K-ALJABAR

Iswati dan Suryoto
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H, Semarang 50275

ABSTRAK

K-aljabar adalah suatu struktur aljabar yang dibangun atas suatu grup sehingga sifat-sifat yang berlaku pada grup, akan berlaku juga pada K-aljabar. Jika pada grup terdapat subgrup dan homomorfisma grup, maka pada K-aljabar terdapat K-subaljabar dan K-homomorfisma. Dengan menggunakan sifat-sifat grup, akan dibuktikan sifat-sifat yang berlaku pada K-aljabar.

Kata kunci : grup, subgrup, dan homomorfisma grup.

ABSTRACT

K-algebra is an algebra structure built on a group so that characters of a group will apply also at K-algebra. If at group there is subgroup and homomorfism group, hence at K-algebra there is K-subalgebra and K-homomorfism. By using characters of group, will be proved characters applied at K-algebra.

Keyword : group, subgroup, and homomorfism group.

1. PENDAHULUAN

Struktur aljabar merupakan himpunan yang tidak kosong dengan paling sedikit sebuah relasi ekuivalensi, satu atau lebih operasi biner dan aksioma-aksioma yang berlaku kemudian akan membentuk suatu sistem baru. Salah satu struktur aljabar tersebut adalah K-aljabar.

Misalkan $G = (G,*)$ suatu grup terhadap operasi biner $*$. Jika e adalah unsur identitas pada G dan untuk setiap x, y di G didefinisikan operasi $x \odot y = x * y^{-1}$ sedemikian sehingga operasi tersebut merupakan operasi biner dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu maka akan membentuk struktur aljabar baru yang dinamakan K-aljabar.

K-aljabar mempunyai sifat yang hampir sama dengan grup. Hal ini dapat dilihat dari grup yang mempunyai konsep subgrup dan homomorfisma grup. Sedangkan pada K-aljabar terdapat konsep K-subaljabar dan homomorfisma pada K-aljabar yang disebut K-homomorfisma.

1. *K*-ALJABAR

Pada bagian ini akan dibahas mengenai *K*-aljabar, *K*-subaljabar, dan *K*-homomorfisma.

2.1 *K*-Aljabar

Berikut ini akan diberikan definisi dan contoh dari *K*-aljabar.

Definisi 2.1.1 [1] Misalkan $(G,*)$ suatu grup dan pada G didefinisikan operasi $\odot$ sedemikian sehingga $\forall\, x, y \in G, x \odot y = x * y^{-1}$ maka akan membentuk struktur aljabar baru yaitu $(G,*,\odot,e)$. Suatu $(G,*,\odot,e)$ dinamakan K-aljabar, jika G adalah bukan grup dengan order-2 dan $\forall\, x, y, z \in G$ berlaku :

1. $(x \odot y) \odot (x \odot z)$
   $= (x \odot ((e \odot z) \odot (e \odot y))) \odot x$
2. $x \odot (x \odot y) = (x \odot (e \odot y)) \odot x$
3. $x \odot x = e$

4. $x \odot e = x$
5. $e \odot x = x^{-1}$, $\forall x, y, z \in G$

Jika grup $(G,*)$ merupakan grup komutatif, maka aksioma 1 dan 2 menjadi :

$1'$. $(x \odot y) \odot (x \odot z) = z \odot y$
$2'$. $x \odot (x \odot y) = y$

Contoh 1

$G = \{-i, i, 1, -1\}$ terhadap operasi pergandaan merupakan grup, lebih tepatnya merupakan grup siklik dengan generator i. Jika pada G dilengkapi dengan operasi $\odot$, sebagaimana (seperti) diberikan tabel berikut :

$\odot$	$-i$	i	1	-1
$-i$	1	-1	$-i$	i
i	-1	1	i	$-i$
1	i	$-i$	1	-1
-1	$-i$	i	-1	1

Tabel 2.1.1 operasi $\odot$ pada G

Maka $(G,\cdot,\odot,e)$ membentuk K-aljabar. Hal ini dapat dilihat dari tabel bahwa aksioma 1 sampai 5 dipenuhi oleh G.

Contoh 2

$S_3 = \{e, a, b, x, y, z\}$, dengan $e = (1)$, $a = (1\ 2\ 3)$, $b = (1\ 3\ 2)$, $x = (1\ 2)$, $y = (1\ 3)$, $z = (2\ 3)$ terhadap operasi komposisi fungsi $(S_3,\circ)$ membentuk grup, lebih tepatnya merupakan grup permutasi. Jika pada S_3 dilengkapi dengan operasi $\odot$, sebagaimana (seperti) diberikan oleh tabel berikut :

$\odot$	e	x	y	z	a	b
e	e	x	y	z	b	a
x	x	e	a	b	z	y
y	y	b	e	a	x	z
z	z	a	b	e	y	x
a	a	z	x	y	e	b
b	b	y	z	x	a	e

Tabel 2.1.2 operasi $\odot$ pada S_3

maka $(S_3,\circ,\odot,e)$ membentuk K-aljabar. Hal ini dapat dilihat dari tabel, bahwa aksioma 1 sampai 5 dari K-aljabar dipenuhi oleh S_3.

