KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji syukur ke hadirat Allah SWT penulis ucapkan, atas rahmat dan hidayah-Nya yang telah diberikan, sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini. Sebuah karya tulis ilmiah yang begitu sederhana dan jauh dari kesempurnaan.

Tugas akhir ini yang berjudul **“Algoritma Petkovšek untuk Persamaan Diferensial Orde Dua dengan Koefisien Polinomial”** ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains pada Jurusan Matematika F MIPA Universitas Diponegoro Semarang.

Manusia tidak dapat hidup sendiri tanpa bantuan dari orang lain. Begitu juga dengan penulis yang telah mendapatkan bantuan dari berbagai pihak yang tidak dapat penulis balas dengan seimbang budi baik mereka karena keterbatasan keterbatasan penulis sebagai manusia biasa. Pada kesempatan ini perkenankan penulis mengucapkan terima kasih pada :

1. Ibu Dr. Widowati, M.Si selaku ketua Jurusan Matematika Universitas Diponegoro
2. Ibu Triastuti Wuryandari, S.Si, M.Si selaku dosen wali yang telah mengarahkan penulis dari awal kuliah hingga selesainya tugas akhir ini.

3. Bapak Drs. Djuwandi SU selaku dosen pembimbing I yang telah berkenan memberikan bimbingan, nasehat, pengarahan serta saran-saran hingga selesainya tugas akhir ini.
4. Ibu Dra. Titi Udjiani SRRM, M.Si selaku dosen pembimbing II atas bimbingan dan saran-sarannya kepada penulis.
5. Bapak dan Ibu Dosen Jurusan Matematika atas semua ilmu dan bimbingan yang telah diberikan kepada penulis selama menuntut ilmu di Jurusan Matematika Universitas Diponegoro.
6. Semua pihak yang telah membantu penulis selama ini, yang tidak mungkin penulis sebutkan satu persatu.

Akhirnya penulis panjatkan do'a kehadirat Allah SWT semoga segala amal dan bantuannya mendapat balasan yang setimpal dari-Nya. Amin.

Penulis menyadarari bahwa penyusunan tugas akhir ini jauh dari kesempurnaan, namun begitu dengan segala kerendahan hati penulis mengharapkan kritik serta saran yang membangun.

Semoga tugas akhir dapat bermanfaat bagi penulis khususnya, dan pembaca pada umumnya serta bagi perkembangan Ilmu Pengetahuan.

Semarang, April 2009

Penulis

ABSTRAK

Algoritma Petkovšek adalah generalisasi dari algoritma HYPER yang menemukan semua solusi Hypergeometrik dari persamaan diferensial yang diberikan. Bentuk umum persamaan diferensial yang dapat diterapkan untuk algoritma Petkovšek adalah $\sum_{i=0}^{r}(\gamma_i x + \varepsilon_i)x^i y^{(i)}(x) = 0$ Dalam hal ini diambil r = 2, untuk γ_i dan ε_i adalah konstanta rasional sebarang, dengan kata lain bisa berupa $(ax^2 + bx)y''(x) + (cx + d)y'(x) + ey(x) = 0$ dimana *a, b, c, d,* dan *e* $\in$ Q serta *a* & *b* $\neq$ 0 maka dengan menggunakan Algoritma Petkovšek dapat dilakukan dengan dua langkah yaitu mencari titik-titik singular serta langkah selanjutnya adalah mereduksi orde dengan cara $\left(\sum_{i=0}^{r} a_i x + b_i\right)x^r y^{(n)}(x),$ dengan $r \neq 0$, $r < n$ dan $n > 1$ maka untuk reduksi orde adalah $n - r$.

Kata Kunci : Algoritma HYPER, Algoritma Petkovšek, Persamaan Type Hypergeometrik.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Persamaan-persamaan diferensial orde dua mempunyai struktur yang teoritik yang kaya dengan metode-metode sistematis dan sangat mudah dimengerti untuk level matematika yang sederhana. Adapun bentuk umum dari persamaan diferensial orde dua adalah sebagai berikut.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \tag{1.1.1}$$

Dimana $p(x)$, $q(x)$ dan $g(x)$ adalah fungsi-fungsi kontinu pada suatu interval, dan dimana $y' = \frac{dy}{dx}$ dan $y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$. Jika dalam hal ini $g(x) = 0$ maka bentuk umum persamaan diferensial diatas disebut dengan persamaan diferensial homogen. Apabila jika $g(x)$ berupa suatu fungsi dan tidak nol maka bentuk umum dari persamaan diatas merupakan suatu persamaan diferensial non-homogen. Akan tetapi jika ditemui bentuk umum persamaan diferensial seperti dibawah ini

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \tag{1.1.2}$$

Dengan masing-masing $P(x)$, $Q(x)$ dan $R(x)$ adalah fungsi-fungsi polinomial yang kontinu pada suatu interval, itu juga disebut dengan pesamaan diferensial homogen.

Dalam hal ini berbeda metode untuk mencari solusi antara persamaan (1.1.1) dengan (1.1.2) dikarenakan masing-masing mempunyai kriteria khusus, seperti pada persamaan (1.1.1) jika $g(x) = 0$ dan koefisien-koefisien berupa konstanta dapat digunakan metode singkat yaitu persamaan karakteristik dan pada persamaan (1.1.2) dengan koefisien-koefisien polinomial disini dapat digunakan salah satu Algoritma yaitu Algoritma Petkovšek. Algoritma Petkovšek ini digunakan agar dapat mempermudah dalam mencari solusi persamaan diferensial dengan tingkat yang lebih tinggi.

1.2. Permasalahan

Dalam tugas akhir ini permasalahan ditekankan untuk menjelaskan konsep dari Algoritma Petkovšek. Sehingga Algoritma Petkovšek tersebut dapat digunakan untuk menemukan solusi suatu persamaan diferensial orde dua dengan koefisien polinomial.

1.3. Pembatasan Masalah

Pembahasan dalam tugas akhir ini hanya difokuskan pada persamaan diferensial orde dua homogen dengan koefisien polinomial seperti persamaan $(ax^2 + bx)y''(x) + (cx + d)y'(x) + ey(x) = 0$ dimana *a, b, c, d,* dan $e \in$ Q serta *a* & *b*

$\neq 0$ menggunakan Algoritma Petkovšek saja, sehingga tidak membahas metode atau algoritma lain.

1.4. <u>Tujuan</u>

Tujuan dari penulisan tugas akhir ini adalah memperkenalkan Algoritma Petkovšek sebagai metode untuk menemukan solusi dari persamaan diferensial orde dua dengan koefisien polinomial.

1.5. <u>Sistematika Penulisan</u>

Sistematika penulisan tugas akhir ini meliputi empat bab. Bab I merupakan bab pendahuluan. Bab II berisi dasar teori yang meliputi materi penunjang. Bab III merupakan bab pembahasan dari tugas akhir ini. Bab IV merupakan penutup.

BAB II

MATERI PENUNJANG

Bab ini menjelaskan beberapa materi dan teorema yang merupakan materi penunjang dari materi yang akan dibahas pada Bab III. Materi tersebut antara lain Ruang Vektor, Kombinasi linier, Kebebasan Linier, Basis, persamaan diferensial orde dua yang meliputi persamaan homogen dengan koefisien konstan, persamaan tak homogen dengan koefisien tak tentu dan operator D, solusi dengan deret pangkat meliputi operasi dengan deret pangkat dan solusi persamaan linier orde dua dengan deret pangkat,fungsi factorial serta persamaan Hypergeometrik.

2.1. Ruang Vektor

Sebelum menjelaskan difinisi ruang vektor disini akan dijelaskan terlebih dahulu operasi penjumlahan dan perkalian dari vektor. Untuk penjumlahan vektor misalkan **u** dan **v** adalah vektor-vektor di R^3 maka $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ berlaku

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

serta untuk perkalian vektor misalkan **u** dan **v** adalah vektor-vektor di R^3 maka **u** = (u_1, u_2, u_3) dan **v** = (v_1, v_2, v_3) berlaku

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u_1, u_2, u_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) = (u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3)$$

Contoh 2.1.1

Jika **u** = (1, -3, 2) dan **v** = (4, 2, 1) maka

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (1, -3, 2) + (4, 2, 1) = (1 + 4, -3 + 2 , 2 + 1) = (5, -1, 3)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (1, -3, 2).(4, 2, 2) = (1.4 + -3.2 + 2.2) = (4 + -6 + 4) = 2$$

Selanjutnya akan diberikan definisi tentang ruang vektor lebih lanjut beserta teorema dan contoh-contohnya.

Definisi 2.1.1 [1]

Misalkan *V* sebarang himpunan vektor yang didefinisikan operasi-operasi penambahan dan perkalian dengan skalar (bilangan riil). Dengan kita mengartikannya bahwa untuk setiap pasang vektor-vektor **u** dan **v** didalam *V*, kita dapat mengasosiasikannya dengan vektor **u** + **v** yang tunggal juga berada di *V*, dan dengan setiap vektor **u** di *V* dan setiap scalar *k* kita dapat mengasosiasikan dengan vektor *k***u** yang tunggal didalam *V*. Jika aksioma-aksioma berikut dipenuhi oleh semua vektor

u, v, w pada *V* dan oleh semua skalar *k* dan *l*, maka *V* adalah ***sebuah ruang vektor (vector space)***:

(1) Jika **u** dan **v** adalah vektor-vektor pada *V*, maka **u** + **v** berada pada *V*.

(2) **u** + **v** = **v** + **u**

(3) **u** + **(v** + **w)** = **(u** + **v) + w**

(4) Ada sebuah vektor **0** di *V* sehingga **0** + **u = u + 0** = **u** untuk semua **u** di *V*.

(5) Untuk setiap **u** di *V*, ada sebuah benda **– u** di *V* yang dinamakan ***negatif* u** sehingga **u** + **(–u)** = **(–u)** + **u** = **0**.

(6) Jika *k* adalah sebarang skalar dan **u** adalah sebarang benda di *V*, maka *k***u** berada di *V*.

(7) *k***(u** + **v) =** *k***u** + *k***v**

(8) (*k* + *l*)**u** = *k***u** + *l***u**

(9) *k* (*l***u**) = (*kl*)**u**

(10) 1**u** = **u**

Teorema 2.1.2 [1]

Misalkan *V* adalah sebuah ruang vektor. **u** adalah sebuah vektor pada *V* dan *k* sebuah skalar maka

(a) $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$

(b) $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$

(c) $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$

(d) Jika $k\mathbf{u} = \mathbf{0}$, maka $k = 0$ atau $\mathbf{u} = \mathbf{0}$

Bukti

Bukti (a), kita dapat menuliskan

$$0\mathbf{u} + 0\mathbf{u} = (0 + 0)\mathbf{u} = 0\mathbf{u} \qquad \text{(aksioma 8)}$$

Menurut aksioma 5 maka vektor $\mathbf{0u}$ adalah bilangan negatif, yakni – $\mathbf{0u}$. Dengan menambahkan bilangan negatif ini pada kedua ruas diatas akan menghasilkan

$$[0\mathbf{u} + 0\mathbf{u}] + (-0\mathbf{u}) = 0\mathbf{u} + (-0\mathbf{u})$$

Atau

$$0\mathbf{u} + [0\mathbf{u} + (-0\mathbf{u})] = 0\mathbf{u} + (-0\mathbf{u})$$

$$0\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \rightarrow 0\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

Bukti (b), kita dapat menuliskan menurut aksioma 5 berupa

$$k\mathbf{0} = k\,((-\mathbf{u}) + \mathbf{u})$$

dengan menggunakan aksioma 7 maka diperoleh

$$k\mathbf{0} = k(-\mathbf{u}) + k\mathbf{u} = (-k\mathbf{u}) + k\mathbf{u}$$

jelaslah bahwa, $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$

Bukti (c), untuk memperlihatkan $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$, kita harus memperlihatkan bahwa $\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Untuk melihat ini, akan diperlihatkan bahwa

$$\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} = 1\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} = (1 + (-1))\mathbf{u} = 0\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

Bukti (d), akan ditunjukan bahwa untuk $k = 0$ maka

$$0\mathbf{u} = (k + (-k))\mathbf{u} = k\mathbf{u} + (-k)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + (-k\mathbf{u}) = \mathbf{0}$$

Akan ditunjukan bahwa untuk $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ maka

$$k\mathbf{0} = k(\mathbf{u} + (-\mathbf{u})) = k\mathbf{u} + k(-\mathbf{u}) = k\mathbf{u} + (-k\mathbf{u}) = \mathbf{0}$$

2.2. Kombinasi Linear

Definisi 2.2.1 [1]

Diketahui V ruang vektor dan $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{w}$ di V dan $\mathbf{w}$ dikatakan kombinasi linear dari $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ jika dapat ditentukan skalar-skalar $k_1, k_2, \ldots, k_r$ sedemikian sehingga $\mathbf{w} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_r\mathbf{v}_r$

Contoh 2.2.2

Vektor-vektor **u** = (1, 2, - 1) dan **v** = (6, 4, 2) di R^3. Akan diperlihatkan **w** = (9, 2, 7) adalah kombinasi linear **u** dan **v** serta bahwa **m** = (4, - 1, 8) bukanlah kombinasi linear **u** dan **v**.

Penyelesaian. Supaya **w** merupakan kombinasi linear **u** dan **v**, harus ada skalar k_1 dan k_2 sehingga $\mathbf{w} = k_1\mathbf{u} + k_2\mathbf{v}$; yakni

$$(9, 2, 7) = k_1(1, 2, -1) + k_2(6, 4, 2)$$

Atau $$(9, 2, 7) = (k_1 + 6 k_2, 2k_1 + 4k_2, -k_1 + 2k_2)$$

Penyamaan komponen-komponen yang bersesuaian memberikan

$$k_1 + 6 k_2 = 9$$

$$2k_1 + 4k_2 = 2$$

$$-k_1 + 2k_2 = 7$$

Dengan memecahkan sistem ini akan menghasilkan $k_1 = -3$, $k_2 = 2$ sehingga

$$\mathbf{w} = -3\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$$

Demikian juga, supaya **m** merupakan kombinasi linear **u** dan **v** haruslah ada skalar k_1 dan k_2 sehingga $\mathbf{m} = k_1\mathbf{u} + k_2\mathbf{v}$, yakni

$$(4, -1, 8) = k_1(1, 2, -1) + k_2(6, 4, 2)$$

Atau $$(4, -1, 8) = (k_1 + 6 k_2, 2k_1 + 4k_2, -k_1 + 2k_2)$$

Dengan menyamakan komponen yang berssuaian memberikan

$$k_1 + 6\,k_2 = 4$$

$$2k_1 + 4k_2 = -1$$

$$-k_1 + 2k_2 = 8$$

Misalkan diambil

$$k_1 + 6\,k_2 = 4$$

$$-k_1 + 2k_2 = 8$$

Menghasilkan $k_1 = -5$ dan $k_2 = 3/2$ jika disubstitusikan ke $2k_1 + 4k_2 = -1$ maka $2(-5) + 4(3/2) = -10 + 6 = -4 \neq -1$ ini yang disebut bahwa sistem persamaan-persamaan yang tidak konsisten, sehingga tidak ada skalar-skalar k_1, k_2 dan k_3 yang memenuhi persamaan. Sebagai konsekuensinya, maka **m** bukanlah kombinasi linear **u** dan **v**.

