DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR ARTI LAMBANG DAN SINGKATAN

Z	: Nilai fungsi tujuan biaya transportasi
x_n	: Variabel keputusan
c_n	: Koefisien fungsi tujuan
a_{mn}	: Koefisien fungsi kendala
b_m	: Jumlah sumber daya yang ada
S_i	: Persediaan barang sumber ke *i*
D_j	: Permintaan barang dari tujuan *j*
x_{ij}	: Banyaknya barang yang didistribusikan dari sumber *i* ke tujuan *j*
c_{ij}	: Biaya pengiriman per unit barang yang dikirim dari sumber *i* ke tujuan *j*
R_i	: Nilai multiplier pada setiap baris ke - *i*
K_j	: Nilai multiplier pada setiap kolom ke - *j*
IP_{ij}	: Indeks perbaikan pada variabel non basis di baris *i* dan kolom *j*
i	: 1, 2, …, *m*
j	: 1, 2, …, *n*
m	: Banyaknya sumber atau baris
n	: Banyaknya tujuan atau kolom
&	: dan
+	: Operasi penjumlahan
-	: Operasi pengurangan
.	: Operasi perkalian
=	: Sama dengan
$<$	: Lebih kecil dari
$>$	: Lebih besar dari
$\leq$	: Lebih kecil dari atau sama dengan
$\geq$	: Lebih besar dari atau sama dengan
p_{ij}	: Nilai sel pada Baris *Cost Deviation*

t_{ij}	: Nilai sel pada Kolom *Cost Deviation*
r_i	: Nilai minimum dari baris i.
s_j	: Nilai minimum dari kolom j.
L_0	: Pasangan sel yang tidak dilewati garis
L_1	: Pasangan sel yang dilewati satu garis
L_2	: Pasangan sel yang dilewati dua garis

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Masalah transportasi merupakan masalah pengaturan distribusi barang dari sumber yang menyediakan barang sejenis menuju tempat yang membutuhkan secara optimal. Model transportasi digunakan dalam memecahkan masalah yang berhubungan dengan transportasi atau pengangkutan untuk meminimalkan biaya, jarak tempuh, dan sebagainya sehingga menghasilkan keuntungan maksimal [1].

Biasanya jumlah barang yang dapat disalurkan dari setiap lokasi penawaran adalah tetap atau terbatas, namun jumlah permintaan pada setiap lokasi permintaan adalah bervariasi. Atas dasar kenyataan bahwa rute pengiriman yang berbeda akan menghasilkan biaya kirim yang berbeda, maka tujuan dari pemecahan kasus transportasi ini adalah menentukan berapa banyak unit yang harus dikirim dari setiap sumber ke setiap tujuan sehingga permintaan dari setiap tujuan terpenuhi dan total biaya kirim minimum [2].

Terdapat beberapa metode untuk menyelesaikan masalah transportasi, misalnya dalam mendapatkan solusi fisibel awal yaitu dengan Metode Pojok Barat Laut (*North West Corner Method*), Metode Biaya Terendah (*Least Cost Method*), dan Metode VAM (*Vogel's Approximation Method*). Setelah solusi fisibel awal didapat, maka langkah selanjutnya adalah uji optimalitas dengan Metode Batu Loncat (*Stepping Stone*) atau Metode MODI (*Modified Distribution*) untuk mendapatkan solusi optimal [1].

Dalam beberapa literatur, banyak usaha yang terkonsentrasi pada masalah transportasi. Diantaranya, algoritma transportasi yang diperkenalkan oleh Pandian dan Natarajan yaitu metode titik nol *zero point method* (ZPM) untuk menemukan solusi optimal pada masalah transportasi [3].

Beberapa metode langsung yang berhasil dikaji lebih lanjut diantaranya Metode *Zero Neigbourning* [4], Metode *Zero Suffix* [5], Metode *Zero Point* [6], Metode *Exponential Approach* [7], Metode ASM [8], Metode *Improved* ASM [9] dan Metode *Cost Deviation* [10]. Karakteristik dari beberapa metode ini menitikberatkan pada biaya hasil reduksi yang bernilai nol.

Metode *Exponential Approach* adalah menetapkan penalti eksponensial pada setiap sel biaya yang bernilai 0. Penalti eksponensial adalah banyaknya angka 0 pada baris ke-*i* dan kolom ke-*j* selain angka 0 yang terpilih. Pengalokasian pada sel dengan penalti eksponensial terkecil. Jika terdapat penalti ekponensial terkecil yang sama, maka pengalokasian bergantung pada rata-rata permintaan dan persediaan terkecil untuk sel yang bersesuaian. Metode ASM juga menetapkan indeks penalti *e* untuk setiap sel-*ij* yang bernilai 0, yang mana indeks apenalti *e* adalah banyaknya angka 0 pada baris ke-*i* dan kolom ke- *j* dan tidak termasuk angka 0 yang terpilih pada sel-*ij* . Pengalokasian pada sel dengan indeks penalti terkecil. Jika terdapat indeks penalti terkecil yang sama, maka pengalokasian bergantung pada hasil penjumlahan dari biaya tereduksi pada baris ke-*i* dan kolom ke-*j* dari sel-*ij* yang bersangkutan dengan hasil penjumlahan terbesar. Jika masih terjadi kesamaan, maka memilih sel*ij* (sel yang memiliki indek *e* terkecil yang sama) yang memiliki rata-rata persediaan dan permintaan terkecil. Pada metode *Zero Neigbourning* dan *Zero Suffix* dihitung nilai rata-rata sekitar angka 0 yang bukan bernilai 0, kemudian pengalokasian bergantung pada nilai rata-rata terbesar. Sedangkan pada metode *Zero Point* dilihat permintaan dan persediaan pada sel dengan biaya tereduksi 0 yang bersangkutan. Pada metode *Cost Deviation* yang diperkenalkan oleh P.Pandian ceenderung memiliki langkah-langkah yang lebih sederhana dan cepat dalam menyelesaikan permasalahan transportasi untuk mendapatkan solusi optimal secara langsung tanpa mencari solusi awal terlebih dahulu [10]. Dimana dalam proses penyelesaiannya membutuhkan eliminasi dari setiap sel sesuai kolom dan barisnya, hingga akhirnya menemukan sel yang bernilai (0,0). Apabila hasil reduksi kolom/baris menghasilkan lebih dari satu sel yang memiliki nilai (0,0), maka sel yang terpilih untuk mengalokasikan barang bergantung pada sel (0,0) yang memiliki biaya terbesar dari setiap sel nya.

Sebagian besar metode langsung tersebut telah berhasil memberikan solusi optimal pada masalah transportasi seimbang, sedangkan untuk masalah transportasi tak seimbang belum tentu menghasilkan solusi optimal. Untuk memperbaiki kelemahan ini telah dikembangkan metode perbaikannya seperti metode *Improved Zero Neigbourning* [4], metode *Improved Zero Point* [11], metode *Improved Zero Suffix* [5], metode *Improved Exponential Approach* [7]. Metode-metode ini mampu menyelesaikan masalah transportasi tak seimbang.

Pada metode *Cost Deviation* untuk menyelesaikan masalah transportasi pada kasus meminimumkan biaya. Kemudian eksistensi keoptimalannya telah ditunjukkan pada masalah transportasi seimbang dengan algoritmanya diperluas untuk transportasi kasus maksimum [10]. Hal yang sama, metode *Cost Deviation* juga belum tentu memberikan solusi optimal untuk masalah transportasi tak seimbang. Oleh karena itu, perlu dikaji metode perbaikan dari metode *Cost Deviation* sedemikian hingga dapat memberikan solusi optimal untuk masalah transportasi tak seimbang. Diselidiki keoptimalan dari metode perbaikan *Cost Deviation* dan diterapkan pada contoh simulasi.

1.2 Perumusan Masalah

Permasalahan yang dibahas dalam Tugas Akhir ini adalah:

1. Bagaimana mendapatkan solusi optimal dari masalah transportasi dengan menerapkan metode *Improved Cost Deviation*.

2. Bagaimana perbandingan hasil untuk masalah transportasi dengan menggunakan metode *Cost Deviation* dan metode *Improved Cost Deviation.*

1.3 Pembatasan Masalah

Dalam pembahasan Tugas Akhir ini metode yang digunakan ialah metode *Cost Deviation* untuk menyelesaikan masalah trasportasi yang tidak seimbang.

1.4 Tujuan Penulisan

Adapun tujuan penulisan dari Tugas Akhir ini yaitu:

1. Memperoleh solusi optimal dengan menggunakan Metode *Improved Cost Deviation* pada masalah transportasi (seimbang dan tidak seimbang) baik kasus minimum maupun kasus maksimum.

2. Memperoleh perbandingan hasil metode *Cost Deviation* dan *Improved Cost Deviation* sebagai metode untuk menyelesaikan masalah transportasi.

1.5 Metode Penulisan

Metode yang digunakan penulis dalam penyusunan Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut :

1. Melakukan studi pustaka yaitu dengan mengkaji jurnal mengenai metode baru *Cost Deviation* dalam menentukan masalah solusi optimal pada masalah transportasi dan jurnal terkait mengenai masalah transportasi.

2. Menjabarkan materi-materi dasar yang berkaitan dengan masalah transportasi, seperti pengertian dan model masalah transportasi, metode solusi awal dan kemudian mencari solusi optimum. Selanjutnya penulis membahas tentang algoritma metode *Cost Deviation* dan algoritma perbaikan dari metode sebelumnya diberi nama *Improved Cost Deviation* dalam penerapannya untuk

masalah transportasi kemudian membandingkannya dengan metode VAM – MODI.

3. Menyelidiki keoptimalan Metode *Improved Cost Deviation*.

4. Mengaplikasikan Metode *Improved Cost Deviation* pada masalah transportasi (kasus seimbang dan tidak seimbang) baik kasus minimum atau maksimum.

1.6 Sistematika Penulisan

Tugas Akhir ini terdiri dari empat bab. Bab I berisi pendahuluan yang menjelaskan latar belakang, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan penulisan, metode penulisan, dan sistematika penulisan Tugas Akhir. Bab II berisi dasar teori yang digunakan dalam pembahasan Tugas Akhir ini yang meliputi masalah transportasi klasik, metode mencari solusi awal, metode mencari solusi optimum. Bab III merupakan pembahasan yang berisi tentang masalah transportasi dengan menggunakan metode *Cost Deviation* dan *Improved Cost Deviation* serta menerapkan langkah-langkah metode *Improved Cost Deviation* dan membandingkan hasil solusi metode *Improved Cost Deviation* dengan metode *VAM* dan metode *MODI*. Bab IV berisi kesimpulan dari keseluruhan hasil pembahasan pada Tugas Akhir ini.

BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini diberikan materi penunjang yang mendukung materi pokok untuk memahami materi selanjutnya dimana pada bab ini meliputi program linier dan masalah transportasi.

2.1 Program Linier

2.1.1 Pengertian Program Linier

Program linier yang diterjemahkan dari Linier Programming (LP) adalah suatu cara untuk menyelesaikan persoalan pengalokasian sumber-sumber yang terbatas diantara beberapa aktivitas yang bersaing, dengan cara yang terbaik yang mungkin dilakukan [12].

Programa linier ini menggunakan model matematis untuk menjelaskan persoalan yang dihadapinya. Sifat “liner” disini memberi arti bahwa seluruh fungsi matematis dalam model ini merupakan fungsi yang linier, sedangkan kata “program” merupakan sinonim untuk perencanaan. Dengan demikian program linier (LP) adalah perencanaan aktivitas-aktivitas untuk memperoleh suatu hasil yang optimum, yaitu hasil yang mencapai tujuan terbaik diantara seluruh alternatif yang fisibel [12].

2.1.2 Model Program Linier

Dalam membangun model dari formulasi persoalan pada programa linier akan digunakan karakteristik-karakteristik yang biasa digunakan dalam persoalan program linier, yaitu: [12]

1. Variabel Keputusan

Variabel keputusan adalah variabel yang menguraikan secara lengkap keputusan-keputusan yang akan dibuat.

2. Fungsi Tujuan

Fungsi tujuan merupakan fungsi dari variabel keputusan yang akan dimaksimumkan (untuk pendapatan atau keuntungan) atau diminimumkan (untuk ongkos).

3. Pembatas

Pembatas merupakan kendala yang dihadapi sehingga kita tidak bias menentukan harga-harga variabel keputusan secara sembarang.

4. Pembatas tanda

Pembatas tanda adalah pembatas yang menjelaskan apakah variabel keputusannya diasumsikan hanya berharga nonnegatif atau variabel keputusan tersebut boleh berharga positif, boleh juga negatif (tidak terbatas dalam tanda).

Struktur model matematis program linier diawali oleh fungsi-fungsi tujuan yaitu sebuah fungsi matematika yang mencerminkan tujuan model. Fungsi tujuan itu harus diminimumkan atau dimaksimumkan terhadap suatu susunan kendala sehingga di dalam fungsi tujuan harus muncul pernyataan mengenai arah tersebut. Oleh karena itu, terdapat 2 kemungkinan fungsi tujuan yaitu memaksimalkan atau meminimalkan. Adapun bentuk umum program linier adalah sebagai berikut:

1. Mencari nilai $x_1, x_2, \ldots x_n$ yang memaksimalkan fungsi linier

$$Z = C_1x_1 + C_2x_2 + \cdots + C_nx_n$$

Dengan kendala-kendala linier:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq\ b_1,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq\ b_2,\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq\ b_m,\\
&x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0
\end{aligned}$$

2. Mencari nilai $x_1, x_2, \ldots x_n$ yang meminimalkan fungsi linier

$$Z = C_1x_1 + C_2x_2 + \cdots + C_nx_n$$

Dengan kendala-kendala linier:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq\ b_1,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq\ b_2,\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq\ b_m,\\
&x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0
\end{aligned}$$

dimana

Z : Fungsi tujuan yang akan dicari nilai optimalnya.

c_j : Koefisien variabel keputusan dalam fungsi tujuan. Untuk kasus maksimal c_j menunjukan keuntungan atau penerimaan per unit, sedangkan dalam kasus minimal c_j menunjukan biaya per unit j=1,2,…,n

x_j : Variabel keputusan atau banyaknya n kegiatan. j=1,2,…,n.

a_{ij} : Koefisien variabel keputusan dalam fungsi kendala.

i=1,2,…,m,dan j=1,2,…,n.

b_i : Sumber daya yang terbatas dalam kendala ke-i. i=1,2,…,m.

Sifat-sifat dari program linier adalah sebagai berikut:

1. Fungsi tujuan dan fungsi-fungsi kendala semuanya merupakan fungsi linier.
2. Semua variabel keputusan yang terlibat dalam masalah adalah tidak negatif.
3. Kriteria pemilihan nilai terbaik dari variabel keputusan yang disebut fungsi tujuan dapat ditentukan dengan fungsi linier dari variabel-variabel tersebut.

2.1.3 Asumsi dalam Model Program Linier

Suatu permasalahan bisa diformulasikan dalam bentuk PL bila memenuhi beberapa asumsi. Asumsi ini bila tidak terpenuhi salah satu saja, berakibat formulasinya tidak akan valid. Adapun asumsi yang harus dipenuhi antara lain: [12]

1. Asumsi proporsionalitas (kesebandingan)

a. Kontribusi setiap variabel keputusan terhadap fungsi tujuan adalah sebanding dengan nilai variabel keputusan. Sebagai contoh, membuat 4 lusin boneka maka kontribusi terhadap fungsi tujuan adalah 4 kali kontribusi setiap lusin boneka, atau 4 x Rp. 3.000,00 = Rp. 12.000,00 bila 1 lusin boneka Rp. 3.000,00

b. Kontribusi suatu variabel keputusan terhadap ruas kiri dari setiap pembatas juga sebanding dengan nilai variabel keputusan itu. Sebagai contoh, jika membuat 4 lusin boneka maka diperlukan 4 kali waktu pemolesan yang dibutuhkan oleh setiap lusin boneka, atau 4 x 2 jam = 8 jam, bila setiap lusin boneka memerlukan 2 jam pemolesan.

3. Asumsi additifitas (penambahan)

a. Kontribusi setiap variabel keputusan terhadap fungsi tujuan bersifat tidak bergantung pada nilai dari variabel keputusan yang lain. Sebagai contoh, berapapun nilai x_2 (banyaknya kereta api yang dibuat setiap minggu), pembuatan sejumlah x_1 (banyaknya boneka yang dibuat setiap minggu) akan selalu berkontribusi sebesar Rp. 3.000,00 terhadap fungsi tujuan.

b. Kontribusi suatu variabel keputusan terhadap ruas kiri dari setiap pembatas bersifat tidak bergantung pada nilai dari variabel keputusan yang lain. Sebagai contoh, berapa pun x_1, pembuatan sejumlah x_2 kereta api akan memerlukan x_2 jam pemolesan dan x_2 jam pekerjaan kayu.

4. Asumsi kepastian (certainty)

Setiap parameter dapat diketahui secara pasti nilainya.parameter dsini adalah kefisien dari fungsi objektif, nilai RHS (ruas kanan kendala), dan koefisien teknis. Koefisien teknis yaitu koefisien ruas kiri tiap kendala atau sering disebut sebagai koefisien matrix utama bila penulisan kendala diungkapkan dalam bentuk matrix.

$$Ax<b$$

5. Asumsi divisibilitas (Pembagian)

Setiap parameter, yaitu koefisien fungsi tujuan ruas kanan dan koefisien teknologism diasumsikan dapat diketahui secara pasti. Setiap variable keputusan dimungkinkan bernilai pecahan. Bila asumsi ini tidak terpenuhi maka model PL tidak bisa dipakai namun model ini dikenal sebagai model IPL. Contoh, polisi yang ditugaskan di Jatingaleh 3 orang, variable keputusannya adalah jumlah polisi yang ditugaskan di Jatingaleh. Adalah tidak masuk akal kalau jumlahnya 2/3 orang. Kapal yang dioperasikan oleh US marine di Pasific 50 buah, angka 23.33

buah kapal tidaklah masuk akal. Tak berlakunya asumsi ini memerlukan teknis penylesaian khusus yang akan dipelajari dalam ILP.

2.2 Masalah Transportasi

2.2.1 Pengertian Masalah Transportasi

Masalah transportasi merupakan suatu kasus khusus dari masalah Program Linier (PL). Masalah ini awalnya dikemukakan oleh F. L. Hitchcook (1941) dan dikenal dengan masalah distribusi Hitchcook, merupakan permasalahan pengaturan distribusi barang yang sejenis ke tempat-tempat yang membutuhan secara optimal. Untuk saat ini, dengan perkembangan permasalahan di bidang industri yang menjadi sangat kompleks, ilmu tentang transportasi berkembang dengan pesat. Banyak metode-metode lanjut yang muncul sesuai dengan bentuk permasalahan-permasalahan transportasi yang dihadapi. Bahkan dalam perkembangannya, banyak ditemukan masalah-masalah lain di dunia usaha yang modelnya sejenis dengan masalah transortasi, meliputi masalah penjadwalan produksi, pembelanjaan model (capital financing), purchasing, cash management, inventory control, dan lain-lain [12].

Untuk model dari masalah transportasi, yaitu sebagai berikut: [13]

$$(P) meminimumkan\ Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}.$$

kendala :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ ,\ i = 1,2, \dots, m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \ ,\ j = 1,2, \dots, n.$$

dimana $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

$x_{ij} \geq 0$ untuk semua i dan j.

Tujuan dari model transportasi adalah merencanakan pengiriman dari sumber-sumber ke tujuan sedemikan rupa untuk meminimumkan total biaya transportasi, dengan kendala-kendala [13].

1. Setiap permintaan tujuan terpenuhi.

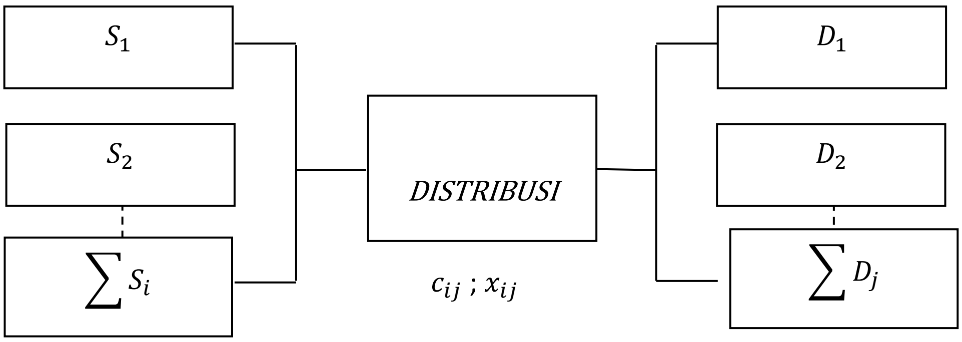
2. Sumber tidak mungkin mengirim komoditas lebih besar dari kapasitasnya.

Di dalam model transportasi kemampuan sumber-sumber untuk melayani atau $\sum_{i=1}^{m} S_i$ belum tentu sama dengan tingkat permintaan tujuan-tujuan untuk dilayani atau $\sum_{j=1}^{n} D_j$. Sehingga ada tiga kemungkinan yang akan terjadi, yaitu: [3]

1. $\sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{j=1}^{n} D_j$
2. $\sum_{i=1}^{m} S_i \leq \sum_{j=1}^{n} D_j$
3. $\sum_{i=1}^{m} S_i \geq \sum_{j=1}^{n} D_j$

Dimana kemungkinan pertama merupakan transportasi seimbang, kemungkinan kedua dan ketiga merupakan transportasi tidak seimbang.

