SKRIPSI

NILAI DAN VEKTOR EIGEN PADA MATRIKS INTERVAL ATAS ALJABAR *MIN-PLUS*

EIGENVALUE AND EIGENVECTOR OF INTERVAL MATRICES OVER MIN-PLUS ALGEBRA

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar S.Mat pada Departemen Matematika Fakultas Sains dan Matematika Universitas Diponegoro

Disusun oleh:
Rifky Fadly Ramadhan Tanjung
24010116140044

DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN MATEMATIKA
UNIVERSITAS DIPONEGORO
SEMARANG
2020

HALAMAN PENGESAHAN

SKRIPSI

Nilai dan Vektor Eigen Matriks Interval Atas Aljabar *Min-Plus*

Telah dipersiapkan dan disusun oleh:

Rifky Fadly Ramadhan Tanjung

24010116140044

Telah dipertahankan di depan Tim Penguji

pada tanggal 31 Maret 2020

Susunan Tim Penguji

Pembimbing II/Penguji,

Dr. Susilo Hariyanto, S.Si, M.Si
NIP. 197410142000121001

Penguji,

Dr. Titi Udjiani SRRM, M.Si
NIP. 196402231991022001

Mengetahui,
Ketua Departemen Matematika,

Dr. Susilo Hariyanto, S.Si, M.Si
NIP. 197410142000121001

Pembimbing I/Penguji,

Suryoto, S.Si, M.Si
NIP. 196807141994031004

HALAMAN PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa Skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Semarang, 31 Maret 2020

Penulis

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Allah Subhanahu Wa Ta'ala yang Maha Pengasih dan Maha Penyayang atas rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul "Nilai dan Vektor Eigen Matriks Interval atas Aljabar *Min-Plus*". Tugas Akhir ini disusun sebagai syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu (S1) pada Departemen Matematika Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Diponegoro, Semarang. Dalam penyusunan Tugas Akhir ini banyak yang telah membantu, maka pada kesempatan ini penulis menyampaikan rasa hormat dan mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Dr. Susilo Hariyanto, S.Si, M.Si selaku Ketua Departemen Matematika Fakultas Sains dan Matematika yang telah memberikan izin dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.
2. Bapak Suryoto, S.Si, M.Si selaku dosen pembimbing I yang telah meluangkan waktu memberikan bimbingan dan pengarahan dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.
3. Bapak Dr. Susilo Hariyanto, S.Si, M.Si selaku dosen pembimbing II yang telah meluangkan waktu memberikan bimbingan dan pengarahan dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.
4. Bapak dan Ibu dosen Departemen Matematika yang telah memberikan pengetahuan kepada mahasiswa selama kuliah.
5. Ayahanda Nasrizal Latief Chaniago, serta Ibunda tercinta Akhiar Ramaini Tanjung, selaku kedua orang tua penulis atas dukungan dan doa yang selalu diberikan sehingga dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini.
6. Ratih Yuniarti sebagai editor dan teman yang tak ada lelah-lelahnya untuk membantu penulis selama menulis Tugas Akhir ini.
7. Semua pihak terutama teman-teman seperkuliahan yang telah membantu hingga selesainya penyusunan Tugas Akhir ini, yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Semoga Allah membalas dengan melimpahkan rahmat dan kebaikan untuk kehidupannya di dunia dan di akhirat.

Penulis menyadari bahwa dalam Tugas Akhir ini masih terdapat banyak kekurangan, baik pada redaksi penulisan maupun isi yang masih jauh dari kata sempurna. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun guna penyempurnaan Tugas Akhir ini. Penulis juga berharap agar Tugas ini dapat bermanfaat bagi banyak pihak.