Definisi 2.2.3 [1]

Jika $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_r}$, adalah vektor-vektor pada ruang vektor *V* dan jika masing-masing vektor pada *V* dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_r}$, maka $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_r}$ dikatakan ***merentang V***.

Contoh 2.2.4

Vektor **i** = (1, 0, 0), **j** = (0, 1, 0), dan **k** = (0, 0, 1) merentang R^3 karena setiap vektor (*a*, *b*, *c*) pada R^3 dapat dituliskan sebagai

(*a*, *b*, *c*) = *a*(1, 0, 0) + *b*(0, 1, 0) + *c*(0, 0, 1) = *a***i**+ *b***j** + *c***k**, yang merupakan kombinasi linear **i, j** dan **k**.

2.3. <u>Kebebasan Linear</u>

Definisi 2.3.1 [1]

Jika S = {$\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_r}$} adalah himpunan vektor, maka persamaan vektor

$$k_1\mathbf{v_1} + k_2\mathbf{v_2} + \ldots + k_r\mathbf{v_r} = \mathbf{0}$$

mempunyai paling sedikit satu pemecahan, yakni

$$k_1 = 0, k_2 = 0, \ldots, k_r = 0$$

Jika ini adalah satu-satunya pemecahan, maka S dinamakan himpunan ***bebas linier (linearly independent)***. Jika ada pemecahan lain, maka S dinamakan himpunan ***tak bebas linier (linearly dependent)***.

Contoh 2.3.2

Akan diperlihatkan vektor-vektor berikut

$$\mathbf{v_1} = (1, -2, 3), \mathbf{v_2} = (5, 6, -1) \text{ dan } \mathbf{v_3} = (3, 2, 1)$$

merupakan himpunan tak bebas linier atau himpunan bebas linier.

Penyelesaian. Untuk memperlihatkan bahwa himpunan vektor tersebut bebas linier atau tak bebas linier, akan dipenuhi

$$k_1\mathbf{v_1} + k_2\mathbf{v_2} + k_3\mathbf{v_3} = \mathbf{0}$$

$$k_1(1, -2, 3) + k_2(5, 6, -1) + k_3(3, 2, 1) = (0, 0, 0)$$

atau secara ekivalen menjadi

$$(k_1 + 5k_2 + 3k_3, -2k_1 + 6k_2 + 2k_3, 3k_1 - k_2 + k_3) = (0, 0, 0)$$

Dengan mnyamakan komponen yang bersesuaian akan memberikan

$$k_1 + 5k_2 + 3k_3 = 0$$

$$-2k_1 + 6k_2 + 2k_3 = 0$$

$$3k_1 - k_2 + k_3 = 0$$

$\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, dan $\mathbf{v_3}$ akan membentuk himpunan tak bebas linier jika sistem ini mempunyai pemecahan tak trivial, atau membentuk himpunan bebas linier jika sistem tersebut hanya mempunyai pemecahan trivial. Dengan memecahkan sistem ini maka akan menghasilkan

$$k_1 = -\frac{1}{2}t \qquad k_2 = -\frac{1}{2}t \qquad k_3 = t$$

Jadi, sistem tersebut mempunyai pemecahan tak trivial maka v_1, v_2, dan v_3 membentuk himpunan tak bebas linier.

2.4. Basis

Definisi 2.4.1 [1]

Jika *V* adalah sebarang ruang vektor dan S = $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_r}\}$ merupakan himpunan berhingga dari vektor-vektor pada *V*, maka S dinamakan ***basis*** untuk *V* jika

(1) S bebas linier

(2) S merentang *V*

Contoh 2.4.2 Misalkan $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (2, 9, 0)$ dan $v_3 = (3, 3, 4)$ akan diperlihatkan bahwa himpunan S = $\{v_1, v_2, v_3\}$ adalah basis untuk R^3.

Penyelesaian. Untuk memperlihatkan bahwa S merentang R^3, maka harus diperlihatkan bahwa sebarang vektor $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier vektor-vektor pada S,

$$\mathbf{b} = k_1\mathbf{v_1} + k_2\mathbf{v_2} + k_3\mathbf{v_3}$$

Dengan menyatakan persamaan ini dalam komponen-komponennya maka akan memberikan

$$(b_1, b_2, b_3) = k_1(1, 2, 1)+ k_2(2, 9, 0) + k_3(3, 3, 4)$$

Atau $(b_1, b_2, b_3) = (k_1 + 2k_2 + 3k_3, 2k_1 + 9k_2 + 3k_3, k_1 + 4k_3)$

Atau

$$\begin{aligned} k_1 + 2k_2 + 3k_3 &= b_1 \\ 2k_1 + 9k_2 + 3k_3 &= b_2 \\ k_1 + 4k_3 &= b_3 \end{aligned} \tag{1}$$

Untuk membuktikan bahwa S bebas linier, haruslah diperlihatkan bahwa satu-satunya pemecahan dari

$$k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 = 0 \tag{2}$$

adalah $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.

$$\begin{aligned} k_1 + 2k_2 + 3k_3 &= 0 \\ 2k_1 + 9k_2 + 3k_3 &= 0 \\ k_1 + 4k_3 &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

hanya mempunyai pemecahan trivial. Bahwa sistem persamaan (1) dan sistem persamaan (3) mempunyai matrik koefisien yang sama yaitu $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ maka dapat secara serempak membuktikan bahwa S bebas linier dan merentang R^3 dengan memperlihatkan bahwa matrik koefisien

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Pada sistem persamaan (1) dan (3) dapat dibalik karena

$$\det(A) = -1$$

Maka jelaslah bahwa A dapat dibalik jadi S adalah sebuah basis.

2.5. <u>Persamaan Diferensial Orde Dua</u>

Terdapat salah satu alasan mengapa persamaan-persamaan linear yang berorde dua menjadi sangat penting dalam mempelajari persamaan diferensial, yaitu bahwa persamaan-persaman linier orde dua mempunyai struktur teoritik yang kaya dengan metode-metode sistematis dalam menentukan solusi. Dengan metode yang sangat sistematis ini sangat mudah dimengerti untuk level matematika yang sederhana. Adapun bentuk umum dari persamaan diferensial adalah sebagai berikut

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \tag{2.5.1}$$

Dalam penulisan ini bentuk diatas dapat diperumum lagi dengan bentuk dibawah ini

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \tag{2.5.2}$$

Dimana P(x), Q(x),R(x) dan g(x) adalah fungsi-fungsi kontinu pada suatu interval, dan dimana $y' = \frac{dy}{dx}$. Hal yang sangat berbeda dengan persamaan diferensial orde satu adalah keunikan solusi dari persamaan diferensial orde dua disyaratkan dengan dua kondisi awal yang harus dipenuhi yakni $y(x_0) = y_0$ dan $y'(x_0) = y'_0$.

2.5.1. **Solusi Persamaan Diferensial**

Sebuah solusi dari persamaan (2.5.1) dan (2.5.2) pada interval $\alpha < x < \beta$ dengan α dan β adalah bilangan riil adalah suatu fungsi y(x) sedemikian sehingga $y'(x)$ dan $y''(x)$ ada dan memenuhi persamaan (2.5.1) dan (2.5.2). Yang dimaksud dengan suatu fungsi y(x) ada adalah jika kita ambil x_0 di $\alpha < x < \beta$ maka $y(x_0)$ ada nilainya (bukan ∞).

2.5.2. **Persamaan Homogen dengan Koefisien Konstan**

Bentuk umum dari persamaan homogen dengan koefisien konstan adalah

$$ay'' + by' + cy = 0$$

a, b, dan c adalah konstanta sembarang dan g(x) = 0, maka kita akan dapatkan persamaan kuadrat dalam λ yang nantinya akan kita namakan *persamaan karakteristik* untuk λ, yakni

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \text{ maka } \lambda\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Jadi solusi kita dapatkan adalah $y_1 = e^{\lambda_+ x}$, dan $y_2 = e^{\lambda_- x}$, dan solusi umumnya adalah dapat dinyatakan sebagai berikut

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{\lambda_+ x} + c_2 e^{\lambda_- x}$$

Contoh 2.5.2.1. menyelesaiakan $y'' + 5y' + 6y = 0$ dengan y(0) = 2 dan $y'(0) = 3$

Penyelesaian: misalkan solusi kita dalam bentuk $y = e^{\lambda x}$, dari persamaan diferensial diatas diperoleh persamaan karakteristik $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$, didapatlah

λ = -2 dan λ = -3. Jadi solusi umumnya menjadi

$$y = c_1 e^{(-2x)} + c_2 e^{(-3x)} \text{ dan } y' = -2c_1 e^{(-2x)} - 3c_2 e^{(-3x)}$$

Dengan kondisi awal yang diberikan maka kita peroleh

$$y(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0 = c_1 + c_2 = 2$$

dan $y'(0) = -2c_1 e^0 - 3c_2 e^0 = -2c_1 - 3c_2 = 3$

Dari kedua relasi itu, kita peroleh c_1 = 9 dan c_2 = -7, sehingga solusi khususnya adalah

$$y = 9e^{(-2x)} - 7e^{(-3x)}$$

Dalam hal ini akan dijelaskan bentuk yang lebih formal, dengan memperkenalkan notasi

$$L[y] = y'' + py' + qy$$

Dimana p dan q adalah fungsi yang kontinu pada suatu interval I (artinya $\alpha < x < \beta$) dengan α dan β adalah bilangan riil. Disini akan membuktikan bahwa jika $L[y] = 0$ (persamaan homogen) dengan $y(x_0) = y_0$ dan $y'(x_0) = y'_0$ maka terdapat sebuah solusi yang tunggal. Dalam persamaan diferensial orde dua ini kita selalu mendapatkan dua solusi, kita gabungkan kedua solusi tersebut sehingga menjadi solusi umumnya. Perhatikan

- Jika y_1 adalah sebuah solusi maka $L[y_1] = 0$,
- Jika y_2 adalah sebuah solusi maka $L[y_2] = 0$,

Kemudian kita bertanya apakah $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ juga solusi? Jawabannya adalah iya, karena,

$$\begin{aligned} L[y] &= (c_1 y_1 + c_2 y_2)'' + p(c_1 y_1 + c_2 y_2)' + q(c_1 y_1 + c_2 y_2) \\ &= c_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + c_2(y_2'' + py_2' + qy_2) \\ &= c_1 L[y_1] + c_2 L[y_2] \\ &= c_1.0 + c_2.0 \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Jika kita punya kondisi awal $y(x_0) = y_0$ dan $y'(x_0) = y'_0$ maka kita akan peroleh

$$y_0 = c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) \text{ dan } y'_0 = c_1 y'_1(x_0) + c_2 y'_2(x_0)$$

Kedua persamaan diatas memuat dua konstanta yang belum diketahui c_1 dan c_2, yang jika kita selesaikan akan kita dapatkan

$$c_1 = \frac{y_0 y'_2(x_0) - y'_0\, y_2(x_0)}{y_1(x_0) y'_2(x_0) - y'_1(x_0) y_2(x_0)}$$

$$c_1 = \frac{-y_0 y'_1(x_0) + y'_0\, y_1(x_0)}{y_1(x_0) y'_2(x_0) - y'_1(x_0) y_2(x_0)}$$

Dimana $y_1(x_0) y'_2(x_0) - y'_1(x_0) y_2(x_0) \neq 0$, atau $W(y_1, y_2) \neq 0$.

Maka dari penjelasan diatas timbul suatu teorema yaitu sebagai berikut

Teorema 2.5.2.1 [5]

Jika y_1 dan y_2 adalah solusi-solusi dan

$L[y] = 0$ dan $W(y_1, y_2) \neq 0$,

Untuk suatu x_0, maka

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

Adalah solusi umum, dimana konstanta-konstanta sebarang c_1 dan c_2 diperoleh dari semua kemungkinan solusi dari $L[y] = 0$.

2.6. Solusi dengan Deret Pangkat

Bentuk deret pangkat tak hingga adalah sebagai berikut

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... \qquad (2.6.1)$$

Deret diatas disebut dengan *deret pangkat di x*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + ...$$

Deret diatas disebut dengan *deret pangkat di* $x - x_0$

Deret pada (2.6.1) dikatakan *konvergen* dititik x jika

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ ada}$$

2.6.1. Operasi dengan Deret Pangkat

- **Diferensiasi dan Integrasi Suku demi Suku**

Suatu deret pangkat dapat dideferensialkan suku demi suku didalam lingkaran konvergensinya, yaitu

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} a_n (x)^n$$

Contoh 2.6.1.1. Akan menentukan uraian/deret untuk fungsi f(x) = $\frac{1}{1+x}$

Jawab.

$$\frac{1}{1+x} = \frac{d}{dx}\left[\ln(1+x)\right] = \frac{d}{dx}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{n}\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\ (x)^{n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m}\ (x)^{m}$$, dengan mensubstitusikan $n - 1 = m$

Jari-jari konvergensi deret turunan ini sama dengan jari-jari konvergensi deret asalnya, dengan demikian

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{n}x^{n}, \rho = 1$$

Suatu deret pangkat dapat diintegralkan suku demi sukunya didalam sepanjang lintasan K yang terletak seluruhnya didalam lingkaran konvergensi deretnya, yaitu

$$\int_{K}\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}(x)^{n}\right]dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{K}a_{n}(x)^{n}dx$$

Contoh 2.6.1.2. Akan menentukan uraian/deret untuk fungsi f(x) = cos (x)

Jawab.

$$\cos(x) = -\int_K \sin(x)dx$$

$$= -\int_K \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right] dx$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \int_K (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} dx$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2(n+1)}}{(2(n+1))!}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}$$, dengan mensubstitusikan $n + 1 = m$

2.6.2. Solusi Persamaan Linier Orde Dua dengan Deret Pangkat

Sekarang kita kembali lagi ke persamaan Diferential orde dua yang homogen yaitu berupa

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

dari persamaan diatas dapat didefinisikan sebagai berikut

$$y'' = -p(x)y' - q(x)y \qquad (2.6.2.1)$$

maka dari persamaan (2.6.2.1) kita dapatkan

\

$$y''' = -p(x)y'' - p'(x)y' - q(x)y' - q'(x)y \qquad (2.6.2.2)$$

Dengan $y'''(0)$ dapat dihitung sekali dengan $y''(0)$ diketahui.

