

SKRIPSI

**ANALISIS MODEL DAN KONTROL OPTIMAL PENYEBARAN
PENYAKIT HEPATITIS B**

***MODEL ANALYSIS AND OPTIMAL CONTROL OF THE SPREAD OF
HEPATITIS B DISEASE***



ZUSRI AMINATUN

24010116120033

**DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN MATEMATIKA
UNIVERSITAS DIPONEGORO
SEMARANG**

2020

SKRIPSI

**ANALISIS MODEL DAN KONTROL OPTIMAL PENYEBARAN
PENYAKIT HEPATITIS B**

***MODEL ANALYSIS AND OPTIMAL CONTROL OF THE SPREAD OF
HEPATITIS B DISEASE***

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh derajat Sarjana
Matematika (S.Mat)



ZUSRI AMINATUN

24010116120033

**DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN MATEMATIKA
UNIVERSITAS DIPONEGORO
SEMARANG**

2020

HALAMAN PENGESAHAN

SKRIPSI

ANALISIS MODEL DAN KONTROL OPTIMAL PENYEBARAN
PENYAKIT HEPATITIS B

Telah dipersiapkan dan disusun oleh :

ZUSRI AMINATUN


24010116120033

Telah dipertahankan di depan Tim Penguji

Pada Tanggal 04 Agustus 2020

Susunan Tim Penguji

Pembimbing I/Penguji,


Solikhin, S.Si., M.Sc.

NIP. 198506302012121001

Penguji,


Dr. Sutimin, M.Si.

NIP. 196403271990011001

Mengetahui,

Ketua Departemen Matematika,


Dr. Susilo Harivanto, S.Si., M.Si.

NIP. 19741014 2000121001

Pembimbing I,


Prof. Dr. Widowati, S.Si., M.Si.

NIP 196902141994032002

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Semarang, 04 Agustus 2020

Zusri Aminatun

Kupersembahkan karya ini untuk :

*Bapak dan Ibu
dan segenap keluarga tercinta*

KATA PENGANTAR

Segala puji bagi Allah SWT yang telah melimpahkan segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **“Analisis Model dan Kontrol Optimal Penyebaran Penyakit Hepatitis B”** . Penyusunan skripsi ini dilakukan sebagai syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu (S1) pada Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Diponegoro Semarang.

Penulis sadar bahwa dalam penyusunan skripsi ini tidak terlepas dari bantuan dan dukungan berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Bapak Dr. Susilo Hariyanto, S.Si., M.Si. selaku Ketua Departemen Matematika Fakultas Sains dan Matematika yang telah memberikan izin dalam menyelesaikan skripsi ini.
2. Ibu Prof. Dr. Widowati, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing I yang telah meluangkan waktu memberikan bimbingan dan pengarahan dalam menyelesaikan skripsi ini.
3. Bapak Solikhin, S.Si., M.Sc. selaku dosen pembimbing II yang telah meluangkan waktu memberikan bimbingan dan pengarahan dalam menyelesaikan skripsi ini.
4. Bapak dan Ibu dosen Departemen Matematika yang telah memberikan ilmu kepada mahasiswa selama perkuliahan.
5. Kedua orang tua, Bapak Muh Ngaliman dan Ibu Sarjiyatun yang telah memberikan dukungan, doa, kasih sayang yang begitu besar serta pengorbanan yang tak ternilai harganya.
6. Kakak-kakak tercinta yang selalu menyemangati dan mendoakan penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
7. Seluruh teman seperjuangan Departemen Matematika 2016 atas kebersamaan, kekeluargaan, dan dukungannya.

8. Semua pihak yang ikut membantu hingga selesainya penyusunan skripsi ini, yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu. Semoga Allah membalas dengan melimpahkan rahmat dan kebaikan untuk kehidupannya di dunia dan di akhirat.