Semarang, 31 Maret 2020

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL i
HALAMAN PENGESAHAN ii
HALAMAN PERNYATAAN iii
KATA PENGANTAR iv
DAFTAR ISI vi
DAFTAR GAMBAR viii
DAFTAR TABEL ix
DAFTAR ARTI LAMBANG x
ABSTRAK xii
ABSTRACT xiii
BAB I 1
PENDAHULUAN 1
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Permasalahan 2
1.3 Pembatasan Masalah 2
1.4 Tujuan 3
1.5. Metodologi Penelitian 3
1.6 Sistematika Penulisan 4
BAB II 5
LANDASAN TEORI 5
2.1 Himpunan dan Operasi Biner 5
2.2 Grup dan Semi-grup 11
2.2.1. Grup 12
2.2.2. Semi-Grup 14
2.3 *Ring* dan Semi-*ring* 15
2.3.1. *Ring* 15
2.3.2. Semi-*ring* 18
2.4. *Field* dan Semi-*field* 19

2.4.1. *Field* 20

2.4.2. Semi-*field* 20

2.5. Aljabar *Max-Plus* 21
2.6. Nilai dan Vektor Eigen 28
2.6.1. Nilai dan Vektor Eigen 28

2.6.2. Nilai dan Vektor Eigen Matriks atas Aljabar *Max-plus* 30

2.7. Graf Berarah dan Berbobot 33
BAB III 37
PEMBAHASAN 37
3.1 Aljabar Min-Plus 37
3.1.1. Notasi pada Aljabar *Min-Plus* 38

3.1.2. Sifat-Sifat Aljabar *Min-Plus* 39

3.2 Matriks Interval atas Aljabar *Min-Plus* 44
3.2.1. Bentuk Matriks Interval atas Aljabar *Min-Plus* 44

3.2.2. Sifat-Sifat Operasi Matriks Interval atas Aljabar *Min-Plus* 47

3.3 Nilai dan Vektor Eigen *Min-Plus* pada Matriks Interval 54
3.3.1 Hubungan Graf Berarah Berbobot dengan Nilai Eigen *Min-Plus* Matriks Interval 54

3.3.2. Algoritme Mencari Nilai Eigen dan Vektor Eigen Aljabar *Min-Plus* Matriks Interval 55

BAB IV 72
PENUTUP 72
4.1. Kesimpulan 72
4.2. Saran 72
DAFTAR PUSTAKA 73

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Graf Berarah Berbobot $G(A)=(V,E)$ 29

Gambar 3.1 Graf Berarah Berbobot Matriks Batas Bawah $G(\underline{A})=(V,E)$ 56

Gambar 3.2 Graf Berarah Berbobot Matriks Batas Atas $G(\overline{A})=(V,E)$ 56

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Perbandingan Notasi $\oplus$ pada $\mathbb{R}_{\min}$ dengan Notasi Konvensional 31

Tabel 2.2 Perbandingan Notasi $\otimes$ pada $\mathbb{R}_{\min}$ dengan Notasi Konvensional 31

Tabel 2.3 Perbandingan Operasi Elemen Netral pada $\mathbb{R}_{\min}$ & Notasi Konvensional .. 32

DAFTAR ARTI LAMBANG

$\mathbb{N}$	: Himpunan semua bilangan asli (*natural numbers*)
$\mathbb{Z}$	: Himpunan semua bilangan bulat (*integers*)
$\mathbb{Q}$	: Himpunan semua bilangan rasional (*rational numbers*)
$\mathbb{R}$	: Himpunan semua bilangan riil (*riil numbers*)
$\mathbb{C}$	: Himpunan semua bilangan kompleks (*complex numbers*)
$B \subseteq A$	: B *subset* dari A
$A \cup B$	: A gabungan B
$A \cap B$	: A irisan B
$\varnothing$	: Himpunan kosong (*empty set*)
A^c	: Himpunan anggota di semesta yang bukan merupakan anggota A
$A \times B$	: Hasil kali kartesian antara himpunan A dan B
$(G,*)$	: G himpunan tak kosong dengan operasi biner $(*)$
$(R,+,\bullet)$	: R himpunan tak kosong dengan dua operasi biner $(+)$ dan $(\bullet)$
$(\mathbb{R}_{\max},\oplus,\otimes)$	: Aljabar *max-plus* dengan operasi biner $(\oplus)$ dan $(\otimes)$
ε	: Elemen identitas $\mathbb{R}$ terhadap operasi biner $(\oplus)$
e	: Elemen identitas $\mathbb{R}$ terhadap operasi biner $(\otimes)$
$G(A)=(V,E)$	: Graf berarah G dengan himpunan vertek V dan himpunan sisi E
$(\mathbb{R}_{\min},\oplus.\otimes)$	: Aljabar *min-plus* dengan operasi biner $(\oplus)$ dan $(\otimes)$
$I(\mathbb{R})_{\min}^{m\times n}$	: Himpunan semua matriks interval *min-plus* berukuran $m \times n$

