4 = 90.$

Permasalahan pada **T2** merupakan permasalahan "*Three Axial Sum*" yang dapat diformulasikan dengan menggunakan definisi Haley [9]:

$c''_{ijk} = c'_{ijk}\ (i \leq 4, j \leq 4, k \leq 4), c''_{555} = 0$

$c''_{ij5} = 0\ (i \leq 4, j \leq 4), c''_{i55} = M\ (i \leq 4),$

$c''_{i5k} = 0\ (i \leq 4, k \leq 4), c''_{5j5} = M\ (j \leq 4),$

$c''_{5jk} = 0\ (j \leq 4, k \leq 4), c''_{55k} = M\ (k \leq 4)$

Sedangkan untuk penambahan dummy persediaan, permintaan, dan komoditas menjadi:

Jika $R = \max_{i,j,k}(A'_i, B'_j, E'_k)$ maka,

i. $A_{jk} = R\ (j \leq n + 1; k \leq p + 1)$

$A_{11} = 90$	$A_{31} = 90$
$A_{12} = 90$	$A_{32} = 90$
$A_{13} = 90$	$A_{33} = 90$
$A_{14} = 90$	$A_{34} = 90$
$A_{21} = 90$	$A_{41} = 90$
$A_{22} = 90$	$A_{42} = 90$
$A_{23} = 90$	$A_{43} = 90$
$A_{24} = 90$	$A_{44} = 90$

ii. $B_{ki} = R\ (k \leq p + 1; i \leq m + 1)$

$B_{11} = 90$	$B_{31} = 90$
$B_{12} = 90$	$B_{32} = 90$
$B_{13} = 90$	$B_{33} = 90$
$B_{14} = 90$	$B_{34} = 90$
$B_{21} = 90$	$B_{41} = 90$
$B_{22} = 90$	$B_{42} = 90$
$B_{23} = 90$	$B_{43} = 90$
$B_{24} = 90$	$B_{44} = 90$

iii. $E_{ij} = R\ (i \leq m + 1; j \leq n + 1)$

$E_{11} = 90$	$E_{31} = 90$
$E_{12} = 90$	$E_{32} = 90$
$E_{13} = 90$	$E_{33} = 90$
$E_{14} = 90$	$E_{34} = 90$
$E_{21} = 90$	$E_{41} = 90$
$E_{22} = 90$	$E_{42} = 90$
$E_{23} = 90$	$E_{43} = 90$
$E_{24} = 90$	$E_{44} = 90$

iv. $A_{n+2k} = (m+1)R - E'_k (k \leq p+1)$

$A_{51} = (4)90 - 30 = 330$

$A_{52} = (4)90 - 40 = 320$

$A_{53} = (4)90 - 20 = 340$

$A_{54} = (4)90 - 90 = 270$

v. $A_{jp+2} = (m+1)R - B'_j (j \leq n+1)$

$A_{15} = (4)90 - 25 = 335$

$A_{25} = (4)90 - 25 = 335$

$A_{35} = (4)90 - 40 = 320$

$A_{45} = (4)90 - 90 = 270$

vi. $B_{p+2i} = (n+1)R - A'_i (i \leq m+1)$

$B_{51} = (4)90 - 40 = 320$

$B_{52} = (4)90 - 30 = 330$

$B_{53} = (4)90 - 20 = 340$

$B_{54} = (4)90 - 90 = 270$

vii. $B_{km+2} = (n+1)R - E'_k (k \leq p+1)$

$B_{15} = (4)90 - 30 = 330$

$B_{25} = (4)90 - 40 = 320$

$B_{35} = (4)90 - 20 = 340$

$B_{45} = (4)90 - 90 = 270$

viii. $E_{m+2j} = (p+1)R - B'_j (j \leq n+1)$

$E_{51} = (4)90 - 25 = 335$

$E_{52} = (4)90 - 25 = 335$

$E_{53} = (4)90 - 40 = 320$

$E_{54} = (4)90 - 90 = 270$

ix. $E_{in+2} = (p+1)R - A'_i (i \leq m+1)$

$E_{15} = (4)90 - 40 = 320$

$E_{25} = (4)90 - 30 = 330$

$E_{35} = (4)90 - 20 = 340$

$E_{45} = (4)90 - 90 = 270$

x. $A_{n+2p+2} = B_{p+2m+2} = E_{m+2n+2} = R$

$A_{55} = B_{55} = E_{55} = 90$

Maka tabel distribusi yang telah di transformasikan menjadi:

TABEL 3. 8 Tabel biaya tranformasi transportasi RTP T3.

	j =1					j =2					j =3					j =4					j =5					B_{ki}				
	8					20					10					0					0					90				
		5					15					7					0					0					90			
i =1			4					10					5					0					0					90		
				M					M					M					0					0					90	
	90				0	90				0	90				0	90				0	320				M					320
	8					12					10					0					0					90				
		5					10					9					0					0					90			
i =2			4					8					4					0					0					90		
				M					M					M					0					0					90	
	90				0	90				0	90				0	90				0	330				M					330
	30					10					20					0					0					90				
		25					8					10					0					0					90			
i =3			20					3					8					0					0					90		
				M					M					M					0					0					90	
	90				0	90				0	90				0					0	340				M					340
	0					0					0					0					0					90				
		0					0					0					0					0					90			
i =4			0					0					0					0					0					90		
				0					0					0					0					0					90	
	90				0	90				0	90				0	90				0	270				M					270
	0					0					0					0					M					330				
		0					0					0					0					M					320			
i =5			0					0					0					0					M					340		
				0					0					0					0					M					270	
	335				M	335				M	320				M	270				M	90				0					90
	90					90					90					90					330									
A_{jk}		90					90					90					90					320								
			90					90					90					90					340							
				90					90					90					90					270						
					335					335					320					270					90					

Kemudian Langkah 4 sampai 7 dalam menyelesaikan masalah transportasi tiga dimensi dengan kendala persediaan, permintaan, dan komoditas di tunjukkan pada tabel dibawah:

TABEL 3. 9 Tabel biaya tranformasi transportasi Fisibel RTP.

	j=1					j=2					j=3					j=4					j=5					B_{ki}				
	8	1				20	2				10	8				0					0	79				90				
		5	10				15					7	5				0					0	75				90			
i=1			4					10	2				5	2				0					0	86				90		
				M					M					M					0	10				0	80				90	
	90			79	0	90			86	0	90			75	0	90			80	0	320				M					320
	8					12	2				10	2				0					0	86				90				
		5	5				10					9	6				0					0	79				90			
i=2			4	1				8	1				4					0					0	88				90		
				M					M					M					0	13				0	77				90	
	90			84	0	90			87	0	90			82	0	90			77	0	330				M					330
	30	1				10	3				20	1				0					0	85				90				
		25					8	4				10					0					0	86				90			
i=3			20	2				3	6				8	1				0					0	86				90		
				M					M					M					0	2				0	88				90	
	90			87	0	90			77	0	90			88	0				88	0	340				M					340
	0					0					0					0	10				0	80				90				
		0					0					0					0	10				0	80				90			
i=4			0					0					0					0	5				0	85				90		
				0	5				0	5				0	15				0	40				0	25				90	
	90			85	0	90			85	0	90			75	0	90			25	0	270				M					270
	0	88				0	83				0	80				0	79				M					330				
		0	75				0	86				0	80				0	79				M					320			
i=5			0	87				0	81				0	85				0	87				M					340		
				0	85				0	85				0	25				0	75				M					270	
	335				M	335				M	320				M	270				M	90			90	0					90
	90					90					90					90					330									
		90					90					90					90					320								
A_{jk}			90					90					90					90					340							
				90					90					90					90					270						
					335					335					320					270					90					

Hasil yang diperoleh berdasarkan perhitungan diatas merupakan hasil optimal dengan alokasi yang tepat untuk setiap sumber yang ada dengan tujuan yang ditentukan dan menggunakan kapasitas mie yang tersedia. Dari Tabel 3.9, diperoleh solusi fisibel yaitu $x_{111} = 1, x_{112} = 10, x_{115} = 79, x_{121} = 2, x_{123} = 2, x_{125} = 86, x_{131} = 8, x_{132} = 5, x_{133} = 2, x_{135} = 75, x_{144} = 10, x_{145} = 80, x_{151} = 79, x_{152} = 75, x_{153} = 86, x_{154} = 80, x_{212} = 5, x_{213} = 1, x_{215} = 84, x_{221} = 2, x_{223} = 1, x_{225} = 87, x_{231} = 2, x_{232} = 6, x_{235} = 82, x_{244} = 13, x_{245} = 77, x_{251} = 86, x_{252} = 79, x_{253} = 88, x_{254} = 77, x_{311} = 1, x_{313} = 2, x_{315} = 87, x_{321} = 3, x_{322} = 4, x_{323} = 6, x_{325} = 77, x_{331} = 1, x_{333} = 1, x_{334} = 88, x_{344} = 2, x_{345} = 88, x_{351} = 85, x_{352} = 86, x_{353} = 86, x_{354} = 88, x_{414} = 5, x_{415} = 85, x_{424} = 5, x_{425} = 85, x_{434} = 15, x_{435} = 75, x_{441} = 10, x_{442} = 10, x_{443} = 5, x_{444} = 40, x_{445} = 25, x_{451} = 80, x_{452} = 80, x_{453} = 85, x_{454} = 25, x_{511} = 88, x_{512} = 75, x_{513} = 87, x_{514} = 85, x_{521} = 83, x_{522} = 86, x_{523} =$