Penulis menyadari bahwa dalam skripsi ini masih banyak kekurangan. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan agar skripsi ini dapat lebih baik lagi dan semoga skripsi ini dapat bermanfaat dan menambah pengetahuan bagi pembaca.

Semarang, Agustus 2020

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN SAMPUL LUAR	i
HALAMAN JUDUL.....	ii
HALAMAN PENGESAHAN.....	iii
PERNYATAAN.....	iv
HALAMAN PERSEMBAHAN	v
KATA PENGANTAR	vi
DAFTAR ISI.....	viii
DAFTAR TABEL.....	x
DAFTAR GAMBAR	xi
DAFTAR SIMBOL.....	xii
DAFTAR LAMPIRAN.....	xiii
ABSTRAK.....	xiv
ABSTRACT.....	xv
BAB I.....	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Perumusan Masalah.....	2
1.3 Pembatasan Masalah	2
1.4 Tujuan Penulisan	3
1.5 Metode Penelitian.....	3
1.6 Sistematika Penulisan.....	5
BAB II.....	6
2.1 Hepatitis B.....	6
2.2 Pemodelan Matematika	7
2.3 Limit dan Kontinuitas Fungsi.....	9
2.4 Turunan Fungsi	10
2.5 Matriks	12
2.6 Persamaan Diferensial.....	16
2.7 Sistem Persamaan Diferensial.....	16
2.8 Titik Keseimbangan	18

2.9 Linieritas Sistem Persamaan Diferensial Non Linier	18
2.10 Bilangan Reproduksi Dasar.....	19
2.11 Kriteria Kestabilan	20
2.12 Kontrol Optimal	23
2.13 Prinsip Maksimum Pontryagin.....	23
2.14 Metode Runge Kutta Orde-4	27
BAB III	29
3.1 Model Matematika Penyebaran Penyakit Hepatitis B.....	29
3.2 Analisis Formulasi Model Penyebaran Penyakit Hepatitis B	31
3.3 Analisis Kepositifan dan Keterbatasan Solusi	32
3.4 Analisis Keseimbangan	34
3.5 Analisa Kestabilan Titik Keseimbangan.....	38
3.6 Formulasi Kontrol Optimal	50
3.7 Simulasi Numerik.....	54
BAB IV	63
4.1 Kesimpulan.....	63
DAFTAR PUSTAKA	64
LAMPIRAN.....	66

DAFTAR TABEL

Tabel 3.1 Variabel Model Penyebaran Penyakit Hepatitis B	30
Tabel 3.2 Parameter Model Penyebaran Penyakit Hepatitis B	30
Tabel 3.3 Nilai Parameter Model	59
Tabel 3.4 Nilai Parameter Komputasi Model	59

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Proses Pemodelan Matematika	8
Gambar 3.1 Diagram Transfer Penyebaran Penyakit Hepatitis B	31
Gambar 3.2 Grafik Bifurkasi	50
Gambar 3.3 Populasi individu rentan dengan dan tanpa kontrol.....	60
Gambar 3.4 Populasi individu terinfeksi dengan dan tanpa kontrol.....	61
Gambar 3.5 Populasi individu pulih dengan dan tanpa kontrol	61
Gambar 3.6 Populasi individu pulih dengan dan tanpa kontrol.....	62

DAFTAR SIMBOL

S	: Jumlah individu rentan
I	: Jumlah individu terinfeksi
R	: Jumlah individu pulih atau kebal
Λ	: Laju kelahiran
α	: Laju penyebaran virus hepatitis B
N	: Populasi Manusia
μ_0	: Laju kematian alami
μ_1	: Laju kematian karena penyakit hepatitis B
β	: Laju Pemulihan
v	: Vaksinasi
γ	: Rasio kejadian jenuh (saturasi)
\mathfrak{R}_0	: Bilangan reproduksi dasar
u_1	: Fungsi kontrol promosi kesehatan
u_2	: Fungsi kontrol pengobatan
u_3	: Fungsi kontrol pemberian vaksinasi
w_1	: Bobot relative dari individu terinfeksi
w_2	: Bobot relative untuk biaya promosi kesehatan
w_3	: Bobot relative untuk biaya pengobatan
w_4	: Bobot relative untuk biaya vaksinasi