Selanjutnya akan ditinjau sifat dari K-aljabar $(G,*,\odot,e)$, jika G merupakan grup komutatif.

Proposisi 2.1.1 [2] Misalkan $(G,*)$ grup komutatif. Jika $(G,*,\odot,e)$ adalah suatu K-aljabar, maka $\forall x, y, z \in G$ berlaku :

1. $(e \odot x) \odot (e \odot y)$
   $= y \odot x = e \odot (x \odot y)$
2. $(x \odot z) \odot (y \odot z) = x \odot y$
3. $e \odot (e \odot x) = x$
4. $x \odot (e \odot y) = y \odot (e \odot x)$

Bukti – bukti :

Diambil sebarang unsur $x, y, z \in G$ dan misalkan e unsur identitas dari G, maka :

1. $(e \odot x) \odot (e \odot y)$
   $= x^{-1} \odot y^{-1}$
   $= x^{-1} * y$
   $= y * x^{-1}$
   $= y \odot x$

   $(e \odot x) \odot (e \odot y)$
   $= (e \odot ((e \odot y) \odot (e \odot x))) \odot e$
   $= (e \odot (y^{-1} \odot x^{-1})) \odot e$
   $= e \odot (y^{-1} \odot x^{-1})$
   $= e \odot (y^{-1} * x)$
   $= e \odot (x * y^{-1})$
   $= e \odot (x \odot y)$

   Karena $(e \odot x) \odot (e \odot y) = y \odot x$ dan $(e \odot x) \odot (e \odot y) = e \odot (x \odot y)$ maka $y \odot x = e \odot (x \odot y)$.
2. $(x \odot z) \odot (y \odot z) =$
   $(x \odot z) * (y \odot z)^{-1}$
   $= (x * z^{-1}) * (y * z^{-1})^{-1}$
   $= (x * z^{-1}) * (z * y^{-1})$
   $= (x * (z^{-1} * z)) * y^{-1}$
   $= (x * e) * y^{-1}$
   $= x * y^{-1}$
   $= x \odot y$
3. $e \odot (e \odot x) = e \odot x^{-1}$
   $= e * x$
   $= x$
4. $x \odot (e \odot y) = x \odot y^{-1}$
   $= x * y$
   $= y \odot x^{-1}$
   $= y \odot (e \odot x)$ ■

Jika operasi $\odot$ pada $(G,*,\odot,e)$ bersifat komutatif, maka K-aljabar

$(G,*,\odot,e)$ bersifat komutatif, sebagaimana diberikan oleh definisi berikut :

Definisi 2.1.2 [1] Suatu K-aljabar $(G,*,\odot,e)$ dikatakan komutatif jika $\forall\, x,g \in G$ berlaku $g \odot (e \odot x) = x \odot (e \odot g)$.

Contoh 3

Berdasarkan **Contoh 1** diketahui bahwa $G = \{-i,i,1,-1\}$ terhadap operasi pergandaan merupakan K-aljabar. Berdasarkan tabel 2.1.1 dapat dilihat bahwa **Definisi 2.1.2** dipenuhi, sehingga $(G,\cdot,\odot,e)$ merupakan K-aljabar yang komutatif.

Proposisi 2.1.2 [1] Suatu K-aljabar $(G,*,\odot,e)$ dikatakan komutatif jika dan hanya jika $e \odot x = x$.

Bukti :

$(\Rightarrow)$

Misalkan $(G,*,\odot,e)$ komutatif terhadap operasi $\odot$. Akan ditunjukkan $e \odot x = x$. Diambil sebarang unsur $x,g \in G$, karena $(G,*,\odot,e)$ suatu K-aljabar yang komutatif, maka :

$$\begin{aligned} g \odot (e \odot x) &= x \odot (e \odot g) \\ &= x \odot (g \odot e) \\ &= x \odot g \\ &= g \odot x \end{aligned}$$

Karena $g \odot (e \odot x) = g \odot x$, maka $(e \odot x) = x$.

$(\Leftarrow)$

Misalkan $e \odot x = x$. Menurut definisi operasi $\odot, e \odot x = x^{-1}$ sehingga diperoleh $x = x^{-1}$. Akan ditunjukkan bahwa $(G,*,\odot,e)$ suatu K-aljabar yang komutatif. Diambil sebarang unsur $x,g \in G$, maka :

$$\begin{aligned} g \odot (e \odot x) &= g \odot x \\ &= g \odot x^{-1} \\ &= g * x \\ &= x * g \\ &= x * (e * g^{-1})^{-1} \\ &= x \odot (e \odot g) \end{aligned}$$

Karena $g \odot (e \odot x) = x \odot (e \odot g)$, maka $(G,*,\odot,e)$ suatu K-aljabar yang komutatif. ■

Selanjutnya akan ditinjau sifat dari K-aljabar $(G,*,\odot,e)$, jika G tidak komutatif.

