

SKRIPSI

**ANALISIS MODEL PENYEBARAN PENYAKIT TUBERCULOSIS DENGAN
INFEKSI ASIMPTOMATIK DAN SIMPTOMATIK**

*ANALYSIS OF TUBERCULOSIS DISEASE SPREAD MODEL WITH
ASYMPTOMATIC AND SYMPTOMATIC INFECTIONS*



NIKI AYU LESTARI
24010116130085

**DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN MATEMATIKA
UNIVERSITAS DIPONEGORO
SEMARANG
2020**

SKRIPSI

**ANALISIS MODEL PENYEBARAN PENYAKIT TUBERCULOSIS DENGAN
INFEKSI ASIMPTOMATIK DAN SIMPTOMATIK**

***ANALYSIS OF TUBERCULOSIS DISEASE SPREAD MODEL WITH
ASYMPTOMATIC AND SYMPTOMATIC INFECTIONS***

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh derajat
Sarjana Matematika (S.Mat.)



NIKI AYU LESTARI

24010116130085

**DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN MATEMATIKA
UNIVERSITAS DIPONEGORO
SEMARANG**

2020

HALAMAN PENGESAHAN

SKRIPSI

**ANALISIS MODEL PENYEBARAN PENYAKIT TUBERCULOSIS
DENGAN INFEKSI ASIMPTOMATIK DAN SIMPTOMATIK**

Telah dipersiapkan dan disusun oleh:

NIKI AYU LESTARI
24010116130085

Telah dipertahankan di depan Tim Penguji
pada tanggal 29 Mei 2020

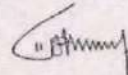
Susunan Tim Penguji

Pembimbing II/Penguji,



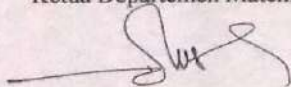
Siti Khabibah, S.Si, M.Si
NIP. 197910182006042001

Penguji,



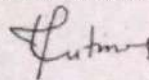
Prof. Dr. Widowati, S.Si, M.Si
NIP. 196902141994032002

Mengetahui,
Ketua Departemen Matematika,



Dr. Susilo Hariyanto, S.Si, M.Si
NIP. 197410142000121001

Pembimbing I/Penguji,



Dr. Sutimin, M.Si
NIP. 19640327199011001

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu perguruan tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Semarang, 29 Mei 2020



Niki Ayu Lestari

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT yang telah memberikan rahmat, nikmat, dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “**Analisis Model Penyebaran Penyakit Tuberculosis dengan Infeksi Asimptomatik dan Simptomatik**”. Dalam kesempatan ini penulis juga ingin mengucapkan terima kasih kepada :

1. Bapak Dr. Susilo Hariyanto, S.Si, M.Si selaku Ketua Departemen Matematika Fakultas Sains dan Matematika Universitas Diponegoro Semarang yang telah memberikan izin dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.
2. Bapak Dr. Sutimin, M.Si selaku Dosen Pembimbing I yang telah meluangkan waktu untuk membimbing penulis dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.
3. Ibu Siti Khabibah, S.Si, M.Si selaku Dosen Pembimbing II yang telah meluangkan waktu untuk membimbing penulis dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.
4. Bapak dan Ibu dosen Departemen Matematika yang telah memberikan pengetahuan kepada mahasiswa selama kuliah.
5. Bapak Noor Choliz dan Ibu Chilmiyati selaku orang tua penulis yang selalu memberikan doa dan dukungan dalam menyelesaikan tugas akhir ini.
6. Semua pihak yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini.

Penulis menyadari dalam tugas akhir ini masih terdapat kekurangan, oleh karena itu penulis mengharapkan adanya kritik dan saran dari berbagai pihak untuk penulisan yang lebih baik lagi. Akhir kata, semoga tugas akhir ini dapat bermanfaat bagi berbagai pihak.