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1 Syntax MATLAB Model Penyebaran HBV Tanpa Kontrol	67
Lampiran 2 Syntax MATLAB Model Penyebaran HBV dengan Kontrol.....	69
Lampiran 3 Syntax Perbandingan Kontrol.....	74

ABSTRAK

ANALISIS MODEL DAN KONTROL OPTIMAL PENYEBARAN PENYAKIT HEPATITIS B

Oleh

Zusri Aminatun
24010116120033

Hepatitis B merupakan penyakit peradangan hati yang disebabkan oleh virus hepatitis B, penyebaran hepatitis B dapat menular dan menjadi masalah kesehatan serius dunia. Pada skripsi ini, dibahas model penyebaran penyakit hepatitis B pada manusia serta menganalisis kestabilan model dan kontrol optimal. Dalam menentukan kestabilan lokal sistem di sekitar titik kesetimbangan digunakan kriteria kestabilan *Routh-Hurwitz*. Dari model tersebut diperoleh dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit $E^0 = (S^0, 0, R^0)$ dan titik kesetimbangan endemik $E^* = (S^*, I^*, R^*)$. Titik kesetimbangan E_0 stabil asimtotik jika nilai bilangan reproduksi dasar $\mathfrak{R}_0 < 1$ dan E^* stabil asimtotik jika $\mathfrak{R}_0 > 1$. Kontrol optimal yang digunakan melibatkan tiga variabel kontrol, yaitu promosi kesehatan, vaksinasi, dan pengobatan. Dalam menentukan bentuk kontrol optimal digunakan Prinsip Maksimum Pontryagin untuk meminimalkan jumlah individu terinfeksi dan biaya yang terkait. Hasil simulasi numerik yang diselesaikan dengan metode *Runge Kutta Orde-4* menunjukkan keefektifan dalam meminimumkan individu terinfeksi dan memaksimumkan individu pulih atau kebal dengan pemberian ketiga variabel kontrol yang digunakan.

Kata Kunci : Hepatitis B, *Routh-Hurwitz*, Kontrol Optimal, Prinsip Maksimum Pontryagin, *Runge Kutta Orde-4*.

ABSTRACT

MODEL ANALYSIS AND OPTIMAL CONTROL OF THE SPREAD OF HEPATITIS B DISEASE

by

Zusri Aminatun
24010116120033

Hepatitis B is an inflammatory liver disease caused by hepatitis B virus, the spread of hepatitis B can be contagious and becomes a serious world health problem. In this final project, discussed the model of the spread of hepatitis B disease in humans and analyze the stability of the model and optimal control. In determining the local stability of the system around the equilibrium point used the Routh-Hurwitz stability criteria. From this model, two equilibrium points are obtained namely the disease-free equilibrium point $E^0 = (S^0, 0, R^0)$ and the endemic equilibrium point $E^* = (S^*, I^*, R^*)$. The equilibrium point E_0 is asymptotically stable if the value of the basic reproduction number $\mathfrak{R}_0 < 1$ and E^* is asymptotically stable if $\mathfrak{R}_0 > 1$. The optimal control used involves three control variables, namely health promotion, medication, and vaccination. In determining the form of optimal control, Pontryagin's Maximum Principle is used to minimize the number of infected individuals and the associated costs. The results of numerical simulations completed by the *Runge Kutta Order-4* method show effectiveness in minimizing infected individuals and maximizing individual recovery or invulnerability by providing all three control variables used.

Keywords : Hepatitis B, *Routh-Hurwitz*, Optimal Control, Pontryagin's Maximum Principle, *Runge Kutta Orde-4*.