Proposisi 2.1.3 [1] Misalkan $(G,*,\odot,e)$ suatu K-aljabar. Jika $(G,*)$ tidak komutatif, maka $\forall\, x,y,z,u,v \in G$ berlaku :

1. $(x \odot y) \odot (u \odot v) = (x \odot (e \odot v) \odot (e \odot y)) \odot u$
2. $(x \odot y) \odot z = x \odot \big(z \odot (e \odot y)\big)$
3. $e \odot (e \odot x) = x$
4. $e \odot (x \odot y) = y \odot x = (e \odot x) \odot (e \odot y)$
5. $x \odot y = e$ jika dan hanya jika $x = y$

Bukti – bukti :

Diambil sebarang unsur $x,y,z,u,v \in G$ dan misalkan e unsur identitas dari G, maka :

1. $$\begin{aligned} (x \odot y) \odot (u \odot v) &= (x * y^{-1}) \odot (u * v^{-1}) \\ &= (x * y^{-1}) * (u * v^{-1})^{-1} \\ &= (x * y^{-1}) * (v * u^{-1}) \\ &= (x * y^{-1} * v) * u^{-1} \\ &= (x * (v^{-1} * y)^{-1}) * u^{-1} \\ &= \big(x \odot (v^{-1} \odot y^{-1})\big) \odot u \\ &= (x \odot (e \odot v) \odot (e \odot y)) \odot u \end{aligned}$$
2. $$\begin{aligned} (x \odot y) \odot z &= (x * y^{-1}) * z^{-1} \\ &= x * (y^{-1} * z^{-1}) \\ &= x * (z * y)^{-1} \\ &= x \odot (z \odot y^{-1}) \\ &= x \odot (z \odot (e \odot y)) \end{aligned}$$
3. $$\begin{aligned} e \odot (e \odot x) &= (e \odot x)^{-1} \\ &= (e * x^{-1})^{-1} \\ &= x \end{aligned}$$
4. $$\begin{aligned} e \odot (x \odot y) &= (x \odot y)^{-1} \\ &= (x * y^{-1})^{-1} \\ &= y \odot x \end{aligned}$$
5. $(\Rightarrow)$

   Diketahui $x \odot y = e$, akan dibuktikan $x = y$. Diambil sebarang unsur $x,y \in G$ dan berlaku $x \odot y = e$. Karena $y \in G$ dan $y^{-1} \in G$ sehingga :

   $$\begin{aligned} (x \odot y) \odot y^{-1} &= e \odot y^{-1} \\ (x * y^{-1}) * y &= e * y \\ x * (y^{-1} * y) &= e * y \\ x * e &= e * y \\ x &= y \end{aligned}$$

   $(\Leftarrow)$

   Diketahui $x = y$, akan dibuktikan bahwa $x \odot y = e$

Diambil sebarang unsur $x, y \in G$, dengan $x = y$, maka
$x \odot y = y \odot y$
$x \odot y = e$ ■

Diantara himpunan bagian – himpunan bagian dari K-aljabar ada yang memiliki sifat K-aljabar terhadap operasi biner yang sama yang dinamakan K-subaljabar. Berikut ini akan dibahas mengenai K-subaljabar.

2.2 *K*-Subaljabar

Berikut ini akan diberikan definisi dan contoh dari K-subaljabar.

Definisi 2.2.1 [1] Suatu himpunan bagian tidak kosong H dari K-aljabar $(G,*,\odot,e)$ disebut K-subaljabar jika :
1. $e \in H$
2. $h_1 \odot h_2 \in H,\ \forall\, h_1, h_2 \in H$

Contoh 4
Berdasarkan **Contoh 3** diketahui bahwa $(S_3,\circ,\odot,e)$ merupakan K-aljabar. Ditinjau himpunan $A_3 = \{e, a, b\}$ yang merupakan himpunan bagian dari S_3. Operasi $\odot$ pada A_3 diberikan oleh tabel berikut :

$\odot$	e	a	b
e	e	b	a
a	a	e	b
b	b	a	e

Tabel 2.2.1 operasi $\odot$ pada A_3

Sehingga karena dipenuhi :
1. $A_3 = \{e, a, b\}$ maka $e \in A_3$
2. Dari tabel terlihat bahwa $\odot$ merupakan operasi biner pada A_3.

maka $(A_3,\circ,\odot,e)$ merupakan K-subaljabar dari $(S_3,\circ,\odot,e)$.

Selanjutnya akan ditinjau keterkaitan antara subgrup dengan K-subaljabar, sebagaimana diberikan oleh proposisi berikut :

Proposisi 2.2.1 [1] Misalkan $(G,*,\odot,e)$ adalah suatu K-aljabar dan $g \in G.$ Jika H suatu subgrup dari G. Maka $H_{g^2} = \{g \odot (g \odot x) : x \in H\}$ adalah suatu K-subaljabar dari $(G,*,\odot,e)$.