$81, x_{524} = 85, x_{531} = 80, x_{532} = 80, x_{533} = 85, x_{534} = 25, x_{541} = 79, x_{542} = 79, x_{543} = 87, x_{544} = 75, x_{555} = 90$. Dengan nilai fungsi objektif Z = 556.

2. Penyelesaian dengan program *solver* Lingo 18.0

Model matematika yang telah dibuat kemudian dituliskan pada papan *LINDO* untuk menemukan suatu penyelesaian yang optimal. Formulasi yang ditulis pada program *LINDO* sesuai dengan tabel 3.8 dan dengan memperhatikan definisi 1 dimana M bernilai 0 maka ditulis seperti pada Lampiran 1 sampai dengan Lampiran 7.

Untuk mengakhiri penulisan pada papan Lindo, di tuliskan fungsi End untuk mengakhirinya. Setelah penulisan algoritma pada papan LINDO selesai, selanjutnya klik *solve* untuk menjalankan program. Output yang dihasilkan dari program *solver LINDO* untuk pemecahan model matematika diatas adalah sebagai berikut:

```
Global optimal solution found.
Objective value:                              556.0000
Objective bound:                              556.0000
Infeasibilities:                              0.000000
Extended solver steps:                               0
Total solver iterations:                            34
Elapsed runtime seconds:                          0.21

Model Class:                                        LP
```

GAMBAR 3. 1 Output perhitungan program solver LINDO

Jika dilihat pada gambar diatas, dapat di artikan bahwa solusi optimal pada permasalahan transportasi tiga dimensi seimbang dengan kendala permintaan, persediaan, dan komoditas untuk kasus minimum di temukan. Di dapatkan nilai fungsi objektif sebesar 556. Nilai tersebut merupakan total biaya minimum berdasarkan kendala-kendala yang dituliskan. Kemudian total iterasi yang digunakan untuk menyelesaikan masalah tersebut sebanyak 34 iterasi dengan infeasibilities 0, artinya dapat ditemukan solusi fisibel untuk permasalahan diatas. Lindo mendeteksi model permasalahan yang dibentuk sebagai salah satu bentuk

Program Linier. Dalam pengerjaannya Lindo dapat menyelesaikan permasalahan diatas dalam waktu 21 detik. Kemudian solusi fisibel untuk masing-masing unit ditunjukkan pada lampiran 17.

3. Penyelesaian dengan program *solver* GAMS IDE 28.2

Penyelesaian masalah transportasi diatas dapat diselesaikan dengan mudah menggunakan GAMS IDE, model matematika yang dituliskan sesuai pada Tabel 3.8. Kemudian tentukan positif variable dan variable keputusannya. Selanjutnya memberi label pada *Equations* yang berisikan kendala-kendala. Lebih lanjut penulisan algoritma GAMS ditunjukkan pada lampiran 8 sampai dengan Lampiran 15. Output yang dihasilkan dari penyelesaian masalah transportasi diatas ditunjukkan sebagai berikut:

```
               S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   T3D                OBJECTIVE  Z
     TYPE    LP                 DIRECTION  MINIMIZE
     SOLVER  CPLEX              FROM LINE  216

**** SOLVER STATUS     1 Normal Completion
**** MODEL STATUS      1 Optimal
**** OBJECTIVE VALUE              556.0000

 RESOURCE USAGE, LIMIT          0.063      1000.000
 ITERATION COUNT, LIMIT        55    2000000000

IBM ILOG CPLEX   28.2.0 r750fa45 Released Aug 19, 2019 WEI x86 64bit/MS Window
Cplex 12.9.0.0

Space for names approximately 0.00 Mb
Use option 'names no' to turn use of names off
LP status(1): optimal
Cplex Time: 0.02sec (det. 0.43 ticks)
Optimal solution found.
Objective :         556.000000
```