Semarang, 29 Mei 2020



Niki Ayu Lestari

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL.....	i
HALAMAN PENGESAHAN.....	ii
PERNYATAAN.....	iii
KATA PENGANTAR	iv
DAFTAR ISI.....	v
DAFTAR GAMBAR	viii
DAFTAR ARTI LAMBANG DAN SINGKATAN	ix
ABSTRAK	xi
<i>ABSTRACT</i>	xii
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Permasalahan	4
1.3 Tujuan dan Manfaat.....	4
1.4 Metodologi Penelitian	4
1.5 Sistematika Penulisan.....	7
BAB II DASAR TEORI	8
2.1 Pengertian TBC	8
2.2 Cara Penularan <i>TBC</i>	8
2.3 Risiko Sakit <i>TBC</i>	8
2.4 Gejala Penyakit <i>TBC</i>	9
2.5 Prinsip Pengobatan <i>TBC</i>	10
2.6 Fase Penderita <i>TBC</i>	10

2.7	Regimen Pengobatan <i>TBC</i>	11
2.8	Matriks.....	12
2.8.1	Determinan Matriks	12
2.8.2	Invers Matriks	13
2.9	Nilai Eigen dan Vektor Eigen.....	14
2.10	Turunan Fungsi.....	16
2.10.1	Limit dan Kekontinuan	18
2.10.2	Turunan dan Kekontinuan.....	19
2.11	Sistem Persamaan Differensial.....	20
2.12	Titik Kesetimbangan (Ekuilibrium)	22
2.13	Linearisasi Sistem Persamaan Differensial	23
2.14	Bilangan Reproduksi Dasar (\mathcal{R}_0).....	26
2.15	Kestabilan Titik Kesetimbangan	29
2.16	Kriteria Routh-Hurwitz	31
2.17	Metode Lyapunov.....	34
2.18	Fungsi Konveks	34
BAB III PEMBAHASAN		37
3.1	Proses Penyebaran Penyakit <i>TBC</i>	37
3.2	Formulasi Model	41
3.3	Menentukan Kepositifan dan Keterbatasan Solusi.....	42
3.4	Bilangan Reproduksi Dasar (\mathcal{R}_0)	45
3.5	Analisis Titik Kesetimbangan	48
3.5.1	Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit (Non Endemik)	49

3.5.2	Titik Keseimbangan Endemik.....	49
3.6	Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan	50
3.6.1	Analisis Kestabilan Lokal Titik Keseimbangan Non Endemik.....	50
3.6.2	Analisis Kestabilan Global Titik Keseimbangan Non Endemik	53
3.6.3	Analisis Kestabilan Global Titik Keseimbangan Endemik	55
3.7	Simulasi Numerik.....	63
3.7.1	Simulasi Numerik untuk Keadaan Non Endemik.....	64
3.7.2	Simulasi Numerik untuk Keadaan Endemik.....	66
BAB IV PENUTUP		69
4.1	Kesimpulan.....	69
4.2	Saran.....	69
DAFTAR PUSTAKA		70
LAMPIRAN.....		73

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1 Diagram transfer pada dinamika penyebaran penyakit <i>TBC</i>	5
Gambar 3.1 Diagram transfer pada dinamika penyebaran penyakit <i>TBC</i>	39
Gambar 3.2 Grafik simulasi kasus non endemik.....	65
Gambar 3.3 Grafik simulasi kasus endemik.....	67

DAFTAR ARTI LAMBANG DAN SINGKATAN

TBC : Tuberculosis

S : Jumlah individu subpopulasi rentan (*susceptible*) pada waktu t

E : Jumlah individu subpopulasi laten (*exposed*) pada waktu t

I_1 : Jumlah individu subpopulasi terinfeksi asimtomatik pada waktu t

I_2 : Jumlah individu subpopulasi terinfeksi simtomatik pada waktu t

R : Jumlah individu subpopulasi sembuh (*recovery*) pada waktu t

λ : Laju pertumbuhan populasi

β_1 : Laju transmisi individu rentan menjadi terinfeksi TBC karena kontak dengan individu terinfeksi asimtomatik