Bukti – bukti :
1. Akan ditunjukkan $e \in H_{g^2}$. Misalkan e unsur identitas dari G dan $g \in G$, karena H subgrup dari G, maka $e \in H$ dan berlaku :
$$\begin{aligned} e = e * e &= (g * g^{-1}) * e \\ &= g * (g^{-1} * e) \\ &= g * (e * g)^{-1} \\ &= g \odot (e * g) \\ &= g \odot (g * e) \\ &= g \odot (g \odot e) \in H_{g^2}. \end{aligned}$$
2. Diambil sebarang unsur $x, y \in H_{g^2}$, dapat dituliskan $x = g \odot (g \odot u)$ dan $y = g \odot (g \odot v)$ untuk suatu $u, v \in H$, maka :
$$\begin{aligned} & x \odot y \\ &= \big(g \odot (g \odot u)\big) \odot \big(g \odot (g \odot v)\big) \\ &= \big(g \odot \big((e \odot v) \odot (e \odot u)\big)\big) \odot g \\ &= \big(g \odot \big(e \odot (v \odot u)\big)\big) \odot g \\ &= \big(g \odot (u \odot v)\big) \odot g \\ &= g \odot \Big(g \odot \big(e \odot (u \odot v)\big)\Big) \\ &= g \odot \big(g \odot (v \odot u)\big) \in H_{g^2} \end{aligned}$$
Jadi terbukti bahwa $H_{g^2} = \{g \odot (g \odot x) : x \in H\}$ adalah suatu K-subaljabar dari $(G,*,\odot,e)$ ■

Proposisi 2.2.2 [1]
Misalkan H_1 dan H_2 merupakan K-subaljabar dari suatu K-aljabar $(G,*,\odot,e)$ maka :
1. $H_1 \cap H_2$ adalah K-subaljabar dari $(G,*,\odot,e)$.
2. $H_1 \odot H_2$ adalah K-subaljabar dari $(G,*,\odot,e)$ jika dan hanya jika $H_2 \odot H_1 = H_1 \odot H_2$.

Bukti – bukti :
1. (i) Misalkan H_1 dan H_2 merupakan K-subaljabar dari suatu K-aljabar $(G,*,\odot,e)$, maka $e \in H_1$ dan $e \in H_2$. Akibatnya $e \in H_1 \cap H_2$, dengan kata lain $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$.
   (ii) Diambil sebarang unsur $h_1, h_2 \in H_1 \cap H_2$. Karena $h_1, h_2 \in H_1 \cap H_2$,

maka $h_1, h_2 \in H_1$ dan $h_1, h_2 \in H_2$. Selanjutnya, karena H_1, H_2 merupakan K-subaljabar dari $(G,*,\odot,e)$, maka $h_1 \odot h_2 \in H_1$ dan $h_1 \odot h_2 \in H_2$. Dengan demikian $h_1 \odot h_2 \in H_1 \cap H_2$.

Jadi terbukti bahwa $H_1 \cap H_2$ merupakan K-subaljabar dari $(G,*,\odot,e)$.

2. $(\Rightarrow)$

Misalkan $H_1 \odot H_2$ adalah K-subaljabar dari $(G,*,\odot,e)$, dimana $H_1 \odot H_2$
$= \left\{ h \,\middle|\, \begin{array}{c} h = h_1 \odot h_2,\ h_1 \in H_1 \text{ dan} \\ h_2 \in H_2 \end{array} \right\}$

Akan ditunjukkan $H_2 \odot H_1 = H_1 \odot H_2$.

(i) Diambil sebarang unsur $h \in H_2 \odot H_1$, maka $h = h_2 \odot h_1$ untuk suatu $h_1 \in H_1$ dan $h_2 \in H_2$, sehingga :

$$\begin{aligned} h &= h_2 \odot h_1 \\ &= e \odot (h_1 \odot h_2) \\ &= (h_1 \odot h_1) \odot (h_1 \odot h_2) \\ &= \left(h_1 \odot {h_2}^{-1} \odot {h_1}^{-1}\right) \odot h_1 \\ &= (h_1 * h_2 * h_1) * {h_1}^{-1} \\ &= (h_1 * h_2) * \left(h_1 * {h_1}^{-1}\right) \\ &= (h_1 * h_2) * e \\ &= (h_1 * h_2) \\ &= h_1 \odot {h_2}^{-1} \in H_1 \odot H_2 \end{aligned}$$

Karena $h_2 \in H_2$ dan $(H_2,*)$ grup, maka ${h_2}^{-1} \in H_2$ sehingga $h_1 \odot {h_2}^{-1} \in H_1 \odot H_2$. Dengan demikian $H_2 \odot H_1 \subset H_1 \odot H_2$.

(ii) Diambil sebarang unsur $h \in H_1 \odot H_2$, maka $h = h_1 \odot h_2$ untuk suatu $h_1 \in H_1$ dan $h_2 \in H_2$, Sehingga :

$$\begin{aligned} h &= h_1 \odot h_2 \\ &= e \odot (h_2 \odot h_1) \\ &= (h_2 \odot h_2) \odot (h_2 \odot h_1) \\ &= \left(h_2 \odot {h_1}^{-1} \odot {h_2}^{-1}\right) \odot h_2 \\ &= (h_2 * h_1 * h_2) * {h_2}^{-1} \\ &= (h_2 * h_1) * \left(h_2 * {h_2}^{-1}\right) \\ &= (h_2 * h_1) * e \\ &= (h_2 * h_1) \\ &= h_2 \odot {h_1}^{-1} \in H_2 \odot H_1 \end{aligned}$$

Karena $h_1 \in H_1$ dan $(H_1,*)$ grup, maka ${h_1}^{-1} \in H_1$ sehingga $h_2 \odot {h_1}^{-1} \in H_2 \odot H_1$. Dengan demikian $H_1 \odot H_2 \subset H_2 \odot H_1$. Dari (i) dan (ii) terbukti bahwa $H_2 \odot H_1 = H_1 \odot H_2$.