Proses diatas dapat kita lanjutkan seperti yang kita harapkan dan dapat untuk mentukan $y^{(n)}(0)$. didalam ilmu Kalkulus kita dapat menggunakan formula Maclaurin berikut,

$$y(x) = y(0) + \sum_{m=0}^{\infty} y^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!};$$

a. <u>Solusi dengan Menggunakan Deret Pangkat</u>

Persamaan diferensial orde dua secara umum sebagai berikut

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

untuk penyelesaian dalam deret pangkat dapat kita ambil solusi dalam bentuk deret pangkat yaitu sebagai berikut

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Untuk lebih jelasnya kita perhatikan contoh berikut ini

Contoh 2.6.1.3. Dengan menggunakan deret pangkat akan dicari solusi dari $y''+xy'+y=0$

Penyelesaian. Asumsikan bahwa solusi $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dan kemudian kita punyai

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad xy'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n, \text{ dan } \quad y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Kemudian kita substitusikan kepersamaan diferensial yang telah diberikan, maka akan didapat

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = -\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_n x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n = -\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_n x^n$$

Maka dapat menghasilkan $(n+2)(n+1)a_{n+2} = -(n+1)a_n$ dan kemudian

$$a_{n+2} = -\frac{(n+1)}{(n+2)(n+1)} a_n = -\frac{a_n}{(n+2)}, n \geq 0$$

Dan koefisien-koefisien mengikuti seperti berikut ini

$$a_2 = -\frac{a_0}{2} \qquad\qquad a_3 = -\frac{a_1}{3}$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{4} = \frac{a_0}{2 \bullet 4} \qquad\qquad a_5 = -\frac{a_3}{5} = \frac{a_1}{3 \bullet 5}$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{6} = -\frac{a_0}{2 \bullet 4 \bullet 6} \qquad\qquad a_7 = -\frac{a_5}{7} = \frac{a_1}{3 \bullet 5 \bullet 7}$$

$$\cdot \qquad\qquad \cdot$$

$$\cdot \qquad\qquad \cdot$$

$$\cdot \qquad\qquad \cdot$$

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2 \bullet 4 \bullet 6....(2k)} = \frac{(-1)^k a_0}{2^k (k!)} \qquad\qquad a_{2k+1} = \frac{(-1)^k a_1}{3 \bullet 5 \bullet 7....(2k+1)}$$

Kemudian solusi untuk persamaan yang telah diberikan adalah berupa penjumlahan dari dua deret pangkat yakni penjumlahan koefisien genap dan penjumlahan koefisien ganjil. Maka solusinya berupa

$$y = a_0\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \bullet 4} - ...\right) + a_1\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{3 \bullet 5} - ...\right)$$

$$= a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^k (k!)} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{3 \bullet 5 \bullet 7 \bullet ....(2k+1)}$$

Solusi diatas adalah *solusi umum* dari persaman diferensial yang diberikan dengan dua konstanta sebarang yaitu a_0 dan a_1.

2.7. **Fungsi Faktorial**

Kita definisikan fungsi faktorial $(a)_n$ untuk n integer positif. Bentuk umum dari fungsi faktorial adalah didefinisikan sebagai berikut:

$$(a)_n = a(a+1)(a+2)...(a+n-1), \text{ untuk } n \geq 1;$$

$$(a)_0 = 1, \ a \neq 0.$$

Simbol $(a)_n$ dinotasikan a hasil dari n faktor dimulai dengan faktor a, salah satu faktor lebih besar dari faktor sebelumnya. Untuk lebih jelasnya akan diberikan contoh berikut;

$$(7)_4 = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10,$$

$$(-5)_3 = (-5) \cdot (-4) \cdot (-3)$$

$$(-\frac{1}{2})_3 = (-\frac{1}{2}) \cdot (\frac{1}{2}) \cdot (\frac{3}{2})$$

Fungsi faktorial adalah generalisasi dari faktor biasa. Tentu saja untuk

$$(1)_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n = n!$$

Fungsi Gamma berasal dari relasi fungsional

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \tag{2.3.1}$$

Dengan menggunakan relasi (2.3.1), jika n adalah integer akan diperoleh fungsi Gamma dibawah ini

$$\begin{aligned}\Gamma(a+n) &= (a+n-1)\Gamma(a+n-1)\\ &= (a+n-1)(a+n-2)\Gamma(a+n-2)\\ &= \ldots\\ &= (a+n-1)(a+n-2)\cdots(a)\Gamma(a) = (a)_n\Gamma(a)\end{aligned}$$

Oleh karena itu, diperoleh hubungan antara Fungsi Faktorial dan Fungsi Gamma yaitu sebagai berikut;

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)},\ n \text{ integer },\ n > 1.$$

Tidak salahnya dalam hal ini akan menambahkan apa itu fungsi Gamma dan juga fungsi Beta.

- Fungsi Gamma biasa dalam bentuk umum dibawah ini

$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx = (n-1)!$, untuk setiap bilangan riil n,

misalkan akan diambil contoh berikut.

$\int_0^\infty x^3 e^{-x}dx$ maka integral ini sama dengan integral berikut $\int_0^\infty x^{4-1}e^{-x}dx$ maka didapat

$\Gamma(4) = (4-1)! = 3! = 6$

- Fungsi Gamma biasa dalam bentuk umum berikut.

$$\mathrm{B}(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

Untuk setiap bilangan riil *n*,

misalkan akan diambil contoh berikut.

$\int_0^1 x^3(1-x)^4 dx$ maka integral ini sama dengan integral berikut $\int_0^1 x^{4-1}(1-x)^{5-1}dx$

Maka $\mathrm{B}(4,5) = \dfrac{\Gamma(4)\Gamma(5)}{\Gamma(4+5)} = \dfrac{\Gamma(4)\Gamma(5)}{\Gamma(9)} = \dfrac{(4-1)!(5-1)!}{(9-1)!} = \dfrac{(3!)(4!)}{8!} = \dfrac{(6)(24)}{40320} = \dfrac{144}{40320}$

2.8. **Persamaan Hypergeometrik**

Bentuk umum dari persamaan hypergeometrik adalah sebagai berikut:

$$x(1-x)y'' + [c-(a+b+1)x]y' - aby = 0 \qquad (2.8.1)$$

dengan *a, b, c* adalah parameter-paremeter, x variabel bebas, y variabel tak bebas (tergantund pada x) dan persamaan diatas terkenal dengan sebutan *persamaan hypergeometrik Gauss.*

Selanjutnya akan dicari penyelesaian dari (2.8.1) dengan titik singular $x = 0$. Untuk persamaan (2.8.1) terdapat akar nol dan $(1 - c)$ karena $x(1 - x) = 0$ dan untuk ini ambil c tidak integer nanti diperlukan untuk jika akar tidak sama dengan 0 . Kita ambil dengan akar nol

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} e_n x^{n+0} = \sum_{n=0}^{\infty} e_n x^n$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n e_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) e_n x^{n-2}$$

pada persamaan (2.8.1) dan kemudian setelah disederhanakan seperti biasa menjadi

$$0(1 - 0) \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) e_n x^{n-2} + [c - (a + b + 1)(0)] \sum_{n=0}^{\infty} n e_n x^{n-1} - (ab) \sum_{n=0}^{\infty} e_n x^n = 0$$

$$[c] \sum_{n=0}^{\infty} n e_n x^{n-1} - (ab) \sum_{n=0}^{\infty} e_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n+c-1) e_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+a)(n+b) e_n x^n = 0 \tag{2.8.2}$$

index pengganti koefisien x^n jadi x^{n-1} dipersamaan (2.8.2) didapat

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n+c-1) e_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} (n+a-1)(n+b-1) e_{n-1} x^{n-1} = 0 \tag{2.8.3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n+c-1)e_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+a-1)(n+b-1)e_{n-1} x^{n-1}$$

dan kemudian diperoleh bahwa $\boldsymbol{e_0}$ adalah sembarang dan untuk $n \geq 1$,

$$e_n = \frac{(n+a-1)(n+b-1)}{n(n+c-1)} e_{n-1} \tag{2.8.4}$$

Dengan hubungan balik dari (1.4) untuk $n \geq 1$diperoleh,

$$e_n = \frac{a(a+1)(a+2)...(a+n-1).b(b+1)(b+2)...(b+n-1)}{n!c(c+1)(c+2)...(c+n-1)} e_0 \tag{2.8.5}$$

Persamaan (2.8.5) adalah penyederhanaan dengan menggunakan fungsi faktorial. Dan (2.8.5) dapat juga ditulis sebagai berikut;

$$e_n = \frac{(a)_n (b)_n}{n!(c)_n} e_0$$

Dan pilih $\boldsymbol{e_0}$ = 1dan disini kita dapat peroleh solusi persamaan hypergeometrik sebagai berikut;

$$y_1 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n!(c)_n} x^n \tag{2.8.6}$$

Bisa juga ditulis seperti ini

$$y_1 = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a+1)(a+2)...(a+n-1).b(b+1)(b+2)...(b+n-1)}{n!c(c+1)(c+2)...(c+n-1)} x^n$$

Solusi diatas disebut dengan *barisan Hypergeometrik*

Maka solusi y_1 dipersamaan (2.8.6) adalah seperti berikut ini

$$y_1 = F(a,b;c;x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n!(c)_n} x^n$$

Solusi diatas disebut dengan dengan *fungsi hypergeometrik* yang disimbolkan dengan $F(a,b;c;x)$ dan $y_1 = F(a,b;c;x)$ adalah solusi dari dari persamaan (2.8.1).

Untuk persamaan (2.8.1) dengan akar yang lain yaitu (1 – c). Kita ambil saja

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^{n+1-c}$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1-c) f_n x^{n-c}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1-c)(n-c) f_n x^{n-c-1}$$

pada persamaan (2.8.1) untuk menemukan solusi kedua dengan akar (1 – c) sama dengan menentukan solusi dengan akar nol, dengan mengambil persamaan (2.8.2) dan mengambil akar (1 – c)

- $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1-c)((n+1-c)+c-1) f_n x^{n-c} - \sum_{n=0}^{\infty} ((n+1-c)+a)((n+1-c)+b) f_n x^{n+1-c} = 0$

- $$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1-c)(n)\,f_n x^{n-c} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1-c+a)(n+1-c+b)\,f_n x^{n+1-c} = 0$$

- $$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1-c)(n)\,f_n x^{n-c} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1-c+a)(n+1-c+b)\,f_n x^{n+1-c}$$

- $$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1-c)(n)\,f_n x^{n-c} = \sum_{n=0}^{\infty}(n-c+a)(n-c+b)\,f_{n-1} x^{n-c}$$

dan kemudian diperoleh bahwa $\boldsymbol{f_0}$ adalah x^{1-c} dan untuk $n \geq 1$,

- $$f_n = \frac{(n-c+a)(n-c+b)}{n(n+1-c)}\,f_{n-1}$$

Akar mempermudah untuk pencarian fungsi faktorialnya bentuk diatas akan diubah sebagai berikut

- $$f_n = \frac{(n+a-1+1-c)(n+b-1+1-c)}{n(n+2-1-c)}\,f_{n-1}$$

Dengan hubungan balik dari atas untuk $n \geq 1$diperoleh,

$$f_n = \frac{(a+1-c)_n(b+1-c)_n}{n!(2-c)_n}\,f_0$$

Maka didapatlah solusi kedua dengan akar $(1-c)$ yaitu sebagai berikut

$$y_2 = x^{1-c} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a+1-c)_n(b+1-c)_n}{n!(2-c)_n}x^{n+1-c} \qquad (2.8.7)$$

Untuk solusi yang kedua ini dapat juga ditulis dalam notasi hypergeometrik yaitu

$$y_2 = x^{1-c}F(a+1-c, b+1-c; 2-c; x) = x^{1-c} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+1-c)_n (b+1-c)_n}{n!(2-c)_n} x^{n+1-c}$$

Jika c adalah sebuah bilangan integer, maka solusi yang benar adalah salah satu dari solusi diatas solusi (2.8.6) atau (2.8.7) tapi harus melibatkan penyebut lain nol. Sebagai contoh, jika c = 5, dan kemudian untuk solusi (1.7), $(2-c)_n = (2-5)_n = (-3)_n$ dan untuk $n \geq 4$, $(-3)_n = 0$, dari $(-3)_4 = (-3)(-2)(-1)(0) = 0$.

BAB III

PEMBAHASAN

Dalam bab ini akan dijelaskan bagaimana mencari solusi persamaan diferensial orde dua dengan koefisien polinomial menggunakan Algoritma Petkovšek. Sebelumnya akan dijelaskan terlebih dahulu ruang vektor dari fungsi-fungsi untuk mengetahui polinomial-polinomial yang bebas linier atau tak bebas linier yang nantinya akan diterapkan pada persamaan indisial yang semua solusinya bebas linier serta persamaan type hypergeometrik untuk mencari semua solusi hypergeometrik dari persamaan diferensial orde dua dengan koefisien polinomial, yang kesemuanya itu berperan penting terhadap Algoritma Hyper yang merupakan Algoritma dasar dari Algoritma Petkovšek.

3.1. Ruang Vektor dari Fungsi-Fungsi

Untuk menentukan suatu himpunan vektor dalam R^n bebas linier atau tidak, kita harus menyelesaikan sistem persamaan linier homogen. Situasi yang serupa berlaku untuk ruang vektor P_n.

3.1.1 Ruang Vektor P_n

Untuk memeriksa polinom-polinom $p_1(x)$, $p_2(x)$, . . . , $p_k(x)$ bebas linier atau tidak, akan diterapkan

$$c_1p_1(x), c_2p_2(x), \ldots , c_kp_k(x) = z(x) \qquad (3.1.1.1)$$

dimana z menyatakan polinom nol.

$$z(x) = 0x^{n-1} + 0x^{n-2} + \ldots + 0x + 0$$

Jika polinom diruas kiri persamaan (3.1.1.1) ditulis kembali dalam bentuk $a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, maka karena dua polinom adalah sama jika dan hanya jika koefisien-koefisiennya sama, ini berarti bahwa semua koefisien a_i harus sama dengan

0. Tetapi setiap a_i adalah sebuah kombinasi linier dari c_j. Ini akan menjadi sebuah sistem linier homogen dengan peubah-peubah $c_1, c_2, \ldots, c_k$. Jika sistem ini memiliki penyelesaian trivial, maka polinom-polinom $p_1, p_2, \ldots, p_k$ adalah bebas linier; jika tidak demikian, $p_1, p_2, \ldots, p_k$ bergantung linier.