Masalah transportasi dapat digambarkan dalam bentuk diagram seperti pada Gambar 2.1 sebagai berikut [14] :



Gambar 2.1 Diagram Model Transportasi

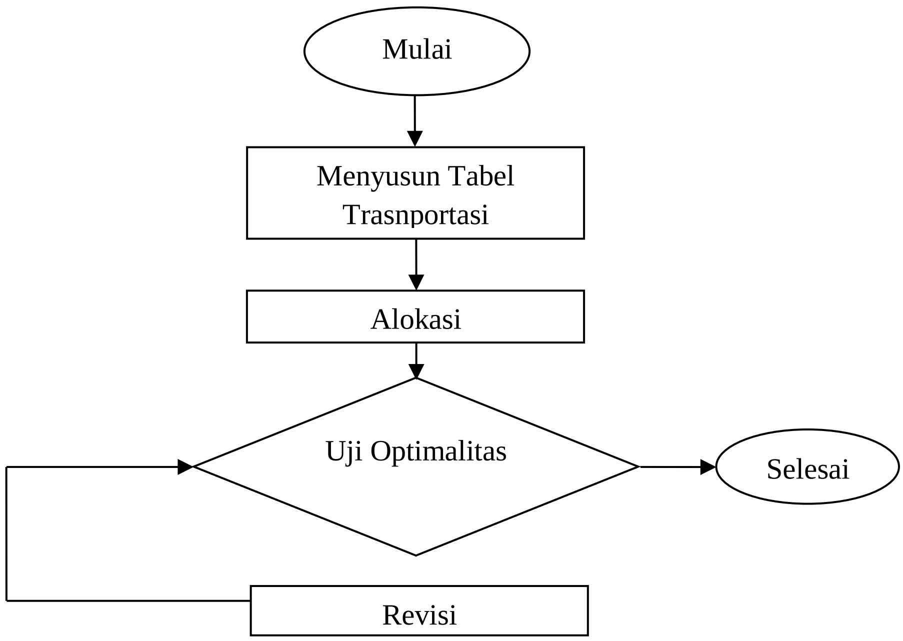
Pada Gambar 2.1 untuk langkah - langkah penyelesaiannya adalah sebagai berikut: [13]

1. Menyusun tabel transportasi. Pada tabel ini diisikan informasi biaya transportasi dari suatu sumber ke suatu tujuan tertentu, besar kapasitas sumber, dan besar permintaan. Pada langkah ini, besar kapasitas (penawaran) harus sama (seimbang) dengan besar permintaan. Apabila terdapat ketidakseimbangan maka harus dibuat sel *dummy* yang berisi

besarnya ketidakseimbangan antara penawaran dan permintaan. Sel *dummy* dapat berupa sel baris ataupun sel kolom.

2. Melakukan pengalokasian berdasarkan beberapa metode yang ada. Terdapat beberapa metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan kasus transportasi ini, antara lain *North West Corner Method*, *Least Cost Method*, dan *Vogel Approximation Method* (VAM). Ketiga metode tersebut masing-masing berfungsi untuk menentukan alokasi distribusi awal yang akan membuat seluruh kapasitas sumber teralokasikan ke seluruh tujuan.
3. Langkah terakhir adalah melihat apakah alokasi tersebut sudah optimal atau belum. Langkah ini dikenal dengan istilah uji optimalitas. Ada dua cara uji optimalitas, yaitu *Stepping Stone Method* dan *Modified Distribution Method* (MODI). Jika hasil uji menunjukan bahwa alokasi telah optimal, maka alokasi tersebut dapat dikatakan telah mencapai nilai yang paling menguntungkan. Sebaliknya jika belum optimal, maka perlu dilakukan revisi untuk sel yang masih memungkinkan untuk direvisi.

Prosedur penyelesaian metode transportasi dapat digambarkan sebagaimana yang terlihat pada Gambar 2.2 berikut [13].



Gambar 2.2 Prosedur Penyelesaian Metode Transportasi

Sehingga pada Gambar 2.2 masalah transportasi dapat digambarkan dalam bentuk Tabel 2.1 sebagai berikut [13]:

Tabel 2.1 Tabel Transportasi

Ke / Dari		Tujuan (*j*)				Persediaan (*supply*)
		1	2	…	n	
Sumber (*i*)	1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	S_1
	2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	S_2
	…	…	…	…	…	…
	M	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	S_m
Permintaan (*demand*)		D_1	D_2	…	D_n	

Keterangan:

S_i : Persediaan barang sumber ke *i*

D_j : Permintaan barang dari tujuan *j*

c_{ij} : Biaya pengiriman per unit barang yang dikirim dari sumber *i* ke tujuan *j*

x_{ij} : Banyaknya barang yang dikirim dari sumber *i* ke tujuan *j*

Model adalah gambaran sederhana dari sebuah kasus yang dapat membantu untuk berpikir secara sistematis dan cepat untuk memahami kasus tersebut [3].

2.2.2 Masalah Transportasi Seimbang dan Tak Seimbang

Secara umum permasalahan transportasi adalah permasalahan pendistribusian suatu produk dengan jenis tunggal :

a. Dari berbagai sumber ke berbagai tujuan
b. Jumlah penawaran (*supply*) dari masing-masing sumber terbatas
c. Jumlah permintaan (*demand*) dari masing-masing tujuan tertentu
d. Biaya transport keseluruhan seminimal mungkin.

Dengan asumsi biaya transport dari masing-masing rute pendistribusian produk proporsional dengan banyaknya unit produk yang dikirimkan, masalah transportasi bisa dibagi menjadi dua jenis yaitu masalah transportasi seimbang dan masalah transportasi tak seimbang. Dalam masalah transportasi seimbang jumlah jumlah total supply harus sama dengan jumlah total demand, sebaliknya dalam masalah transportasi tak seimbang keduanya tidak sama. Dalam sub-bab ini akan dibahas masalah transportasi seimbang.

2.2.3 Mencari Solusi Fisibel Awal dan Solusi Optimal

Ada beberapa metode untuk mencari solusi fisibel awal. Disini akan disampaikan dua buah metode, yaitu Metode Least Cost atau metode biaya terkecil dan Metode Aproksimasi Vogel (VAM). Adapun penjelasan dari metode tersebut adalah sebagai berikut : [1]

1. Metode Biaya Terkecil (*Least Cost Method*)

Metode Biaya Terkecil (*Least Cost Method*) merupakan sebuah metode untuk menyusun tabel awal dengan cara pengalokasian distribusi barang dari sumber ke tujuan mulai dari sel yang memiliki biaya distribusi terkecil. Pada sel tersebut diisikan dengan barang sebanyak mungkin. Jika ada beberapa sel yang biaya terendahnya sama, maka dipilih sembarang.

2. Metode VAM (*Vogel Aproximation Method*)

Perhitungan penyelesaian awal dengan metode Vogel lebih rumit dibanding metode biaya terkecil dan metode pojok barat laut. Akan tetapi biasanya lebih mendekati penyelesaian optimalnya. Alogritma VAM untuk mencari solusi fisibel awal dari masalah transportasi adalah sebagai berikut :

Step 1. Hitung opportunity cost / penalti untuk setiap baris dan kolom. Opportunity cost untuk baris / kolom ke-k dihitung dengan mengurangkan biaya transportasi / unit terkecil pada baris / kolom tersebut terhadap biaya transport / unit terkecil kedua pada baris / kolom yang sama.

Step 2. Pilih baris atau kolom dengan opportunity cost terbesar. Alokasikan sebanyak mungkin ke kotak dengan biaya transport / unit minimum di dalamnya.

Step 3. Hilangkan baris dan kolom yang penawaran dan permintaannya telah dihabiskan.

Step 4. Jika belum semua penawaran dan permintaan dipenuhi, kembali ke 1. Jika semua penawaran dan pemintaan sudah dipenuhi, solusi awal telah diperoleh. [6]

Setelah solusi awal diperoleh maka akan dilakukan pengujian optimalitas guna mengetahui apakah solusi awal yang sudah didapat merupakan solusi optimal atau masih perlu perbaikan untuk mencapai solusi optimal. Ada dua metode untuk melakukan uji optimalitas dari solusi awal, yaitu: [3]

1. Metode *Stepping Stone*

Metode ini menguji optimalitas pada solusi awal dengan cara perhitungan C_{ij} pada sel-sel kosong yang dilewati oleh jalur *Stepping Stone.* Selanjutnya membuat jalur tertutup untuk sel yang kosong, sedangkan untuk sel isi yang lain dipandang sebagai batu berpijak guna melangkah ke batu berikutnya. Pembuatan jalur tertutup ini adalah untuk membuat percobaan dalam mendistribusikan barang. Metode ini menggunakan tanda (+) diberikan pada sel kosong dan tanda (-) diberikan pada sel isi, berguna untuk penambahan dan pengurangan beban distribusi.

2. Metode MODI *(Modified Distribution)*

MODI menguji optimalitas tabel dengan menghitung *opportunity cost* pada setiap sel yang tidak terkena alokasi distribusi. Dalam hal ini, apabila sel-sel kosong memiliki *opportunity cost* positif maka tabel tersebut belum optimal, tabel akan optimal apabila *opportunity cost* pada sel-sel kosong bernilai negatif atau nol. Alogritma MODI untuk mencari solusi optimal dari masalah transportasi dengan langkah awal memberi harga nol pada R_1 $(R_1 = 0)$ yang selanjutnya adalah sebagai berikut:

Step 1. Menghitung nilai R_i , K_j, dan c_{ij}.

Step 2. Menghitung IP_{ij} untuk setiap sel kosong (Variabel non basis)**.**

Step 3. Mengidentifikasi nilai IP_{ij} pada sel kosong. Dimana jika nilai $(IP_{ij} \geq 0)$ maka iterasi selesai dan diperoleh solusi optimum. Jika $(IP_{ij} < 0)$ maka melakukan perbaikan alokasi pada IP_{ij} pada negatif terbesar.

Step 4. Perbaikan alokasi.

Dimana

Variabel basis : x_{ij} : $R_i + K_j = c_{ij}$

Variabel non basis : IP_{ij} =$c_{ij} - R_i - K_j$ (Indeks Perbaikan)

Keterangan:

R_i : Nilai multiplier pada setiap baris ke-*i*,

K_j : Nilai multiplier pada setiap kolom ke-*j*,

c_{ij} : Biaya distribusi per unit barang pada sel *ij*,

IP_{ij} : Indeks perbaikan pada variabel non basis.

Berikut akan diberikan contoh penyelesaian masalah transportasi seimbang dan tak seimbang dengan menggunakan Metode VAM dan MODI.

Contoh 2.1 Masalah transportasi kasus seimbang

Sebuah perusahaan produksi Mobil memiliki empat pabrik A, B, C, D dimana produksi per minggu masing-masing adalah 40, 35, 30, 25. Perusahaan memasok mobil ke 4 showroom X1, X2, X3, X4 yang permintaan per minggunya sebesar

40, 40, 30, 20. Dengan biaya pengiriman mobil dari pabrik ke showroom seperti dalam Tabel 2.2 berikut:

Tabel 2.2 Biaya Pengiriman Mobil Contoh 2.1

Pabrik	Showroom (dalam ribuan rupiah)			
	X1	X2	X3	X4
A	14	10	18	22
B	8	6	16	12
C	16	16	20	10
D	12	12	14	6

Berdasarkan permasalahan diatas dapat dibentuk model dan tabel transportasi sebagai berikut :

Variabel Keputusan :

x_{11} : Mobil yang akan dikirim dari Pabrik A ke showroom X1,

x_{12} : Mobil yang akan dikirim dari Pabrik A ke showroom X2,

x_{13} : Mobil yang akan dikirim dari Pabrik A ke showroom X3,

x_{14} : Mobil yang akan dikirim dari Pabrik A ke showroom X4,

x_{21} : Mobil yang akan dikirim dari Pabrik B ke showroom X1,

x_{22} : Mobil yang akan dikirim dari Pabrik B ke showroom X2,

x_{23} : Mobil yang akan dikirim dari Pabrik B ke showroom X3,

x_{24} : Mobil yang akan dikirim dari Pabrik B ke showroom X4,

x_{31} : Mobil yang akan dikirim dari Pabrik C ke showroom X1,

x_{32} : Mobil yang akan dikirim dari Pabrik C ke showroom X2,

x_{33} : Mobil yang akan dikirim dari Pabrik C ke showroom X3,

x_{34} : Mobil yang akan dikirim dari Pabrik C ke showroom X4,

x_{41} : Mobil yang akan dikirim dari Pabrik D ke showroom X1,

x_{42} : Mobil yang akan dikirim dari Pabrik D ke showroom X2,

x_{43} : Mobil yang akan dikirim dari Pabrik D ke showroom X3,

x_{44} : Mobil yang akan dikirim dari Pabrik D ke showroom X4.

Fungsi Tujuan :

Minimumkan $Z = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij}$

$$= 14x_{11} + 10x_{12} + 18x_{13} + 22x_{14} + 8x_{21} + 6x_{22} + 16x_{23} + 12x_{24} + 6x_{31} + 16x_{32} + 20x_{33} + 10x_{34} + 4x_{41} + 12x_{42} + 14x_{43} + 6x_{44}$$

Batasan persediaan : $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 40;$

$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 35;$

$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 30;$

$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 25.$

Batasa Permintaan : $x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 40;$

$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 40;$

$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 30;$

$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 20.$

$x_{ij} \geq 0$ untuk semua i dan j.

Tabel 2.3 Tabel Transportasi Contoh 2.1

Pabrik	Showroom (dalam ribuan rupiah)				Persediaan
	X1	X2	X3	X4	
A	14	10	18	22	40
B	8	6	16	12	35
C	16	16	20	10	30
D	12	12	14	6	25
Permintaan	40	40	30	20	130

Dari Tabel 2.3 terlihat bahwa permasalahan pada Contoh 2.1 merupakan masalah transportasi seimbang. Selanjutnya mencari solusi fisibel awal yang bisa dilakukan dengan metode VAM, dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Mengevalusi setiap baris dan kolom dengan mengurangkan elemen biaya terkecil dalam baris atau kolom dari biaya terkecil berikutnya dalam baris

atau kolom yang sama. Pada baris 1, dua sel yang memiliki biaya terkecil adalah sel (1,1) dan (1,2) dengan selisih biaya sebesar 4. Pada baris 2, dua sel yang memiliki biaya terkecil adalah sel (2,1) dan (2,2) dengan selisih biaya sebesar 2, demikian seterusnya hingga selisih 2 sel dengan biaya terkecil pada tiap baris dan kolomnya dihitung. Diperoleh hasil selisih 2 sel dengan biaya terkecil pada tiap baris dan kolom sebagai berikut:

i. Baris pertama = 4,
ii. Baris kedua = 2,
iii. Baris ketiga = 4,
iv. Baris keempat = 2,
v. Kolom pertama = 2,
vi. Kolom kedua = 4,
vii. Kolom ketiga = 2,
viii. Kolom keempat = 4,

2. Menentukan baris atau kolom hasil langkah 1 yang memiliki selisih terbesar. Jika terdapat lebih dari 1, maka memilih sembarang. Kemudian mengalokasikan persedian pada sel yang memiliki nilai terkecil pada baris atau kolom terpilih tersebut semaksimal mungkin. Berdasarkan hasil dari langkah 1 yang memiliki nilai terbesar adalah salah satunya kolom 2. Kemudian mengalokasikan semaksimal mungkin pada kolom kedua yang memiliki nilai sel terkecil, yaitu sel (2,2). Sehingga diperoleh Tabel 2.4 sebagai berikut:

Tabel 2.4 Tabel Reduksi Masalah Transportasi Contoh 2.1

Pabrik	Showroom (dalam ratusan ribu rupiah)				Persediaan
	X1	X2	X3	X4	
A	14	10	18	22	40
B	8	6 35	16	12	0
C	16	16	20	10	30
D	12	12	14	6	25
Permintaan	40	5	30	20	130

1. Membuat tabel transportasi baru dengan menandai baris atau kolom yang permintaan atau persediaannya telah habis
2. Dari Tabel 2.4 diperoleh tabel sebagai berikut:

Tabel 2.5 Tabel Masalah Transportasi Contoh 2.1

Pabrik	Showroom (dalam ribuan rupiah)				Persediaan
	X1	X2	X3	X4	
A	14	10	18	22	40
B	8	6 35	16	12	0
C	16	16	20	10	30
D	12	12	14	6	25
Permintaan	40	5	30	20	130

1. Mengulangi langkah 1-3 hingga semua permintaan dan persediaan habis. Diperoleh Tabel Akhir 2.6 untuk Contoh 2.1 sebagai berikut:

Tabel 2.6 Tabel Akhir dengan metode VAM Contoh 2.1

Pabrik	Showroom (dalam ribuan rupiah)				Persediaan
	X1	X2	X3	X4	
A	14 30	10 5	18 5	22	40
B	8	6 35	16	12	35
C	16 10	16	20	10 20	30
D	12	12	14 25	6	25
Permintaan	40	40	30	20	130

Selanjutnya menggunakan metode MODI untuk menguji keoptimalan dari hasil yang diperoleh pada metode VAM. Berdasarkan Tabel 2.4 terdapat 7 variabel basis, yaitu $c_{11} = 14$, $c_{12} = 10$, $c_{13} = 18$, $x_{22} = 6$, $x_{31} = 16, x_{34} = 10$, $x_{43} = 14$. Menghitung nilai r_i untuk masing-masing baris dan nilai k_j untuk masing – masing kolom dengan ketentuan $r_1 = 0$, kemudian substitusikan ke persamaan $r_i + k_j = c_{ij}$, sehingga diperoleh nilai r_i dan k_j adalah sebagai berikut:

$r_1 = 0;$ $k_1 = 14;$

$r_2 = -4;$ $k_2 = 10;$

$r_3 = -8;$ $k_3 = 18;$

$r_4 = -4;$ $k_4 = 18.$

Mencari nilai $c_{ij} - r_i - k_j$ untuk $x_{ij} = 0$, sehingga diperoleh nilai

$c_{14} - r_1 - k_4 = 22 - 0 - 18 = 4;$

$c_{21} - r_2 - k_1 = 8 - (-4) - 14 = -2;$

$c_{23} - r_2 - k_3 = 16 - (-4) - 18 = 2;$

$c_{24} - r_2 - k_4 = 12 - (-4) - 18 = -2;$

$c_{32} - r_3 - k_2 = 16 - (-8) - 10 = 14;$

$c_{33} - r_3 - k_3 = 20 - (-8) - 18 = 10;$

$c_{41} - r_4 - k_1 = 4 - (-4) - 14 = -6;$

$c_{42} - r_4 - k_2 = 12 - (-4) - 10 = 6;$

$c_{44} - r_4 - k_4 = 6 - (-4) - 18 = -8.$

Kemudian perhitungan $c_{ij} - r_i - k_j$ untuk $x_{ij} \geq 0$, diperoleh nilai

$c_{11} - r_1 - k_1 = 14 - 0 - 14 = 0;$

$c_{12} - r_1 - k_2 = 10 - 0 - 10 = 0;$

$c_{13} - r_1 - k_3 = 18 - 0 - 18 = 0;$

$$c_{22} - r_2 - k_2 = 6 - (-4) - 10 = 0;$$

$$c_{31} - r_3 - k_1 = 6 - (-8) - 14 = 0;$$

$$c_{34} - r_3 - k_4 = 10 - (-8) - 18 = 0;$$

$$c_{43} - r_4 - k_3 = 14 - (-4) - 18 = 0.$$

Karena terdapat $c_{ij} - r_i - k_j \leq 0$ untuk $x_{ij} = 0$ untuk maka solusi tersebut bukan merupakan solusi optimal dan membutuhkan revisi agar menghasilkan solusi optimal dengan mencari jalur terdekat untuk sel yang memiliki indeks perbaikan paling negative. Dan kemudian menempatkan tanda (+) dan (-) pada sudut jalur pengganti dengan tanda (+) pada sel kosong sebagai awal. Sel dengan biaya terkecil dalam tanda (-) pada jalur terdekat menunjukkan jumlah penugasan pada sel kosong yang akan masuk ke dalam pemecahan. Jumlah ini ditambahkan pada semua sel tanda (+) yang terdekat dan kurangkan pada sel yang bertanda (-). Terakhir hitunglah indeks perbaikan untuk pemecahan baru. Sehingga diperoleh Tabel 2.7 sebagai berikut:

Tabel 2.7 Tabel Solusi Fisibel Awal Contoh 2.1

Pabrik	Showroom (dalam ribuan rupiah)				Persediaan
	X1	X2	X3	X4	
A	14 30	10 5	18 5	22	40
B	8	6 35	16	12	35
C	16 10	16	20	10 20	30
D	12	12	14 25	6	25
Permintaan	40	40	30	20	130

Dengan variabel basis $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{22} + x_{31} + x_{34} + x_{43}$, dan

Variabel non basis $x_{14} + x_{21} + x_{23} + x_{24} + x_{32} + x_{33} + x_{41} + x_{42} + x_{44}$.