$(\Leftarrow)$

Diketahui $H_2 \odot H_1 = H_1 \odot H_2$. Akan ditunjukkan $H_1 \odot H_2$ merupakan K-subaljabar dari $(G,*,\odot,e)$.

(i) $H_1 \odot H_2 \neq \emptyset$, karena $e \in H_1 \odot H_2$, yaitu $e = e \odot e$, dengan $e \in H_1$, $e \in H_2$.

(ii) Diambil sebarang unsure $x, y \in H_1 \odot H_2$, maka $x = x_1 \odot x_2$ dan $y = y_1 \odot y_2$, dengan $x_1, y_1 \in H_1$ dan $x_2, y_2 \in H_2$, sehingga :

$$\begin{aligned} x \odot y &= (x_1 \odot x_2) \odot (y_1 \odot y_2) \\ &= (x_1 \odot (e \odot y_2) \odot (e \odot x_2) \odot y_1 \\ &= (x_1 \odot {y_2}^{-1} \odot {x_2}^{-1}) \odot y_1 \\ &= (x_1 * y_2 * x_2) * {y_1}^{-1} \\ &= (x_1 * y_2) * (x_2 * {y_1}^{-1}) \\ &= (x_1 \odot {y_2}^{-1}) * (y_1 * {x_2}^{-1})^{-1} \\ &= (x_1 \odot {y_2}^{-1}) \odot (y_1 \odot x_2) \\ &= (x_1 \odot {y_2}^{-1}) \odot \left(e \odot (x_2 \odot y_1)\right) \\ &= (x_1 \odot y_1 \odot y_2) \odot {x_2}^{-1} \\ &= (x_1 * {y_1}^{-1} * {y_2}^{-1}) * x_2 \\ &= (x_1 * {y_1}^{-1}) * ({y_2}^{-1} * x_2) \\ &= (x_1 * {y_1}^{-1}) * ({x_2}^{-1} * y_2)^{-1} \\ &= (x_1 \odot y_1) * ({x_2}^{-1} \odot {y_2}^{-1})^{-1} \\ &= (x_1 \odot y_1) \odot ({x_2}^{-1} \odot {y_2}^{-1}) \\ &\in H_1 \odot H_2 \end{aligned}$$

Dari (i) dan (ii) terbukti bahwa $H_1 \odot H_2$ merupakan K-subaljabar dari$(G,*,\odot,e)$. ■

Seperti halnya pada grup yang mempunyai konsep homomorfisma, K-aljabar yang dibangun atas grup juga mempunyai konsep homomorfisma yang disebut K-homomorfisma.

2.3 Homomorfisma K-aljabar

Berikut ini akan dibahas Homomorfisma K-aljabar dan sifat-sifat yang berlaku di dalamnya.

Definisi 2.3.1 [1] Misalkan K_1 dan K_2 merupakan K-aljabar. Suatu pemetaan ψ dari K_1 ke K_2, dinotasikan dengan $\psi : K_1 \to K_2$, disebut K-homomorfisma jika $\forall x_1, y_1 \in K_1$ berlaku $\psi(x_1 \odot y_1) = \psi(x_1) \odot \psi(y_1)$, dimana $\psi(x_1), \psi(y_1) \in K_2$.

Contoh 5
Misal $(G,\odot)$ suatu K-aljabar, dibentuk himpunan bagian $H = \{g \odot (g \odot x) : x \in G\}$, berdasarkan **Proposisi 2.2.1** H merupakan K-subaljabar dari G. Selanjutnya didefinisikan pemetaan $\psi : (G,\odot) \longrightarrow (H,\odot)$, dengan $\psi(x) = g \odot (g \odot x), \forall x \in G$. Akan ditunjukkan bahwa $\psi : (G,\odot) \longrightarrow (H,\odot)$ merupakan suatu K-homomorfisma. Diambil sebarang unsur $x, y \in G$, maka $x \odot y \in G$ dan
$\psi(x \odot y)$
$= g \odot \big(g \odot (x \odot y)\big)$
$= \Big(g \odot \big(e \odot (x \odot y)\big)\Big) \odot g$
$= (g \odot \big((e \odot y) \odot (e \odot x)\big)) \odot g$
$= \big(g \odot (g \odot x)\big) \odot \big(g \odot (g \odot y)\big)$
$= \psi(x) \odot \psi(y)$
Karena $\psi(x \odot y) = \psi(x) \odot \psi(y)$, maka $\psi : (G,\odot) \longrightarrow (H,\odot)$ merupakan suatu K-homomorfisma.