Contoh 3.1.1.1

Untuk memeriksa apakah vektor-vektor

$$p_1(x) = x^2 - 2x + 3,\ \ p_2(x) = 2x^2 + x + 8,\ p_3(x) = x^2 + 8x + 7,$$

Adalah bebas linier, akan ditetapkan

$$c_1 p_1(x) + c_2 p_2(x) + c_3 p_3(x) = 0x^2 + 0x + 0$$

Maka $$c_1(x^2 - 2x + 3) + c_2(2x^2 + x + 8) + c_3(x^2 + 8x + 7) = 0x^2 + 0x + 0$$

Dengan mengelompokan suku-suku berdasarkan pangkat dari x, maka akan diperoleh

$$(c_1 + 2c_2 + c_3)x^2 + (-2c_1 + c_2 + 8c_3)x + (3c_1 + 8c_2 + 7c_3) = 0x^2 + 0x + 0$$

Dengan menyamakan koefisien-koefisiennya maka akan diperoleh sistem

$$c_1 + 2c_2 + c_3 = 0$$

$$-2c_1 + c_2 + 8c_3 = 0$$

$$3c_1 + 8c_2 + 7c_3 = 0$$

Matriks koefisien dari sistem diatas adalah $A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 8 \\ 3 & 8 & 7 \end{bmatrix}$ dengan determinan matrik ini adalah 0 maka matrik tersebut singular dan dengan demikian terdapat penyelesaian-penyelesaian tak trivial. Oleh karena itu p_1, p_2 dan p_3 bergantung linier.

3.1.2 Ruang Vektor $C^{(n-1)}$[a, b] [3]

Dalam contoh 3.1.1.1 telah digunakan determinan untuk memeriksa bebas linier atau tak bebas linier dalam R^3. Determinan dapat juga digunakan untuk membantu memutuskan apakah himpunan n vektor adalah bebas linier dalam $C^{(n-1)}$[a, b]. Misalkan $f_1, f_2, ..., f_n$ elemen-elemen dari $C^{(n-1)}$[a, b]. Jika vektor-vektor ini bergantung linier, maka terdapat scalar-skalar $c_1, c_2, ..., c_n$ yang tidak nol semua sehingga

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + ... + c_n f_n(x) = 0 \qquad (3.1.2.1)$$

Untuk setiap x dalam [a, b] dengan a,b adalah bilangan riil. Dengan mengambil derivatif terhadap x dari kedua ruas dari persamaan (3.1.2.1) akan menghasilkan

$$c_1 f'_1(x) + c_2 f'_2(x) + ... + c_n f'_n(x) = 0$$

Jika dilanjutkan mengambil derivatif dari kedua ruas, maka akan berakhir dengan sistem

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + ... + c_n f_n(x) = 0$$

$$c_1 f'_1(x) + c_2 f'_2(x) + ... + c_n f'_n(x) = 0$$

$$.$$

$$.$$

$$.$$

$$c_1 f_1^{(n-1)}(x) + c_2 f_2^{(n-1)}(x) + ... + c_n f_n^{(n-1)}(x) = 0$$

Untuk setiap *x* yang tetap dalam [a, b], persamaan matrik

$$\begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (3.1.2.2)$$

Akan memiliki penyelesaian tak trivial yang sama yaitu $(c_1, c_2, ..., c_n)^T$. Jadi jika $f_1, f_2, ..., f_n$ bergantung linier dalam $C^{(n-1)}$[a, b], maka untuk setiap *x* yang tetap dalam [a, b], matriks koefisien dari sistem (3.1.2.2) adalah singular. Jika matriks koefisien ini singular, maka determinannya adalah nol.

Definisi 3.1.2.1 [3]

Misalkan $f_1, f_2, ..., f_n$ adalah fungsi-fungsi dalam $C^{(n-1)}$[a, b] dan akan mendefiniskan $W[f_1, f_2, ..., f_n](x)$ dalam [a, b] dengan a, b adalah bilangan riil untuk

$$W[f_1, f_2, ..., f_n](x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f'_1(x) & f'_2(x) & \dots & f'_n(x) \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Fungsi $W[f_1, f_2, ..., f_n](x)$ disebut dengan **Wronskian** dari $f_1, f_2, ..., f_n$.

Teorema 3.1.2.2 [3]

Misalkan $f_1, f_2, ..., f_n$ adalah elemen-elemen dari $C^{(n-1)}$[a, b]. Jika terdapat satu titik x_0 dalam [a, b] sehingga $W[f_1, f_2, ..., f_n](x_0) \neq 0$, maka $f_1, f_2, ..., f_n$ bebas linier

Bukti

Jika $f_1, f_2, ..., f_n$ bergantung linier, maka matrik koefisien dalam (3.1.2.2) akan menjadi singular untuk setiap x dalam [a, b] dan dengan demikian $W[f_1, f_2, ..., f_n](x)$ akan identik dengan fungsi nol dalam [a, b]. $\blacksquare$

Contoh 3.1.2.3

Akan ditunjukan bahwa e^x dan e^{-x} bebas liner dalam $C(-\infty, \infty)$.

Penyelesaian

$$W[e^x,\ e^{-x}] = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2$$

Karena $W[e^x,\ e^{-x}]$ tidak identik dengan nol, maka e^x dan e^{-x} bebas liner.

Contoh 3.1.2.4

Akan ditunjukan bahwa vektor-vektor 1, x, x^2 bebas linier dalam P_3.

Penyelesaian

$$W[1, x, x^2, x^3] = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

Karena $W[1, x, x^2, x^3] \neq 0$, maka vektor-vektor tersebut bebas linier.

3.2. Persamaan Indisial

Sebelum menjelaskan definisi dari persamaan indisial akan dijelaskan terlebih dahulu definisi titik singular dan titik singular teratur.

Definisi 3.2.1

Untuk x = a adalah titik singular persamaan diferensial berikut

$$P_0(x)y''+P_1(x)y'+P_3(x)y=0 \tag{3.2.1}$$

Dimana P_i(x) adalah polinom-polinom akan menghasilkan bahwa P_0(a) = 0.

Contoh 3.2.1

Untuk persamaan diferensial berikut

$$x^2y''+(x^2-x)y'+2y=0$$

Adalah mempunyai titik singular di $x = 0$ karena $P_0(0) = 0$ dimana $P_0(x) = x^2$.

Definisi 3.2.2

Titik singular x = a dari persamaan (3.2.1) disebut teratur apabila persamaan (3.2.1) diubah dalam bentuk

$$y''+\frac{R_1(x)}{(x-a)}y'+\frac{R_2(x)}{(x-a)^2}y=0$$

Dimana $R_1(x)$ dan $R_2(x)$ dapat diekspansikan dalam deret Taylor disekitar x = a.

Contoh 3.2.2

Untuk persamaan diferensial berikut

$$(1+x)y''+2xy'-3y=0$$

x = - 1 adalah titik singular karena $P_0(-1) = 1 + (-1) = 0$. Jika persamaan diferensial diatas diubah dalam bentuk

$$y''+\frac{2x}{(1+x)}y'+\frac{-3(1+x)}{(1+x)^2}y=0$$

Ekspansi Taylor dari masing-masing $R_1(x)$ dan $R_2(x)$ disekitar $x = -1$ adalah

$$R_1(x) = 2x = 2(x+1) - 2 \qquad \text{dan} \qquad R_2(x) = -3(x+1)$$

Jadi, $x = -1$ adalah titik singular yang teratur.

Contoh 3.2.3

Untuk persamaan diferensial $x^3y''+x^2y'+y=0$

Mempunyai $x = 0$ adalah titik singular karena $P_0(0) = (0)^2 = 0$. Jika persamaan diferensial diatas diubah dalam bentuk

$$y''+\frac{1}{x}y'+\frac{1/x}{x^2}y=0$$

Ekspansi Taylor dari masing-masing $R_1(x)$ dan $R_2(x)$ disekitar $x = 0$ adalah

$$R_1(x) = 1 \qquad \text{dan} \qquad R_2(x) = 1/x$$

Untuk $R_2(x) = 1/x$ tidak dapat diekspansikan dalam deret Taylor disekitar $x = 0$. Jadi, $x = 0$ adalah bukan titik singular yang teratur.

Untuk x = 0 adalah titik singular yang teratur dari persamaan (3.2.1) akan terdapat suatu penyelesaian deret yang berbentuk

$$y = x^m \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = A_0 x^m + A_1 x^{m+1} + A_2 x^{m+2} + \ldots + A_n x^{m+n} + \ldots \tag{3.2.2}$$

Dengan $A_0 \neq 0$ maka disini akan ditentukan m dan A sehingga nantinya persamaan (3.2.2) memenuhi persamaan (3.2.1)

Contoh 3.2.4 (selisih akar adalah bukan bilangan bulat)

Akan diselesaikan dalam bentuk deret untuk persamaan diferensial berikut

$$2xy'' + (x+1)y' + 3y = 0$$

Disini x = 0 adalah titik singular yang teratur. Akan disubstitusikan

$$y = A_0 x^m + A_1 x^{m+1} + A_2 x^{m+2} + \ldots + A_n x^{m+n} + \ldots$$

$$y' = mA_0 x^{m-1} + (m+1)A_1 x^m + (m+2)A_2 x^{m+1} + \ldots + (m+n)A_n x^{m+n-1} + \ldots$$

$$y' = (m-1)mA_0 x^{m-2} + m(m+1)A_1 x^{m-1} + (m+1)(m+2)A_2 x^m + \ldots + (m+n-1)(m+n)A_n x^{m+n-2} + \ldots$$

Kepersamaan persamaan diferensial yang diketahui, diperoleh

$$\begin{aligned} &m(2m-1)A_0 x^{m-1} + [(m+1)(2m+1)A_1 + (m+3)A_0]x^m + [(m+2)(2m+3)A_2 + (m+4)A_1]x^{m+1} \\ &+ \ldots + [(m+n)(2m+2n-1)A_n + (m+n+2)A_{n-1}]x^{m+n-1} + \ldots\ldots = 0 \end{aligned} \tag{3.2.4.1}$$

Karena $A_0 \neq 0$, koefisien suku pertamanya akan lenyap asalkan $m(2m - 1) = 0$, yaitu $m = 0$ atau $m = ½$. Akan tetapi, tanpa memperhatikan m, semua suku setelah suku pertama akan lenyap asalkan A memenuhi formula rekursi

$$A_n = -\frac{(m+n+2)}{(m+n)(2m+2n-1)} A_{n-1}, n \geq 1$$

Jadi, deretnya

$$\Psi = A_0 x^m [1 - \frac{m+3}{(m+1)(2m+1)} x + \frac{(m+3)(m+4)}{(m+1)(m+2)(2m+1)(2m+3)} x^2 - \frac{(m+4)(m+5)}{(m+1)(m+2)(2m+1)(2m+3)(2m+5)} x^3 + ...] \tag{3.2.4.2}$$

Memenuhi persamaan

$$2x\Psi'' + (x+1)\Psi' + 3\Psi = m(2m-1)A_0 x^{m-1} \tag{3.2.4.3}$$

Ruas kanan pada persamaan (3.2.4.3) akan nol, jika $m = 0$ atau $m = ½$. Jika $m = 0$, dari (3.2.4.2) akan diperoleh penyelesaian khusus ($A_0 = 1$),

$$y_1 = 1 - 3x + 2x^2 - \frac{2}{3} x^3 + ...$$

Dan jika untuk $m = ½$ dengan $A_0 = 1$, penyelesaian khususnya adalah

$$y_2 = \sqrt{x}(1 - \frac{7}{6} x + \frac{21}{40} x^2 - \frac{11}{80} x^3 + ...$$

Penyelesaian lengkapnya dengan demikian

$$y = Ay_1 + By_2$$

$$y = A(1 - 3x + 2x^2 - \frac{2}{3}x^3 + ...) + B(\sqrt{x}(1 - \frac{7}{6}x + \frac{21}{40}x^2 - \frac{11}{80}x^3 + ...)$$

Koefisien pangkat *x* yang yang paling rendah dalam persamaan (3.2.4.1), (juga, koefisien pada ruas kanan (3.2.4.2)), berbentuk $f(m)A_0$. Persamaan $f(m) = 0$ disebut ***Persamaan Indisial***. Penyelesaian yang bebas linier y_1 dan y_2 diatas, sesuai dengan akar-akar yang berbeda $m = 0$ dan $m = ½$ dari persamaan.

Akar-akar peramaan indisial bisa berupa;

1. Tidak sama dan selisihnya bukan bilangan bulat
2. Sama
3. Tidak sama dan selisihnya adalah bilangan bulat

Keadaaan untuk yang pertama telah dijelaskan dengan contoh 3.2.4 .

Apabila akar-akar persamaan indisial m_1 dan m_2 sama, penyelesaian yang sesuai akan identik. Penyelesaian lengkapnya diperoleh sebagai

$$y = A\Psi\big|_{m=m_1} + B\frac{d\Psi}{dm}\big|_{m=m_1}$$

Apabila kedua akar persamaan indisial itu $m_1 < m_2$ dan selisihnya adalah bilangan bulat akar yang lebih besar m_2 selalu menghasilkan suatu penyelesaian sedangkan akar yang lebih kecil m_1 mungkin menghasilkan mungkin juga tidak. Dalam keadaan yang terakhir, ambil $A_0 = B_0(m_1 - m_2)$ dan diperoleh penyelesaian khusus sebagai

$$y = A\Psi\Big|_{m=m_1} + B\frac{d\Psi}{dm}\Big|_{m=m_1}$$

Sekarang akan diambil dua contoh masing-masing akar dari persamaan indisialnya.