Selanjutnya mencari solusi optimal menggunakan metode MODI, dapat dicari dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Menghitung nilai multiplier r_i, k_j, dengan menggunakan $r_i + k_j = c_{ij}$

   Dari perhitungan saat mengecek keoptimalan solusi diperoleh hasil

$r_1 = 0;$	$k_1 = 14;$
$r_2 = -4;$	$k_2 = 10;$
$r_3 = -8;$	$k_3 = 18;$
$r_4 = -4;$	$k_4 = 18.$

2. Menghitung nilai $IP_{ij} = c_{ij} - r_i - k_j$ (Indeks Perbaikan) untuk $x_{ij} = 0$ (Variabel non basis).

   Saat pengecekan keoptimalan solusi pada contoh 2.1 diperoleh hasil

   $c_{14} - r_1 - k_4 = 22 - 0 - 18 = 4;$

   $c_{21} - r_2 - k_1 = 8 - (-4) - 14 = -2;$

   $c_{23} - r_2 - k_3 = 16 - (-4) - 18 = 2;$

   $c_{24} - r_2 - k_4 = 12 - (-4) - 18 = -2;$

   $c_{32} - r_3 - k_2 = 16 - (-8) - 10 = 14;$

   $c_{33} - r_3 - k_3 = 20 - (-8) - 18 = 10;$

   $c_{41} - r_4 - k_1 = 4 - (-4) - 14 = -6;$

   $c_{42} - r_4 - k_2 = 12 - (-4) - 10 = 6;$

   $c_{44} - r_4 - k_4 = 6 - (-4) - 18 = -8.$

3. Memilih sel yang memiliki nilai $IP_{ij} = c_{ij} - r_i - k_j$ negatif terbesar. Kemudian melakukan perubahan jalur pada sel tersebut dengan cara mengalokasikan sejumlah unit terkecil dari sel bertanda (-) dan menambahkan terhadap sel bertanda (+). Dari Langkah 1, diperoleh sel dengan $IP_{ij} = c_{ij} - r_i - k_j$ terkecil adalah sel (4,4). Maka perubahan pada sel tersebut ditunjukan seperti pada Tabel 2.8 berikut:

Tabel 2.8 Tabel Perubahan Masalah Transportasi Contoh 2.1

Pabrik	Showroom (dalam ribuan rupiah)				Persediaan
	X1	X2	X3	X4	
A	14 30 (-)	10 5	18 5 (+)	22	40
B	8	6 35	6	12	35
C	16 10 (+)	16	20	10 20 (-)	30
D	12	12	14 25 (-)	6 (+)	25
Permintaan	40	40	30	20	130

4. Mengulangi langkah 1-3, hingga indeks perbaikan (IP_{ij}) tidak ada yang bernilai negatif. Diperoleh Tabel Akhir 2.9 dari contoh 2.1 sebagai berikut:

Tabel 2.9 Tabel Akhir Masalah Transportasi Contoh 2.1

Pabrik	Showroom (dalam ribuan rupiah)				Persediaan
	X1	X2	X3	X4	
A	14	10 10	18 30	22	40
B	8	6 30	16	12 5	35
C	16 30	16	20	10	30
D	12 10	12	14	6 15	25
Permintaan	40	40	30	20	130

Dengan total biaya transportasi minimum adalah $z = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij}$

$$= 10(10) + 18(30) + 6(30) + 12(5) + 16(30) + 12(10) + 6(15)$$
$$= 1570.$$

Sehingga diperoleh biaya optimum dengan total biaya minimum yaitu 1570 dengan menggunakan metode VAM dan MODI.

Contoh 2.2 Masalah transportasi kasus seimbang

Sebuah perusahaan kendaraan bermotor ABC menghadapi permasalahan untuk mengangkut sepeda motor merk Y dan tiga buah distributor di kota X1,X2, dan X3 tersedia 100,120 dan 100 buah sepeda motor merk Y, sedangkan keempat cabangnya di kota A,B,C dan D membutuhkan 80,40,100 dan 80 buah sepeda motor merk Y, biasanya pengangkutan tersebut dilakukan dengan menggunakan truk yang berkapasitas 20 buah sepeda motor. Ongkos pertruk dari setiap distributor ke setiap cabangnya adalah sebagai berikut:

- Distributor di kota X1 ke cabangnya di kota A,B,C dan D masing-masing sebesar Rp.100.000,00, Rp.80.000,00, Rp.75.000,00 dan Rp.60.000,00
- Distributor di kota X2 ke cabangnya di kota A,B,C, dan D masinh-masing sebesar Rp.125.000,00, Rp.110.000,00, Rp.130.000,00 dan Rp.120.000,00
- Distributor di kota X3 ke cabangnya di kota A,B,C, dan D masing-masing sebesar Rp.75.000,00, Rp.90.000,00, Rp.115.000,00 dan Rp.120.000,00

Tabel 2.10 Tabel Biaya Pengiriman Contoh 2.2

Pabrik	Showroom (dalam ribuan rupiah)				Persediaan
	A	B	C	D	
X1	100 x_{11}	80 x_{12}	75 x_{13}	60 x_{14}	100
X2	125 x_{21}	110 x_{22}	130 x_{23}	120 x_{24}	120
X3	75 x_{31}	90 x_{32}	115 x_{33}	120 x_{34}	100
Permintaan	80	40	100	80	320 / 300

Dari Tabel 2.10 terlihat bahwa permasalahan tersebut merupakan masalah transportasi tidak seimbang Untuk menyeimbangkan ditambah sebuah agen semu 0 $\sum_{i-1}^{3} a_1 - \sum_{j-1}^{4} b_j = 320 - 300 = 20.$ Sehingga diperoleh Tabel 2.11 sebagai berikut:

Tabel 2.11 Tabel Transportasi Contoh 2.2

Pabrik	Showroom (dalam ribuan rupiah)					Persediaan
	A	B	C	D	Dummy	
X1	100 x_{11}	80 x_{12}	75 x_{13}	60 x_{14}	0 x_{15}	100
X2	125 x_{21}	110 x_{22}	130 x_{23}	120 x_{24}	0 x_{25}	120
X3	75 x_{31}	90 x_{32}	115 x_{33}	120 x_{34}	0 x_{35}	100
Permintaan	80	40	100	80	20	320 / 300

Selanjutnya mencari solusi fisibel awal yang bisa dilakukan dengan metode VAM, dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Mengevalusi setiap baris dan kolom dengan mengurangkan elemen biaya terkecil dalam baris atau kolom dari biaya terkecil berikutnya dalam baris atau kolom yang sama. Pada baris 1, dua sel yang memiliki biaya terkecil adalah sel (1,4) dan (1,5) dengan selisih biaya sebesar 60. Pada baris 2, dua sel yang memiliki biaya terkecil adalah sel (2,2) dan (2,5) dengan selisih biaya sebesar 110, dan seterusnya. Diperoleh hasil selisih 2 sel dengan biaya terkecil pada tiap baris dan kolom sebagai berikut:

   i. Baris pertama = 60, ii. Baris kedua = 110,

   iii. Baris ketiga = 75, iv. Kolom pertama= 25,

   v. Kolom kedua = 10, vi. Kolom ketiga= 40,

   vii. Kolom keempat = 60.

2. Menentukan baris atau kolom hasil langkah 1 yang memiliki selisih terbesar. Disini memilih baris kedua kemudian mengalokasikan semaksimal mungkin pada baris kedua yang memiliki nilai sel terkecil, yaitu sel (2,5). Sehingga diperoleh Tabel 2.12 sebagai berikut.

Tabel 2.12 Tabel Reduksi Contoh 2.2

Pabrik	Showroom (dalam ribuan rupiah)					Persediaan
	A	B	C	D	Dummy	
X1	100	80	75	60	0	100
X2	125	110	130	120	0 20	100
X3	75	90	115	120	0	100
Permintaan	80	40	100	80	0	320 / 300

3. Membuat tabel transportasi baru dengan menandai baris atau kolom yang permintaan atau persediaannya telah habis. Diperoleh Tabel 2.13 sebagai berikut:

Tabel 2.13 Tabel Masalah Transportasi Contoh 2.2

Pabrik	Showroom (dalam ribuan rupiah)					Persediaan
	A	B	C	D	Dummy	
X1	100	80	75	60	0	100
X2	125	110	130	120	0 20	100
X3	75	90	115	120	0	100
Permintaan	80	40	100	80	0	300 / 320

1. Mengulangi langkah 1-3 hingga semua permintaan dan persediaan habis. Sehingga diperoleh Tabel Akhir 2.14 sebagai berikut:

2. **Tabel 2.14** Tabel Akhir dari contoh 2.2 dengan metode VAM

Pabrik	Showroom (dalam ribuan rupiah)					Persediaan
	A	B	C	D	Dummy	
X1	100	80	75 20	60 80	0	0
X2	125	110 20	130 80	120	0 20	0
X3	75 80	90 20	115	120	0	0
Permintaan	0	0	0	0	0	300 320

Dengan alokasi optimal x_{13} = 20, x_{14}= 80, x_{22}= 20, x_{23}= 80, x_{35}= 20, x_{31}= 80 dan x_{32}= 20 maka total biaya minimumya sebesar :

$$Z = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{5} c_{ij} x_{ij} = 26700$$

Sehingga diperoleh biaya optimal dengan total biaya minimum yaitu 26700 dengan menggunakan metode VAM dan MODI.

BAB III

PEMBAHASAN

Masalah transportasi merupakan masalah cara pengiriman (distribusi) suatu jenis barang (item) dari beberapa sumber (lokasi penawaran) ke beberapa tujuan (lokasi permintaan) yang dapat meminimumkan biaya. Pada bab ini akan dibahas mengenai metode baru dalam menentukan solusi optimum pada masalah transportasi yaitu dengan metode *Cost Deviation* yang diusulkan oleh P. Pandian dan metode *Improved Cost Deviation* sebagai metode perbaikan dari metode *Cost Deviation*.

3.1 Metode Cost Deviation

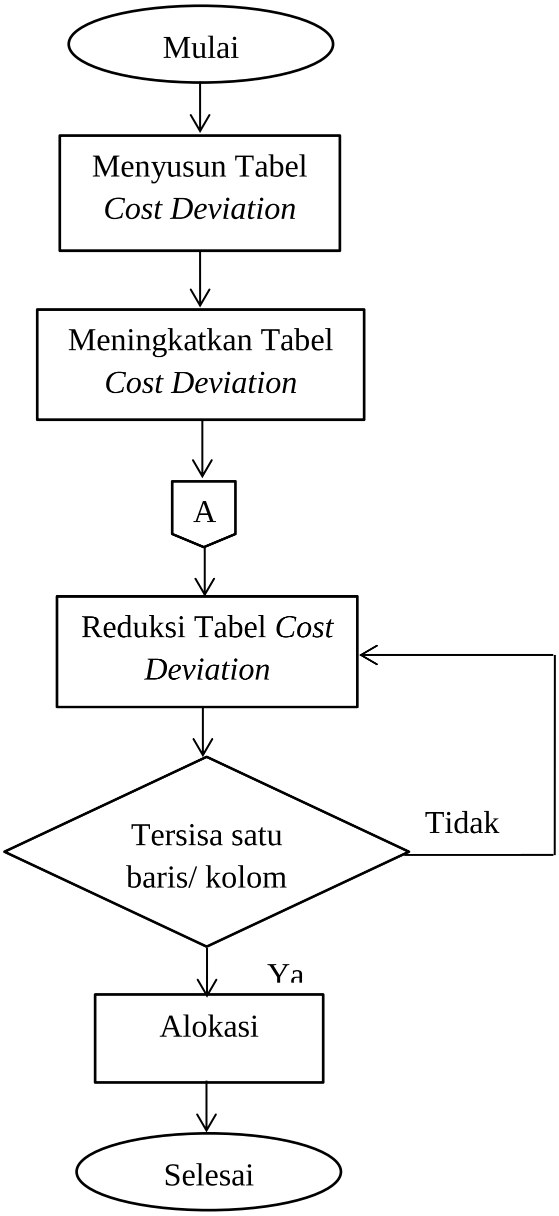
Masalah transformasi merupakan bagian penting dari managemen logistik dimana masalah transportasi berkaitan dengan transportasi produk tunggal yang diproduksi di pabrik yang berbeda (asal pasokan) ke sejumlah gudang yang berbeda (tujuan permintaan). Tujuan dari model transportasi adalah untuk menentukan jumlah yang akan dikirim dari masing-masing sumber ke masing-masing tujuan sehingga dapat mempertahankan permintaan pasokan dan permintaan dengan biaya transportasi terendah [3].

Untuk mendapatkan solusi pada masalah transportasi biasanya terdiri dari dua langkah, Langkah pertama dengan menentukan solusi fisibel awal dan langkah kedua dengan mengujinya dengan melakukan uji optimalisasi untuk mengetahui apakah biaya yang digunakan telah minimum atau tidak. Seiring dengan perkembangan zaman, munculah berbagai metode baru dalam menyelesaikan masalah transportasi tersebut. Salah satunya adalah metode *Cost Deviation* yang dicetuskan oleh P. Pandian pada tahun 2013.

Metode *Cost Deviation* merupakan terobosan terbaru dalam menyelesaikan masalah transportasi tanpa harus menentukan solusi fisibel awal, namun metode ini dapat secara langsung menemukan keoptimalan suatu masalah transportasi. Pada perhitungan metode *Cost Deviation* akan muncul pasangan $(p_{i,j}, t_{i,j})$ dimana $p_{i,j}$ adalah baris *Cost Deviation* , sedangkan $t_{i,j}$ adalah kolom *Cost Deviation*.

Kemudian pasangan-pasangan tersebut akan mengalami reduksi dari masing-masing baris dan kolomnya, hingga mengakibatkan muncul pasangan (0,0) yang memiliki biaya transportasi paling besar. Metode ini akan berhenti apabila hasil reduksi hanya tersisa satu baris/kolom saja.

Prosedur penyelesaian masalah Transportasi dengan metode *Cost Deviation* digambarkan pada Gambar 3.1 berikut ini.



Gambar 3.1 Diagram Alur Metode *Cost Deviation*

Pada Gambar 3.1 algortitma Metode *Cost Deviation* dalam menentukan solusi optimal pada masalah transportasi adalah sebagai berikut: [4]

Langkah 1 : Membuat Tabel Transportasi *Cost Deviation* yaitu membentuk suatu tabel transportasi *Cost Deviation* dari suatu masalah transportasi, dimana untuk masalah transportasi kasus minimum dengan biaya c_{ij} dan untuk masalah transportasi kasus maksimum biaya c_{ij} diubah menjadi $-c_{ij}$.

Kemudian mencari pasangan $(p_{i,j}, t_{i,j})$ dimana pasangan tersebut merupakan vektor *Cost Deviation*.

$p_{i,j} = c_{i,j} - r_i$.

Dimana $p_{i,j}$ adalah baris *Cost Deviation*, dan r_i adalah biaya minimum dari baris i.

$t_{i,j} = c_{i,j} - s_j$.

Dimana $t_{i,j}$ adalah kolom *Cost Deviation*, dan s_j adalah biaya minimum dari kolom j.

Langkah 2 : Membuat tabel transportasi baru untuk perhitungan selanjutnya dimana setiap masing-masing pasangan $(p_{i,j}, t_{i,j})$ pada setiap sel (i, j) dari hasil langkah 1 diperbaharui dengan rumus :

Untuk setiap $i = 1,2, \dots m$

$p_{i,j}$ baru = $p_{i,j} - \min\{p_{i,j} : untuk\ semua\ j\}$; untuk $j = 1,2, \dots n$

Untuk setiap $i = 1,2, \dots m$

$t_{i,j}$ baru = $t_{i,j} - \min\{t_{i,j} : untuk\ semua\ i\}$; untuk $i = 1,2, \dots m$

Langkah 3 : Mengidentifikasi Tabel Transportasi *Cost Deviation* yaitu sel yang memiliki nilai (0,0) yang diperoleh dari langkah 2.

Langkah 4 : Memilih sel yang bernilai (0,0) pada setiap baris ke i dan kolom ke j lalu kemudian mengalokasikan biaya persediaan terkecil ke sel dengan jumlah biaya pengiriman terbesar yang mungkin dengan melihat persediaan dan permintaan sel yang bersangkutan.

Langkah 5 : Pembentukan Tabel Transportasi *Cost Deviation* Baru yaitu membuat tabel transportasi baru untuk perhitungan selanjutnya dengan mengabaikan baris atau kolom yang permintaan atau persediaannya telah terpenuhi. Menjadi angka persediaan dan permintaan yang tidak sepenuhnya digunakan dan diterima.

Langkah 6 : Mengecek apakah tabel transportasi *Cost Deviation* baru memiliki minimal satu sel (0,0) pada setiap baris dan kolomnya, jika tersisa satu baris/kolom sel (0,0) maka melanjutkan perhitungan ke langkah 7, jika terdapat lebih dari satu sel (0,0) maka melanjutkan perhitungan ke langkah 8.

Langkah 7 : Mengalokasikan semua persediaan barang yang tersisa pada baris/kolom yang tersedia dan menghentikan perhitungan, kemudian ke langkah 9.

Langkah 8 : Mengulangi langkah ke-5 kemudian langkah ke-3 sedemikian sehingga semua permintaan dan semua persediaan habis.

Langkah 9 : Menyelesaikan perhitungan yang diperoleh dari langkah 7.

Berikut akan diberikan definisi terkait solusi fisibel dan solusi optimal pada masalah transportasi.

Definisi 3.1 [15] *Suatu himpunan non negatif dari alokasi* $x_{i,j}$ *yang memenuhi batasan baris dan kolom disebut solusi fisibel pada masalah transportasi.*

Contoh 3.1 Mencari solusi fisibel

	D1	D2	D3	Pesediaan
S1	(20)	(5)	(8)	(90)
S2	(15)	(20)	(10)	(60)
S3	(25)	(10)	(19)	(50)
Permintaan	(50)	(110)	(40)	(200)

Berdasarkan permasalahan pada Contoh 3.1 diatas dapat dibentuk model dan tabel transportasi.

Disini : X_{ij} = adalah banyaknya unit barang yang didistribusikan dari sumber i ke tujuan j. (i=1,2,…,n dan j = 1,2,…,m)

C_{ij} = harga transport barang per unit dari sumber i ke tujuan j.

S_i = kapasitas dari sumber ke-i.

D_j = banyaknya permintaan barang dari tujuan ke-j.

Meminimumkan $Z = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} C_{ij} X_{ij}$

$$= 20x_{11} + 5x_{12} + 8x_{13} + 15x_{21} + 20x_{22} + 10x_{23} + 25x_{31} + 10x_{32} + 19x_{33}$$

Dengan batasan:

Batasan persediaan:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 90$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 60$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 50$$

Batasan permintaan:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 50$$

$$x_{12} + 5x_{22} + 6x_{23} = 110$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 40$$

dan $x_{ij} \geq 0\ untuk\ semua\ i\ dan\ j$.

Untuk contoh permasalahan diatas dengan menggunakan VAM, pada akhir step 3 akan didapat tabel sebagai berikut:

	D1	D2	D3	Pesediaan
S1	(20)	(5)	(8)	(90)
S2	(15)	(20)	(10)	(60)
S3	X (25)	50 (10)	X (19)	(0)
Permintaan	(50)	(60)	(40)	(200)

Pada akhir step 4 akan didapatkan solusi fisibel awal sebagai berikut:

	D1	D2	D3	Pesediaan
S1	X (20)	60 (5)	30 (8)	(0)
S2	50 (15)	X (20)	10 (10)	(0)
S3	X (25)	50 (10)	X (19)	(0)
Permintaan	(0)	(0)	(0)	(0)

Dari tabel tersebut didapat hasil sebagai berikut:

$$Z = \sum\nolimits_{i=1}^{3} \sum\nolimits_{j=1}^{3} C_{ij} X_{ij} = 1890$$

Definisi 3.2 [15] *Sebuah solusi fisibel dikatakan solusi optimal jika solusi tersebut meminimalkan total biaya transportasi.*

Contoh 3.2 Mencari solusi optimal

	D1	D2	D3	Pesediaan
S1	(20)	(5)	(8)	(90)
S2	(15)	(20)	(10)	(60)
S3	(25)	(10)	(19)	(50)
Permintaan	(50)	(110)	(40)	(200)

Setelah solusi fisibel awal diperoleh, maka langkah berikutnya adalah mencari solusi akhir dengan menggunakan metode MODI.
Pada akhir step didapatkan tabel sebagai berikut:

	D1	D2	D3	Pesediaan
S1	(20)	60(5)	30(8)	(90)
S2	50(15)	(20)	10(10)	(60)
S3	(25)	50(10)	(19)	(50)
Permintaan	(50)	(110)	(40)	(200)

Dari tabel tersebut didapat hasil optimal sebagai berikut:

$$Z = \sum\nolimits_{i=1}^{3} \sum\nolimits_{j=1}^{3} C_{ij} X_{ij} = 1890$$

Teorema 3.1 [15] *Kondisi syarat perlu dan syarat cukup untuk eksistensi dari solusi fisibel untuk masalah transportasi adalah*

$$\sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{j=1}^{n} D_j .$$

Bukti :

a. **Kondisi syarat perlu**

Minimum $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$.

Dengan batasan

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = S_i$ dengan i = 1,2,…,m (3.1)

$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = D_j$ dengan j = 1,2,…,n (3.2)

$x_{ij} \geq 0$ untuk semua i dan j. (3.3)

Dari 3.1 dan 3.2 diperoleh

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} S_i \; dan \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} D_j,$$

Sehingga didapat,

$$\sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{j=1}^{n} D_j,$$

b. Kondisi syarat cukup

Diketahui $\sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{j=1}^{n} D_j$ dimana harus mendistribusikan setiap i sumber sebanding atau sama besar dengan permintaan dari semua tujuan. Diberikan $x_{ij} = \lambda_i D_j$ dimana λ_i adalah faktor proporsional untuk sumber i. Dimana *supply* harus didistribusikan semuanya.