Homomorfisma pada K-aljabar akan berakibat pada homomorfisma grup sebagaimana diberikan oleh akibat berikut:
Akibat 2.3.1 [1] Misalkan $K_1 = (G_1, *, \odot, e_1)$ dan $K_2 = (G_2, *, \odot, e_2)$ adalah K-aljabar serta $\psi : K_1 \to K_2$, suatu K-homomorfisma, maka ψ juga merupakan homomorfisma dari grup G_1 ke G_2.
Bukti :
Dipandang $(G_1, *)$ dan $(G_2, *)$ sebagai suatu grup. Akan ditunjukkan pemetaan $\psi : G_1 \to G_2$ merupakan homomorfisma grup. Diambil sebarang unsur $x, y \in G_1$, maka :
$\psi(x * y) = \psi(x \odot y^{-1})$
$= \psi(x) \odot \psi(y^{-1})$
$= \psi(x) * [\psi(y^{-1})]^{-1}$
$= \psi(x) * [\psi(y)^{-1}]^{-1}$
$= \psi(x) * \psi(y)$
Karena $\psi(x * y) = \psi(x) * \psi(y)$, maka ψ juga merupakan homomorfisma dari G_1 ke G_2. ■

Berikut ini akan ditinjau sifat-sifat dari K-homomorfisma sebagaimana diberikan oleh proposisi berikut :
Proposisi 2.3.1 [1] Misalkan $K_1 = (G_1, *, \odot, e_1)$ dan $K_2 = (G_2, *, \odot, e_2)$ serta $\psi : K_1 \to K_2$, suatu K-homomorfisma. Jika K_1 suatu K-aljabar yang komutatif, maka $\forall x_1, x_2 \in K_1$ berlaku
1. $\psi(e_1) = e_2$.
2. $\psi(x) = \psi(x^{-1})$.
3. $\psi(e_1 \odot x_1) = e_2 \odot \psi(x_1)$.
4. $\psi(x_1 \odot x_2) = e_2$ jika dan hanya jika $\psi(x_1) = \psi(x_2)$.
5. Jika H_1 adalah subaljabar dari K_1 maka $\psi(H_1)$ adalah subaljabar dari K_2.

Bukti – bukti :
1. Misalkan ψ suatu K-homomorfisma dari K_1 ke K_2, dimana $e_1$dan e_2 berturut – turut menyatakan unsur identitas dari K_1 dan K_2 terhadap operasi biner $\odot$.
   Diambil sebarang unsur $x \in K_1$, maka
   $x \odot e_1 = a$ dan
   $\psi(x \odot e_1) = \psi(x)$ ... (i)
   Karena $\psi : K_1 \longrightarrow K_2$ suatu K-homomorfisma, maka pers (i) menjadi
   $\psi(x) \odot \psi(e_1) = \psi(x)$ ... (ii)
   Selanjutnya, karena $\psi(a) \in K_2$ dan e_2 Adalah unsur di K_2, maka
   $\psi(x) = \psi(x) \odot e_2$ ... (iii)
   Sehingga dari (ii) dan (iii) diperoleh
   $\psi(x) \odot \psi(e_1) = \psi(x) = \psi(x) \odot e_2$
   Dengan demikian berakibat
   $\psi(e_1) = e_2$.

2. Misalkan e_1 menyatakan unsur identitas dari K_1. Akan ditunjukkan $\psi(x) = \psi(x^{-1})$. Diambil sebarang unsur $x \in K_1$, maka $e \odot x = x^{-1}$.
   Karena $e \odot x = x^{-1} \in K_1$ dan ψ suatu K-homomorfisma, maka :
   $\psi(e \odot x) = \psi(x^{-1})$ …(i)
   Selanjutnya menurut **Proposisi 2.1.2** menyatakan bahwa $e \odot x = x$.

Karena $e \odot x = x \in K_1$ dan ψ suatu K-homomorfisma, maka :
$\psi(e \odot x) = \psi(x)$ …(ii)
Dari persamaan (i) dan (ii) diperoleh $\psi(x^{-1}) = \psi(x)$.

3. Misalkan e_1 menyatakan unsur identitas dari K_1. Akan ditunjukkan $\psi(e_1 \odot x_1) = e_2 \odot \psi(x_1)$. Diambil sebarang unsur $x_1 \in K_1$ maka $e_1 \odot x_1 \in K_1$ dan berlaku
$$\psi(e_1 \odot x_1) = \psi(e_1) \odot \psi(x_1)$$
$$= e_2 \odot \psi(x_1).$$

4. (⇒)
Diketahui $\psi(x_1 \odot x_2) = e_2$. Akan ditunjukkan $\psi(x_1) = \psi(x_2)$.
Diambil sebarang unsur $x_1, x_2 \in K_1$. Karena $x_1, x_2 \in K_1$ maka $x_1 \odot x_2 \in K_1$
dan berlaku :
$$\psi(x_1 \odot x_2) \quad = e_2$$
$$\psi(x_1 \odot x_2) \odot \psi({x_2}^{-1})$$
$$= e_2 \odot \psi({x_2}^{-1})$$
$$\psi[(x_1 \odot x_2) \odot {x_2}^{-1}]$$
$$= e_2 \odot \psi({x_2}^{-1})$$
$$\psi[(x_1 * {x_2}^{-1}) * x_2] = [\psi({x_2}^{-1})]^{-1}$$
$$\psi[x_1 * ({x_2}^{-1} * x_2)] = [\psi({x_2}^{-1})]^{-1}$$
$$\psi[x_1 * e_1] = [\psi(x_2)^{-1}]^{-1}$$
$$\psi(x_1) = \psi(x_2)$$
(⇐)
Diketahui $\psi(x_1) = \psi(x_2)$, akan ditunjukkan $\psi(x_1 \odot x_2) = e_2$.
Diambil sebarang unsur $x_1, x_2 \in K_1$. Karena $x_1, x_2 \in K_1$ maka $x_1 \odot x_2 \in K_1$ dan berlaku :
$$\psi(x_1 \odot x_2) = \psi(x_1) \odot \psi(x_2)$$
$$= \psi(x_1) \odot \psi(x_1)$$
$$= \psi(x_1 \odot x_1)$$
$$= \psi(e_1)$$
$$= e_2$$