Contoh 3.2.5 (akar sama)

Akan menyelesaikan persamaan diferensial berikut

$$xy'' + y' - y = 0$$

Disini $x = 0$ adalah titik singular yang teratur. Akan disubstitusikan

$$y = A_0 x^m + A_1 x^{m+1} + A_2 x^{m+2} + \ldots + A_n x^{m+n} + \ldots$$

$$y' = mA_0 x^{m-1} + (m+1)A_1 x^m + (m+2)A_2 x^{m+1} + \ldots + (m+n)A_n x^{m+n-1} + \ldots$$

$$y'' = (m-1)mA_0 x^{m-2} + m(m+1)A_1 x^{m-1} + (m+1)(m+2)A_2 x^m + \ldots + (m+n-1)(m+n)A_n x^{m+n-2} + \ldots$$

Kepersamaan persamaan diferensial yang diketahui, diperoleh

$$m^2 A_0 x^{m-1} + [(m+1)^2 A_1 - A_0]x^m + [(m+2)^2 A_2 - A_1]x^{m+1} + \ldots\ldots +$$
$$[(m+n)^2 A_n - A_{n-1}]x^{m+n-1} + \ldots\ldots. = 0$$

Semua suku kecuali yang pertama akan lenyap jika A_1, A_2, . . . memenuhi persamaan rekursi

$$A_n = \frac{1}{(m+n)^2} A_{n-1}, n \geq 1$$

Jadi,

$$\Psi = A_0 x^m (1 + \frac{1}{(m+1)^2} x + \frac{1}{(m+1)^2 (m+2)^2} x^2 + \frac{1}{(m+1)^2 (m+2)^2 (m+3)} x^3 + ...)$$

Memenuhi

$$x\Psi'' + \Psi' - \Psi = m^2 A_0 x^{m-1} \tag{3.2.4.4}$$

Akar-akar persamaan indisial adalah m = 0, 0. Dengan demikian terdapatlah hanya satu deret penyelesaian yang memenuhi dengan m = 0. Tetapi, dengan memperhatikan y sebagai suatu fungsi variabel bebas x dan m.

$$\frac{\partial \Psi'}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial m}\right) = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial m}\right)'$$

Dan $$\frac{\partial \Psi''}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial m}\right) = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial m}\right)''$$

Dan dengan menurunkan persamaan (3.2.4.4) secara parsial terhadap m, diperoleh

$$x\left(\frac{\partial\Psi}{\partial m}\right)'' + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial m}\right)' - \left(\frac{\partial\Psi}{\partial m}\right) = 2mA_0 x^{m-1} + m^2 A_0 x^{m-1}\ln x \qquad (3.2.4.5)$$

Dari persamaan (3.2.4.4) dan (3.2.4.5) mengakibatkan

$$y_1 = \Psi\big|_{m=0}\,,\; y_2 = \frac{\partial\Psi}{\partial m}\Big|_{m=0}$$

Adalah penyelesaian persamaan diferensial yang diketahui. Dengan mengambil A_0 = 1, maka diperoleh

$$\frac{\partial\Psi}{\partial m} = x^m \ln x[1 + \frac{1}{(m+1)^2}x + \frac{1}{(m+1)^2(m+2)^2}x^2 + \frac{1}{(m+1)^2(m+2)^2(m+3)}x^3 + ...] +$$
$$x^m[-\frac{2}{(m+1)^3}x - (\frac{2}{(m+1)^3(m+2)^2} + \frac{2}{(m+1)^2(m+2)^3})x^2 - (\frac{2}{(m+1)^3(m+2)^2(m+3)^2} +$$
$$\frac{2}{(m+1)^2(m+2)^3(m+3)^2} + \frac{2}{(m+1)^2(m+2)^2(m+3)^3})x^3 - ......]$$

$$= \Psi\ln x - 2x^m[\frac{1}{(m+1)^3}x + (\frac{1}{(m+1)^3(m+2)^2} + \frac{1}{(m+1)^2(m+2)^3})x^2 +$$
$$(\frac{1}{(m+1)^3(m+2)^2(m+3)^2} + \frac{1}{(m+1)^2(m+2)^3(m+3)^2} + \frac{1}{(m+1)^2(m+2)^2(m+3)^3})x^3 + ...]$$

maka

$$y_1 = \Psi\big|_{m=0} = 1 + x + \frac{x^2}{(2!)^2} + \frac{x^3}{(3!)^3} + ...$$

$$y_2 = \frac{\partial \Psi}{\partial m}\Big|_{m=0} = y_1 \ln x - 2[x + \frac{1}{(2!)^2}(1+\frac{1}{2})x^2 + \frac{1}{(3!)^2}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})x^3 + ...]$$

Dan penyelesaian lengkapnya adalah

$$y = Ay_1 + By_2$$

$$y = Ay_1 + B(y_1 \ln x - 2[x + \frac{1}{(2!)^2}(1+\frac{1}{2})x^2 + \frac{1}{(3!)^2}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})x^3 + ...)$$

$$= (A + B\ln x)[1 + x + \frac{x^2}{(2!)^2} + \frac{x^3}{(3!)^3} + ...] - 2B[x + \frac{1}{(2!)^2}(1+\frac{1}{2})x^2 + \frac{1}{(3!)^2}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})x^3 + ...]$$

Contoh 3.2.6 (selisih akar adalah bilangan bulat)

Akan menyelesaikan persamaan diferensial berikut

$$xy'' - 3y' + xy = 0$$

Disini $x = 0$ adalah titik singular yang teratur. Akan disubstitusikan

$$y = A_0 x^m + A_1 x^{m+1} + A_2 x^{m+2} + ... + A_n x^{m+n} + ...$$

$$y' = mA_0 x^{m-1} + (m+1)A_1 x^m + (m+2)A_2 x^{m+1} + ... + (m+n)A_n x^{m+n-1} + ...$$

$$y'' = (m-1)mA_0 x^{m-2} + m(m+1)A_1 x^{m-1} + (m+1)(m+2)A_2 x^m + ... + (m+n-1)(m+n)A_n x^{m+n-2} + ...$$

Kepersamaan persamaan diferensial yang diketahui, diperoleh

$$(m-4)mA_0x^{m-1}+(m-3)(m+1)A_1x^m+[(m-2)(m+2)A_2+A_0]x^{m+1}+......+$$

$$[(m+n-4)(m+n)A_n+A_{n-2}]x^{m+n-1}+.......=0$$

Diperoleh akar-akar persamaan indisial adalah m_1 = 0 dan m_2 = 4 dan diperoleh keadaan khusus yang telah disinggung sebelumnya, karena selisih kedua akar itu adalah suatu bilangan bulat. Diambil A_1 = 0 dan dipilih yang lain agar memenuhi formula rekursi berikut

$$A_n=-\frac{1}{(m+n-4)(m+n)}A_{n-2},n\geq 2$$

Jelas bahwa hubungan ini menghasilkan nilai-nilai yang berhingga, jika m = 4 akar yang lebih besar tetapi jika m = 0, $A_4 \to \infty$. Karena akar m = 0 memberikan kesulitan, A_0 diganti $B_0(m - 0) = B_0m$ dan akan dicatat dideret berikut

$$\Psi=A_0x^m(1-\frac{1}{(m-2)(m+2)}x^2+\frac{1}{m(m-2)(m+2)(m+4)}x^4+\frac{1}{m(m-2)(m+2)^2(m+4)(m+6)}x^6$$

$$+\frac{1}{m(m-2)(m+2)^2(m+4)^2(m+6)(m+8)}x^8+......)$$

$$=B_0x^m(m-\frac{m}{(m-2)(m+2)}x^2+\frac{1}{(m-2)(m+2)(m+4)}x^4+\frac{1}{(m-2)(m+2)^2(m+4)(m+6)}x^6$$

$$+\frac{1}{(m-2)(m+2)^2(m+4)^2(m+6)(m+8)}x^8+......)$$

Memenuhi persamaan diferensial berikut

$$x\Psi''-3\Psi'+x\Psi=(m-4)mA_0x^{m-1}=(m-4)m^2B_0x^{m-1}$$

Karena ruas kanannya mengandung faktor m^2, yang diikuti oleh argumen yang dikerjakan pada contoh 3.2.6 yaitu ψ dan $\frac{\partial\Psi}{\partial m}$, dengan m = 0, adalah penyelesaian persamaan diferensial yang diketahui. Didapatkan

$$\frac{\partial\Psi}{\partial m}=B_0x^m\ln(x)(m-\frac{m}{(m-2)(m+2)}x^2+\frac{1}{(m-2)(m+2)(m+4)}x^4+\frac{1}{(m-2)(m+2)^2(m+4)(m+6)}x^6$$
$$+\frac{1}{(m-2)(m+2)^2(m+4)^2(m+6)(m+8)}x^8+......)+B_0x^n[1+\frac{m^2+4}{[(m-2)(m+2)]}x^2-$$
$$\frac{1}{(m-2)(m+2)(m+4)}\left(\frac{1}{m-2}+\frac{1}{m+2}+\frac{1}{m+4}\right)x^4+\frac{1}{(m-2)(m+2)^2(m+4)(m+6)}$$
$$\left(\frac{1}{m-2}+\frac{2}{m+2}+\frac{1}{m+4}+\frac{1}{m+4}\right)x^6-..........]$$

$$=\Psi\ln(x)+B_0x^n[1+\frac{m^2+4}{[(m-2)(m+2)]}x^2-\frac{1}{(m-2)(m+2)(m+4)}\left(\frac{1}{m-2}+\frac{1}{m+2}+\frac{1}{m+4}\right)x^4+$$
$$\frac{1}{(m-2)(m+2)^2(m+4)(m+6)}\left(\frac{1}{m-2}+\frac{2}{m+2}+\frac{1}{m+4}+\frac{1}{m+4}\right)x^6-..........]$$

Akan menggunakan akar m = 0, dengan B_0 = 1, didapatkan

$$y_1=\Psi|_{m=0}=-\frac{x^4}{2\cdot2\cdot4}+\frac{x^6}{2\cdot2^2\cdot4\cdot6}-\frac{x^8}{2\cdot2^2\cdot4^2\cdot6\cdot8}+..........$$

$$y_2=\frac{\partial\Psi}{\partial m}|_{m=0}=y_1\ln x+1+\frac{1}{2^2}x^2+\frac{1}{2^3 2!}x^4-\frac{1}{2^6 3!2!}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^6+......$$

Dan penyelesaian lengkapnya adalah

$$y = Ay_1 + By_2$$

$$y = Ay_1 + B(y_1 \ln x + 1 + \frac{1}{2^2}x^2 + \frac{1}{2^3 2!}x^4 - \frac{1}{2^6 3!2!}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)x^6 + ...)$$

$$= (A + B\ln x)[-\frac{x^4}{2\cdot 2\cdot 4} + \frac{x^6}{2\cdot 2^2\cdot 4\cdot 6} - \frac{x^8}{2\cdot 2^2\cdot 4^2\cdot 6\cdot 8} + ...] +$$
$$B[1 + \frac{1}{2^2}x^2 + \frac{1}{2^3 2!}x^4 - \frac{1}{2^6 3!2!}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)x^6 + ...]$$

3.3. Persamaan Type Hypergeometrik

Persamaan Type Hypergeometrik adalah suatu persamaan diferensial orde dua dimana persamaan tersebut dapat dicari solusi persamaan diferensial dengan metode deret pangkat, dari solusi deret pengkat terakhir inilah dengan menerapkan fungsi faktorial didapat solusi yaitu berupa fungsi hypergeometrik. Untuk lebih jelasnya akan diambil beberapa contoh persamaan diferensial yang merupakan persamaan type hypergeometrik.

Contoh 3.3.1

Untuk contoh 3.2.1 akan diambil suatu persamaan diferensial yang merupakan bagian dari persamaan hypergeometrik gauss yaitu Konfluensi Persamaan Hypergeometrik.

Bentuk umum dari konfluensi persamaan hypergeometrik adalah sebagai berikut

$$xy''+(c-x)y'-ay=0 \tag{3.3.1.1}$$

Karena persamaan diatas merupakan bagian dari persamaan hypergeometrik maka juga punya titik tunggal/singularitas di x = 0 dengan nol dan (1 – c) adalah akar dari persamaan diatas. Persamaan (3.3.1.1) disebut dengan *persamaan konfluensi hypergeometrik*. Jika c tidak integer maka dengan mengambil

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+0} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty} n b_n x^{n-1}$$

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) b_n x^{n-2}$$

Dengan mengambil akar nol dan titik titik tunggal tetap yaitu x = 0 persamaan (3.3.1.1) menjadi

$$(0)\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) b_n x^{n-2} + [\mathrm{c}-0] \sum_{n=0}^{\infty} n b_n x^{n-1} - (\mathrm{a}) \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 0$$

$$[\mathrm{c}] \sum_{n=0}^{\infty} n b_n x^{n-1} - (\mathrm{a}) \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n+c-1) b_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+a) b_n x^n = 0 \tag{3.3.1.2}$$

index pengganti koefisien x^n jadi x^{n-1} dipersamaan (3.3.1.2) didapat

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n+c-1)b_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty}(n+a-1)b_{n-1}x^{n-1} = 0 \qquad (3.3.1.3)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n+c-1)b_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(n+a-1)b_{n-1}x^{n-1}$$

dan kemudian diperoleh bahwa $\boldsymbol{b_0}$ adalah sembarang dan untuk $n \geq 1$,

$$n \geq 1 : b_n = \frac{(n+a-1)}{n(n+c-1)} b_{n-1},$$

Dengan hubungan balik dari atas untuk $n \geq 1$diperoleh,

$$b_n = \frac{a(a+1)(a+2)...(a+n-1)}{n!c(c+1)(c+2)...(c+n-1)} b_0 \qquad (3.3.1.4)$$

Persamaan (3.3.1.4) dapat disederhanakan dengan menggunakan fungsi factorial, kemudian persamaan (3.3.1.4) dapat juga ditulis sebagai berikut;

$$b_n = \frac{(a)_n}{n!(c)_n} b_0$$

Pilih $\boldsymbol{b_0}$ = 1 karena mengambil akar x = 0 dan disini kita dapat peroleh solusi persamaan hypergeometrik sebagai berikut;

Didalam notasi fungsi faktorial bahwa solusi untuk persamaan (3.3.1.1) adalah

$$y_1 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!(c)_n} x^n \qquad (3.3.1.5)$$

berlaku untuk semua *x* yang terbatas.

$$y_1 = F(a,b;c;x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n!(c)_n} x^n \qquad (3.3.1.6)$$

Pada (3.3.1.5), barisannya hanya punya satu parameter pembilang yaitu *a* dan satu parameter penyebut yaitu *c*. pada persamaan (3.3.1.6) ada dua parameter pembilang yaitu *a* dan *b* serta satu parameter penyebut yaitu *c*. Pada persamaan (3.3.1.5) dapat juga kita tulis dalam notasi seperti berikut

$${}_1F_1(a;c;x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!(c)_n} x^n$$

Dengan *subscripts* sebelun dan sesudah dari F menotasikan nomor parameter pembilang dan penyebut, analog juga pada persamaan (3.3.1.6) dapat juga ditulis menjadi ${}_2F_1(a;b;c;x)$.