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \lambda_i \sum_{j=1}^{n} D_j,$$

Maka

$$x_{ij} = \lambda_i D_j$$
$$= \frac{S_i}{\sum_{j=1}^{n} D_j} D_j.$$

a. Dibuktikan bahwa $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = S_i$, dengan $i = 1,2,\dots,m$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (\lambda_i D_j)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\left(\frac{S_i}{\sum_{j=1}^{n} D_j} \right) D_j \right)$$
$$= S_i \left(\frac{\sum_{j=1}^{n} D_j}{\sum_{j=1}^{n} D_j} \right)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = S_i.$$

b. Dibuktikan bahwa $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = D_j$, dengan $j = 1,2, \dots, n$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i D_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\left(\frac{S_i}{\sum_{j=1}^{n} D_j} \right) D_j \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{S_i}{\sum_{i=1}^{m} S_i} D_j \right)$$

$$= D_j \left(\frac{\sum_{i=1}^{m} S_i}{\sum_{i=1}^{m} S_i} \right)$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = D_j.$$

Karena memenuhi kondisi syarat cukup dan syarat perlu, maka terbukti bahwa setiap masalah transportasi memiliki solusi fisibel.

Dari Teorema 3.1, terlihat bahwa masalah transportasi memiliki solusi fisibel apabila masalah transportasi tersebut seimbang, yaitu memenuhi

$$\sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{j=1}^{n} D_j.$$

Untuk menjamin penyelesaian permasalahan transportasi seimbang dengan menggunakan metode *Cost Deviation* merupakan solusi yang optimal, diberikan Teorema berikut:

Teorema 3.2 [10] *Solusi yang diperoleh dari metode Cost Deviation terhadap masalah transportasi (P) merupakan solusi optimal.*

Bukti :

Diberikan masalah Transportasi sebagai berikut :

$$(P) meminimumkan\ Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}.$$

Kendala :

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$, $i = 1,2, \dots, m,$

$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$, $j = 1,2, \dots, n.$

dimana $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

$x_{ij} \geq 0$ untuk semua i dan j.

Berdasarkan langkah 1 hingga langkah 3 dari metode *Cost Deviation* ditemukan pasangan sel yang memiliki nilai (0,0). Diambil sembarang A sebagai vektor *Cost Deviation* yaitu sel yang memiliki nilai (0,0). Dari pemilihan penjatahan/pembagian barang pada langkah 4 dapat diobservasi bahwa biaya transportasi di setiap sel adalah biaya minimum, yang berhubungan pada kolomnya dan/atau pada barisnya, dimana angka persediaan digunakan secara keseluruhan dan/atau angka permintaan diterima secara keseluruhan.

Oleh karena itu, fungsi tujuan dari permasalahan Transportasi (P) dapat ditulis sebagai berikut:

$$z = \sum_{(i,j)\in A}\sum c_{ij}x_{ij} + \sum_{(i,j)\in K}\sum c_{ij}x_{ij}$$

Dimana $K = \{(i,j) : (i,j) \notin \text{A}\}$

Permasalahan transportasi (P) dapat dituliskan sebagai berikut:

(P) Meminimumkan $z = c(A)$ + Minimum z_1

Dimana $c(A)$ adalah total biaya transportasi yang diperoleh dari A yang memiliki pasangan bernilai (0,0), dan z_1 adalah fungsi tujuan dari hasil reduksi masalah transportasi yang diperoleh setelah mengaplikasikan langkah 7 pada masalah transportasi tersebut. Oleh karena itu, z_1 dalam masalah transportasi (P_1) dapat ditulis sebagai berikut:

(P_1) Minimumkan $z_1 = \sum_{i\in M_1}\sum_{j\in N_1} c_{ij}x_{ij}$

Dengan kendala :

$\sum_{j\in N_1} x_{ij} = a_i^1$, $i \in M_1$

$\sum_{i\in M_1} x_{ij} = b_j^1$, $j \in N_1$

$x_{ij} \geq 0$, untuk semua $i \in M_1$ dan $j \in N_1$ adalah bilangan bulat.

Dimana $M_1 \subseteq \{1,2,\dots,m\}$, $N_1 \subseteq \{1,2,\dots,n\}$ dan $M_1 \times N_1 \subseteq K$

Dengan menggunakan langkah 8, ke langkah 3 dan ke langkah 5 dari metode tersebut, dapat ditemukan sel yang bernilai (0,0). Diambil sembarang B sebagai vektor *Cost Deviation* atau pasangan sel (0,0).

Oleh karena itu, fungsi tujuan masalah transportasi (P_1) dapat ditulis sebagai berikut.

$$z_1 = \sum_{(i,j)\in B}\sum c_{ij}x_{ij} + \sum_{(i,j)\in J}\sum c_{ij}x_{ij}$$

Dimana $J = \{(i,j) : (i,j) \notin \mathrm{B}\}$

Permasalahan transportasi (P_1) dapat dituliskan sebagai berikut.

(P_1) Minimumkan z_1 = c(B) + Minimum z_2

Dimana c(B) adalah total biaya transportasi yang diperoleh dari elemen B yang memiliki pasangan (0,0). Dan z_2 adalah fungsi tujuan dari hasil reduksi masalah transportasi yang diperoleh setelah mengaplikasikan langkah 7 pada masalah transportasi tersebut. Oleh karena itu, z_2 pada masalah transportasi (P_2) dapat ditulis sebagai berikut.

(P_2) Minimumkan $z_2 = \sum_{i\in M_2}\sum_{j\in N_2} c_{ij}x_{ij}$

Kendala :

$\sum_{j\in N_2} x_{ij} = a_i^2 \qquad , i \in M_2$

$\sum_{i\in M_2} x_{ij} = b_j^2 \qquad , j \in N_2$

$x_{ij} \geq 0$, untuk semua $i \in M_2$ dan $j \in N_2$ adalah bilangan bulat.

Dimana $M_2 \subseteq M_1 \cap \{1,2,\dots,m\}$, $N_2 \subseteq N_1 \cap \{1,2,\dots,n\}$ dan $M_2 \times N_2 \subseteq J$

Proses reduksi tersebut akan terus berlanjut hingga biaya transportasi yang tidak teralokasikan hanya tersisa satu kolom/baris saja.

Hingga akhirnya diperoleh pasangan solusi $\{x_{rs}^{\circ}, x_{pq}^{\circ}, \dots, x_{ab}^{\circ}, x_{cd}^{\circ}\}$ dari masalah transportasi (P) yang menggunakan metode *Cost Deviation* dimana $z = c_{rs}x_{rs}^{\circ} + c_{pq}x_{pq}^{\circ} + \dots + c_{ab}x_{ab}^{\circ} + c_{cd}x_{cd}^{\circ}$ adalah minimum.

Karena itu solusi dari metode *Cost Deviation* $\{x_{rs}^{\circ}, x_{pq}^{\circ}, \dots, x_{ab}^{\circ}, x_{cd}^{\circ}\}$ merupakan solusi yang optimal dari masalah transportasi yang diberikan (P).

Algoritma yang diberikan oleh metode *Cost Deviation,* dapat menyelesaikan masalah transportasi yang tidak seimbang secara langsung tanpa harus menambahkan kolom/baris tambahan (*dummy*). Sehingga masalah transportasi yang tidak seimbang dapat diselesaikan langsung tanpa harus menyeimbangkan terlebih dahulu masalah transportasi tersebut [3].

Contoh 3.3

Suatu perusahaan mempunyai tiga pabrik di W, H, O. Dengan kapasitas produksi tiap bulan masing- masing 90 ton, 60 ton, dan 50 ton; dan mempunyai tiga gudang penjualan di A, B, C dengan kebutuhan tiap bulan masing- masing 50 ton, 110 ton, dan 40 ton. Biaya pengangkutan setiap ton produk dari pabrik W, H, O ke gudang A, B, C adalah sebagai berikut:

Tabel 3.1 Tabel Pengiriman Produk Contoh 3.3

Dari	Biaya tiap ton (dalam ribuan rupiah)		
	Gedung A	Gedung B	Gedung C
W	20	5	8
H	25	20	10
O	15	10	19

Berdasarkan permasalahan contoh 3.3 dapat dibentuk model dan Tabel 3.2 sebagai berikut :

Variabel Keputusan :

x_{11} : Barang yang akan dikirim dari Pabrik W ke gedung A

x_{12} : Barang yang akan dikirim dari Pabrik W ke gedung B

x_{13} : Barang yang akan dikirim dari Pabrik W ke toko C

x_{21} : Barang yang akan dikirim dari Pabrik H ke gedung A

x_{22} : Barang yang akan dikirim dari Pabrik H ke gedung B

x_{23} : Barang yang akan dikirim dari Pabrik H ke gedung C

x_{31} : Barang yang akan dikirim dari Pabrik O ke gedung A

x_{32} : Barang yang akan dikirim dari Pabrik O ke toko B

x_{33} : Barang yang akan dikirim dari Pabrik O ke toko C

Fungsi Tujuan :

Minimumkan $Z = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} c_{ij} x_{ij}$

$$= 20x_{11} + 5x_{12} + 8x_{13} + 15x_{21} + 20x_{22} + 10x_{23} + 25x_{31} + 10x_{32} + 19x_{33}$$

Batasan persediaan : $x_{11} + x_{12} + x_{13} = 90,$

$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 60,$

$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 50.$

Batasan Permintaan : $x_{11} + x_{21} + x_{31} = 50,$

$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 110,$

$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 40,$

$x_{ij} \geq 0$ untuk semua i dan j.

Tabel 3.2 Tabel Transportasi Contoh 3.3

Pabrik	Toko (dalam ribuan rupiah)			Persediaan
	A	B	C	
W	20	5	8	90
H	15	20	10	60
O	25	10	19	50
Permintaan	50	110	40	200

Dari Tabel 3.2 diketahui bahwa masalah Transportasi (P) tersebut merupakan permasalahan transportasi yang seimbang. Dengan menggunakan metode *Cost Deviation* akan dicari biaya pengiriman yang minimal, berikut adalah langkah-langkah dari metode *Cost Deviation.*

Langkah 1

Membuat tabel *Cost Deviation* dari permasalahan Transpotasi Contoh 3.3, dengan cara mencari pasangan (p_{ij}, t_{ij}) atau disebut juga vektor *Cost Deviation*, dimana p_{ij} adalah sel baris *Cost Deviation* yang diperoleh dari sel biaya transportasi dikurangi nilai minimum transportasi sesuai barisnya dan t_{ij} adalah sel kolom *Cost Deviation* yang diperoleh dari biaya transportasi sel dikurangi nilai minimum transportasi sesuai kolomnya. Pada baris 1 dan kolom 1, diketahui nilai 5 merupakan biaya minimal pada kolom dan 15 pada baris tersebut, sehingga pada sel (1,1) diperoleh hasil (20-5,20-15) = (15,5). Pada baris 2 dan kolom 2, diketahui nilai 5 merupakan biaya minimal pada kolom dan 10 pada baris tersebut, sehingga pada sel (2,2) diperoleh hasil (20-5,20-10) = (15,10). Perhitungan ini terus dilakukan hingga semua sel telah tereduksi. Dan diperoleh Tabel 3.3sebagai berikut:

Tabel 3.3 Tabel *Cost Deviation* Contoh 3.3

Pabrik	Toko (dalam ribuan rupiah)			Persediaan
	W	X	Y	
A	20 (15,5)	5 (0,0)	8 (3,0)	90
B	15 (5,0)	20 (10,15)	10 (0,2)	60
C	25 (15,10)	10 (0,5)	19 (9,11)	50
Permintaan	50	110	40	200

Langkah 2

Meningkatkan Tabel *Cost Deviation* yaitu mencari (P_{ij},T_{ij}),

Pada (P_{11}, T_{11}) $baru$ diperoleh :

$P_{11}\ baru\ = P_{11} - min\{P_{11}, P_{21}, P_{31}\} = P_{11} - \min\{15; 5; 15\} = (15 - 5) = 10,$

$T_{11}\ baru = T_{11} - min\ \{T_{11}, T_{12}, T_{13}\} = T_{13} - \min\{5; 0; 0\} = (5 - 0) = 5.$

Sehingga pasangan Cost Deviation yang (P_{11}, T_{11}) baru $= (10{,}5)$.

Perhitungan terus dilakukan hingga semua sel telah ditingkatkan. Sehingga diperoleh Tabel 3.4 sebagai berikut:

Tabel 3.4 Tabel Peningkatan *Cost Deviation* contoh 3.3

Pabrik	Gudang (dalam ribuan rupiah)			Persediaan
	A	B	C	
W	20 (10,5)	5 (0,0)	8 (3,0)	90
H	15 (0,0)	20 (10,15)	10 (0,2)	60
O	25 (5,5)	10 (0,0)	19 (9,6)	50
Permintaan	50	110	40	200

Langkah 3

Mengidentifikasi dari masing-masing sel, yang memiliki nilai (0,0) yang diperoleh setelah melakukan langkah 2.

Dari Tabel 3.4 telah teridentifikasi bahwa sel (1,2) dengan biaya 5 sel (2,1) dengan biaya 15, sel (3,2) dengan biaya 10 memiliki nilai sel (0,0).

Langkah 4

Memilih sel yang memiliki nilai (0,0) satu per satu dari biaya pengiriman yang tertinggi ke biaya pengiriman terkecil dan membagikan persediaan barang yang mampu dialokasikan ke sel yang telah terpilih. Dari perhitungan langkah 3, biaya pengiriman masing-masing sel dari yang paling besar ke yang paling kecil berturut-turut adalah sel (2,1),(3,2),(1,2). Sehingga barang/persediaan akan dialokasikan pada sel yang memiliki biaya pengiriman 15, dimana dimiliki oleh sel (2,1). Oleh karena itu diperoleh Tabel 3.5 seperti berikut:

Tabel 3.5 Tabel Reduksi *Cost Deviation* Contoh 3.3

Pabrik	Gudang (dalam ribuan rupiah)			Persediaan
	W	X	Y	
A	20	5 60	8 (1,0)	30
B	15 50	20	10	10
C	25	10 50	19 (2,1)	0
Permintaan	0	0	40	

Langkah 6

Karena hasil reduksi dari perhitungan langkah 3 hanya tersisa 1 baris saja, maka membagikan saja sisa item yang tersedia pada sel tersebut, sehingga diperoleh Tabel 3.6 sebagai berikut:

Tabel 3.6 Tabel Solusi Optimal dari Metode *Cost Deviation*

Pabrik	Gudang (dalam ribuan rupiah)			Persediaan
	A	B	C	
W		20 5 60	8 30	90
H	50	15 20	10 10	60
O		25 10 50	19	50
Permintaan	50	110	40	200

Dari perhitungan masalah Transportasi dengan menggunakan metode *Cost Deviation*, diperoleh solusi biaya pengiriman minimal yaitu:

$$Z = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} c_{ij} x_{ij}$$

$$= 60(5) + 30(8) + 50(15) + 10(10) + 50(10)$$

$$= 300 + 240 + 750 + 100 + 500$$

$= 1890.$

Sedangkan penyelesaian dari masalah Transportasi Contoh 3.3 apabila menggunakan metode VAM dan MODI akan diperoleh Tabel Akhie 3.7 sebagai berikut.

Tabel 3.7 Solusi Fisibel Awal dengan Metode VAM Contoh 3.3

Pabrik	Gudang (dalam ribuan rupiah)			Persediaan
	A	B	C	
W	20	5 60	8 30	90
H	15 50	20	10 10	60
O	25	10 50	19	60
Permintaan	50	110	40	200

Diperoleh solusi fisibel awal dengan variabel basis adalah $x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{23}, x_{32}$, dan variabel non basis nya adalah $x_{11}, x_{22}, x_{31}, x_{33}$. Kemudian akan dilakukan pengecekan keoptimalan dari metode VAM dengan menggunakan MODI, diperoleh Tabel 3.8 sebagai berikut:

Tabel 3.8 Solusi Optimal dengan Metode MODI Contoh 3.3

Pabrik	Gudang (dalam ribuan rupiah)			Persediaan
	A	B	C	
W	20	5 60	8 30	90
H	15 50	20	10 10	60
O	25	10 50	19 2	50
Permintaan	50	110	40	200

Dengan total biaya transportasi minimum adalah:

$$Z = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_{ij}$$

$$= 20x_{11} + 5x_{12} + 8x_{13} + 15x_{21} + 20x_{22} + 10x_{23} + 25x_{31} + 10x_{32} + 19x_{33}$$

$$= 60(5) + 30(8) + 50(15) + 10(10) + 50(10)$$

$$= 300 + 240 + 750 + 100 + 500$$

$$= 1890.$$

Dari masalah transportasi pada Contoh 3.3 yang diselesaikan dengan menggunakan metode *Cost Deviation* ditemukan biaya total yang minimum, dan hasilnya sama seperti menggunakan metode VAM-MODI, hal ini menunjukkan bahwa perhitungan *Cost Deviation* pada Contoh 3.3 merupakan solusi optimal.

Berikut akan diberikan contoh masalah transportasi yang tidak seimbang yang kemudian akan diselesaikan menggunakan metode *Cost Deviation*.

Contoh 3.4

Berdasarkan contoh 2.2 masalah transportasi untuk kasus tidak seimbang yang akan diselesaikan menggunakan metode *Cost* Deviation diperoleh Tabel 3.9 sebagai berikut:

Tabel 3.9 Tabel Transportasi Contoh 3.4

Pabrik	Showroom (dalam ribuan rupiah)				Persediaan
	A	B	C	D	
X1	100	80	75	60	100
X2	125	110	130	120	120
X3	75	90	115	120	100
Permintaan	80	40	100	80	300 \ 320

Variabel keputusan :

x_{ij} = banyaknya tekstil yang akan dikirim dari pabrik i ke toko j dengan $i = 1,2,3$, dan $j = 1,2,3,4$

Minimumkan $Z = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij}$

$$= 100x_{11} + 80x_{12} + 75x_{13} + 60x_{14} + 125x_{21} + 110x_{22} + 130x_{23} + 120x_{24} + 75x_{31} + 90x_{32} + 115x_{33} + 120x_{34}$$

Batasan persediaan : $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 100,$

$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 120,$

$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 100,$

Batasa Permintaan : $x_{11} + x_{21} + x_{31} = 80,$

$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 40,$

$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 100,$

$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 80,$

$x_{ij} \geq 0$ untuk semua i dan j.

Berikut akan diselesaikan dengan menggunakan metode *Cost Deviation*.

Langkah 1

Membentuk Tabel *Cost Deviation*, dengan mencari pasangan (p_{ij}, t_{ij}) atau disebut dengan vektor *Cost Deviation*. dimana p_{ij} adalah sel baris *Cost Deviation* yang diperoleh dari sel biaya transportasi dikurangi nilai minimum transportasi sesuai barisnya dan t_{ij} adalah sel kolom *Cost Deviation* yang diperoleh dari biaya transportasi sel dikurangi nilai minimum transportasi sesuai kolomnya. Pada baris 1 dan kolom 1, diketahui nilai 75 merupakan biaya minimal pada kolom dan 60 pada baris tersebut, sehingga pada sel (1,1) diperoleh hasil (100-60,100-75) = (40,25). Pada baris 2 dan kolom 2, diketahui nilai 80 merupakan biaya minimal pada kolom dan 110 pada baris tersebut, sehingga pada sel (2,2) diperoleh hasil (110-110,110-80) = (0,30). Perhitungan terus dilakukan hingga semua sel tereduksi. Sehingga diperoleh Tabel 3.10 sebagai berikut:

Tabel 3.10 Tabel Metode *Cost Deviation* Contoh 3.4

Pabrik	Showroom (dalam ribuan rupiah)				Persediaan
	A	B	C	D	
X1	100 (40,25)	80 (20,0)	75 (15,0)	60 (0,0)	100
X2	125 (15,50)	110 (0,30)	130 (20,55)	120 (10,60)	120
X3	75 (0,0)	90 (15,10)	115 (40,40)	120 (45,60)	100
Permintaan	80	40	100	80	320 / 300

Langkah 2

Meningkatkan tabel Cost Deviation dimana setiap masing-masing sel *(i,j)* direformasi dengan rumus :

Untuk setiap $i = 1,2, \dots m$

$p_{i,j}$ baru = $p_{i,j} - \min\{p_{i,j} : untuk\ semua\ j\}$; untuk $j = 1,2, \dots n$

Untuk setiap $i = 1,2, \dots m$

$t_{i,j}$ baru = $t_{i,j} - \min\{t_{i,j} : untuk\ semua\ i\}$; untuk $i = 1,2, \dots m$

Pada (P_{11}, T_{11}) $baru$ diperoleh :

$P_{11}\ baru\ = P_{11} - min\{P_{11}, P_{21}, P_{31}\} = P_{11} - \min\{40; 15; 0\} = (40 - 0) = 40,$

$T_{11}\ baru = T_{11} - min\ \{T_{11}, T_{12}, T_{13}T_{14}\} = T_{13} - \min\{25; 0; 0; 0\} = (25 - 0) = 25.$

Sehingga pasangan Cost Deviation yang (P_{11}, T_{11}) baru $= (10,5)$.

Pada (P_{13}, T_{13}) $baru$ diperoleh :

$P_{13}\ baru\ = P_{13} - min\{P_{13}, P_{23}, P_{33}\} = P_{11}$ $-\min\{15; 20; 40\}$ = (15 - 15) = 0

$T_{13}\ baru = T_{13} - min\ \{T_{11}, T_{12}, T_{13}, T_{14}\} = T_{13} - \min\{25; 0; 0; 0\}$ = (0 - 0) = 0

Sehingga pasangan Cost Deviation yang (P_{11}, T_{11}) baru $= (0,0)$.

Perhitungan terus dilakukan hingga semua sel telah ditingkatkan. Sehingga diperoleh Tabel 3.11 sebagai berikut:

Tabel 3.11 Tabel Peningkatan Metode *Cost Deviation* Contoh 3.4

Pabrik	Showroom (dalam ribuan rupiah)				Persediaan
	A	B	C	D	
A	100 (40,25)	80 (20,0)	75 (0,0)	60 (0,0)	100
B	125 (15,20)	110 (0,0)	130 (5,25)	120 (10,30)	120
C	75 (0,0)	90 (15,10)	115 (25,40)	120 (45,60)	100
Permintaan	80	40	100	80	320 300

Langkah 3

Mengidentifikasi sel yang memiliki nilai (0,0) dari hasil langkah 2, yaitu diperoleh pada sel (1,3) , (1,4) , (2,2) dan (3,1).