5. Misalkan H_1 merupakan subaljabar dari K_1. Akan ditunjukkan bahwa $\psi(H_1)$ adalah subaljabar dari K_2.
(i). $H_1 \neq \emptyset$ karena setidaknya H_1 memuat elemen identitas yaitu $e_1 \in H_1$
maka $\psi(e_1) = e_2 \in \psi(H_1)$.
Dengan kata lain $\psi(H_1) \neq \emptyset$.
(ii). Diambil sebarang unsur $y_1, y_2 \in \psi(H_1)$, maka terdapat $x_1, x_2 \in H_1$ sedemikian sehingga $\psi(x_1) = y_1$, $\psi(x_2) = y_2$, dan
$$y_1 \odot y_2 = \psi(x_1) \odot \psi(x_2)$$
$$= \psi(x_1 \odot x_2) \in \psi(H_1),$$
karena $x_1 \odot x_2 \in H_1$ ■

Akibat 2.3.2 [1] Misalkan $\psi : K_1 \longrightarrow K_2$ suatu K-homomorfisma, maka $\forall x_1, y_1 \in K_1$ berlaku :
1. $\psi(x_1 \odot y_1) = \psi(y_1 \odot x_1)$
2. $\psi(x_1) = \psi(e_1 \odot x_1)$

Bukti - bukti :
1. Misal e_1 adalah unsur identitas dari K_1. Diambil sebarang unsur $x_1, y_1 \in K_1$ maka $y_1 \odot x_1 \in K_1$ dan $x_1 \odot y_1 \in K_1$. Dengan demikian $e_1 \odot (x_1 \odot y_1) \in K_1$. Menurut **Proposisi 2.1.3** berlaku
$$e_1 \odot (x_1 \odot y_1) = y_1 \odot x_1$$
$$\psi[e_1 \odot (x_1 \odot y_1)] = \psi(y_1 \odot x_1)$$
$$\psi[(e_1 \odot x_1) \odot (e_1 \odot y_1)]$$
$$= \psi(y_1 \odot x_1)$$
$$\psi({x_1}^{-1} \odot {y_1}^{-1}) = \psi(y_1 \odot x_1)$$
$$\psi({x_1}^{-1}) \odot \psi({y_1}^{-1}) = \psi(y_1 \odot x_1)$$
$$\psi(x_1) \odot \psi(y_1) = \psi(y_1 \odot x_1)$$
$$\psi(x_1 \odot y_1) = \psi(y_1 \odot x_1)$$
2. Misal e_1 adalah unsur identitas dari K_1. Diambil sebarang unsur $x_1 \in K_1$, maka $e_1 \odot x_1 \in K_1$ dengan $e_1 \odot x_1 = {x_1}^{-1}$.
$$\psi(e_1 \odot x_1) = \psi({x_1}^{-1})$$
$$\psi(e_1 \odot x_1) = \psi(x_1)$$ ■

Selanjutnya akan diberikan definisi dan contoh dari kernel ψ.

Definisi 2.3.2 [1] Misalkan $K_1 = (G_1, *, \odot, e_1)$ dan $K_2 = (G_2, *, \odot, e_2)$ merupakan K-aljabar dan $\psi : K_1 \to K_2$ suatu homomorfisma. Himpunan bagian dari K_1 yaitu $\ker(\psi) = \{x \in K_1 : \psi(x) = e_2\}$ disebut kernel dari ψ.

Contoh 6

Berdasarkan **Contoh 5** diketahui $(G,\odot)$ merupakan K-aljabar dan $(H,\odot)$ merupakan K-subaljabar dari $(G,\odot)$ serta $\psi : (G,\odot) \to (H,\odot)$ suatu K-homomorfisma dengan $\psi(x) = g \odot (g \odot x), \forall x \in G$. Akan dicari kernel dari ψ. Diambil sebarang unsur $x \in G$, terdapat 2 kemungkinan yaitu $x = e_1$ atau $x \neq e_1$.

1) Untuk $x = e_1$

$$\begin{aligned}\psi(e_1) &= g \odot (g \odot e_1)\\ &= g \odot g\\ &= e_2\end{aligned}$$

2) Untuk $x \neq e_1$

$$\begin{aligned}\psi(x) &= g \odot (g \odot x)\\ &= g * (g * x^{-1})^{-1}\\ &= g * (x * g^{-1}) \neq e_2\end{aligned}$$

Karena untuk $x = e_1$, $\psi(e_1) = e_2$ maka $\ker(\psi) = \{e_1\}$.