Untuk persamaan (3.3.1.1) dengan akar yang lain yaitu (1 – *c*). Kita ambil

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^{n+1-c}$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1-c) d_n x^{n-c}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1-c)(n-c)d_n x^{n-c-1}$$

pada persamaan (2.1) untuk menemukan solusi kedua dengan akar (1 – *c*) sama dengan menentukan solusi dengan akar nol, dengan mengambil persamaan (3.3.1.2) dan mengambil akar (1 – *c*)

$$\bullet \sum_{n=0}^{\infty}(n+1-c)((n+1-c)+c-1)d_n x^{n-c} - \sum_{n=0}^{\infty}((n+1-c)+a)d_n x^{n+1-c} = 0$$

$$\bullet \sum_{n=0}^{\infty}(n+1-c)(n)d_n x^{n-c} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1-c+a)d_n x^{n+1-c} = 0$$

$$\bullet \sum_{n=0}^{\infty}(n+1-c)(n)d_n x^{n-c} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1-c+a)d_n x^{n+1-c}$$

$$\bullet \sum_{n=0}^{\infty}(n+1-c)(n)d_n x^{n-c} = \sum_{n=0}^{\infty}(n-c+a)d_{n-1} x^{n-c}$$

dan kemudian diperoleh bahwa $\boldsymbol{d_0}$ adalah x^{1-c} dan untuk $n \geq 1$,

$$\bullet\, d_n = \frac{(n-c+a)}{n(n+1-c)} d_{n-1}$$

Agar mempermudah untuk pencarian fungsi faktorialnya bentuk diatas akan diubah sebagai berikut

$$\bullet\, d_n = \frac{(n+a-1+1-c)}{n(n+2-1-c)} d_{n-1}$$

Dengan hubungan balik dari atas untuk $n \geq 1$diperoleh,

$$d_n = \frac{(a+1-c)_n}{n!(2-c)_n} d_0$$

Maka didapatlah solusi kedua dengan akar (1 – c) yaitu sebagai berikut

$$y_2 = x^{1-c} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+1-c)_n}{n!(2-c)_n} x^{n+1-c}$$

Untuk solusi yang kedua ini dapat juga ditulis dalam notasi fungsi hypergeometrik yaitu

$$y_2 = x^{1-c}\,{}_1F_1(a+1-c;2-c;x)$$

Contoh 3.3.2

Contoh berikut akan diselesaikan dengan metode yang sama dengan persamaan konfluensi hypergeometrik dengan mengambil Persamaan Legendre sebagai persamaan diferensial yang mempunyai solusi fungsi hypergeometrik. Adapun bentuk umum dari persamaan Legendre sebagai berikut;

$$(1-x^2)y''+2xy'-n(n+1)y = 0 \qquad (3.3.2.1)$$

Mulai dengan mengambil titik tunggal x = 1 dan misalkan x – 1 = v dari persamaan (4.1) berubah menjadi sebagai berikut

$$v(v+2)\frac{d^2y}{dv^2}+2(v+1)\frac{dy}{dv}-n(n+1)y=0 \tag{3.3.2.2}$$

Di v = 0, persamaan (3.3.2.2) punya akar persamaan yaitu c = 0, dengan ambil

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}a_k v^k$$

$$y'=\sum_{k=0}^{\infty}ka_k v^{k-1}$$

$$y''=\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)a_k v^{k-2}$$

Karena di v = 0 maka persamaan (3.3.2.2) dapat disederhanakan dengan mengambil masing-masing deret pangkat yang telah ada diatas.

$$(0)(0+2)\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)a_k x^{k-2} + 2(0+1)\sum_{k=0}^{\infty}kb_k x^{k-1} - n(n+1)\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k = 0$$

$$2\sum_{k=0}^{\infty}ka_k x^{k-1} - n(n+1)\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k = 0$$

index pengganti di x^{k-1} jadi x^k dipersamaan diatas didapat

$$\sum_{k=0}^{\infty}2(k+1)a_{k+1}x^k+\sum_{k=0}^{\infty}(k-n)(k+n+1)a_k x^k = 0 \tag{3.3.2.3}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2(k+1)a_{k+1}x^k = -\sum_{k=0}^{\infty}(k-n)(k+n+1)a_k x^k$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2(k)a_k x^{k-1} = -\sum_{k=1}^{\infty}(k-n-1)(k+n)a_{k-1}x^{k-1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2ka_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} -(k-n-1)(k+n)a_{k-1}x^{k-1}$$

dan kemudian diperoleh bahwa $\boldsymbol{a_0}$ adalah sembarang dan untuk $k \geq 1$,

$$k \geq 1 : a_k = \frac{-(k-n-1)(k+n)}{2k} a_{k-1}$$

$$a_k = \frac{(-1)(k-n-1)(k+n)}{2k!} a_{k-1}$$

$$a_k = \frac{(-1)(k-n-1)(k+n-1+1)}{2^k k!} a_{k-1}$$

Maka akan diperoleh,

$$a_k = \frac{(-1)^k (-n)_k (n+1)_k}{2^k k!} a_0$$

Dengan mengambil $(1)_k$ = k!, maka bentuk diatas senantiasa

$$a_k = \frac{(-1)^k(-n)_k(n+1)_k}{2^k(1)_k}a_0$$

Dan pilih $\boldsymbol{a_0}$ = 1dan disini kita dapat peroleh solusi persamaan yang akan diubah kebentuk fungsi hypergeometrik sebagai berikut;

$$y_1 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(-n)_k(1+n)_k(v)^k}{2^k(1)_k}$$

Karena x – 1 = v, maka solusi diatas berubah menjadi

$$y_1 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(-n)_k(1+n)_k(x-1)^k}{2^k(1)_k}$$

$$y_1 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-n)_k(1+n)_k((-1)^k(x-1)^k)}{2^k(1)_k}$$

$$y_1 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-n)_k(1+n)_k((-1)(x-1))^k}{2^k(1)_k}$$

$$y_1 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-n)_k(1+n)_k(1-x)^k}{2^k(1)_k}$$

$$y_1 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-n)_k(1+n)_k}{(1)_k}\left(\frac{1-x}{2}\right)^k$$

Maka diubah kebenntuk fungsi hypergeometrik adalah sebagai berikut;

$$y_1 = F(-n, 1+n; 1; \frac{1-x}{2})$$

Untuk persamaan (3.3.2.1) dengan akar yang lain yaitu (c - 2). Kita ambil saja

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k v^{k+c-2}$$

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} (k+c-2) a_k v^{k+c-3}$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} (k-c-3)(k-c-2) a_k x^{k+c-4}$$

pada persamaan (3.3.2.1) untuk menemukan solusi kedua dengan akar (c - 2) sama dengan menentukan solusi dengan akar nol, dengan mengambil persamaan (3.3.2.3) dan mengambil akar (c - 2)

$$2\sum_{k=0}^{\infty} (k+c-2) a_k v^{k+c-3} - n(n+1) \sum_{k=0}^{\infty} a_k v^{k+c-2} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2((k+c-2)+1) a_k x^{k+c-3} + \sum_{k=0}^{\infty} ((k+c-2)-n)((k+c-2)+n+1) a_k x^{k+c-2} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2(k+c-1) a_k x^{k+c-3} + \sum_{k=0}^{\infty} (k+c-2-n)(k+c+n-1) a_k x^{k+c-2} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2(k+c-1) a_k x^{k+c-3} = -\sum_{k=0}^{\infty} (k+c-2-n)(k+c+n-1) a_k x^{k+c-2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2(k+c-1)a_k x^{k+c-3} = -\sum_{k=1}^{\infty}(k+c-3-n)(k+c+n-2)a_{k-1}x^{k+c-3}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2(k+c-1)a_k x^{k+c-3} = \sum_{k=1}^{\infty}-(k+c-3-n)(k+c+n-2)a_{k-1}x^{k+c-3}$$

dan kemudian diperoleh bahwa $\boldsymbol{a_0}$ adalah sembarang dan untuk $n \geq 1$,

$$k \geq 1 : a_k = \frac{-(k+c-3-n)(k+c+n-2)}{2(k+c-1)} a_{k-1}$$

$$a_k = \frac{(-1)(k-n-1+c-2)(k+n-1+c-1)}{2(k+c-1)} a_{k-1}$$

$$a_k = \frac{(-1)(k-n-1+c-2)(k+n-1+c-1)}{2(k+c-1)} a_{k-1}$$

Maka akan diperoleh,

$$a_k = \frac{(-1)^k (-n+c-2)_k (n+c-1)_k}{2^k (c)_k} a_0$$

Dan pilih $\boldsymbol{a_0}$ = 1 dan disini kita dapat peroleh solusi persamaan yang akan diubah kebentuk fungsi hypergeometrik sebagai berikut;

$$y_2 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (-n+c-2)_k (n+c-1)_k (v)^{k+c-2}}{2^k (c)_k}$$

Karena $x - 1 = v$, maka solusi diatas berubah menjadi

$$y_2 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (-n+c-2)_k (n+c-1)_k (x-1)^{k+c-2}}{2^k (c)_k}$$

$$y_2 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-n+c-2)_k (n+c-1)_k (-1)^k (x-1)^{k+c-2}}{2^k (c)_k}$$

$$y_2 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-n+c-2)_k (n+c-1)_k ((-1)(x-1))^{k+c-2}}{2^k (c)_k}$$

$$y_2 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-n+c-2)_k (n+c-1)_k (1-x)^{k+c-2}}{2^k (c)_k}$$

$$y_2 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-n+c-2)_k (n+c-1)_k (1-x)^{k+c-2}}{(c)_k 2^k}$$

Maka diubah kebenntuk fungsi hypergeometrik adalah sebagai berikut;

$$y_2 = F(-n+c-2, n+2-1; c; 1-x)$$

Dari kedua contoh diatas jelaslah bahwa persamaan konfluensi hypergeometrik dan persamaan Legendre merupakan persamaan type hypergeometrik.

Persamaan type hypergeometrik merupakan langkah awal timbulnya Algoritma HYPER. Setelah ini akan dibahas tentang Algoritma HYPER lebih lanjut.

3.4. Algoritma Dasar (Algoritma HYPER) [4]

Disini akan membahas tentang algoritma dasar dari algoritma Petkovšek dalam mencari solusi hypergeometrik dari persamaan diferensial linear. Ada tiga langkah yang mendasar dari algoritma ini.

Langkah 1. (Mencari Formula Rekursi)

Langkah ini dimulai dari persamaan diferensial linear homogen dengan bentuk seperti dibawah ini,

$$\sum_{i=0}^{r}\left(\sum_{j=0}^{d_i} p_{ij}x^j\right)y^{(i)}(x) = 0 \qquad (3.4.1)$$

Dengan mengasumsikan koefisien p_{id} jika diturunkan 0 atau dengan kata lain adalah suatu konstanta. Deret pangkat diatas bertujuan agar solusi $y(x) = \sum_{n\geq 0} f_n x^n$ berdasar persamaan (3.4.1). Kemudian disubstitusikan f kepersamaan (3.4.1) dan persamaan koefisien dari x^n. Ini sangat popular dalam mendapatkan sebuah masalah linear dengan koefisien polinomial. Maka akan diperoleh,

$$\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{d_i} p_{ij}(n+i-j)...(n-j+1)f_{n+i-j} = 0 \qquad (3.4.2)$$

Berlaku untuk semua n, dengan $f_k = 0$ untuk $k < 0$.

<u>Langkah 2.</u> (Mencari Polinomial-Polinomial Monic)

Diberikan persamaan linear seperti bentuk (3.4.2) dengan koefisien di Q[n] berupa bilangan aljabar Z dan tiga polinomial monic A(n), B(n), dan C(n) di Q[n] maka solusi yang bersesuaian dengan persamaan (3.4.2) berupa

$$B(n)C(n)f_{n+1} = ZA(n)C(n+1)f_n \qquad (3.4.3)$$

Untuk masing-masing element dari $\{(Z_p, A_p, B_p, C_p)\}$, kita harus menghitung nilai pertama dari barisan. Misalkan A(n_0 + k), B(n_0 + k), C(n_0 + k) untuk setiap $k \geq 0$. Kemudian untuk sebarang konstanta K, maka berupa barisan

$$f_n = KZ^{n-n_0}C(n)\prod_{i=n_0}^{n-1}\frac{A(i)}{B(i)}, n \geq n_0$$

Memenuhi persamaan (3.4.2) untuk semua $n \geq n_0$ + M.

Jika n > 0, kita masih harus menentukan f_0, . . ., f_{n_0-1}. Untuk mendapatkan nilai ini, kita tulis sistem linear dari n_0 persamaan diperoleh dengan menentukan n = M, . . ., M + n_0 – 1 pada persamaan (3.4.2) dan menyelesaikan sistem ini untuk f_0, . . ., f_{n_0-1} dan K. Jika dimensi dari solusi lebih besar dari 1, kemudian kita bisa memisahkan solusi dengan syarat terbatas. Catatan bahwa dimensi dari solusi mungkin juga 0, ketika A(n_0 – 1) = 0. Dalam kasus ini koefisien sisa dari persamaan (3.4.2) hilang di $n = n_0 + M - 1$.

Setelah masing-masing element dari {(Z_p, A_p, B_p, C_p)} selesai, maka kita punyai keluarga solusi dengan dua tipe:

$$\{ f_{n,p} = a_{n,p}, 0 \leq n < n_{0,p}; f_{n,p} = 0, n_{0,p} \leq n \}$$

Dan

$$\{ f_{n,p} = a_{n,p}, 0 \leq n < n_{0,p}; f_{n,p} = Z_p^{n-n_0} C_p(n) \prod_{i=n_{o,p}}^{n-1} \frac{A_p(i)}{B_p(i)}, n_{0,p} \leq n \},$$

Untuk sebarang konstanta $a_{n,p}$.

<u>Langkah 3.</u> (mendapatkan solusi hypergeometrik berdasarkan polynomial monicnya)

Kita masuk kelangkah ini dengan barisan u_n adalah suatu kombinasi linier (dimana koefisien mungkin bisa sekedar simbol) dari bagian hypergeometrik dari type yang ada. Kita sekarang menghitung jumlah terbatas dari 0 sampai tak hingga (infinity) pada $u_n x^n$. Catatan bahwa penjumlahan yang terbatas dari hubungan barisan untuk

z = 1.

Jelas bahwa barisan dari type yang pertama sebelumnya berkorespondensi ke solusi polinomial dari persamaan (3.4.1). Untuk membagi solusi dari type kedua, kita tulis lagi untuk A(n) = $\prod(n+\alpha_i)$, B(n) = $\prod(n+\beta_j)$, dan C(n + n_0) = $\sum_{i=0}^{\deg_n(C)} c_i n(n-1)...(n-i+1)$ dan kemudian akan dilihat koresponden dari deret berikut,

$$Kx^{n_0}\left[\sum_{i=0}^{d_C} c_i\theta^i\right]_{d_{A+1}} F_{d_B}\begin{pmatrix} n_0+\alpha_1,...,n_0+\alpha_{d_A},1;Zx \\ n_0+\beta_1,...,n_0+\beta_{d_B} \end{pmatrix},$$

Dimana $\theta = x\frac{d}{dx}$, d_A = $\deg_n$(A), d_B = $\deg_n$(B), d_C = $\deg_n$(C). Pernyataan ini dapat mengurangi (reduce) untuk sebuah kombinasi linier dari deret hypergeometrik dengan koefisien polinomial dengan formula biasa untuk menurunkan sebuah deret hypergeometrik.

Untuk lebih jelasnya akan diberikan contoh dengan menggunakan algoritma diatas

Contoh 3.4.1

Akan diselesaikan persamaan diferensial berikut

$$(-x^2+x)y''-3y+2y=0$$

Disini x = 0 adalah titik singular yang teratur. Akan disubstitusikan

$$y = A_0 x^m + A_1 x^{m+1} + A_2 x^{m+2} + \ldots + A_n x^{m+n} + \ldots$$

$$y' = mA_0 x^{m-1} + (m+1)A_1 x^m + (m+2)A_2 x^{m+1} + \ldots + (m+n)A_n x^{m+n-1} + \ldots$$

$$y'' = (m-1)mA_0 x^{m-2} + m(m+1)A_1 x^{m-1} + (m+1)(m+2)A_2 x^m + \ldots + (m+n-1)(m+n)A_n x^{m+n-2} + \ldots$$

Langkah 1.