Langkah 4

Memilih sel yang memiliki nilai (0,0) dengan biaya pengiriman masing-masing sel dari yang paling besar ke yang paling kecil berturut-turut adalah sel (2,2),(1,3),(3,3),(1,4). Sehingga barang/persediaan akan dialokasikan pada sel yang memiliki biaya pengiriman 110, dimana dimiliki oleh sel (2,2). Sehingga diperoleh Tabel 3.12 sebagai berikut:

Tabel 3.12 Tabel Reduksi Metode *Cost Deviation* Contoh 3.4

Pabrik	Showroom (dalam ribuan rupiah)				Persediaan
	A	B	C	D	
X1	100	80	75 100	60 0	0
X2	125	110 40	130	120 (10,30)	80
X3	75 80	90	115	120 (45,60)	20
Permintaan	0	0	0	80	320 300

Dari hasil perhitungan tersebut hanya tersisa satu kolom/baris maka langkah selanjutnya adalah mengalokasikan sisa persediaan yang tersisa, diperoleh Tabel Akhir 3.13 sebagai berikut:

Tabel 3.13 Tabel Akhir Metode *Cost Deviation* Contoh 3.4

Pabrik	Showroom (dalam ribuan rupiah)				Persediaan
	A	B	C	D	
X1	100	80	75 100	60	0
X2	125	110 40	130	120 60	20
X3	75 80	90	115	120 20	0
Permintaan	0	0	0	0	20 / 0

Namun karena permasalahan transportasi diatas merupakan transportasi yang tidak seimbang, maka terdapat barang yang tidak teralokasikan yaitu sebanyak 20 barang. Diperoleh solusi dari permasalahan transportasi Contoh 3.4 dengan menggunakan metode *Cost Deviation* sebesar:

$$Z = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij}$$

$$= 100x_{11} + 80x_{12} + 75x_{13} + 60x_{14} + 125x_{21} + 110x_{22} + 130x_{23} + 120x_{24} + 75x_{31} + 90x_{32} + 115x_{33} + 120x_{34}$$

$$= 100(75) + 40(110) + 60(120) + 80(75) + 20(120).$$

$$= 7500 + 4400 + 7200 + 6000 + 900 + 2400$$

$$= 27500$$

Namun apabila menggunakan metode MODI akan diperoleh hasil sebesar 26.700 yaitu lebih minimum dibandingkan metode *Cost Deviation*.

Dari permasalahan Transportasi Contoh 3.4 menunjukan bahwasanya tidak semua masalah transportasi yang tidak seimbang dapat dicari solusi optimalnya dengan menggunakan metode *Cost Deviation*.

3.2 Metode Improved Cost Deviation

Metode *Cost Deviation* sangat berguna dalam menentukan solusi optimal pada masalah transportasi karena metode ini memiliki step yang langsung optimum. Pada metode ini akan muncul paling sedikit satu angka nol pada masing-masing baris dan kolom pada tabel yang merupakan pasangan hasil reduksi baris dan kolom. Kemudian pada masing-masing baris dan kolom diberi indeks perngalokasian bergantung pada angka nol yang memiliki nilau persediaan terkecil. Kelemahan metode *Cost Deviation* pada beberapa kasus masalah transportasi tidak seimbang metode ini tidak selalu mendapatkan hasil yang optimal.

Sehingga penulis mengusulkan metode *Improved Cost Deviation* sebagai perbaikan metode *Cost Deviation* untuk mengoptimalkan beberapa masalah transportasi dengan menambahkan beberapa langkah baru ke dalam metode sebelumnya. Langkah-langkah pada Metode *Improved Cost Deviation* adalah sebagai berikut:

Langkah 1 : Membuat Tabel Transportasi *Improved cost deviation* yaitu membentuk suatu tabel transportasi *Improved Cost Deviation* dari suatu masalah transportasi, dimana untuk masalah transportasi kasus minimum dengan biaya c_{ij} dan untuk masalah transportasi kasus maksimum biaya c_{ij} diubah menjadi $-c_{ij}$. Kemudian mencari pasangan $(p_{i,j}, t_{i,j})$ dimana pasangan tersebut merupakan vektor *Improved Cost Deviation*.

$p_{i,j} = c_{i,j} - r_i$.

Dimana $p_{i,j}$ adalah baris *Improved Cost Deviation*, dan r_i adalah biaya minimum dari baris i.

$t_{i,j} = c_{i,j} - s_j$.

Dimana $t_{i,j}$ adalah kolom *Improved Cost Deviation*, dan s_j adalah biaya minimum dari kolom j.

Langkah 2 : Perbaikan Tabel Transportasi *Improved Cost Deviation* yaitu membuat tabel transportasi baru untuk perhitungan selanjutnya dimana setiap masing-masing pasangan $(p_{i,j}, t_{i,j})$ pada setiap sel (i, j) dari hasil langkah 1 diperbaharui dengan rumus :

Untuk setiap $i = 1,2, \dots m$

$p_{i,j}$ baru = $p_{i,j} - \min\{p_{i,j} : untuk\ semua\ j\}$; untuk $j = 1,2, \dots n$

Untuk setiap $i = 1,2, \dots m$

$t_{i,j}$ baru = $t_{i,j} - \min\{t_{i,j} : untuk\ semua\ i\}$; untuk $i = 1,2, \dots m$

Langkah 3 : Mengidentifikasi Tabel Transportasi *Improved Cost Deviation* yaitu sel yang memiliki nilai (0,0) yang diperoleh dari langkah 2

Langkah 4 : Mengecek Baris Persediaan dan Kolom Permintaan yaitu mengecek apakah nilai setiap baris persediaan kurang dari atau sama dengan jumlah permintaan pada kolom dengan melihat pada baris yang pasangan biaya tereduksinya bernilai (0,0). Mengecek apakah nilai setiap kolom permintaan kurang dari atau sama dengan jumlah persediaan pada baris dengan melihat pada kolom yang pasangan biaya tereduksinya bernilai (0,0). Jika syarat tersebut terpenuhi maka lanjutkan ke langkah 7. Jika tidak maka ke langkah 5.

$$a_i \leq \sum b_j , \forall i = 1, \dots , m$$

$$b_j \leq \sum a_i , \forall j = 1, \dots , n$$

Langkah 5 : Membuat Garis Horizontal dan Vertikal yaitu membuat garis horizontal dan vertikal seminimum mungkin pada baris dan kolom yang bernilai (0,0) sedemikian sehingga baris yang tidak memenuhi pada langkah ke 4 tidak tertutupi.

Langkah 6 : Memperbaiki pasangan sel (0,0) pada garis Horizontal dan Vertikal yaitu memilih biaya terkecil pada pasangan sel yang tidak di lewati oleh garis dengan memilih biaya terkecil dari sel dimana sel terpilih adalah sel yang memiliki nilai total terkecil dari jumlahan kedua entri pada selnya. Lalu mengurangi semua biaya pada sel yang tidak di lewati garis dengan biaya terpilih dan menambahkan pada setiap sel yang terlewati dua garis dengan biaya terpilih kemudian kembali ke langkah 4.

Dipilih sel (i, j) yaitu min$\{(i + j) | (i + j) \in L_0\}$

Dimana:

L_0 adalah sel yang dilewati oleh satu garis

L_1 adalah sel yang dilewati oleh satu garis

L_2 adalah sel yang dilewati oleh dua garis

Langkah 7 : Menetapkan indeks e pada sel yang bernilai (0,0) pada setiap baris ke i dan kolom ke j termasuk sel (0,0) yang terpilih pada sel (i, j).

Langkah 8 : Memilih pasangan sel (0,0) dengan indeks e terkecil dan mengalokasikan sel semaksimum mungkin dengan melihat persediaan dan permintaan sel yang bersangkutan. Jika terdapat indeks e terkecil yang sama (lebih dari satu) maka memilih sel-ij (sel yang memiliki indeks e terkecil yang sama) yang memiliki total nilai persedian dan permintaan terkecil. Jika pada fungsi tujuan hasil yang diperoleh belum optimal maka selanjutnya mengulang langkah 8 dengan memilih sel dengan indeks e terkecil. Jika terdapat nilai indeks e yang sama maka memilih indeks yang memiliki biaya pengiriman terkecil lalu ke langkah 9. Jika terdapat biaya yang sama maka memilih sel dengan biaya terkecil dan jumlah persediaan dan permintaannya terkecil.

Langkah 9 : Pembentukan Tabel Transportasi Baru yaitu membuat tabel transportasi baru untuk perhitungan selanjutnya dengan mengabaikan baris atau kolom yang permintaan atau persediaannya telah terpenuhi. Menjadi angka persediaan dan permintaan yang tidak sepenuhnya digunakan dan diterima.

Langkah 10 : Mengecek apakah tabel transportasi *Improved Cost Deviation* baru memiliki minimal satu sel (0,0) pada setiap baris dan kolomnya, jika memenuhi maka kembali ke langkah 7, jika tersisa satu baris atau satu kolom sel (0,0) maka melanjutkan perhitungan ke langkah 11, jika tidak memenuhi maka mengulangi langkah 2 sedemikian hingga semua persediaan dan permintaan habis

Langkah 11 : Menyelesaikan perhitungan yang diperoleh dari langkah 9 sedemikian sehingga semua permintaan terpenuhi dan semua persediaan habis.

Perbedaan Metode *Improved Cost Deviation* dengan Metode *Cost Deviation* adalah penambahan pada langkah 4,5,6,7 dan 8 dan menghapus langkah 7 pada Metode *Cost Deviation* .

Penyelesaian masalah transportasi tak seimbang dengan menggunakan Metode *Improved Cost Deviation* memberikan solusi yang optimal seperti teorema dibawah ini.

Diberikan masalah transportasi tak seimbang

$$(P_2)\ \min z = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

Dengan kendala

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \geq a_i, i = 1,2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j, j = 1,2, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1,2, \dots, m, j = 1,2, \dots, n$$

Teorema 3.3 *Solusi yang diperoleh dari metode Improved Cost Deviation untuk sembarang masalah transportasi tak seimbang transportasi* (P_2) *merupakan solusi optimal untuk masalah transportasi* (P_2)

Bukti :

Diambil sebarang masalah transportasi tak seimbang (P_2) (kasus $\sum_{j=1}^{m} a_i \leq \sum_{i=1}^{n} b_j$) dengan kasus fungsi tujuan meminimumkan . sedangkan kasus fungsi tujuan memaksimumkan analogi kasus fungsi tujuan meminimumkan.

Menurut Teorema 3.2 supaya mempunyai solusi fisibel maka dapat menyelesaikan masalah transportasi yang tidak seimbang secara langsung tanpa harus menambahkan kolom/baris tambahan (*dummy).* Diberikan masalah transportasi sebagai berikut :

$$(P_2)\ meminimumkan\ Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}.$$

Kendala :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i\ ,\ i = 1,2,\dots,m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j\ ,\ \ j = 1,2,\dots,n.$$

$x_{ij} \geq 0$ untuk semua i dan j.

Berdasarkan langkah 1 hingga langkah 3 dari metode *Improved Cost Deviation* ditemukan pasangan sel yang memiliki nilai (0,0). Diambil sembarang A sebagai vector *Cost Deviation* yaitu sel yang memiliki nilai (0,0). Dari langkah 4 dapat dilihat apakah nilai setiap persediaan kurang dari atau sama jumlah nilai permintaan dengan melihat pada baris yang biaya tereduksi nya bernilai 0 dan apakah nilai setiap permintaan kurang dari atau sama dengan jumlah nilai persediaan pada kolom yang biaya tereduksi nya bernilai 0, dengan kata lain

$$a_i \leq \sum b_j\ , \forall i = 1,\dots,m$$

$$b_j \leq \sum a_i\ , \forall j = 1,\dots,n$$

Apabila syarat di atas terpenuhi, maka dapat dilanjutkan dengan menentukan indeks pada setiap biaya tereduksi 0 pada pasangan sel (i,j) yang ada dengan menghitung banyaknya (0,0) pada baris ke-i dan kolom ke-j. Jika syarat tidak terpenuhi maka ke langkah 5 yaitu menarik garis horizontal dan vertikal seminimum mungkin dimana garis tersebut melewati sel yang bernilai (0,0). Dipilih sel (i,j) yaitu min$\{(i+j) | \ (i+j) \in L_0\}$

Dimana:

L_0 adalah sel yang dilewati oleh satu garis

L_1 adalah sel yang dilewati oleh satu garis

L_2 adalah sel yang dilewati oleh dua garis

Kemudian langkah 6 menjumlahkan sel yang dilewati dua garis dengan sel (i,j) terpilih dan mengurangi sel yang tidak dilewati garis dengan sel terpilih. Mengecek nilai setiap persediaan dan permintaan dengan mengulangi langkah 4 sedemikian hingga langkah 4 terpenuhi.

$$a_i \leq \sum b_j \,, \forall i = 1, \dots, m$$

$$b_j \leq \sum a_i \,, \forall j = 1, \dots, n$$

Untuk langkah 7 diperoleh sel pada tabel yang mana memiliki nilai (0,0) dengan indeks terkecil. Alokasikan nilai terkecil dari nilai persediaan dan permintaan yang mungkin pada sel tersebut. Apabila terdapat sel (0,0) yang memiliki nilai indeks yang sama, maka memilih sel dengan jumlah persediaan dan permintaannya terkecil $(a_i + b_j)$.

Oleh karena itu, fungsi tujuan dari permasalahan Transportasi tidak seimbang (P_2) dapat ditulis sebagai berikut:

$$z = \sum_{(i,j)\in A} \sum c_{ij} x_{ij} + \sum_{(i,j)\in K} \sum c_{ij} x_{ij}$$

Dimana $K = \{(i,j) : (i,j) \notin \mathrm{A}\}$

Permasalahan transportasi (P_2) dapat dituliskan sebagai berikut:

(P_2) Meminimumkan z = $c(A)$ + Minimum z_1

Dimana $c(A)$ adalah total biaya transportasi yang diperoleh dari A yang memiliki pasangan bernilai (0,0), dan z_1 adalah fungsi tujuan dari hasil reduksi masalah transportasi yang diperoleh setelah mengaplikasikan langkah 8 pada masalah transportasi tersebut. Oleh karena itu, z_1 dalam masalah transportasi (P_2) dapat ditulis sebagai berikut:

(P_2) Minimumkan $z_1 = \sum_{i\in M_1} \sum_{j\in N_1} c_{ij} x_{ij}$

Dengan kendala :

$\sum_{j\in N_1} x_{ij} = a_i^1 \qquad , i \in M_1$

$\sum_{i\in M_1} x_{ij} = b_j^1 \qquad , j \in N_1$

$x_{ij} \geq 0$, untuk semua $i \in M_1$ dan $j \in N_1$ adalah bilangan bulat.

Dimana $M_1 \subseteq \{1,2,\dots,m\}$, $N_1 \subseteq \{1,2,\dots,n\}$ dan $M_1 \times N_1 \subseteq K$

Dengan menggunakan langkah 10, ke langkah 2 dan ke langkah 9 dari metode tersebut, dapat ditemukan sel yang bernilai (0,0). Diambil sembarang B sebagai vektor *Cost Deviation* atau pasangan sel (0,0).

Oleh karena itu, fungsi tujuan masalah transportasi (P_2) dapat ditulis sebagai berikut:

$$z_1 = \sum_{(i,j)\in B} \sum c_{ij}x_{ij} + \sum_{(i,j)\in J} \sum c_{ij}x_{ij}$$

Dimana $J = \{(i,j) : (i,j) \notin \text{B}\}$

Permasalahan transportasi (P_2)dapat dituliskan sebagai berikut.

(P_2) Minimumkan z_1 = c(B) + Minimum z_2

Dimana c(B) adalah total biaya transportasi yang diperoleh dari elemen B yang memiliki pasangan (0,0). Dan z_2 adalah fungsi tujuan dari hasil reduksi masalah transportasi yang diperoleh setelah mengaplikasikan langkah 8 pada masalah transportasi tersebut. Oleh karena itu, z_2 pada masalah transportasi (P_2) dapat ditulis sebagai berikut.

(P_2) Minimumkan $z_2 = \sum_{i\in M_2} \sum_{j\in N_2} c_{ij}x_{ij}$

Kendala :

$\sum_{j\in N_2} x_{ij} = a_i^2$, $i \in M_2$

$\sum_{i\in M_2} x_{ij} = b_j^2$, $j \in N_2$

$x_{ij} \geq 0$, untuk semua $i \in M_2$ dan $j \in N_2$ adalah bilangan bulat.

Dimana $M_2 \subseteq M_1 \cap \{1,2,\dots,m\}$, $N_2 \subseteq N_1 \cap \{1,2,\dots,n\}$ dan $M_2 \times N_2 \subseteq J$

Proses reduksi tersebut akan terus berlanjut hingga biaya transportasi yang tidak teralokasikan hanya tersisa satu kolom/baris saja.

Hingga akhirnya diperoleh pasangan solusi $\{x_{rs}^\circ, x_{pq}^\circ, \dots, x_{ab}^\circ, x_{cd}^\circ\}$ dari masalah transportasi (P_2) yang menggunakan metode *Cost Deviation* dimana $z = c_{rs}x_{rs}^\circ + c_{pq}x_{pq}^\circ + \cdots + c_{ab}x_{ab}^\circ + c_{cd}x_{cd}^\circ$ adalah minimum.

Karena itu solusi dari metode *Cost Deviation* $\{x_{rs}^\circ, x_{pq}^\circ, \dots, x_{ab}^\circ, x_{cd}^\circ\}$ merupakan solusi yang optimal dari masalah transportasi yang diberikan (P_2).

Algoritma yang diberikan oleh metode *Cost Deviation* dapat menyelesaikan masalah transportasi yang tidak seimbang secara langsung tanpa harus menambahkan kolom/baris tambahan (*dummy)*. Sehingga masalah transportasi yang tidak seimbang dapat diselesaikan langsung tanpa harus menyeimbangkan terlebih dahulu masalah transportasi tersebut [4].

Contoh 3.5

Berdasarkan contoh 3.4 yang akan diselesaikan menggunakan Metode *Improved Cost Deviation* diperoleh hasil sebagai berikut:

Langkah 1

Membuat tabel *Cost Deviation* dari permasalahan Transpotasi Contoh 3.4 dengan cara mencari pasangan (p_{ij}, t_{ij}) atau disebut juga vektor *Cost Deviation*, dimana p_{ij} adalah sel baris *Cost Deviation* yang diperoleh dari sel biaya transportasi dikurangi nilai minimum transportasi sesuai barisnya dan t_{ij} adalah sel kolom *Cost Deviation* yang diperoleh dari biaya transportasi sel dikurangi nilai minimum transportasi sesuai kolomnya. Pada baris 1 dan kolom 1, diketahui nilai 5 merupakan biaya minimal pada kolom dan 15 pada baris tersebut, sehingga pada sel (1,1) diperoleh hasil (20-5,20-15) = (15,5). Perhitungan ini terus dilakukan hingga semua sel telah tereduksi. Dan diperoleh Tabel 3.14 sebagai berikut:

Tabel 3.14 Tabel *Improved Cost Deviation* Contoh 3.5

Pabrik	Toko (dalam ribuan rupiah)			Persediaan
	A	B	C	
W	20 (15,5)	5 (0,0)	8 (3,0)	90
H	15 (5,0)	20 (10,15)	10 (0,2)	60
O	25 (15,10)	10 (0,5)	19 (9,11)	50
Permintaan	50	110	40	200

Langkah 2

Meningkatkan Tabel *Cost Deviation* yaitu mencari (P_{ij},T_{ij}),

Pada (P_{11}, T_{11}) $baru$ diperoleh :

$P_{11}\ baru\ = P_{11} - min\{P_{11}, P_{21}, P_{31}\} = P_{11} - \min\{15; 5; 15\} = (15 - 5) = 10,$

$T_{11}\ baru = T_{11} - min\ \{T_{11}, T_{12}, T_{13}\} = T_{13} - \min\{5; 0; 0\} = (5 - 0) = 5.$

Sehingga pasangan Cost Deviation yang (P_{11}, T_{11}) baru $= (10{,}5)$.

Perhitungan terus dilakukan hingga semua sel telah ditingkatkan. Sehingga diperoleh Tabel 3.15 sebagai berikut:

Tabel 3.15 Tabel Peningkatan *Improved Cost Deviation*

Pabrik	Gudang (dalam ribuan rupiah)			Persediaan
	A	B	C	
W	20 (10,5)	5 (0,0)	8 (3,0)	90
H	15 (0,0)	20 (10,15)	10 (0,2)	60
O	25 (5,5)	10 (0,0)	19 (9,6)	50
Permintaan	50	110	40	200

Langkah 3

Mengidentifikasi dari masing-masing sel, yang memiliki nilai (0,0) yang diperoleh setelah melakukan langkah 2. Dari Tabel 3.4 telah teridentifikasi bahwa sel (1,2), sel (2,1), sel (3,2) memiliki nilai sel (0,0).

Langkah keempat:

1. Mengecek apakah nilai setiap baris persediaan kurang dari atau sama dengan jumlah permintaan pada kolom.
2. Mengecek apakah nilai setiap kolom permintaan kurang dari atau sama dengan jumlah persediaan pada baris.

Jika syarat terpenuhi maka melanjutkan ke langkah 7, jika tidak memenuhi maka ke langkah 5.