GAMBAR 3. 2 Output perhitungan program solver GAMS

Dari hasil diatas dapat dijelaskan bahwa model T3D yang dibentuk dapat diselesaikan dengan baik sehingga solusi optimal di dapatkan. GAMS mendeteksi model T3D sebagai model program linier. Model T3D diselesaikan menggunakan *solver* CPLEX yang di deteksi oleh GAMS dengan iterasi sebanyak 55. GAMS membutuhkan waktu 0.02 detik untuk menghitung model T3D. Nilai fungsi objektif yang di dapat bernilai 556, kemudian solusi fisibel ditunjukkan pada lampiran 18.

Var xmnp menunjukan variabel komoditas yang dikirimkan dari sumber menuju tujuan. Level menunjukkan hasil perhitungan jumlah komoditas yang dikirimkan dari sumber menuju tujuan. Jika dilihat pada gambar diatas maka dapat diartikan bahwa Var x111, yaitu mie yang berbahan dasar dari tepung ubi ungu akan dikirimkan sebanyak 1 pax dari sumber Tangerang Selatan ke tujuan Jakarta Selatan. Begitu pula untuk Var x112, yaitu mie yang berbahan dasar tepung *cassava* akan dikirimkan sebanyak 10 pax dari sumber Tangerang Selatan ke tujuan Jakarta Selatan, dan seterusnya.

3.5. Analisa Hasil Solusi Masalah Transportasi Seimbang Tiga Dimensi dengan Kendala Persediaan, Permintaan, dan Komoditas untuk Kasus Minimum

Pada bagian ini akan dibahas hasil penyelesaian masalah transportasi tiga dimensi dengan kendala pada permintaan, persediaan, dan komoditas dengan batas pengiriman untuk setiap unitnya. Dilihat dari beberapa penyelesaian pada contoh sebelumnya, pengerjaan dengan menggunakan metode Haley maupun dengan bantuan program *solver* mendapatkan hasil solusi yang sama. Dalam pengerjaannya, penggunaan metode Haley untuk menemukan solusi optimum pada kasus minimum masalah transportasi seimbang tiga dimensi dengan kendala persediaan, permintaan, dan komoditas cukup mudah untuk di terapkan. Hal ini disebabkan karena metode Haley mengadaptasi proses penggunaan metode MODI pada masalah transportasi klasik untuk diterapkan pada kasus yang lebih kompleks. Kekurangan pada metode Haley ini adalah dibutuhkan konsentrasi serta ketelitian yang lebih tinggi dalam proses mencari solusi optimum tanpa bantuan alat bantu program *solver.* Kelebihan dalam menggunakan program *solver LINDO* 18 adalah pengguna tidak perlu menentukan model atau membentuk model dalam penulisannya, *LINDO* akan secara otomatis menentukan solver yang digunakan. Sedangkan dalam penggunaannya GAMS IDE lebih sulit digunakan karena pengguna harus melakukan beberapa hal seperti menentukan positif variable, membentuk model serta menentukan metode yang akan digunakan untuk menyelesaikan model yang dibentuk. Akan tetapi kedua program *solver* tersebut dapat membantu menyelesaikan pengoptimalan biaya transportasi tiga dimensi dengan kendala persediaan, permintaan, dan komoditas serta batas pengiriman untuk setiap unitnya secara cepat.

Berikut merupakan perbandingan hasil dari beberapa metode penyelesaian dengan kasus yang sama.