Untuk masing-masing

$$-x^2 y'' = -[(m-1)mA_0 x^m + m(m+1)A_1 x^{m+1} + (m+1)(m+2)A_2 x^{m+2} + \ldots + (m+n-1)(m+n)A_n x^{m+n} + \ldots]$$

$$xy'' = (m-1)mA_0 x^{m-1} + m(m+1)A_1 x^m + (m+1)(m+2)A_2 x^{m+1} + \ldots + (m+n-1)(m+n)A_n x^{m+n-1} + \ldots$$

$$-3y' = -3[mA_0 x^{m-1} + (m+1)A_1 x^m + (m+2)A_2 x^{m+1} + \ldots + (m+n)A_n x^{m+n-1} + \ldots]$$

$$2y = 2[A_0 x^m + A_1 x^{m+1} + A_2 x^{m+2} + \ldots + A_n x^{m+n} + \ldots]$$

Maka diperoleh,

$$(m-4)mA_0 x^{m-1} + [(m-3)(m+1)A_1 - (m-2)(m+1)A_0]x^m + [(m-2)(m+2)A_2 - (m-1)(m+2)A_1]x^{m+1}$$

$$+ \ldots\ldots + [(m+n-4)(m+n)A_n - (m+n-3)(m+n)A_{n-1}]x^{m+n-1} + \ldots\ldots. = 0$$

Maka formula rekursi diperoleh

$$(m+n-4)(m+n)A_n - (m+n-3)(m+n)A_{n-1} = 0$$

$$(m+(n+1)-4)(m+(n+1))A_{n+1}-(m+(n+1)-3)(m+(n+1))A_n=0$$

$$(m+n-3)(m+n+1)A_{n+1}-(m+n-2)(m+n+1)A_n=0$$

Langkah 2.

$$(m+n-3)(m+n+1)A_{n+1}=(m+n-2)(m+n+1)A_n$$

$$(m+n-3)A_{n+1}=(m+n-2)A_n$$

Maka diperoleh polynomial monic yaitu

A(n) = (m + n – 2), B(n) = (m + n – 3), C(n) = 1, C(n + 1) = 1 dan Z = 1

Langkah 3.

$$A_{n+1}=\frac{(m+n-3)}{(m+n-2)}A_n$$

$$A_{n+1}=\frac{(m+n-1-2)}{(m+n-1-1)}A_n$$

$$A_{n+1}=\frac{((m-2)+n-1)}{((m-1)+n-1)}A_n$$

$$A_{n+1}=\frac{(m-2)_n}{(m-1)_n}A_n$$

Dari sini diperoleh solusi yang dinginkan yaitu

$$y = hypergeom(m-2; m-1; x) = {}_1F_1(m-2; m-1; x)$$

<u>Teorema 3.1.1.</u> [4]

Misalkan H(x) ruang vektor dari deret hypergeometrik di x atas Q, kemudian langkah 1 – 3 memperoleh sebuah basis dari solusi (3.1) dalam ruang vektor Q[x]H(x).

<u>Bukti.</u>

Ambil S = {$F_1(x)$,. . .,$F_k(x)$} merupakan himpunan solusi yang diperoleh dari algoritma. Ini jelas bahwa dari deskripsi algoritma bahwa $S \subset Q[x]H(x)$. Bahwa S adalah bebas linier mengikuti arti sebuah kombinasi linier dari F_i kedalam suatu kombinasi linier dari koefisien barisan. Hal terakhir untuk membuktikan bahwa sebarang solusi termasuk Q[x]H(x) dapat dituliskan sebagai suatu kombinasi linier dari F_i. Ambil F sebuah solusi di Q[x]H(x). Kemudian terdapat sebuah bilangan integer positif N demikian sehingga untuk $n \geq$ N, koefisien dari barisan Taylor dari F adalah suatu kombinasi linier dari barisan hypergeometrik sesuai dengan persamaan (3.2) . Kita bisa mengelompokan bersama barisan yang punya rasio adalah fungsi rasional dari indexnya. Kemudian masing-masing barisan hypergeometrik juga merupakan solusi dari persamaan (3.2) dan demikianlah bukti selesai.

3.5. <u>Algoritma Petkovšek</u> [4]

Dalam bagian ini kita menyelidiki modifikasi (perubahan) yang simpel dari algoritma sebelumnya yang disebut dengan algoritma petkovšek, algoritma ini adalah generalisasi dari algoritma dasar (Algoritma HYPER) yang dapat digunakan dalam tingkat yang lebih besar. Ada dua langkah yang mendasar dari algoritma ini.

Langkah 1. (Mencari Titik-Titik Singular)

Bentuk umum persamaan diferensial yang dapat diterapkan untuk algoritma Petkovšek adalah sebagai berikut

$$\sum_{i=0}^{r}(\gamma_i x+\varepsilon_i)x^i y^{(i)}(x)=0$$

Dalam hal ini diambil r = 2, untuk γ_i dan ε_i adalah konstanta rasional sebarang. maksud dari persamaan diatas bahwa bisa juga bentuk khas seperti berikut

$$(ax+b)y^{(r)}(x)+y^{(r-1)}(x)=0 \tag{3.5.1}$$

Dengan a dan b adalah konstanta rasional sebarang. titik x = 0 adalah selalu merupakan titik singular. Pada intinya, ini tidak bisa digunakan untuk mencari solusi dari persamaan type hypergeometrik ketika 0 bukan merupakan akar yang mewakili koefisien-koefisien dari persamaan diferensial. Algoritma ini untuk mencari semua solusi hypergeometrik dari persamaan diferensial linier dengan yang pertama mengganti variabel x dengan $x - \alpha$ dimana α adalah akar yang mewakili koefisien dari persamaan diferensial.

Dari persamaan (3.5.1) lebih dikhususkan lagi jika $m > 1$ maka persamaan akan berupa

$$y^{(r)}(x) + \sum_{j=r+1}^{r+m} (a_j x^m + b_j) x^{r+m-j} y^{(j)}(x) = 0$$

Persamaan diatas jika ditemui kasus yang khusus dan $x = 0$ masih merupakan titik singular. Pada operasi lain yang mencari titik singularitas dan menghitung persamaan indisialnya. Lalu untuk masing-masing akar c dari persamaan indisial kita ganti dengan fungsi yang tidak diketahui $y(x)$ kedalam $x^c u(x)$ dan mencari solusi hypergeometriknya. Dalam mendapatkan solusi hypergemetrik bisa dituliskan sebagai type ini yaitu $x^{\alpha}\,{}_qF_p(.;x)$ dengan α merupaka akar dari persamaan diferensial yang diketahui.

Langkah 2. (Mereduksi Orde)

Yang menarik dari algotima Petkovšek ini adalah dengan mereduksi orde dari persamaan diferensial. Salah satu solusi dari persamaan diferensial yang telah diperoleh, ini memungkinkan untuk direduksi order dengan mengganti fungsi yang tak diketahui. Menurut algoritam ini dengan aplikasi rekursi akan mendapatkan solusi yaitu hasi kali dari fungsi yang tidak diketahui itu dengan fungsi hypergeometrik.

Untuk mencari reduksi orde dapat digunakan dengan cara berikut;

Jika terdapat persamaan diferensial berikut

$$\left(\sum_{i=0}^{r} a_i x - b_i\right) x^r y^{(n)}(x), \text{ dengan } r \neq 0,\ r < n \text{ dan } n > 1$$

Maka untuk reduksi orde adalah $n - r$.

Akan disajikan beberapa contoh untuk reduksi orde dari persamaan diferensial berikut;

- $\left(\frac{81}{4}x^3 - 3x^2\right)y'''(x) + \left(\frac{567}{4}x^2 - \frac{39}{2}\right)y''(x) + \left(207x - \frac{45}{2}\right)y'(x) + 45y(x) = 0$

Dapatlah dilihat bahwa persamaan diatas mempunya reduksi orde 1 karena pada persamaan $\left(\frac{81}{4}x^3 - 3x^2\right)y'''(x)$ dapat diubah kebentuk $\left(\frac{81}{4}x - 3\right)x^2 y'''(x)$ maka dari sinilah reduksi orde 1 diperoleh.

- $(x^3 - 2x^2 + x)y'''(x) + (7x^2 - 15x + 8)y''(x) + (10x - 13)y'(x) - 2y(x) = 0$

Dapatlah dilihat bahwa persamaan diatas mempunya reduksi orde 2 karena pada persamaan $(x^3 - 2x^2 + x)y'''(x)$ dapat diubah kebentuk $(x^2 - 2x + 1)xy'''(x)$ maka dari sinilah reduksi orde 2 diperoleh.

- $(x^2 - 2x)y''(x) + xy'(x) - 3y(x) = 0$

Dapatlah dilihat bahwa persamaan diatas mempunya reduksi orde 1 karena pada persamaan $(x^2-2x)y''(x)$ dapat diubah kebentuk $(x-2)xy''(x)$ maka dari sinilah reduksi orde 1 diperoleh.

- $(x^2-2x+8)y''(x)+5xy'(x)-9y(x)=0$

Dapatlah dilihat bahwa persamaan diatas tidak mempunya reduksi orde karena pada persamaan $(x^2-2x+8)y''(x)$ dapat diubah kebentuk $(x^2-2x+8)x^0y''(x)$ maka dari sinilah tidak ada reduksi orde yang diperoleh disebabkan $r = 0$.

3.6. Solusi Persamaan Diferensial dengan Algoritma Petkovšek

Disini akan diselesaikan beberapa persamaan diferensial khususnya persamaan diferensial orde dua dengan koefisien polinomial menggunakan Algoritma Petkovšek. Adapun persamaan diferensial yang dimaksud adalah sebagai berikut:

Contoh 3.6.1

Akan diselesaikan persamaan diferensial $(x^2-2x)y''(x)+xy'(x)-3y(x)=0$ dengan Algoritma Petkovšek.

Langkah 1.

$(x^2 - 2x)y''(x) + xy'(x) - 3y(x) = 0$ mempunyai titik singular di $x = 0$ dan $x = 2$ karena $P_0(x) = x^2 - 2x$ dan $P_0(x) = 0$ maka $x^2 - 2x = 0 \rightarrow x(x - 2) = 0$.

Langkah 2.

Selanjutnya akan dicari reduksi orde dari persamaan diferensial yang diketahui yaitu

$$(x^2 - 2x)y''(x) + xy'(x) - 3y(x) = 0$$

Dapatlah dilihat bahwa persamaan diatas mempunya reduksi orde 1 karena pada persamaan $(x^2 - 2x)y''(x)$ dapat diubah kebentuk $(x-2)xy''(x)$ maka dari sinilah reduksi orde 1 diperoleh. Maka menurut Algoritma ini untuk persamaan $xy'(x)$ keluar dari persamaan tersebut dan nantinya solusi dari persamaan diferensial $xy'(x)$ dikalikan dengan semua solusi hypergeometriknya. Maka persamaan diferensial yang akan dicari solusi hypergeometrik hanya berupa $(x^2 - 2x)y''(x) - 3y(x) = 0$. Sekarang akan dicari solusi hypergeometrik dengan titik singular $x = 0$ maka akan diambil

$$y = A_0 x^m + A_1 x^{m+1} + A_2 x^{m+2} + \ldots + A_n x^{m+n} + \ldots$$

$$y' = mA_0 x^{m-1} + (m+1)A_1 x^m + (m+2)A_2 x^{m+1} + \ldots + (m+n)A_n x^{m+n-1} + \ldots$$

$$y'' = (m-1)mA_0 x^{m-2} + m(m+1)A_1 x^{m-1} + (m+1)(m+2)A_2 x^m + \ldots + (m+n-1)(m+n)A_n x^{m+n-2} + \ldots$$

Kemudian disubstitusikan untuk

$$x^2 y'' = (m-1)mA_0 x^m + m(m+1)A_1 x^{m+1} + (m+1)(m+2)A_2 x^{m+2} + ... + (m+n-1)(m+n)A_n x^{m+n} + ...$$

$$-2xy'' = -2[(m-1)mA_0 x^{m-1} + m(m+1)A_1 x^m + (m+1)(m+2)A_2 x^{m+1} + ... +$$

$$(m+n-1)(m+n)A_n x^{m+n-1} + ...]$$

$$-3y = -3[A_0 x^m + A_1 x^{m+1} + A_2 x^{m+2} + ... + A_n x^{m+n} + ...]$$

Maka dari sini diperoleh

$$-2m(m-1)A_0 x^{m-1} + [(m(m-1)-3)A_0 - 2m(m+1)A_1]x^m + [(m(m+1)-3)A_1 - 2(m+1)(m+2)A_2]x^{m+1} +$$

$$....... + [\{(m+n-2)(m+n-1)-3\}A_{n-1} - 2(m+n)(m+n-1)A_n]x^{m+n-1} = 0$$

Dapat dilihat bahwa akar-akar persamaan indisialnya adalah $m_1 = 0$ dan $m_1 = 1$ ternyata selisih kedua akar tersebut adalah bilangan bulat. Diambil $A_1 = 0$ dan agar memenuhi formula rekursi berikut;

$$(m+n-2)(m+n-1)-3\}A_{n-1} = 2(m+n)(m+n-1)A_n$$

Atau $$2(m+n)(m+n-1)A_n = (m+n-2)(m+n-1)-3\}A_{n-1}$$

Maka $$A_n = \frac{(m+n-2)(m+n-1)-3}{2(m+n)(m+n-1)} A_{n-1}, n > 1$$

Kemudian akan dicari polinomial-polinomial monic dari formula rekursif diatas

$$A_n = \frac{(m+n-1-1)(m+n-1)-3}{2(m+n-1+1)(m+n-1)} A_{n-1}$$

$$A_n = \frac{(m-1)_n (m)_n - 3}{2^n (m+1)_n (m)_n} A_{n-1}$$

$$A_n = \frac{(m-1)_n (m)_n}{2^n (m+1)_n (m)_n} - \frac{3}{2^n (m+1)_n (m)_n} A_{n-1}$$

$$A_n = \frac{(m-1)_n}{2^n (m+1)_n} - \frac{3^n}{2^n (m+1)_n (m)_n} A_{n-1}$$

$A_1(n) = (m + n - 2)$, $B_1(n) = (m + n)$, $C_1(n) = 1$, $C_1(n + 1) = 1$ dan $Z_1 = 1/2$ dan

$A_2(n) = 1$, $B_2(n) = (m + n)$, $C_2(n) = (m + n - 1)$, $C_2(n + 1) = 1$ dan $Z_2 = 3/2$.