- $a_1 \leq b_2 = 90 \leq 110$
- $a_2 \leq b_1 = 60 \leq 50$
- $a_3 \leq b_2 = 50 \leq 110$
- $b_1 \leq a_2 = 50 \leq 60$
- $b_2 \leq a_1 + a_3 = 110 \leq 90 + 50$
- $b_3 \leq 0 = 40 \leq 0$

Terlihat bahwa syarat tidak memenuhi, maka selanjutnya ke langkah 5.

Langkah kelima:

Membuat garis horizontal dan vertikal seminimum mungkin pada baris dan kolom yang sel nya bernilai (0,0) sedemikian sehingga biaya yang tidak memenuhi pada langkah 4 tidak tertutupi. Sehingga diperoleh Tabel 3.16 sebagai berikut:

Tabel 3.16 Tabel Revisi *Improved Cost Deviation*

Pabrik	Gudang (dalam ribuan rupiah)			Persediaan
	A	B	C	
W	20 (10,5)	5 (0,0)	8 (3,0)	90
H	15 (0,0)	20 (10,15)	10 (0,2)	60
O	25 (5,5)	10 (0,0)	19 (9,6)	50
Permintaan	50	110	40	200

Langkah keenam:

Revisi angka nol pada garis horizontal dan vertikal, yaitu memilih sel yang memiliki nilai total terkecil dari jumlahan kedua entri pada selnya yang tidak dilewati oleh garis. Lalu mengurangi semua biaya pada sel yang tidak di lewati garis dengan biaya terpilih dan menambahkan pada setiap sel yang terlewati dua garis dengan biaya terpilih kemudian kembali ke langkah 4. Dimana sel terpilih adalah sel yg bernilai (3,0) Sehingga diperoleh Tabel 3.17 sebagai berikut:

Tabel 3.17 Tabel Perbaikan *Improved Cost Deviation*

Pabrik	Gudang (dalam ribuan rupiah)			Persediaan
	A	B	C	
W	20 (7,5)	5 (0,0)	8 (0,0)	90
H	15 (0,0)	20 (13,15)	10 (0,2)	60
O	25 (7,5)	10 (0,0)	19 (6,6)	50
Permintaan	50	110	40	200

Langkah keempat:

1. Mengecek apakah nilai setiap baris persediaan kurang dari atau sama dengan jumlah permintaan pada kolom.
2. Mengecek apakah nilai setiap kolom permintaan kurang dari atau sama dengan jumlah persediaan pada baris.

Jika syarat terpenuhi maka melanjutkan ke langkah 7, jika tidak memenuhi maka ke langkah 5.

- $a_1 \leq b_2 + b_2 = 90 \leq 110 + 40$
- $a_2 \leq b_1 = 60 \leq 50$
- $a_3 \leq b_2 = 50 \leq 110$
- $b_1 \leq a_2 = 50 \leq 60$
- $b_2 \leq a_1 + a_3 = 110 \leq 90 + 50$
- $b_3 \leq a_1 = 40 \leq 90$

Terlihat bahwa syarat tidak memenuhi, maka selanjutnya ke langkah 5.

Langkah kelima:

Membuat garis horizontal dan vertikal seminimum mungkin pada baris dan kolom yang sel nya bernilai (0,0) sedemikian sehingga biaya yang tidak memenuhi pada langkah 4 tidak tertutupi. Sehingga diperoleh Tabel 3.18 sebagai berikut:

Tabel 3.18 Tabel Revisi *Improved Cost Deviation*

Pabrik	Gudang (dalam ribuan rupiah)			Persediaan
	A	B	C	
W	20 (10,5)	5 (0,0)	8 (3,0)	90
H	15 (0,0)	20 (10,15)	10 (0,2)	60
O	25 (5,5)	10 (0,0)	19 (9,6)	50
Permintaan	50	110	40	200

Langkah keenam:

Revisi angka nol pada garis horizontal dan vertikal, yaitu memilih biaya terkecil dari sel dimana sel terpilih adalah sel yang memiliki nilai total terkecil dari jumlahan kedua entri pada selnya yang tidak dilewati oleh garis. Dimana sel terpilih adalah sel yg bernilai (3,0) Sehingga diperoleh Tabel 3.19 sebagai berikut:

Tabel 3.19 Tabel Perbaikan *Improved Cost Deviation*

Pabrik	Gudang (dalam ribuan rupiah)			Persediaan
	A	B	C	
W	20 (7,7)	5 (0,0)	8 (0,0)	90
H	15 (0,0)	20 (13,13)	10 (0,0)	60
O	25 (7,7)	10 (0,0)	19 (6,6)	50
Permintaan	50	110	40	200

Langkah keempat:

1. Mengecek apakah nilai setiap baris persediaan kurang dari atau sama dengan jumlah permintaan pada kolom.
2. Mengecek apakah nilai setiap kolom permintaan kurang dari atau sama dengan jumlah persediaan pada baris.

Jika syarat terpenuhi maka melanjutkan ke langkah 7, jika tidak memenuhi maka ke langkah 5.

- $a_1 \leq b_2 + b_2 = 90 \leq 110 + 40$
- $a_2 \leq b_1 + b_3 = 60 \leq 50 + 40$
- $a_3 \leq b_2 = 50 \leq 110$
- $b_1 \leq a_2 = 50 \leq 60$
- $b_2 \leq a_1 + a_3 = 110 \leq 90 + 50$
- $b_3 \leq a_1 + a_2 = 40 \leq 90 + 60$

Terlihat bahwa syarat memenuhi, maka selanjutnya ke langkah 7.

Langkah ketujuh:

indeks e adalah angka sel yang bernilai (0,0) pada baris ke$-i$ dan kolom ke$-j$ dan termasuk sel (0,0) yang terpilih pada sel$-ij$. Sehingga diperoleh Tabel 3.20 sebagai berikut:

Tabel 3.20 Tabel Indeks *Improved Cost Deviation*

Pabrik	Gudang (dalam ribuan rupiah)			Persediaan
	A	B	C	
W	(7,7)	0_3 (0,0)	0_3 (0,0)	90
H	0_2 (0,0)	(13,13)	0_3 (0,0)	60
O	(7,7)	0_2 (0,0)	(6,6)	50
Permintaan	50	110	40	200

Langkah kedelapan:

Memilih angka nol dengan indeks *e* terkecil dan mengalokasikan sel dengan jumlah yang mungkin dengan melihat persediaan dan permintaan sel yang bersangkutan. Karena terdapat lebih dari satu sel yang memiliki 0 dengan indeks terkecil, yaitu sel (2,1) dan (3,2) maka hitung jumlah semua permintaan dan persediaan pada baris *i* dan kolom *j* pada sel yang bersangkutan.

1. Pada sel (2,1) = 60 + 50 = 110
2. Pada sel (3,2) = 50 +110 = 160

Dari kedua sel diatas, sel (2,1) memiiki hasil penjumlahan terkecil sehingga alokasikan jumlah terbesar yang mungkin pada sel (2,1). Sehingga diperoleh Tabel 3.21 sebagai berikut:

Tabel 3.21 Tabel Reduksi *Improved Cost Deviation*

Pabrik	Gudang (dalam ribuan rupiah)			Persediaan
	A	B	C	
W	-	0_3 (0,0)	0_3 (0,0)	90
H	0_2 50	(13,13)	0_3 (0,0)	60
O	-	0_2 (0,0)	(6,6)	10
Permintaan	0	110	40	200

Langkah kesembilan:

Membuat tabel transportasi baru untuk perhitungan selanjutnya dengan mengabaikan baris atau kolom yang permintaan atau persediaannya telah terpenuhi. Sehingga diperoleh Tabel 3.22 sebagai berikut:

Tabel 3.22 Tabel Transportasi Baru *Improved Cost Deviation*

Pabrik	Gudang (dalam ribuan rupiah)			Persediaan
	A	B	C	
W	-	0_3 (0,0)	0_3 (0,0)	90
H	0_2 50	(13,13)	0_3 (0,0)	10
O	-	0_2 (0,0)	(6,6)	50
Permintaan	0	110	40	200

Langkah kesepuluh:

Mengecek apakah tabel transportasi *Cost Deviation* baru memiliki minimal satu sel (0,0) pada setiap baris dan kolomnya. Dari Tabel 3.22 terlihat bahwa terdapat paling sedikit satu sel (0,0) pada setiap kolom dan barisnya, maka selanjutnya ke langkah 7.

Langkah ketujuh:

indeks e adalah angka sel yang bernilai (0,0) pada baris ke$-i$ dan kolom ke$-j$ dan termasuk sel (0,0) yang terpilih pada sel$-ij$. Sehingga diperoleh Tabel 3.23 sebagai berikut:

Tabel 3.23 Tabel Indeks *Improved Cost Deviation*

Pabrik	Gudang (dalam ribuan rupiah)			Persediaan
	A	B	C	
W	-	0_3 (0,0)	0_3 (0,0)	90
H	15 50	(13,13)	0_2 (0,0)	60
O	-	0_2 (0,0)	(6,6)	50
Permintaan	0	110	40	200

Langkah kedelapan:

Memilih angka nol dengan indeks *e* terkecil, karena terdapat lebih dari satu sel yang memiliki 0 dengan indeks terkecil, yaitu sel (2,3) dan (3,2). Dari kedua sel diatas, sel (2,3) memiiki hasil penjumlahan terkecil sehingga alokasikan jumlah terbesar yang mungkin pada sel (2,3). Sehingga diperoleh Tabel 3.24 sebagai berikut:

Tabel 3.24 Tabel Reduksi *Improved Cost Deviation*

Pabrik	Gudang (dalam ribuan rupiah)			Persediaan
	A	B	C	
W	-	0_3 (0,0)	0_3 (0,0)	90
H	0_2 50	(13,13)	0_3 10	10
O	-	0_2 (0,0)	(6,6)	50
Permintaan	0	110	40	200

Langkah kesembilan:

Membuat tabel transportasi baru untuk perhitungan selanjutnya dengan mengabaikan baris atau kolom yang permintaan atau persediaannya telah terpenuhi.Sehingga diperoleh Tabel 3.25 sebagai berikut:

Tabel 3.25 Tabel Transportasi Baru *Improved Cost Deviation*

Pabrik	Gudang (dalam ribuan rupiah)			Persediaan
	A	B	C	
W	-	0_3 (0,0)	0_3 (0,0)	90
H	15 50	(13,13)	10 10	0
O	-	0_2 (0,0)	(6,6)	50
Permintaan	0	110	30	200

Mengulangi langkah ke 7 hingga 9 sedemikian sehingga semua sel tereduksi dan diperoleh Tabel Akhir 3.26 sebagai berikut:

Tabel 3.26 Tabel Solusi Optimal *Improved Cost Deviation*

Pabrik	Gudang (dalam ribuan rupiah)			Persediaan
	A	B	C	
W	20	5 60	8 30	90
H	15 50	20	10 10	60
O	25	10 50	19	50
Permintaan	50	110	40	200

Dari perhitungan masalah Transportasi dengan menggunakan metode *Improved Cost Deviation*, diperoleh solusi biaya pengiriman minimal yaitu

$Z = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} c_{ij} x_{ij}$

$= 20x_{11} + 5x_{12} + 8x_{13} + 15x_{21} + 20x_{22} + 10x_{23} + 25x_{31} + 10x_{32} + 19x_{33}$

$= 60(5) + 30(8) + 50(15) + 10(10) + 50(10)$

$= 300 + 240 + 750 + 100 + 500$

$= 1890.$

Sehingga diperoleh solusi optimal dengan menggunakan metode *Improved Cost Deviation* dengan biaya minimum pendistribusian barang sebesar 1890. Jika dibandingkan dengan menggunakan metode VAM dan MODI hasil yang diperoleh adalah sama.

Contoh 3.6

Berdasarkan contoh 2.2 untuk masalah transportasi kasus tidak seimbang yang akan diselesaikan menggunakan metode *Improved Cost Deviation* diperoleh Tabel 3.27 sebagai berikut:

Tabel 3.27 Tabel Transportasi

Pabrik	Showroom (dalam ribuan rupiah)				Persediaan
	A	B	C	D	
X1	100	80	75	60	100
X2	125	110	130	120	120
X3	75	90	115	120	100
Permintaan	80	40	100	80	300 / 320

Variabel keputusan :

x_{ij} = banyaknya tekstil yang akan dikirim dari pabrik i ke toko j dengan

$i = 1,2,3$, dan $j = 1,2,3,4$

Minimumkan $Z = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij}$

$$= 100x_{11} + 80x_{12} + 75x_{13} + 60x_{14} + 125x_{21} + 110x_{22} + 130x_{23} + 120x_{24} + 75x_{31} + 90x_{32} + 115x_{33} + 120x_{34}$$

Batasan persediaan : $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 100,$

$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 120,$

$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 100,$

Batasa Permintaan : $x_{11} + x_{21} + x_{31} = 80,$

$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 40,$

$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 100,$

$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 80,$

$x_{ij} \geq 0$ untuk semua i dan j.

Berikut akan diselesaikan dengan menggunakan Metode *Improved Cost Deviation*.

Langkah 1

Membuat tabel *Cost Deviation* dengan cara mencari pasangan (p_{ij}, t_{ij}) atau disebut juga vektor *Cost Deviation*, dimana p_{ij} adalah sel baris *Cost Deviation* yang diperoleh dari sel biaya transportasi dikurangi nilai minimum transportasi sesuai barisnya dan t_{ij} adalah sel kolom *Cost Deviation* yang diperoleh dari biaya transportasi sel dikurangi nilai minimum transportasi sesuai kolomnya. Pada baris 1 dan kolom 1, diketahui nilai 75 merupakan biaya minimal pada kolom dan 60 pada baris tersebut, sehingga pada sel (1,1) diperoleh hasil (100-60,100-75) = (40,25). Kemudian diketahui nilai minimal pada baris 2 adalah 110 dan nilai minimal pada kolom 1 adalah 75. Sehingga pada sel (1,2) diperoleh hasil (125-110,125-75) = (15,50). Perhitungan ini terus dilakukan hingga semua sel telah tereduksi. Dan diperoleh Tabel 3.28 sebagai berikut:

Tabel 3.28 Tabel Transportasi *Improved Cost Deviation*

Pabrik	Showroom (dalam ribuan rupiah)				Persediaan
	A	B	C	D	
X1	100 (40,25)	80 (20,0)	75 (15,0)	60 (0,0)	100
X2	125 (15,50)	110 (0,30)	130 (20,55)	120 (10,60)	120
X3	75 (0,0)	90 (15,10)	115 (40,40)	120 (45,60)	100
Permintaan	80	40	100	80	320 / 300

Langkah kedua:

Meningkatkan Tabel *Cost Deviation* yaitu mencari $(P_{ij}\ , T_{ij})$, dimana setiap masing-masing sel *(i,j)* direformasi dengan rumus :

P_{ij} baru = $P_{ij} - \min\{P_{ij} : untuk\ semua\ j\}$;

T_{ij} baru = $T_{ij} - \min\{T_{ij} :\ untuk\ semua\ i\}$.

Sehingga (P_{11}, T_{11}) *baru* diperoleh

$P_{11}\ baru = P_{11} - min\{P_{11}, P_{21}, P_{31}\} = P_{11} - \min\{40; 15; 0\} = (40 - 0) = 40,$

$T_{11}\ baru = T_{11} - min\ \{T_{11}, T_{12}, T_{13}, T_{14}\} = T_{11} - \min\{25; 0; 0; 0\}$= (25 – 0) = 25

Sehingga pasangan *Cost Deviation* yang (P_{11}, T_{11}) baru $= (40{,}25)$.

Kemudian pada $(P_{33}, T_{33})\ baru$ diperoleh

$P_{33}\ baru = P_{33} - \min\{P_{13}, P_{23}, P_{33}\} = P_{33} - \min\{15; 20; 40\}$= (40 - 15) = 25

$T_{33}\ baru = T_{33} - \min\{T_{31}, T_{32}, T_{33}, P_{34}\} = T_{33} - \min\{0; 10; 40; 60\}$= (40 - 0) = 40

Sehingga pasangan *Cost Deviation* yang (P_{33}, T_{33}) baru $= (25{,}40)$. Perhitungan tersebut terus dilakukan hingga seluruh sel telah ditingkatkan. Dan diperoleh Tabel 3.29 sebagai berikut:

Tabel 3.29 Tabel Peningkatan *Improved Cost Deviation*

Pabrik	Showroom (dalam ribuan rupiah)				Persediaan
	A	B	C	D	
X1	100 (40,25)	80 (20,0)	75 (0,0)	60 (0,0)	100
X2	125 (15,20)	110 (0,0)	130 (5,25)	120 (10,30)	120
X3	75 (0,0)	90 (15,10)	115 (25,40)	120 (45,60)	100
Permintaan	80	40	100	80	320 / 300

Langkah ketiga:

Mengidentifikasi dari masing-masing sel, yang memiliki nilai (0,0) yang diperoleh setelah melakukan langkah 2. Dari Tabel 3.29 telah teridentifikasi bahwa sel yang bernilai (0,0) adalah sel (1,3),(1,4),(2,2),(3,1). Terlihat bahwa setiap baris dan kolom memiliki paling sedikit satu sel yang bernilai (0,0) maka melanjutkan ke langkah 4.

Langkah keempat:

1. Mengecek apakah nilai setiap baris persediaan $a_i \leq \sum b_j$
2. Mengecek apakah nilai setiap kolom permintaan $b_j \leq \sum a_i$

Jika syarat terpenuhi maka melanjutkan ke langkah 7, jika tidak memenuhi maka ke langkah 5.

- $a_1 \leq b_3 + b_4 = 100 \leq 100 + 80$
- $a_2 \leq b_2 = 120 \leq 40$
- $a_3 \leq b_1 = 100 \leq 80$
- $b_1 \leq a_3 = 80 \leq 100$
- $b_2 \leq a_2 = 40 \leq 120$
- $b_3 \leq a_1 = 100 \leq 100$
- $b_4 \leq a_1 = 80 \leq 100$

Terlihat bahwa syarat tidak memenuhi, maka selanjutnya ke langkah 5.

Langkah kelima:

Membuat garis horizontal dan vertical seminimum mungkin pada baris dan kolom yang bernilai 0 sedemikian sehingga biaya yang tidak memenuhi pada langkah 4 tidak tertutupi. Sehingga diperoleh Tabel 3.30 sebagai berikut:

Tabel 3.30 Tabel Revisi *Improved Cost Deviation*

Pabrik	Showroom (dalam ribuan rupiah)				Persediaan
	A	B	C	D	
X1	100 (40,25)	80 (20,0)	75 (0,0)	60 (0,0)	100
X2	125 (15,20)	110 (0,0)	130 (5,25)	120 (10,30)	120
X3	75 (0,0)	90 (15,10)	115 (25,40)	120 (45,60)	100
Permintaan	80	40	100	80	320 / 300

Langkah keenam:

Revisi angka nol pada garis horizontal dan vertikal, yaitu memilih biaya terkecil dari sel dimana sel terpilih adalah sel yang memiliki nilai total terkecil dari jumlahan kedua entri pada selnya yang tidak dilewati oleh garis. Lalu mengurangi semua biaya pada sel yang tidak di lewati garis dengan biaya terpilih dan menambahkan pada setiap sel yang terlewati dua garis dengan biaya terpilih kemudian kembali ke langkah 4. Dimana sel terpilih adalah sel yg bernilai (5,25) Sehingga diperoleh Tabel 3.31 sebagai berikut:

Tabel 3.31 Tabel Perbaikan *Improved Cost Deviation*

Pabrik	Showroom (dalam ribuan rupiah)				Persediaan
	A	B	C	D	
X1	100 (45,50)	80 (25,25)	75 (0,0)	60 (0,0)	100
X2	125 (15,20)	110 (0,0)	130 (0,0)	120 (5,5)	120
X3	75 (0,0)	90 (15,10)	115 (20,15)	120 (40,35)	100
Permintaan	80	40	100	80	320 300

Langkah keempat:

1. Mengecek apakafah nilai setiap baris persediaan $a_i \leq \sum b_j$
2. Mengecek apakah nilai setiap kolom permintaan $b_j \leq \sum a_i$

   Jika syarat terpenuhi maka melanjutkan ke langkah 7, jika tidak memenuhi maka ke langkah 5.

   - $a_1 \leq b_3 + b_4 = 100 \leq 100 + 80$
   - $a_2 \leq b_2 + b_3 = 120 \leq 40 + 100$
   - $a_3 \leq b_1 = 100 \leq 80$
   - $b_1 \leq a_3 = 80 \leq 100$
   - $b_2 \leq a_2 = 40 \leq 120$
   - $b_3 \leq a_1 + a_2 = 100 \leq 100 + 120$
   - $b_4 \leq a_1 = 80 \leq 100$

Terlihat bahwa syarat tidak memenuhi, maka selanjutnya ke langkah 5.

Langkah kelima:

Membuat garis horizontal dan vertikal seminimum mungkin pada baris dan kolom yang bernilai 0. Sehingga diperoleh Tabel 3.32 sebagai berikut:

Tabel 3.32 Tabel Revisi *Improved Cost Deviation*

Pabrik	Showroom (dalam ribuan rupiah)				Persediaan
	A	B	C	D	
X1	100 (45,50)	80 (25,25)	75 (0,0)	60 (0,0)	100
X2	125 (15,20)	110 (0,0)	130 (0,0)	120 (5,5)	120
X3	75 (0,0)	90 (15,10)	115 (20,15)	120 (40,35)	100
Permintaan	80	40	100	80	320 300

Langkah keenam:

Revisi angka nol pada garis horizontal dan vertikal, dimana sel terpilih adalah sel yg bernilai (15,10) Sehingga diperoleh Tabel 3.33 sebagai berikut:

Tabel 3.33 Tabel Perbaikan *Improved Cost Deviation*

Pabrik	Showroom (dalam ribuan rupiah)				Persediaan
	A	B	C	D	
X1	100 (60,60)	80 (25,25)	75 (0,0)	60 (0,0)	100
X2	125 (30,30)	110 (0,0)	130 (0,0)	120 (5,5)	120
X3	75 (0,0)	90 (0,0)	115 (5,5)	120 (25,25)	100
Permintaan	80	40	100	80	320 300

Langkah keempat:

1. Mengecek apakah nilai setiap baris persediaan $a_i \leq \sum b_j$
2. Mengecek apakah nilai setiap kolom permintaan $b_j \leq \sum a_i$

   Jika syarat terpenuhi maka melanjutkan ke langkah 7, jika tidak memenuhi maka ke langkah 5.

