HUBUNGAN VARIETY DAN IDEAL RADIKAL

SKRIPSI

Oleh :

Ambar Mujiarti

J2A 004 003

PROGRAM STUDI MATEMATIKA JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS DIPONEGORO

SEMARANG

2009

ABSTRAK

Variety $\mathbf{V}(f_1,\ldots,f_s)\subset k^n$ adalah himpunan semua solusi dari sistem persamaan $f_1(x_1,\ldots,x_n)=\cdots=f_s(x_1,\ldots,x_n)=0$, $f_i(x_1,\ldots,x_n)\in k[x_1,\ldots,x_n]$ dengan $i=1,\ldots,s$ dan k^n adalah ruang affine berdimensi *n* atas lapangan *k*. Variety mempunyai hubungan yang erat dengan ideal dari ring polinomial $k[x_1,\ldots,x_n]$. Dari Variety *V* dapat didefinisikan suatu Ideal $\mathbf{I}(V)=\{f\in k[x_1,\ldots,x_n]: f(a_1,\ldots,a_n)=0,$ untuk setiap $(a_1,\ldots,a_n)\in V\}$ sehingga diperoleh pemetaan dari keluarga variety $\mathcal{V}$ ke keluarga ideal $\mathcal{I}$ yaitu $\theta: V\mapsto \mathbf{I}(V)$. Sebaliknya dari ideal *I* dapat didefinisikan Variety $\mathbf{V}(I)=\{(a_1,\ldots,a_n)\in k^n : f(a_1,\ldots,a_n)=0,$ untuk setiap $f\in I\}$ dengan *k* adalah lapangan yang tertutup secara aljabar sehingga diperoleh pemetaan dari keluarga ideal $\mathcal{I}$ ke keluarga variety $\mathcal{V}$ yaitu $\phi: I\mapsto \mathbf{V}(I)$. Pemetaan θ adalah pemetaan satu-satu tetapi pemetaan ϕ bukan pemetaan satu-satu. Sedangkan pemetaan θ dari keluarga variety $\mathcal{V}$ ke keluarga Ideal radikal $\mathcal{I}$ yaitu $\theta: V\mapsto \mathbf{I}(V)$ adalah pemetaan bijektif dengan *k* adalah lapangan yang tertutup secara aljabar.

Kata kunci : variety, ideal, ideal radikal.

ABSTRACT

Variety $\mathbf{V}(f_1,\ldots,f_s)\subset k^n$ is the set of all solutions of the system of equations $f_1(x_1,\ldots,x_n)=\cdots=f_s(x_1,\ldots,x_n)=0$, $f_i(x_1,\ldots,x_n)\in k[x_1,\ldots,x_n]$ where $i=1,\ldots,s$ and k^n is the *n*-dimensional affine space over a field *k*. Variety has a tight correspondence with ideal from the polynomial ring $k[x_1,\ldots,x_n]$. From a Variety *V* can be defined an Ideal $\mathbf{I}(V)=\{f\in k[x_1,\ldots,x_n]: f(a_1,\ldots,a_n)=0, \text{for all } (a_1,\ldots,a_n)\in V\}$ so that obtained the map from variety's family $\mathcal{V}$ in to ideal's family $\mathcal{I}$ i.e. $\theta: V\mapsto \mathbf{I}(V)$. Conversely, from an ideal *I* can be defined a variety $\mathbf{V}(I)=\{(a_1,\ldots,a_n)\in k^n : f(a_1,\ldots,a_n)=0, \text{for all } f\in I\}$ where *k* is algebraically closed field so that obtained the map from ideal's family $\mathcal{I}$ on to variety's family $\mathcal{V}$ i.e. $\phi: I\mapsto \mathbf{V}(I)$. The map θ is one to one but the map ϕ is not one to one. Whereas, the map from variety's family $\mathcal{V}$ to radical ideal's family $\mathcal{I}$ i.e. $\theta: V\mapsto \mathbf{I}(V)$ is bijective where *k* is algebraically closed field.

Key words : variety, ideal, radical ideal.

BAB I

PENDAHULUAN

I. LATAR BELAKANG

Aljabar Geometri adalah salah satu cabang matematika yang mengkombinasikan aljabar abstrak dengan geometri [3]. Untuk menghubungkan aljabar dan geometri digunakan ruang affine, yaitu :

$$k^n = \{(a_1,..,a_n) : a_1,..,a_n \in k\}$$

dimana *k* adalah suatu lapangan dan *n* adalah bilangan bulat positif [4].

Di dalam geometri, dipelajari tentang variety, dimana kurva dan permukaan di definisikan oleh persamaan polinomial [1]. Misalnya sebuah lingkaran dengan radius 2 di $\mathbb{R}^2$ yang pusatnya di titik O dapat ditulis dengan variety $\mathbf{V}\ (x^2 + y^2 - 4)$.

Didalam aljabar, dipelajari tentang ideal dalam ring polinomial $k[x_1,...,x_n]$ dan ideal radikal dalam ring polinomial $k[x_1,...,x_n]$. Sedangkan di dalam aljabar geometri, variety dan ideal dalam ring polinomial $k[x_1,...,x_n]$ sangat berhubungan erat.

Selanjutnya dari uraian diatas, akan dibahas hubungan antara variety dan ideal radikal dalam ring polinomial $k[x_1,...,x_n]$.

II. PERMASALAHAN

Permasalahan dalam tugas akhir ini adalah menentukan bagaimana hubungan variety dan ideal radikal.

III. PEMBATASAN MASALAH

Dalam penulisan tugas akhir ini, permasalahan dibatasi pada penentuan hubungan variety dan ideal radikal berdasarkan teorema-teorema *Nullstellensatz* yaitu *Weak Nullstellensatz*, *Hilbert's Nullstellensatz* dan *Strong nullstellensatz.*

IV. METODE PENULISAN

Penulisan tugas akhir ini dilakukan dengan studi literatur. Terlebih dahulu penulis akan menguraikan dasar-dasar pemahaman yang terkait dengan hubungan antara variety dan ideal radikal, seperti pengertian ring polinomial, ideal polinomial, dan basis Groebner.

Selain itu juga akan dibahas teorema-teorema yang berhubungan dengan hubungan antara variety dan ideal radikal yaitu teorema-teorema *Nullstellensatz*.

V. TUJUAN PENULISAN

Tujuan penulisan tugas akhir ini adalah :

- Mengetahui bagaimana hubungan antara ideal dan variety.
- Mengetahui bagaimana hubungan antara ideal radikal dan variety.

VI. SISTEMATIKA PENULISAN

Sistematika pembahasan dalam tugas akhir ini terbagi menjadi 4 bab yang dimulai dari bab pendahuluan dan diakhiri dengan bab penutup.

Bab I Pendahuluan. Bab ini memuat latar belakang, permasalahan yang diangkat, pembatasan masalah, metode penulisan, tujuan yang ingin dicapai, dan sistematika penulisan.

Bab berikutnya adalah materi penunjang yang diangkat sebagai bab II. Bab ini berisi kajian literatur mengenai materi mendasar dan terkait dengan materi hubungan variety dan ideal radikal.

Bab selanjutnya merupakan pembahasan hubungan variety dan ideal radikal yang berisi materi tentang variety, ideal dari ring polinomial atas $k[x_1,...,x_n]$, teorema - teorema *Nullstellensatz*, ideal radikal dan hubungan variety dan ideal radikal.

Bab terakhir merupakan bab IV yaitu bab penutup. Bab ini berisi beberapa catatan dari penulis atas hasil yang telah didapatkan.