TABEL 3. 10 Perbandingan penyelesaian Masalah Transportasi Tiga dimensi Kasus Minimum

Masalah Transportasi Tiga Dimensi Kasus Minimum				
Ukuran	Metode Haley	LINGO 18	GAMS IDE 28.2	Optimal
3X3	556	556	556	556

BAB IV

PENUTUP

4.1. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan pada Bab III, dapat disimpulkan bahwa dalam mencari solusi masalah transportasi tiga dimensi dengan kendala persediaan, permintaan, dan komoditas dengan menggunakan metode Haley maupun menggunakan alat bantu program *solver* dapat diselesaikan dengan baik. Dalam pelaksanaanya penyelesaian masalah transportasi tiga dimensi dengan kendala persediaan, permintaan, dan komoditas dengan menggunakan metode Haley membutuhkan waktu yang lama sehingga kurang efektif untuk digunakan. Hal ini disebabkan masalah transportasi tiga dimensi dengan kendala pada persediaan, permintaan, dan komoditas memiliki skala matriks yang jauh lebih besar dari masalah transportasi klasik sehingga dibutuhkan ketelitian tinggi dalam proses pengerjaannya. Walaupun begitu, penggunaan metode Haley dalam menyelesaikan masalah transportasi tiga dimensi seimbang dengan kendala persediaan, permintaan, dan komoditas untuk kasus minimum sangat mudah untuk dipahami.

Bangun tabel masalah transportasi seimbang dengan kendala persediaan, permintaan, dan komoditas seperti yang telah di bahas pada Bab III. Pengisian alokasi biaya pada tabel masalah transportasi tiga dimensi seimbang dengan kendala persediaan, permintaan, dan komoditas untuk kasus minimum dengan menggunakan metode Haley diawali dengan mengisi sel pojok kiri atas atau barat laut (x_{111}). Perhatikan min (A_{11}, B_{11}, E_{11}) dan batas atas serta batas bawah masing-masing komoditas yang akan dikirimkan dari sumber ke tujuan. Jika nilai terkecil dari min (A_{11}, B_{11}, E_{11}) adalah B_{11}, maka letakkan tanda $(-)$ pada (x_{121}, x_{131},

x_{141}) atau ($x_{211}, x_{311}, x_{411}$). Perhatikan kembali batas atas dan batas bawah untuk komoditas yang akan dikirimkan dari sumber ke tujuan. Isi sel dengan nilai terkecil pada batas atas dan batas bawah komoditas yang dikirimkan dari sumber ke tujuan. Kemudian perhatikan sel yang berisikan M, nilai M pada sel dummy dari masalah transportasi tiga dimensi dengan kendala persediaan, permintaan, dan komoditas bernilai 0. Dalam hal ini dengan menggunakan definisi M-fisibel maka M bernilai 0 dan fisibel. Kemudian ulangi langkah sebelumnya hingga kendala persediaan, permintaan, dan komoditas terpenuhi. Jika pengalokasian terpenuhi, maka solusi optimal tercapai sehingga biaya transportasi minimum.

Kemudian penggunaan program *solver* GAMS untuk menyelesaikan masalah transportasi seimbang tiga dimensi dengan kendala persediaan, permintaan, dan komoditas untuk kasus minimum memiliki langkah yang cukup mudah untuk diterapkan. Algoritma GAMS dituliskan dengan bahasa pemrograman GAMS, dalam menyelesaikan kasus ini membutuhkan ***positive variable, variable, equations, model, solve, dan display*** untuk membentuk model masalah serta menyelesaikan kasus masalah transportasi seimbang tiga dimensi dengan kendala persediaan, permintaan, dan komoditas untuk kasus minimum. Penjelasan mengenai langkah-langkah penyusunan dapat dilihat pada Bab III beserta contohnya. Sedangkan penggunaan program *solver* Lindo untuk menyelesaikan masalah transportasi seimbang tiga dimensi dengan kendala persediaan, permintaan, dan komoditas untuk kasus minimum penulisan algoritmanya memiliki bahasa pemrograman seperti penulisan aljabar biasa. Lebih lanjut penjelasan mengenai langkah-langkah penulisan algoritma beserta contohnya dapat dilihat pada Bab III.

Pada simulasi numerik bab III didapatkan hasil solusi optimal sebesar 556 Ribu Rupiah dengan pengerjaan menggunakan metode Haley. Sedangkan dengan menggunakan alat bantu program *solver* GAMS dan LINDO juga didapatkan hasil solusi optimal sebesar 556 Ribu Rupiah. Hal ini membuktikan bahwa metode Haley dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah transportasi seimbang tiga dimensi dengan kendala pada persediaan, permintaan, dan komoditas untuk kasus minimum.

4.2. Saran

Diperlukan pengembangan dan penelitian lebih lanjut untuk mencari solusi masalah transportasi seimbang yang memiliki skala lebih besar dari tiga dimensi dengan kendala persediaan, permintaan, dan komoditas pada kasus minimum dengan menggunakan metode Haley.