   - $a_1 \leq b_3 + b_4 = 100 \leq 100 + 80$
   - $a_2 \leq b_2 + b_3 = 120 \leq 40 + 100$
   - $a_3 \leq b_1 + b_2 = 100 \leq 80 + 40$
   - $b_1 \leq a_3 = 80 \leq 100$
   - $b_2 \leq a_2 = 40 \leq 120$
   - $b_3 \leq a_1 + a_2 = 100 \leq 100 + 120$
   - $b_4 \leq a_1 = 80 \leq 100$

   Terlihat bahwa syarat memenuhi, maka selanjutnya ke langkah 7.

Langkah ketujuh:

indeks e adalah angka sel yang bernilai (0,0) pada baris ke$-i$ dan kolom ke$-j$ dan termasuk sel (0,0) yang terpilih pada sel$-ij$. Sehingga diperoleh Tabel 3.34 sebagai berikut:

Tabel 3.34 Tabel Indeks *Improved Cost Deviation*

Pabrik	Showroom (dalam ribuan rupiah)				Persediaan
	A	B	C	D	
X1	(60,60)	(25,25)	0_3 (0,0)	0_2 (0,0)	100
X2	(30,30)	0_3 (0,0)	0_3 (0,0)	(5,5)	120
X3	0_2 (0,0)	0_3 (0,0)	(5,5)	(25,25)	100
Permintaan	80	40	100	80	320 / 300

Langkah kedelapan:

Memilih angka nol dengan indeks e terkecil dan mengalokasikan sel dengan jumlah yang mungkin dengan melihat persediaan dan permintaan sel yang bersangkutan. Jika terdapat indeks e terkecil yang sama (lebih dari satu) maka memilih sel$-ij$ yang memiliki nilai persediaan dan permintaan terkecil. Karena terdapat lebih dari satu sel yang memiliki 0 dengan indeks terkecil, yaitu sel (1,4) dan (3,1) maka hitung jumlah semua permintaan dan persediaan pada baris i dan kolom j pada sel yang bersangkutan.

1. Pada sel (1,4) = 100 + 80 = 180
2. Pada sel (3,1) = 100 + 80 = 180

Kemudian memilih sel dengan hasil penjumlahan terkecil. Karena kedua sel memiliki total yang sama, maka bisa memilih salah satu nya. Disini akan dipilih sel (3,1). Sehingga diperoleh Tabel 3.35 sebagai berikut:

Tabel 3.35 Tabel Reduksi *Improved Cost Deviation*

Pabrik	Showroom (dalam ribuan rupiah)				Persediaan
	A	B	C	D	
X1	-	(25,25)	0_3 (0,0)	0_2 (0,0)	100
X2	-	0_3 (0,0)	0_3 (0,0)	(5,5)	120
X3	75 80	0_3 (0,0)	(5,5)	(25,25)	20
Permintaan	0	40	100	80	320 / 300

Langkah kesembilan:

Membuat tabel transportasi baru untuk perhitungan selanjutnya dengan mengabaikan baris atau kolom yang permintaan atau persediaannya telah terpenuhi. Menjadi angka persediaan dan permintaan yang tidak sepenuhnya digunakan dan diterima. Sehingga diperoleh Tabel 3.36 sebagai berikut:

Tabel 3.36 Tabel Transportasi Baru *Improved Cost Deviation*

Pabrik	Showroom (dalam ribuan rupiah)				Persediaan
	A	B	C	D	
X1	-	(25,25)	0_3 (0,0)	0_2 (0,0)	100
X2	-	0_3 (0,0)	0_3 (0,0)	(5,5)	120
X3	75 80	0_3 (0,0)	(5,5)	(25,25)	20
Permintaan	0	40	100	80	320 / 300

Langkah kesepuluh:

Mengecek apakah tabel transportasi *Cost Deviation* baru memiliki minimal satu sel (0,0) pada setiap baris dan kolomnya, Dari Tabel 3.36 terlihat bahwa terdapat paling sedikit satu sel (0,0) pada setiap kolom dan barisnya, maka selanjutnya ke langkah 7.

Langkah ketujuh:

indeks e adalah angka sel yang bernilai (0,0) pada baris ke$-i$ dan kolom ke$-j$ dan termasuk sel (0,0) yang terpilih pada sel$-ij$. Sehingga diperoleh Tabel 3.37 sebagai berikut:

Tabel 3.37 Tabel Indeks Transportasi *Improved Cost Deviation*

Pabrik	Showroom (dalam ribuan rupiah)				Persediaan
	A	B	C	D	
X1	-	(25,25)	0_3 (0,0)	0_2 (0,0)	100
X2	-	0_3 (0,0)	0_3 (0,0)	(5,5)	120
X3	75 80	0_2 (0,0)	(5,5)	(25,25)	20
Permintaan	0	40	100	80	320 / 300

Langkah kedelapan:

Memilih angka nol dengan indeks *e* terkecil dan mengalokasikan sel dengan jumlah yang mungkin dengan melihat persediaan dan permintaan sel yang bersangkutan. Karena terdapat lebih dari satu sel yang memiliki 0 dengan indeks terkecil, yaitu sel (1,4) dan (3,2) maka hitung jumlah semua permintaan dan persediaan pada baris *i* dan kolom *j* pada sel yang bersangkutan.

1. Pada sel (1,4) = 100 + 80 = 180
2. Pada sel (3,2) = 100 + 40 = 140

Kemudian memilih sel dengan hasil penjumlahan terkecil. Karena sel (3,2) memiliki nilai terkecil maka sel (3,2) menjadi sel terpilih. Sehingga diperoleh Tabel 3.38 sebagai berikut:

Tabel 3.38 Tabel Reduksi *Improved Cost Deviation*

Pabrik	Showroom (dalam ribuan rupiah)				Persediaan
	A	B	C	D	
X1	-	(25,25)	0_3 (0,0)	0_2 (0,0)	100
X2	-	0_3 (0,0)	0_3 (0,0)	(5,5)	120
X3	75 80	0_2 20	-	-	0
Permintaan	0	20	100	80	320 300

Langkah kesembilan:

Membuat tabel transportasi baru untuk perhitungan selanjutnya dengan mengabaikan baris atau kolom yang permintaan atau persediaannya telah terpenuhi. Menjadi angka persediaan dan permintaan yang tidak sepenuhnya digunakan dan diterima. Sehingga diperoleh Tabel 3.39 sebagai berikut:

Tabel 3.39 Tabel Transportasi Baru *Improved Cost Deviation*

Pabrik	Showroom (dalam ribuan rupiah)				Persediaan
	A	B	C	D	
X1	-	(25,25)	(0,0)	(0,0)	100
X2	-	(0,0)	(0,0)	(5,5)	120
X3	75 80	90 20	-	-	0
Permintaan	0	20	100	80	320 300

Langkah kesepuluh:

Mengecek apakah tabel transportasi *Cost Deviation* baru memiliki minimal satu sel (0,0) pada setiap baris dan kolomnya. Dari Tabel 3.39 terlihat bahwa terdapat paling sedikit satu sel (0,0) pada setiap kolom dan barisnya, maka selanjutnya ke langkah 7.

Langkah ketujuh:

indeks e adalah angka sel yang bernilai (0,0) pada baris ke$-i$ dan kolom ke$-j$ dan termasuk sel (0,0) yang terpilih pada sel$-ij$. Sehingga diperoleh Tabel 3.40 sebagai berikut:

Tabel 3.40 Tabel Indeks *Improved Cost Deviation*

Pabrik	Showroom (dalam ribuan rupiah)				Persediaan
	A	B	C	D	
X1	-	(25,25)	0_3 (0,0)	0_2 (0,0)	100
X2	-	0_2 (0,0)	0_3 (0,0)	(5,5)	120
X3	75 80	90 20	-	-	0
Permintaan	0	20	100	80	320 300

Langkah kedelapan:

Memilih angka nol dengan indeks e terkecil dan mengalokasikan sel dengan jumlah yang mungkin dengan melihat persediaan dan permintaan sel yang bersangkutan. Jika terdapat indeks e terkecil yang sama (lebih dari satu) maka memilih sel$-ij$ yang memiliki nilai persediaan dan permintaan terkecil. Karena terdapat lebih dari satu sel yang memiliki 0 dengan indeks terkecil, yaitu sel (1,4) dan (2,2) maka hitung jumlah semua permintaan dan persediaan pada baris i dan kolom j pada sel yang bersangkutan.

1. Pada sel (1,4) = 100 + 80 = 180
2. Pada sel (2,2) = 120 + 20 = 140

Kemudian memilih sel dengan hasil penjumlahan terkecil. Karena sel (2,2) memiliki nilai terkecil maka sel (2,2) menjadi sel terpilih. Sehingga diperoleh Tabel 3.41 sebagai berikut:

Tabel 3.41 Tabel Reduksi *Improved Cost Deviation*

Pabrik	Showroom (dalam ribuan rupiah)				Persediaan
	A	B	C	D	
X1	-	-	(0,0)	0_2 (0,0)	100
X2	-	20	(0,0)	(5,5)	100
X3	75 80	90 20	-	-	0
Permintaan	0	0	100	80	320 / 300

Langkah kesembilan:

Membuat tabel transportasi baru untuk perhitungan selanjutnya dengan mengabaikan baris atau kolom yang permintaan atau persediaannya telah terpenuhi. Menjadi angka persediaan dan permintaan yang tidak sepenuhnya digunakan dan diterima. Sehingga diperoleh Tabel 3.42 sebagai berikut:

Tabel 3.42 Tabel Transportasi Baru *Improved Cost Deviation*

Pabrik	Showroom (dalam ribuan rupiah)				Persediaan
	A	B	C	D	
X1	-	-	(0,0)	(0,0)	100
X2	-	110 20	(0,0)	(5,5)	100
X3	75 80	90 20	-	-	0
Permintaan	0	0	100	80	320 300

Langkah kesepuluh:

Mengecek apakah tabel transportasi *Cost Deviation* baru memiliki minimal satu sel (0,0) pada setiap baris dan kolomnya. Dari Tabel 3.41 terlihat bahwa terdapat paling sedikit satu sel (0,0) pada setiap kolom dan barisnya, maka selanjutnya ke langkah 7.

Langkah ketujuh:

indeks e adalah angka sel yang bernilai (0,0) pada baris ke$-i$ dan kolom ke$-j$ dan termasuk sel (0,0) yang terpilih pada sel$-ij$. Sehingga diperoleh Tabel 3.43 sebagai berikut:

Tabel 3.43 Tabel Indeks *Improved Cost Deviation*

Pabrik	Showroom (dalam ribuan rupiah)				Persediaan
	A	B	C	D	
X1	-	-	0_3 (0,0)	0_2 (0,0)	100
X2	-	110 20	0_2 (0,0)	(5,5)	100
X3	75 80	90 20	-	-	0
Permintaan	0	0	100	80	320 300

Langkah kedelapan:

Memilih angka nol dengan indeks e terkecil dan mengalokasikan sel dengan jumlah yang mungkin dengan melihat persediaan dan permintaan sel yang bersangkutan. Jika terdapat indeks e terkecil yang sama (lebih dari satu) maka memilih sel$-ij$ yang memiliki nilai persediaan dan permintaan terkecil. Karena terdapat lebih dari satu sel yang memiliki 0 dengan indeks terkecil, yaitu sel (1,4) dan (2,3) maka hitung jumlah semua permintaan dan persediaan pada baris i dan kolom j pada sel yang bersangkutan.

1. Pada sel (1,4) = 100 + 80 = 180
2. Pada sel (2,3) = 100 + 100 = 200

Kemudian memilih sel dengan hasil penjumlahan terkecil. Karena sel (1,4) memiliki nilai terkecil maka sel (1,4) menjadi sel terpilih. Sehingga diperoleh Tabel 3.44 sebagai berikut:

Tabel 3.44 Tabel Reduksi Improved Cost Deviation

Pabrik	Showroom (dalam ribuan rupiah)				Persediaan
	A	B	C	D	
X1	-	-	(0,0)	60 80	20
X2	-	110 20	(0,0)	-	100
X3	75 80	90 20	-	-	0
Permintaan	0	0	100	0	320 / 300

Langkah kesembilan:

Membuat tabel transportasi baru untuk perhitungan selanjutnya dengan mengabaikan baris atau kolom yang permintaan atau persediaannya telah terpenuhi. Menjadi angka persediaan dan permintaan yang tidak sepenuhnya digunakan dan diterima. Sehingga diperoleh Tabel 3.45 sebagai berikut:

Tabel 3.45 Tabel Transportasi Baru *Improved Cost Deviation*

Pabrik	Showroom (dalam ribuan rupiah)				Persediaan
	A	B	C	D	
X1	-	-	(0,0)	60 80	20
X2	-	110 20	(0,0)	-	100
X3	75 80	90 20	-	-	0
Permintaan	0	0	100	0	320 300

Langkah kesepuluh:

Dari Tabel 3.45 terlihat bahwa hanya tersisa satu baris maka selanjutnya membagikan saja sisa item yang tersedia pada sel tersebut. Sehingga diperoleh Tabel 3.46 sebagai berikut:

Tabel 3.46 Tabel Solusi Optimal Metode Improved *Cost Deviation*

Pabrik	Showroom (dalam ribuan rupiah)				Persediaan
	A	B	C	D	
X1	-	-	75 20	60 80	0
X2	-	110 20	130 80	-	20
X3	75 80	90 20	-	-	0
Permintaan	0	0	0	0	20 0

Dari perhitungan masalah Transportasi dengan menggunakan Metode Improved *Cost Deviation*, diperoleh solusi biaya pengiriman minimal yaitu:

$Z = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij}$

$= 75x_{13} + 60x_{14} + 110x_{22} + 130x_{23} + 75x_{31} + 90x_{32}$
$= 75(20) + 60(80) + 110(20) + 130(80) + 75(80) + 90(20)$
$= 26700$

Sehingga, solusi dengan menggunakan metode *Improved Cost Deviataion* dari Contoh 3.6 diperoleh biaya minimum pendistribusian barang sebesar 26700 dengan banyaknya persediaan barang yang tersisa adalah sebanyak 20 buah. Sedangkan penyelesaian dari masalah transportasi Contoh 3.6 dengan menggunakan metode VAM dan MODI akan diperoleh hasil 26700. Sehingga dengan metode *Improved Cost Deviation* diperoleh hasil yang optimum.

Tabel 3.47 Tabel Perbandingan Hasil Akhir
Metode VAM + MODI, *Cost Deviation* dan *Improved Cost Deviation*

Contoh	Baris	Kolom	VAM + MODI	CD	ICD	Solusi Optimal
Seimbang	3	3	670	670	670	670
	3	4	1890	1890	1890	1890
	4	3	1550	1550	1550	1550
	4	4	2770	2990	2770	2770
Tidak Seimbang	3	3	600	610	600	600
	3	4	26700	27500	26700	26700
	4	3	1500	1520	1500	1500
	4	4	3340	3370	3340	3340

Berikut akan diberikan permasalahan transportasi tidak seimbang dengan fungsi memaksimalkan.

Contoh 3.7

Seorang pedagang beras mempunyai 3 gudang di Cianjur, Cikampek, dan Sumedang, yang masing-masing menyimpan beras sebanyak 60, 80, dan 100 ton. Pedagang tersebut mempunyai daerah pemasaran di Bandung, Bogor, Jakarta, dan Cirebon yang masing-masing membutuhkan beras sebanyakk 40, 60, 80, dan 50 ton.

Ongkos angkut tiap ton beras dari

- Cianjur ke Bandung = Rp. 11.000,00
  ke Bogor = Rp. 12.000,00
  ke Jakarta = Rp. 13.000,00
  ke Cirebon = Rp. 14.000,00

- Cikampek ke Bandung = Rp. 14.000,00
  ke Bogor = Rp. 13.000,00
  ke Jakarta = Rp. 12.000,00
  ke Cirebon = Rp. 10.000,00

- Sumedang ke Bandung = Rp. 10.000,00
  ke Bogor = Rp. 10.000,00
  ke Jakarta = Rp. 12.000,00
  ke Cirebon = Rp. 11.000,00

bagaimanakah pengalokasian/ pendistribusian beras yang optimum, dan berapa ongkosnya?

Langkah 1

Membuat Tabel Transportasi seimbang, pada persoalan di atas masalah transportasinya adalah memaksimumkan maka biaya c_{ij} diubah menjadi $-c_{ij}$. Diperoleh Tabel 3.48 sebagai berikut:

Tabel 3.48 Tabel Transportasi Contoh 3.7

Sumber	Tujuan (dalam ribuan rupiah)				Persediaan
	Bandung	Bogor	Jakarta	Cirebon	
Cianjur	-11	- 12	-13	-14	60
Cikampek	-14	-13	-12	-10	80
Sumedang	-10	-12	-12	-11	100
Permintaan	40	60	80	50	240 / 230

Dengan mengikuti algoritma metode *Improved Cost Deviation* maka diperoleh Tabel akhir 3.49 sebagai berikut:

Tabel 3.49 Tabel Solusi Optimal Contoh 3.7

Sumber	Tujuan (dalam ribuan rupiah)				Persediaan
	Bandung	Bogor	Jakarta	Cirebon	
Cianjur	-	-	13 10	14 50	0
Cikampek	14 40	13 40	-	-	0
Sumedang		12 20	12 70	-	10
Permintaan	0	0	0	0	10 0

Dari perhitungan masalah Transportasi dengan menggunakan Metode *Improved Cost Deviation*, diperoleh solusi biaya pengiriman minimal yaitu:

$$
\begin{aligned}
Z &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij} \\
&= 13x_{13} + 14x_{14} + 14x_{21} + 13x_{22} + 12x_{32} + 12x_{33} \\
&= 1300(10) + 1400(50) + 1400(40) + 1300(40) + 1200(20) + 1200(70) \\
&= 2.990.000
\end{aligned}
$$

Sehingga solusi optimum dengan menggunakan metode *Improved Cost Deviataion* dari Contoh 3.7 diperoleh biaya minimum pendistribusian barang sebesar 2.990.000 dengan banyaknya persediaan yang tidak teralokasi adalah 10 buah.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan, dapat diambil kesimpulan bahwa metode *Cost Deviation* merupakan metode baru yang dapat menyelesaikan masalah transportasi. Metode ini memberikan langkah-langkah yang sederhana dan mendapatkan solusi optimal tanpa harus mencari solusi fisibel awal pada masalah transportasi. Pada masalah transportasi seimbang, hasil yang diperoleh dengan menggunakan metode *Cost Deviation* selalu optimal, namun pada masalah transportasi yang tidak seimbang hasil yang diperoleh dengan menggunakan metode *Cost Deviation* tidak selalu optimal. Sehingga di lakukan perbaikan pada metode *Cost Deviation* yaitu metode *Improved Cost Deviation* dimana pada metode baru ini dilakukan dengan menambahkan beberapa langkah baru, yaitu mengecek baris persediaan dan kolom permintaan pada sel yang bernilai (0,0) lalu membuat garis horizontal dan vertikal dimana garis tersebut melewati sel yang bernilai (0,0) dan merevisi angka nol pada garis horizontal dan vertikal tersebut, kemudian menentukan indeks pada masing-masing sel (0,0) termasuk sel (0,0) terpilih, dan kemudian mengalokasikan nilai yang mungkin dengan memilih sel yang memiliki nilai indeks terkecil. Sedangkan pada kasus maksmimum dan minimum, perbedaannya terletak pada langkah pertama, yaitu jika masalah transportasi merupakan kasus maksimum, maka diubah dahulu menjadi $-c_{ij}$. Pada masalah transportasi seimbang maupun tidak seimbang kasus maksimum maupun minimum dengan metode *Improved Cost Deviation* akan selalu memperoleh hasil optimal.

Lampiran 1

Penyelesaian kasus tidak seimbang dengan menggunakan metode *Improved Cost Deviation.* Karena kasus tersebut merupakan kasus maksimalisasi maka semua biaya harus dikali dengan (-1) sehingga masalah transportasi Contoh 3.7 dapat dituliskan sebagai berikut:

Sumber	Tujuan (dalam ribuan rupiah)				Persediaan
	Bandung	Bogor	Jakarta	Cirebon	
Cianjur	-11	- 12	-13	-14	60
Cikampek	-14	-13	-12	-10	80
Sumedang	-10	-12	-12	-11	100
Permintaan	40	60	80	50	240 / 230

Langkah 1 : Membuat Tabel *Improved Cost Deviation*

Sumber	Tujuan (dalam ribuan rupiah)				Persediaan
	Bandung	Bogor	Jakarta	Cirebon	
Cianjur	11 (3,3)	12 (2,1)	13 (1,0)	14 (0,0)	60
Cikampek	14 (0,0)	13 (1,0)	12 (2,1)	10 (4,4)	80
Sumedang	10 (2,4)	12 (0,1)	12 (0,1)	11 (1,3)	100
Permintaan	40	60	80	50	240 / 230

Langkah kedua: Meningkatkan Tabel *Improved Cost Deviation*

Sumber	Tujuan (dalam ribuan rupiah)				Persediaan
	Bandung	Bogor	Jakarta	Cirebon	
Cianjur	11 (3,3)	12 (2,1)	13 (1,0)	14 (0,0)	60
Cikampek	14 (0,0)	13 (1,0)	12 (2,1)	10 (4,4)	80
Sumedang	10 (2,3)	12 (0,0)	12 (0,0)	11 (1,2)	100
Permintaan	40	60	80	50	240 / 230

Langkah ketiga: Mengindentifikasi sel yang bernilai (0,0)

Telah teridentifikasi bahwa sel yang bernilai (0,0) adalah sel (1,4),(2,1),(3,2),(3,3). Terlihat bahwa setiap baris dan kolom memiliki paling sedikit satu sel yang bernilai (0,0) maka melanjutkan ke langkah 4.

