OPERATOR *DISSIPATIVE* PADA RUANG *HILBERT*

SKRIPSI

Oleh :

AHMAD FAUZAN

24010113130089

DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN MATEMATIKA

UNIVERSITAS DIPONEGORO

SEMARANG

2018

OPERATOR *DISSIPATIVE* PADA RUANG *HILBERT*

AHMAD FAUZAN

24010113130089

Skripsi

Diajukan sebagai syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika

pada

Departemen Matematika

DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN MATEMATIKA

UNIVERSITAS DIPONEGORO

SEMARANG

2018

HALAMAN PENGESAHAN

Judul: : Operator *Dissipative* pada Ruang *Hilbert*

Nama : Ahmad Fauzan

NIM : 24010113130089

Departemen : Matematika

Telah diujikan pada sidang Tugas Akhir dan dinyatakan lulus tanggal 5 Maret 2018.

Semarang, Maret 2018

Mengetahui,

Ketua Departemen Matematika	Panitia Penguji Tugas Akhir
FSM UNDIP	Ketua
Farikhin, S.Si, M. Si, Ph.D	**Dr. Susilo Hariyanto, S.Si, M. Si**
NIP. 197312202000121001	**NIP. 197410142000121001**

HALAMAN PENGESAHAN

Judul: : Operator *Dissipative* pada Ruang *Hilbert*

Nama : Ahmad Fauzan

NIM : 24010113130089

Departemen : Matematika

Telah diujikan pada sidang Tugas Akhir tanggal 5 Maret 2018.

Semarang, Maret 2018

Pembimbing Utama	Pembimbing Anggota
Dr. Susilo Hariyanto, S.Si, M. Si	**Dr. R. Heru Tjahjana, S.Si, M.Si**
NIP. 197410142000121001	**NIP. 197407172000121001**

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Allah Subhanallahu wa Ta'ala yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang atas segala rahmat dan karunia yang diberikan, sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan Tugas Akhir yang berjudul **"Operator *Dissipative* pada Ruang *Hilbert*"**. Tugas Akhir ini disusun sebagai syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu (S1) pada Departemen Matematika Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Diponegoro, Semarang.

Dalam penyusunan Tugas Akhir ini banyak pihak yang telah membantu, oleh karena itu tidak lupa penulis menyampaikan rasa hormat dan ucapan terima kasih kepada:

1. Bapak Farikhin, S.Si, M.Si, Ph.D selaku Ketua Departemen Matematika FSM Universitas Diponegoro Semarang yang telah memberi ijin pembuatan Tugas Akhir ini.
2. Bapak Dr. Susilo Hariyanto, S.Si, M.Si selaku dosen pembimbing I yang telah meluangkan waktu memberikan bimbingan dan pengarahan dalam menyelesaiakan Tugas Akhir ini.
3. Bapak Dr. R. Heru Tjahjana, S.Si, M.Si selaku dosen pembimbing II yang telah meluangkan waktu memberikan bimbingan dan pengarahan dalam menyelesaiakan Tugas Akhir ini.

4. Seluruh dosen Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Matematika Universitas Diponegoro yang telah memberikan bimbingan serta ilmunya selama perkuliahan.
5. Keluarga yang selalu memberikan doa dan dukungan setiap waktu.
6. Semua pihak yang ikut membantu hingga selesainya penyusunan Tugas Akhir ini, yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Semoga Allah membalas segala kebaikan yang telah diberikan.

Penulis menyadari bahwa dalam pembuatan Tugas Akhir ini masih terdapat kekurangan, baik pada teknis penulisan maupun isi dan masih belum sempurna. Oleh sebab itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun demi kesempurnaan Tugas Akhir ini. Penulis berharap semoga Tugas Akhir ini bisa bermanfaat bagi banyak pihak.

Semarang,   Maret 2018

Penulis

ABSTRAK

Dalam skripsi ini dibahas mengenai operator *dissipative*. Jika suatu operator A merupakan *infinitesimal generator* dari suatu C_0-semigrup $S(\cdot)$ maka berlaku $\tau_{-}(x, Ax) \leq \omega\|x\|$ dengan $x \in \mathcal{D}(A)$. Kemudian jika $\omega = 0$ sedemikian sehingga $\tau_{-}(x, Ax)$ bernilai 0 atau negatif maka operator A disebut operator *dissipative*. Secara khusus pada ruang Hilbert, operator *dissipative* terjadi jika bagian riil pada suatu *innerproduct* A bernilai 0 atau negatif. Selanjutnya jika $\mathcal{D}(A)$ *dense* dalam X dengan A suatu operator *dissipative* maka A memiliki suatu perluasan tertutup yang juga merupakan suatu operator *dissipative*.

Kata kunci : Operator *Dissipative*, *Infinitesimal Generator*, C_0-semigrup

ABSTRACT

In this thesis, we will discuss about dissipative operator. If an operator A is the infinitesimal generator of a C_0-semigroup $S(\cdot)$ then implies that $\tau_{-}(x, Ax) \leq \omega\|x\|$ with $x \in \mathcal{D}(A)$. If $\omega = 0$ such that $\tau_{-}(x, Ax)$ is 0 or negative then operator A is called dissipative operator. Particularly in Hilbert space, dissipative operator occurs if the real part of an innerproduct A is 0 or negative. Furthermore, if $\mathcal{D}(A)$ dense in X with A is a dissipative operator then A has a closed extention which is a dissipative operator.