$[\varepsilon]_{ij}$: Elemen identitas matriks interval $I(\mathbb{R})_{\min}^{m\times n}$ terhadap operasi $(\oplus)$

$(E)_{ij}$: Elemen identitas matriks interval $I(\mathbb{R})_{\min}^{m\times n}$ terhadap operasi $(\otimes)$

$\lambda_{\min}(A)$: bobot rata-rata minimum sirkuit elementer dalam $G(A)$

$\left[\lambda(\underline{A}),\lambda(\overline{A})\right]$: Nilai Eigen interval suatu matriks A

$\left[\underline{v},\overline{v}\right]$: Vektor Eigen interval yang bersesuaian

ABSTRAK

Nilai dan Vektor Eigen Matriks Interval Atas Aljabar Min-Plus

Oleh:

Rifky Fadly Ramadhan Tanjung

24010116140044

Nilai Eigen dan vektor Eigen merupakan salah satu topik dalam aljabar linier yang dimiliki oleh matriks bujur sangkar. Algoritme pencarian nilai dan vektor Eigen pada matriks interval *min-plus* digunakan sebagai cara untuk menyelesaikan permasalahan nilai dan vektor Eigen, yaitu mencari nilai dan vektor Eigen dari masing-masing batas atas dan batas bawah matriks interval *min-plus*. Algoritme dalam mencari nilai dan vektor Eigen matriks interval *min-plus* dapat dilakukan dengan pendekatan graf. Pada matriks interval *min-plus*, matriks bujur sangkar dapat direpresentasikan dalam bentuk graf yang dinamakan graf $G(A)$ yaitu berupa graf tidak terhubung, graf terhubung atau bahkan graf terhubung kuat. Jika graf $G(A)$ terhubung kuat maka matriks A disebut *irreducible* berakibat nilai Eigennya adalah tunggal. Oleh karenanya, dibahas mengenai struktur aljabar matriks interval *min-plus* serta algoritme untuk menyelesaikan permasalahan nilai Eigen dan vektor Eigen matriks interval yang *irreducible* dengan pendekatan aljabar *min-plus*.

Kata Kunci: Aljabar *min-plus*, interval matriks, matriks *irreducible,* nilai dan vektor Eigen.

ABSTRACT

Eigenvalue and Eigenvector of Interval Matrices over Min-Plus Algebra

By:

Rifky Fadly Ramadhan Tanjung

24010116140044

Eigenvalues and Eigenvectors are one of the topics in linear algebra that are owned by a square matrix. The Eigenvalues and Eigenvector vector search algorithm in the min-plus interval matrix is used as a way to solve the Eigenvalue and Eigenvector matrix, which is to find the Eigenvalues and Eigenvectors from the upper and lower limits of the min-plus interval matrix. Algorithm in finding the value and Eigenvectors matrix min-plus intervals can be done with the graph approach. In the min-plus interval matrix, square matrices can be represented in the form of graphs called graphs $G(A)$ that are unconnected graphs, connected graphs or even strongly connected graphs. If the graph $G(A)$ is strongly connected, the matrix A called irreducible which results in a single Eigenvalue Eigenvalue. Therefore, it is discussed about the structure of the min-plus interval matrix and the algorithm used to solve the problem Eigenvalue and Eigenvector of the irreducible interval matrix with the min-plus algebraic approach.

Keyword: Min-plus algebra, Interval matrices, Irreducible Matrices, Eigenvalue dan Eigenvector.