Langkah keempat: Mengecek baris persediaan dan kolom permintaan

1. Mengecek apakah nilai setiap baris persediaan $a_i \leq \sum b_j$
2. Mengecek apakah nilai setiap kolom permintaan $b_j \leq \sum a_i$

   Jika syarat terpenuhi maka melanjutkan ke langkah 7, jika tidak memenuhi maka ke langkah 5.

   - $a_1 \leq b_4 = 60 \leq 50$
   - $a_2 \leq b_1 = 80 \leq 40$
   - $a_3 \leq b_2 + b_3 = 100 \leq 60 + 80$
   - $b_1 \leq a_2 = 40 \leq 80$
   - $b_2 \leq a_3 = 60 \leq 100$
   - $b_3 \leq a_3 = 80 \leq 100$
   - $b_4 \leq a_1 = 50 \leq 60$

Terlihat bahwa syarat tidak memenuhi, maka selanjutnya ke langkah 5.

Langkah kelima: Membuat garis horizontal dan vertikal

Sumber	Tujuan (dalam ribuan rupiah)				Persediaan
	Bandung	Bogor	Jakarta	Cirebon	
Cianjur	11 (3,3)	12 (2,1)	13 (1,0)	14 (0,0)	60
Cikampek	14 (0,0)	13 (1,0)	12 (2,1)	10 (4,4)	80
Sumedang	10 (2,3)	12 (0,0)	12 (0,0)	11 (1,2)	100
Permintaan	40	60	80	50	240 / 230

Langkah keenam: Memperbaiki sel

Sumber	Tujuan (dalam ribuan rupiah)				Persediaan
	Bandung	Bogor	Jakarta	Cirebon	
Cianjur	11 (4,3)	12 (2,1)	13 (1,0)	14 (0,0)	60
Cikampek	14 (0,0)	13 (0,0)	12 (1,1)	10 (3,4)	80
Sumedang	10 (3,3)	12 (0,0)	12 (0,0)	11 (1,2)	100
Permintaan	40	60	80	50	240 / 230

Langkah keempat: Mengecek baris persediaan dan kolom permintaan

1. Mengecek apakah nilai setiap baris persediaan $a_i \leq \sum b_j$
2. Mengecek apakah nilai setiap kolom permintaan $b_j \leq \sum a_i$

   Jika syarat terpenuhi maka melanjutkan ke langkah 7, jika tidak memenuhi maka ke langkah 5.

   - $a_1 \leq b_4 = 60 \leq 50$
   - $a_2 \leq b_1 + b_2 = 80 \leq 40 + 60$

- $a_3 \leq b_2 + b_3 = 100 \leq 60 + 80$
- $b_1 \leq a_2 = 40 \leq 80$
- $b_2 \leq a_2 + a_3 = 60 \leq 80 + 100$
- $b_3 \leq a_3 = 80 \leq 100$
- $b_4 \leq a_1 = 50 \leq 60$

Terlihat bahwa syarat tidak memenuhi, maka selanjutnya ke langkah 5.

Langkah kelima: Membuat garis horizontal dan vertikal

Sumber	Tujuan (dalam ribuan rupiah)				Persediaan
	Bandung	Bogor	Jakarta	Cirebon	
Cianjur	11 (4,3)	12 (2,1)	13 (1,0)	14 (0,0)	60
Cikampek	14 (0,0)	13 (0,0)	12 (1,1)	10 (3,4)	80
Sumedang	10 (3,3)	12 (0,0)	12 (0,0)	11 (1,2)	100
Permintaan	40	60	80	50	240 / 230

Langkah keenam: Memperbaiki sel

Sumber	Tujuan (dalam ribuan rupiah)				Persediaan
	Bandung	Bogor	Jakarta	Cirebon	
Cianjur	11 (3,3)	12 (1,1)	13 (0,0)	14 (0,0)	60
Cikampek	14 (0,0)	13 (0,0)	12 (1,1)	10 (4,4)	80
Sumedang	10 (3,3)	12 (0,0)	12 (0,0)	11 (2,2)	100
Permintaan	40	60	80	50	240 / 230

Langkah keempat: Mengecek baris persediaan dan kolom permintaan

1. Mengecek apakah nilai setiap baris persediaan $a_i \leq \sum b_j$

2. Mengecek apakah nilai setiap kolom permintaan $b_j \leq \sum a_i$

- $a_1 \leq b_4 = 100 \leq 60 + 50$
- $a_2 \leq b_1 + b_2 = 80 \leq 40 + 60$
- $a_3 \leq b_2 + b_3 = 100 \leq 60 + 80$
- $b_1 \leq a_2 = 40 \leq 80$
- $b_2 \leq a_2 + a_3 = 60 \leq 80 + 100$
- $b_3 \leq a_1 + a_3 = 80 \leq 60 + 100$
- $b_4 \leq a_1 = 50 \leq 60$

Terlihat bahwa syarat memenuhi, maka selanjutnya ke langkah 7.

Langkah ketujuh: Menentukan Indeks pada sel yang bernilai (0,0)

Sumber	Tujuan (dalam ribuan rupiah)				Persediaan
	Bandung	Bogor	Jakarta	Cirebon	
Cianjur	(3,3)	(1,1)	0_3 (0,0)	0_2 (0,0)	60
Cikampek	0_2 (0,0)	0_3 (0,0)	(1,1)	(4,4)	80
Sumedang	(3,3)	0_3 (0,0)	0_3 (0,0)	(2,2)	100
Permintaan	40	60	80	50	240 / 230

Langkah kedelapan: Memilih angka nol dengan indeks *e* terkecil

Sumber	Tujuan (dalam ribuan rupiah)				Persediaan
	Bandung	Bogor	Jakarta	Cirebon	
Cianjur	(3,3)	(1,1)	0_3 (0,0)	0_2 50	10
Cikampek	0_2 (0,0)	0_3 (0,0)	(1,1)	(4,4)	80
Sumedang	(3,3)	0_3 (0,0)	0_3 (0,0)	(2,2)	100
Permintaan	40	60	80	0	240 / 230

Langkah kesembilan: Membuat tabel transportasi baru

Sumber	Tujuan (dalam ribuan rupiah)				Persediaan
	Bandung	Bogor	Jakarta	Cirebon	
Cianjur	(3,3)	(1,1)	0_3 (0,0)	0_2 50	10
Cikampek	0_2 (0,0)	0_3 (0,0)	(1,1)	-	80
Sumedang	(3,3)	0_3 (0,0)	0_3 (0,0)	-	100
Permintaan	40	60	80	0	240 / 230

Langkah kesepuluh: Membuat tabel transportasi baru, terlihat bahwa terdapat paling sedikit satu sel (0,0) pada setiap kolom dan barisnya, maka selanjutnya ke langkah 7.

Langkah ketujuh: Menentukan Indeks pada sel yang bernilai (0,0)

Sumber	Tujuan (dalam ribuan rupiah)				Persediaan
	Bandung	Bogor	Jakarta	Cirebon	
Cianjur	(3,3)	(1,1)	0_2 (0,0)	14 50	10
Cikampek	0_2 (0,0)	0_3 (0,0)	(1,1)	-	80
Sumedang	(3,3)	0_3 (0,0)	0_3 (0,0)	-	100
Permintaan	40	60	80	0	240 / 230

Langkah kedelapan: Memilih angka nol dengan indeks *e* terkecil

Sumber	Tujuan (dalam ribuan rupiah)				Persediaan
	Bandung	Bogor	Jakarta	Cirebon	
Cianjur	(3,3)	(1,1)	0_2 10	14 50	0
Cikampek	0_2 (0,0)	0_3 (0,0)	(1,1)	-	80
Sumedang	(3,3)	0_3 (0,0)	0_3 (0,0)	-	100
Permintaan	40	60	70	0	240 / 230

Langkah kesembilan: Membuat tabel transportasi baru

Sumber	Tujuan (dalam ribuan rupiah)				Persediaan
	Bandung	Bogor	Jakarta	Cirebon	
Cianjur	-	-	0_2 10	14 50	0
Cikampek	0_2 (0,0)	0_3 (0,0)	(1,1)	-	80
Sumedang	(3,3)	0_3 (0,0)	0_3 (0,0)	-	100
Permintaan	40	60	70	0	240 / 230

Langkah kesepuluh: Membuat tabel transportasi baru, terlihat bahwa terdapat paling sedikit satu sel (0,0) pada setiap kolom dan barisnya, maka selanjutnya ke langkah 7.

Langkah ketujuh: Menentukan Indeks pada sel yang bernilai (0,0)

Sumber	Tujuan (dalam ribuan rupiah)				Persediaan
	Bandung	Bogor	Jakarta	Cirebon	
Cianjur	-	-	13 10	14 50	0
Cikampek	0_2 (0,0)	0_3 (0,0)	(1,1)	-	80
Sumedang	(3,3)	0_3 (0,0)	0_2 (0,0)	-	100
Permintaan	40	60	70	0	240 230

Langkah kedelapan: Memilih angka nol dengan indeks *e* terkecil

Sumber	Tujuan (dalam ribuan rupiah)				Persediaan
	Bandung	Bogor	Jakarta	Cirebon	
Cianjur	-	-	13 10	14 50	0
Cikampek	0_2 40	0_3 (0,0)	(1,1)	-	40
Sumedang	(3,3)	0_3 (0,0)	0_2 (0,0)	-	100
Permintaan	0	60	70	0	240 230

Langkah kesembilan: Membuat tabel transportasi baru

Sumber	Tujuan (dalam ribuan rupiah)				Persediaan
	Bandung	Bogor	Jakarta	Cirebon	
Cianjur	-	-	13 10	14 50	0
Cikampek	0_2 40	0_3 (0,0)	(1,1)	-	40
Sumedang	-	0_3 (0,0)	0_2 (0,0)	-	100
Permintaan	0	60	70	0	240 230

Langkah kesepuluh: Membuat tabel transportasi baru, terlihat bahwa terdapat paling sedikit satu sel (0,0) pada setiap kolom dan barisnya, maka selanjutnya ke langkah 7.

Langkah ketujuh: Menentukan Indeks pada sel yang bernilai (0,0)

Sumber	Tujuan (dalam ribuan rupiah)				Persediaan
	Bandung	Bogor	Jakarta	Cirebon	
Cianjur	-	-	13 10	14 50	0
Cikampek	14 40	0_2 (0,0)	(1,1)	-	40
Sumedang	-	0_3 (0,0)	0_2 (0,0)	-	100
Permintaan	0	60	70	0	240 230

Langkah kedelapan: Memilih angka nol dengan indeks *e* terkecil

Sumber	Tujuan (dalam ribuan rupiah)				Persediaan
	Bandung	Bogor	Jakarta	Cirebon	
Cianjur	-	-	13 10	14 50	0
Cikampek	14 40	0_2 40	(1,1)	-	0
Sumedang	-	0_3 (0,0)	0_2 (0,0)	-	100
Permintaan	0	20	70	0	240 / 230

Langkah kesembilan: Membuat tabel transportasi baru

Sumber	Tujuan (dalam ribuan rupiah)				Persediaan
	Bandung	Bogor	Jakarta	Cirebon	
Cianjur	-	-	13 10	14 50	0
Cikampek	14 40	12 40	-	-	0
Sumedang	-	0_3 (0,0)	0_2 (0,0)	-	100
Permintaan	0	20	70	0	240 / 230

Langkah kesepuluh: Membuat tabel transportasi baru, terlihat bahwa hanya tersisa satu baris maka selanjutnya ke langkah 11 yaitu mengalokasikan jumlah persediaan dan permintaan yang mungkin ke sel tersisa. Sehingga diperoleh tabel akhir sebagai berikut:

Sumber	Tujuan (dalam ribuan rupiah)				Persediaan
	Bandung	Bogor	Jakarta	Cirebon	
Cianjur	-	-	13 10	14 50	0
Cikampek	14 40	13 40	-	-	0
Sumedang	-	12 20	12 70	-	10
Permintaan	0	0	0	0	240 / 230

Dari perhitungan masalah Transportasi dengan menggunakan Metode *Improved Cost Deviation*, diperoleh solusi biaya pengiriman minimal yaitu:

$$Z = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij}$$

$$= 13x_{13} + 14x_{14} + 14x_{21} + 13x_{22} + 12x_{32} + 12x_{33}$$

$$= 13000(10) + 14000(50) + 14000(40) + 13000(40) + 12000(20) + 12000(70)$$

$$= 2.990.000$$

Sehingga solusi optimum dengan menggunakan metode *Improved Cost Deviataion* dari Contoh 3.7 diperoleh biaya minimum pendistribusian barang sebesar 2.990.000.

Lampiran 2

Kasus 1 : Penyelesaiaan kasus 3x3 kasus tidak seimbang

Masalah transportasi kasus 1 dapat dituliskan sebagai berikut:

Sumber	Tujuan			Persediaan
	X1	X2	X3	
A	7	8	2	60
B	5	3	4	50
C	3	9	4	90
Permintaan	60	70	50	200 / 180

Setelah menyelesaikan setiap langkah pada metode *Improved Cost Deviation* maka diperoleh hasil akhir sebagai berikut:

Sumber	Tujuan			Persediaan
	X1	X2	X3	
A	7 -	8 10	2 50	0
B	5 -	3 50	4 -	0
C	3 60	9 10	4 -	20
Permintaan	0	0	0	240 / 230

Dari perhitungan masalah Transportasi dengan menggunakan Metode *Improved Cost Deviation*, diperoleh solusi biaya pengiriman minimal yaitu:

$$Z = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} c_{ij} x_{ij}$$

$$= 8x_{12} + 2x_{13} + 3x_{22} + 3x_{31} + 9x_{32}$$

$$= 8(10) + 2(50) + 3(50) + 3(60) + 9(10)$$

$$= 600$$

Sehingga solusi optimum dengan menggunakan metode VAM dan MODI serta Metode *Improved Cost Deviation* diperoleh biaya minimum sebesar 600 maka hasil yang diperoleh dengan menggunakan metode *Improved Cost Deviation* merupakan solusi optimal.

Kasus 2 : Penyelesaiaan kasus 3x3 kasus seimbang

Masalah transportasi kasus 2 dapat dituliskan sebagai berikut:

Sumber	Tujuan			Persediaan
	X1	X2	X3	
A	7	8	2	50
B	5	3	4	40
C	3	9	4	90
Permintaan	60	70	50	180

Setelah menyelesaikan setiap langkah pada metode *Improved Cost Deviation* maka diperoleh hasil akhir sebagai berikut:

Sumber	Tujuan			Persediaan
	X1	X2	X3	
A	7 -	8	2 50	0
B	5 -	3 40	4 -	0
C	3 60	9 30	4 -	0
Permintaan	0	0	0	180

Dari perhitungan masalah Transportasi dengan menggunakan Metode *Improved Cost Deviation*, diperoleh solusi biaya pengiriman minimal yaitu:

$Z = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} c_{ij} x_{ij}$

$= 670$

Sehingga solusi optimum dengan menggunakan metode VAM dan MODI serta Metode *Improved Cost Deviation* diperoleh biaya minimum sebesar 670 maka hasil yang diperoleh dengan menggunakan metode *Improved Cost Deviation* merupakan solusi optimal.

Kasus 3 : Penyelesaiaan kasus 4x3 kasus tidak seimbang

Masalah transportasi kasus 3 dapat dituliskan sebagai berikut:

Sumber	Tujuan			Persediaan
	X1	X2	X3	
A	6	7	3	110
B	2	8	11	50
C	7	5	5	70
D	13	10	6	80
Permintaan	130	90	110	310 / 330

Setelah menyelesaikan setiap langkah pada metode *Improved Cost Deviation* maka diperoleh hasil akhir sebagai berikut:

Sumber	Tujuan			Persediaan
	X1	X2	X3	
A	6 80	7 -	3 30	0
B	2 50	8 -	11 -	0
C	7 -	5 70	5 -	0
D	13	10	6 80	0
Permintaan	0	20	0	310 / 330

Dari perhitungan masalah Transportasi dengan menggunakan Metode *Improved Cost Deviation*, diperoleh solusi biaya pengiriman minimal yaitu:

$Z = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} c_{ij} x_{ij}$

$= 1500$

Sehingga solusi optimum dengan menggunakan metode *Improved Cost Deviataion* dari Kasus 3 diperoleh biaya minimum pendistribusian barang sebesar 1500. Dengan menggunakan metode VAM dan MODI diperoleh biaya minimum sebesar 1500 maka hasil yang diperoleh dengan menggunakan metode *Improved Cost Deviation* merupakan solusi optimal.

Kasus 4 : Penyelesaiaan kasus 4x3 kasus seimbang

Masalah transportasi kasus 4 dapat dituliskan sebagai berikut:

Sumber	Tujuan			Persediaan
	X1	X2	X3	
A	6	7	3	110
B	2	8	11	40
C	7	5	5	70
D	13	10	6	80
Permintaan	130	80	90	300

Setelah menyelesaikan setiap langkah pada metode *Improved Cost Deviation* maka diperoleh hasil akhir sebagai berikut:

Sumber	Tujuan			Persediaan
	X1	X2	X3	
A	6 90	7 10	3 10	0
B	2 40	8 -	11 -	0
C	7 -	5 70	5 -	0
D	13	10	6 80	0
Permintaan	0	0	0	300

Dari perhitungan masalah Transportasi dengan menggunakan Metode *Improved Cost Deviation*, diperoleh solusi biaya pengiriman minimal yaitu:

$$Z = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} c_{ij} x_{ij}$$

$$= 1550$$

Sehingga solusi optimum dengan menggunakan metode *Improved Cost Deviataion* dari Kasus 4 diperoleh biaya minimum pendistribusian barang sebesar 1550 maka hasil yang diperoleh dengan menggunakan metode *Improved Cost Deviation* merupakan solusi optimal.

Kasus 5 : Penyelesaiaan kasus 4x4 kasus tidak seimbang

Masalah transportasi kasus 5 dapat dituliskan sebagai berikut:

Sumber	Tujuan				Persediaan
	X1	X2	X3	X4	
A	11	12	13	14	70
B	14	12	11	10	80
C	13	12	14	11	60
D	14	14	12	12	90
Permintaan	80	70	90	110	300 / 350

Setelah menyelesaikan setiap langkah pada metode *Improved Cost Deviation* maka diperoleh hasil akhir sebagai berikut:

Sumber	Tujuan				Persediaan
	X1	X2	X3	X4	
A	11 (70)	12	13	14	0
B	14	12	11	10 (80)	0
C	13	12 (30)	14	11 (30)	0
D	14	14	12 (90)	12	0
Permintaan	10	40	0	0	300 / 350

Dari perhitungan masalah Transportasi dengan menggunakan Metode *Improved Cost Deviation*, diperoleh solusi biaya pengiriman minimal yaitu:

$$Z = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij}$$

$$= 11(70) + 10(80) + 12(30) + 11(30) + 12(90)$$

$$= 3340$$

Sehingga solusi optimum dengan menggunakan metode *Improved Cost Deviataion* dari Kasus 5 diperoleh biaya minimum pendistribusian barang sebesar 3340. Dengan menggunakan metode VAM dan MODI diperoleh biaya minimum sebesar 3340 maka hasil yang diperoleh dengan menggunakan metode *Improved Cost Deviation* merupakan solusi optimal.

Kasus 5 : Penyelesaiaan kasus 4x4 kasus tidak seimbang

Masalah transportasi kasus 5 dapat dituliskan sebagai berikut:

Sumber	Tujuan				Persediaan
	X1	X2	X3	X4	
A	11	12	13	14	70
B	14	12	11	10	50
C	13	12	14	11	60
D	14	14	12	12	80
Permintaan	70	70	50	70	260

Setelah menyelesaikan setiap langkah pada metode *Improved Cost Deviation* maka diperoleh hasil akhir sebagai berikut:

Sumber	Tujuan				Persediaan
	X1	X2	X3	X4	
A	11 (70)	12	13	14	0
B	14	12	11	10 (50)	0
C	13	12 (60)	14	11	0
D	14	14 (10)	12 (50)	12 (20)	0
Permintaan	0	0	0	0	260

Dari perhitungan masalah Transportasi dengan menggunakan Metode *Improved Cost Deviation*, diperoleh solusi biaya pengiriman minimal yaitu:

$$Z = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij}$$

$$= 11x_{11} + 10x_{24} + 12x_{32} + 14x_{42} + 12x_{43} + 12x_{44}$$

$$= 11(70) + 10(50) + 12(60) + 14(10) + 12(50) + 12(20)$$

$$= 2770$$

Sehingga solusi optimum dengan menggunakan metode *Improved Cost Deviataion* dari Kasus 6 diperoleh biaya minimum pendistribusian barang sebesar 2770. Dengan menggunakan metode VAM dan MODI diperoleh biaya minimum sebesar 2770 maka hasil yang diperoleh dengan menggunakan metode *Improved Cost Deviation* merupakan solusi optimal.