β_2 : Laju transmisi individu rentan menjadi terinfeksi TBC karena kontak dengan individu terinfeksi simtomatik

α : Laju perubahan subpopulasi laten menjadi terinfeksi asimtomatik

ϕ_1 : Laju perubahan dari subpopulasi terinfeksi asimtomatik

ϕ_2 : Laju perubahan dari subpopulasi terinfeksi simtomatik

r_1 : Laju keefektifan pengobatan pada individu terinfeksi asimtomatik menjadi sembuh

r_2 : Laju keefektifan pengobatan pada individu terinfeksi simtomatik sehingga menjadi sembuh

$1 - r_1$: Laju ketidakefektifan pengobatan pada individu terinfeksi asimtomatik sehingga menjadi terinfeksi simtomatik

- r_3 : Laju keefektifan pengobatan pada individu terinfeksi simptomatik menjadi terinfeksi asimtomatik
- δ : Laju kematian akibat penyakit pada subpopulasi terinfeksi simptomatik
- μ : Laju rata-rata kematian alami
- \mathcal{R}_0 : Bilangan reproduksi dasar
- \mathcal{E}_0 : Titik kesetimbangan non endemik
- \mathcal{E}_1 : Titik kesetimbangan endemik

ABSTRAK

ANALISIS MODEL PENYEBARAN PENYAKIT TUBERCULOSIS DENGAN INFEKSI ASIMPTOMATIK DAN SIMPTOMATIK

oleh

Niki Ayu Lestari

24010116130085

Tugas akhir ini memodifikasi model penyebaran penyakit Tuberculosis dengan membedakan infeksi asimptomatik dan infeksi simptomatik. Berdasarkan hasil analisis, diperoleh dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan non endemik dan titik kesetimbangan endemik. Analisis kestabilan pada titik kesetimbangan ditentukan oleh bilangan reproduksi dasar (\mathcal{R}_0) yang diturunkan dari *Next Generation Matrix* (NGM). Analisis kestabilan lokal pada titik kesetimbangan non endemik menggunakan kriteria Routh Hurwitz dan analisa kestabilan global dengan mengkonstruksi fungsi Lyapunov. Sedangkan analisa kestabilan global pada titik kesetimbangan endemik dengan mengkonstruksi fungsi Lyapunov. Jika $\mathcal{R}_0 < 1$ maka titik kesetimbangan non endemik stabil asimtotik lokal dan stabil asimtotik global, jika $\mathcal{R}_0 > 1$ maka titik kesetimbangan endemik stabil asimtotik global. Simulasi numerik juga diberikan untuk mengilustrasikan hasil analisis.

Kata kunci : Bilangan Reproduksi Dasar, Kestabilan Global, Kestabilan Lokal, Tuberculosis.

ABSTRACT

ANALYSIS OF TUBERCULOSIS DISEASE SPREAD MODEL WITH ASYMPTOMATIC AND SYMPTOMATIC INFECTIONS

by

Niki Ayu Lestari

24010116130085

This final project modifies the model of tuberculosis disease spread which incorporating asymptomatic infection and symptomatic infection. The analytical results show that there are two equilibrium points, endemic equilibrium point and non endemic equilibrium point. The stability analysis of the equilibrium points is determined by basic reproduction number (\mathcal{R}_0) which is derived from Next Generation Matrix (NGM). The local stability analysis at the non endemic equilibrium point uses Routh Hurwitz criteria and the global stability uses Lyapunov function. While the global stability analysis at the endemic equilibrium point uses Lyapunov function. If $\mathcal{R}_0 < 1$ then the non endemic equilibrium point is locally asymptotically stable and globally asymptotically stable, while if $\mathcal{R}_0 > 1$ then the endemic equilibrium point is globally asymptotically stable. The numerical simulations are also provided to illustrate the analytical results.

Keywords : Basic Reproduction Number, Global Stability, Local Stability, Tuberculosis.