Keywords : Dissipative Operator, Infinitesimal Generator, C_0-semigroup

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL i

HALAMAN PENGESAHAN ii

KATA PENGANTAR iv

ABSTRAK vi

ABSTRACT vii

DAFTAR ISI viii

DAFTAR SIMBOL x

BAB I. PENDAHULUAN 1

1.1 Latar Belakang 1

1.2 Rumusan Masalah 1

1.3 Pembatasan Masalah 2

1.4 Tujuan Penulisan 2

1.5 Metode Penulisan 2

1.6 Sistematika Penulisan 2

BAB II. DASAR TEORI 3

2.1 Ruang Metrik 3

2.2 Ruang Vektor 13

2.3 Ruang Bernorma 18

2.4 Ruang *Innerproduct* 22

2.5 Ruang *Hilbert*..28

2.6 Operator Linear..30

BABIII. PEMBAHASAN..37

3.1 Derivatif Berarah dalam Norm 37

3.2 Operator *Dissipative* 53

BABIV. PENUTUP..79

DAFTAR PUSTAKA 80

DAFTAR SIMBOL

$+$	: operasi penjumlahan
$-$	: operasi pengurangan
$\times$	: operasi perkalian
$.$	: operasi perkalian / pergandaan
$=$	: sama dengan
$\neq$	: tidak sama dengan
$<$	: lebih kecil dari
$>$	: lebih besar dari
$\leq$	: lebih kecil dari atau sama dengan
$\geq$	: lebih besar dari atau sama dengan
$\Leftrightarrow$	: ekuivalensi (jika dan hanya jika)
$\Leftarrow$	: pembuktian arah kiri
$\Rightarrow$	: pembuktian arah kanan
∞	: tak hingga
$\in$	: elemen / menunjukkan keanggotaan pada himpunan / ruang
$\cup$	: union / gabungan himpunan
$\subset$	: subset / himpunan bagian
min	: minimum
max	: maksimum

sup	: batas atas terkecil suatu himpunan (supremum)
inf	: batas bawah terbesar suatu himpunan (infimum)
$\emptyset$	: himpunan kosong
$\mathbb{C}$	: himpunan semua bilangan kompleks
$\mathbb{R}$	: himpunan semua bilangan real
$\mathbb{Q}$	: himpunan barisan bilangan rasional
$\forall$	: untuk setiap
$\mathbb{R}^n$	: ruang n Euclid
$\mathbb{R}^m$	: ruang m Euclid
$\mathbb{C}_0$	: himpunan semua bilangan kompleks dengan bagian riil bernilai positif
F	: lapangan bilangan riil atau kompleks
d	: metrik suatu himpunan / ruang
$d(x, y)$	: jarak titik x dengan titik y
(X, d)	: ruang metrik X dengan metrik d
r	: radius atau jari – jari
$N_r(a)$	: persekitaran (*neighbourhood*) titik a dengan jari – jari r (bola buka / *open ball*)
$S_r(a)$	: luasan bola (*sphere*) dengan titik pusat a dan jari – jari r
$\overline{N_r(a)}$	: bola tertutup
δ	: estimasi nilai positif yang kecil (*delta*)

ε	: estimasi nilai positif yang kecil (*epsilon*)
$x_n \to x$	: barisan (x_n) yang konvergen ke titik x
$(0, \infty)$	: himpunan semua bilangan riil positif sampai dengan tak hingga
$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$	: penjumlahan elemen x dari n = 1 sampai ∞
$\|x\|$	: norma dari x
$\langle x. y \rangle$	: *innerproduct* dari x dan y
$\left(\eta_i^{(n)}\right), \left(x_j^{(k)}\right)$	: subbarisan dengan indeks n dan k
ℓ_p	: himpunan semua barisan bilangan kompleks terbatas
θ	: vektor nol / operator nol
I	: operator identitas
T	: operator linier T
A	: operator linier A
$\bar{A}$	: *closure* dari operator linier A
$\mathcal{D}(T)$	: domain dari operator linier T
$\mathcal{D}(A)$	: domain dari operator linier A
$\mathcal{R}(T)$	: daerah hasil dari operator linier T
$\overline{\mathcal{D}(T)}$	: *closure* domain operator linier T
$\overline{\mathcal{R}(T)}$	: range *closure*
T^{-1}	: operator invers dari operator linier T
$Ker(T)$	: kernel atau ruang null dari operator linier T

$G(T)$	: grafik operator linier T
$\mathcal{R}(sI - A)$	: daerah hasil dari operator linier $sI - A$
(x_n)	: barisan suatu himpunan dengan n:0,1,...
$C[a, b]$	: koleksi semua fungsi kontinu pada interval $[a, b]$
$\sum_{k=1}^{n} x_k$	: penjumlahan elemen x dan $n = 1$ sampai ∞
$Re\langle Ax, x\rangle$	: nilai riil dari suatu *innerproduct* $\langle x, x\rangle$ dengan operator A
$S(\cdot)$	: semigrup
$\tau_+(x, y)$	: derivatif berarah kanan dari norm
$\tau_-(x, y)$	: derivatif berarah kiri dari norm
$\frac{d^+}{dt}\|f(t_0)\|$	: derivatif kanan dari $\|f(t_0)\|$
$\frac{d^-}{dt}\|f(t_0)\|$	: derivatif kiri dari $\|f(t_0)\|$
$L^p(\Omega)$	: ruang *Lebesgue*
$W^{m,p}(\Omega)$	: ruang *Sobolev*
D^α	: derivatif lemah