Selanjutnya akan ditinjau keterkaitan antara $\ker(\psi)$ dengan relasi ekuivalensi yang didefinisikan pada K-aljabar. Misalkan $\psi : K_1 \to K_2$ suatu homomorfisma, maka

$$\mathrm{Ker}(\psi) = \{x \in K_1 | \psi(x) = e_2\}.$$

Didefinisikan relasi "$\sim$" pada K_1 dengan $x \sim y$ jika hanya jika

$$x \odot y \in \ker(\psi), \forall x, y \in K_1.$$

Teorema 3.3.2 [1] Misalkan K_1 suatu K-aljabar. Jika pada K_1 didefinisikan sebuah relasi "$\sim$" dengan $x \sim y$ jika hanya jika $x \odot y \in \ker(\psi), \forall x, y \in K_1$, maka relasi "$\sim$" merupakan relasi ekuivalensi.

Bukti :

Misal pada K_1 didefinisikan relasi "$\sim$" dengan $x \sim y$ jika hanya jika $x \odot y \in \ker(\psi), \forall x, y \in K_1$. Akan ditunjukkan relasi "$\sim$" merupakan relasi ekuivalensi, yaitu akan ditunjukkan relasi $\sim$ memenuhi sifat refleksif, simetris, dan transitif.

1). Diambil sebarang unsur $x \in K_1$ maka $x \odot x = e_1 \in K_1$ dan $\psi(x \odot x) = \psi(e_1) = e_2$, sehingga $x \odot x \in \ker(\psi)$, yaitu $x \sim x$. Dengan kata lain relasi $\sim$ bersifat refleksif.

2). Diambil sebarang unsur $x, y \in K_1$dan $x \sim y$, maka $x \odot y \in \ker(\psi)$ sehingga $\psi(x \odot y) = e_2$. Karena $\psi : K_1 \to K_2$ suatu homomorfisma, maka menurut **Akibat 2.3.2** , berlaku $\forall x, y \in K_1$ berlaku $\psi(x \odot y) = \psi(y \odot x)$. Dengan demikian $(y \odot x) = e_2$, maka $y \odot x \in \ker(\psi)$ yaitu $y \sim x$, akibatnya relasi $\sim$ bersifat simetris.

3). Diambil sebarang unsur $x, y, z \in K_1$ dan $x \sim y, y \sim z$. Akan ditunjukkan $x \sim z$. Karena $x \sim y$ dan $y \sim z$, maka $x \odot y \in \ker(\psi)$ dan $y \odot z \in \ker(\psi)$. Sehingga $\psi(x \odot y) = e_2$ dan $\psi(y \odot z) = e_2$. Selanjutnya, karena $x \odot y \in K_1$ dan $y \odot z \in K_1$ maka $(x \odot y) \odot (y \odot z) \in K_1$ dan

$$\begin{aligned}&\psi\big((x \odot y) \odot (y \odot z)\big)\\ &= \psi(x \odot y) \odot \psi(y \odot z)\\ &= e_2 \odot e_2\\ &= e_2 \qquad \ldots (i)\end{aligned}$$

Disisi lain

$$\begin{aligned}&\psi\big((x \odot y) \odot (y \odot z)\big)\\ &\qquad = \psi(x \odot z) \ldots (ii)\end{aligned}$$

Dari (i) dan (ii) didapat $\psi(x \odot z) = e_2$. Sehingga $x \odot z \in \ker(\psi)$, yaitu $x \sim z$. Dengan kata lain relasi $\sim$ merupakan relasi transitif.

Dari (1), (2), dan (3) terbukti bahwa relasi $'\sim'$ merupakan relasi ekuivalensi pada K_1.

2. PENUTUP

Dari pembahasan yang telah diuraikan, dapat diambil beberapa hal sebagai berikut :

1. Misalkan $(G,*)$ suatu grup dengan unsur identitas e. Jika pada G dilengkapi operasi $\odot$ yang didefinisikan oleh $\forall x, y \in G, x \odot y = x * y^{-1}$ sedemikian hingga operasi $\odot$ merupakan operasi biner pada G dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu maka $(G,*,\odot, e)$ akan membentuk struktur aljabar baru yang disebut K-aljabar.
2. Dari suatu K-aljabar dapat dibentuk himpunan bagian yang memiliki sifat K-aljabar terhadap operasi biner yang sama yang dinamakan K-subaljabar.

3. Sebagaimana pada grup yang terdapat konsep homomorfisma grup, pada K-aljabar juga terdapat konsep homomorfisma yang dinamakan K-homomorfisma.
4. Sifat-sifat yang berlaku pada grup, akan berlaku juga pada K-aljabar.

3. DAFTAR PUSTAKA

[1] K.H Dar Akram, 2006, *"On K-Homomorphisms of K-Algebras"*, University of the Punjab, International Mathematical Forum. Ser, 46 (2007).

[2] K. H Dar Akram, 2006, *"On Subclass of $K(G)$-algebra"*, Annals of University of Cariova, Math. Comp. Sci. Ser, 33 (2006).