Maka dari sini diperoleh deret hypergeometrik berupa

$$y_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(m-1)_n}{2^n (m+1)_n} - \frac{3^n}{2^n (m+1)_n (m)_n}\right)x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(m-1)_n}{2^n (m+1)_n} x^n - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n (m+1)_n (m)_n} x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(m-1)_n}{2^n (m+1)_n} x^n - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(m+1)_n (m)_n}\left(\frac{3x}{2}\right)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(m-1)_n}{2^n (m+1)_n} x^n - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(m+1)_n (m)_n}\left(\frac{3x}{2}\right)^n$$

$$= {}_1F_1(m-1; m+1; x) - {}_0F_2(-; m+1, m; \frac{3x}{2})$$

Sekarang akan dicari solusi hypergeometrik dengan titik singular $x = 2$ maka akan diambil

$$y = A_0 x^{m+2} + A_1 x^{m+3} + A_2 x^{m+4} + \dots + A_n x^{m+n+2} + \dots$$

$$y' = (m+2)A_0 x^{m+1} + (m+3)A_1 x^{m+2} + (m+4)A_2 x^{m+3} + \dots + (m+n+2)A_n x^{m+n+1} + \dots$$

$$y'' = (m+1)(m+2)mA_0 x^{m} + (m+2)(m+3)A_1 x^{m+1} + (m+3)(m+4)A_2 x^{m+2} + \dots +$$

$$(m+n+1)(m+n+2)A_n x^{m+n} + \dots$$

Kemudian disubstitusikan untuk

$$x^2 y'' = (m+1)(m+2)A_0 x^{m+2} + (m+2)(m+3)A_1 x^{m+3} + (m+3)(m+4)A_2 x^{m+4} + \dots +$$

$$(m+n+1)(m+n+2)A_n x^{m+n+2} + \dots$$

$$-2xy'' = -2[(m+1)(m+2)A_0 x^{m+1} + (m+2)(m+3)A_1 x^{m+2} + (m+3)(m+4)A_2 x^{m+3} + \dots +$$

$$(m+n+1)(m+n+2)A_n x^{m+n+1} + \dots]$$

$$-3y = -3[A_0 x^{m+2} + A_1 x^{m+3} + A_2 x^{m+4} + \dots + A_n x^{m+n+2} + \dots]$$

Maka dari sini diperoleh

$$-2(m+1)(m+2)A_0 x^{m+1} + [(m+1)(m+2)) - 3)A_0 - 2(m+2)(m+3)A_1]x^{m+2} + [((m+2)(m+3) - 3)A_1$$

$$-2(m+2)(m+4)A_2]x^{m+3} + \dots\dots + [\{(m+n)(m+n+1) - 3\}A_{n-1} - 2(m+n+1)(m+n+2)A_n]x^{m+n+1} = 0$$

Dapat dilihat bahwa akar-akar persamaan indisialnya adalah m_1 = -1 dan m_1 = -2 ternyata selisih kedua akar tersebut adalah bilangan bulat. Diambil A_1 = 0 dan agar memenuhi formula rekursi berikut;

$$\{(m+n)(m+n+1)-3\}A_{n-1} = 2(m+n+1)(m+n+2)A_n$$

Atau

$$2(m+n+1)(m+n+2)A_n = \{(m+n)(m+n+1)-3\}A_{n-1}$$

Maka $$A_n = \frac{(m+n)(m+n+1)-3}{2(m+n+1)(m+n+2)}A_{n-1}, n>1$$

Kemudian akan dicari polinomial-polinomial monic dari formula rekursif diatas

$$A_n = \frac{(m+n+1-1)(m+n-1+2)-3}{2(m+n-1+2)(m+n-1+3)}A_{n-1}$$

$$A_n = \frac{(m+1)_n(m+2)_n-3}{2^n(m+2)_n(m+3)_n}A_{n-1}$$

$$A_n = \frac{(m+1)_n(m+2)_n}{2^n(m+2)_n(m+3)_n} - \frac{3}{2^n(m+2)_n(m+3)_n}A_{n-1}$$

$$A_n = \frac{(m+1)_n}{2^n(m+3)_n} - \frac{3^n}{2^n(m+2)_n(m+3)_n}A_{n-1}$$

$A_1(n) = (m + 1)$, $B_1(n) = (m + 3)$, $C_1(n) = 1$, $C_1(n + 1) = 1$ dan $Z_1 = 1/2$ dan

$A_2(n) = 1$, $B_2(n) = (m + 2)$, $C_2(n) = (m + 3)$, $C_2(n + 1) = 1$ dan $Z_2 = 3/2$.

Maka dari sini diperoleh deret hypergeometrik berupa

$$y_2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(m+1)_n}{2^n(m+3)_n} - \frac{3^n}{2^n(m+2)_n(m+3)_n}\right)x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(m+1)_n}{2^n(m+3)_n}x^n - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n(m+2)_n(m+3)_n}x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(m-1)_n}{2^n(m+1)_n}x^n - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(m+1)_n(m)_n}\left(\frac{3x}{2}\right)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(m-1)_n}{(m+1)_n}\left(\frac{x}{2}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(m+1)_n(m)_n}\left(\frac{3x}{2}\right)^n$$

$$= {}_1F_1(m-1; m+1; \frac{x}{2}) - {}_0F_2(-; m+1, m; \frac{3x}{2})$$

Menurut algorima ini bahwa

$$= x^2({}_1F_1(m-1; m+1; \frac{x}{2}) - {}_0F_2(-; m+1, m; \frac{3x}{2}))$$

Selanjutnya akan dicari fungsi dari solusi $xy'(x) = 0$ dapat dengan mudah solusi itu dicari adalah

$$y'(x) = \frac{0}{x} = 0$$

$$y(x) = \int 0dx = c_1 \rightarrow y(x) = c_1$$

Maka diperoleh solusi menurut algoritma petkovšek

$$c_1 y(x) = c_1(c_2 y_1(x) + c_3 y_2(x))$$

$$= c_1 c_2 ({}_1F_1(m-1; m+1; \frac{x}{2}) - {}_0F_2(-; m+1, m; \frac{3x}{2})) + c_1 c_3 x^2 ({}_1F_1(m-1; m+1; \frac{x}{2}) - {}_0F_2(-; m+1, m; \frac{3x}{2}))$$

$$= A({}_1F_1(m-1; m+1; \frac{x}{2}) - {}_0F_2(-; m+1, m; \frac{3x}{2})) + Bx^2 ({}_1F_1(m-1; m+1; \frac{x}{2}) - {}_0F_2(-; m+1, m; \frac{3x}{2}))$$

Contoh 3.6.2

Akan diselesaikan persamaan diferensial $(ax^2 + bx)y''(x) + (cx + d)y'(x) + ey(x) = 0$ dimana *a, b, c, d,* dan *e* $\in$ Q serta *a* & *b* $\neq 0$ dengan menggunakan Algoritma Petkovšek.

Langkah 1.

$(ax^2 + bx)y''(x) + (cx + d)y'(x) + ey(x) = 0$ mempunyai titik singular di $x = 0$ dan $x = b/a$ karena $P_0(x) = ax^2 + bx$ dan $P_0(x) = 0$ maka $ax^2 + bx = 0 \rightarrow x(ax - b) = 0$.

Langkah 2.

Selanjutnya akan dicari reduksi orde dari persamaan diferensial yang diketahui yaitu

$$(ax^2 + bx)y''(x) + (cx + d)y'(x) + ey(x) = 0$$

Dapatlah dilihat bahwa persamaan diatas mempunya reduksi orde 1 karena pada persamaan $(ax^2 + bx)y''(x)$ dapat diubah kebentuk $(ax + b)xy''(x)$ maka dari sinilah reduksi orde 1 diperoleh. Maka menurut Algoritma ini untuk persamaan $(cx+d)y'(x)$ keluar dari persamaan tersebut dan nantinya solusi dari persamaan diferensial $(cx+d)y'(x)$ dikalikan dengan semua solusi hypergeometriknya. Persamaan diferensial yang akan dicari solusi hypergeometrik hanya berupa $(ax^2+bx)y''(x)+ey(x)=0$. Sekarang akan dicari solusi hypergeometrik dengan titik singular $x = 0$ maka akan diambil

$$y = A_0x^m + A_1x^{m+1} + A_2x^{m+2} + \ldots + A_nx^{m+n} + \ldots$$

$$y' = mA_0x^{m-1} + (m+1)A_1x^m + (m+2)A_2x^{m+1} + \ldots + (m+n)A_nx^{m+n-1} + \ldots$$

$$y'' = (m-1)mA_0x^{m-2} + m(m+1)A_1x^{m-1} + (m+1)(m+2)A_2x^m + \ldots + (m+n-1)(m+n)A_nx^{m+n-2} + \ldots$$

Kemudian disubstitusikan untuk

$$ax^2y'' = a[(m-1)mA_0x^m + m(m+1)A_1x^{m+1} + (m+1)(m+2)A_2x^{m+2} + \ldots + (m+n-1)(m+n)A_nx^{m+n} + \ldots]$$

$$bxy'' = b[(m-1)mA_0x^{m-1} + m(m+1)A_1x^m + (m+1)(m+2)A_2x^{m+1} + \ldots +$$

$$(m+n-1)(m+n)A_nx^{m+n-1} + \ldots]$$

$$ey = e[A_0x^m + A_1x^{m+1} + A_2x^{m+2} + \ldots + A_nx^{m+n} + \ldots]$$

Maka dari sini diperoleh

$$bm(m-1)A_0x^{m-1}+[(am(m-1)+e)A_0+bm(m+1)A_1]x^m+[(am(m+1)+e)A_1+b(m+1)(m+2)A_2]x^{m+1}+$$

$$.......+[\{a(m+n-2)(m+n-1)+e\}A_{n-1}+b(m+n)(m+n-1)A_n]x^{m+n-1}=0$$

Dapat dilihat bahwa akar-akar persamaan indisialnya adalah m_1 = 0 dan m_1 = 1 ternyata selisih kedua akar tersebut adalah bilangan bulat. Diambil A_1 = 0 dan agar memenuhi formula rekursi berikut;

$$\{a(m+n-2)(m+n-1)+e\}A_{n-1}=-b(m+n)(m+n-1)A_n$$

Atau

$$-b(m+n)(m+n-1)A_n=\{a(m+n-2)(m+n-1)+e\}A_{n-1}$$

Maka $$A_n=-\frac{a(m+n-2)(m+n-1)+e}{b(m+n)(m+n-1)}A_{n-1}$$

Kemudian akan dicari polinomial-polinomial monic dari formula rekursif diatas

$$A_n=-\frac{a(m+n-1-1)(m+n-1)+e}{b(m+n-1+1)(m+n-1)}A_{n-1}$$

$$A_n=-\frac{a(m-1)_n(m)_n+e}{b(m+1)_n(m)_n}A_{n-1}$$

$$A_n=(-1)^n\frac{a^n(m-1)_n(m)_n}{b^n(m+1)_n(m)_n}+(-1)^n\frac{e}{b^n(m+1)_n(m)_n}A_{n-1}$$

$$A_n = \left(-\frac{a}{b}\right)^n \frac{(m-1)_n}{(m+1)_n} + \left(-\frac{e}{b}\right)^n \frac{1}{(m+1)_n (m)_n} A_{n-1}$$

$A_1(n) = (m + n - 2)$, $B_1(n) = (m + n)$, $C_1(n) = 1$, $C_1(n + 1) = 1$ dan $Z_1 = -\frac{a}{b}$ dan

$A_2(n) = 1$, $B_2(n) = (m + n)$, $C_2(n) = (m + n - 1)$, $C_2(n + 1) = 1$ dan $Z_2 = -\frac{e}{b}$.

Maka dari sini diperoleh deret hypergeometrik berupa

$$y_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(-\frac{a}{b}\right)^n \frac{(m-1)_n}{(m+1)_n} + \left(-\frac{e}{b}\right)^n \frac{1}{(m+1)_n (m)_n}\right)x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(m-1)_n}{(m+1)_n}\left(-\frac{a}{b}x\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(m+1)_n (m)_n}\left(-\frac{e}{b}x\right)^n$$

$$= {}_1F_1(m-1; m+1; -\frac{a}{b}x) - {}_0F_2(-; m+1, m; -\frac{e}{b}x)$$

Sekarang akan dicari solusi hypergeometrik dengan akar $\frac{-b}{a}$ maka akan diambil

$$y = A_0 x^{m-\frac{b}{a}} + A_1 x^{m-\frac{b}{a}+1} + A_2 x^{m-\frac{b}{a}+2} + \ldots + A_n x^{m-\frac{b}{a}+n} + \ldots..$$

$$y' = (m-\frac{b}{a})A_0 x^{m-\frac{b}{a}-1} + (m-\frac{b}{a}+1)A_1 x^{m-\frac{b}{a}} + (m-\frac{b}{a}+2)A_2 x^{m-\frac{b}{a}+1} + \ldots\ldots.. +$$

$$(m-\frac{b}{a}+n)A_n x^{m-\frac{b}{a}+n-1} + \ldots$$

$$y'' = (m-\frac{b}{a})(m-\frac{b}{a}-1)A_0 x^{m-\frac{b}{a}-2} + (m-\frac{b}{a}+1)(m-\frac{b}{a})A_1 x^{m-\frac{b}{a}-1} + (m-\frac{b}{a}+2)(m-\frac{b}{a}+1)A_2 x^{m-\frac{b}{a}}$$

$$+ \ldots\ldots + (m-\frac{b}{a}+n)(m-\frac{b}{a}+n-1)A_n x^{m-\frac{b}{a}+n-2} + \ldots$$

Kemudian disubstitusikan untuk

$$ax^2 y'' = a[(m-\frac{b}{a})(m-\frac{b}{a}-1)A_0 x^{m-\frac{b}{a}} + (m-\frac{b}{a}+1)(m-\frac{b}{a})A_1 x^{m-\frac{b}{a}+1} + (m-\frac{b}{a}+2)(m-\frac{b}{a}+1)A_2 x^{m-\frac{b}{a}+2}$$

$$+ \ldots\ldots + (m-\frac{b}{a}+n)(m-\frac{b}{a}+n-1)A_n x^{m-\frac{b}{a}+n} + \ldots]$$

$$bxy'' = b[(m-\frac{b}{a})(m-\frac{b}{a}-1)A_0 x^{m-\frac{b}{a}-1} + (m-\frac{b}{a}+1)(m-\frac{b}{a})A_1 x^{m-\frac{b}{a}} + (m-\frac{b}{a}+2)(m-\frac{b}{a}+1)A_2 x^{m-\frac{b}{a}+1}$$

$$+ \ldots\ldots + (m-\frac{b}{a}+n)(m-\frac{b}{a}+n-1)A_n x^{m-\frac{b}{a}+n-1} + \ldots]$$

$$ey = e[A_0 x^{m-\frac{b}{a}} + A_1 x^{m-\frac{b}{a}+1} + A_2 x^{m-\frac{b}{a}+2} + \ldots + A_n x^{m-\frac{b}{a}+n} + \ldots\ldots]$$

Maka dari sini diperoleh

$$b(m-\frac{b}{a})(m-\frac{b}{a}-1)A_0 x^{m-\frac{b}{a}-1} + [(a(m-\frac{b}{a})(m-\frac{b}{a}-1)+e)A_0 + b((m-\frac{b}{a}+1)(m-\frac{b}{a})A_1)]x^{m-\frac{b}{a}}$$

$$+[(a(m-\frac{b}{a}+1)(m-\frac{b}{a})+e)A_1 + b((m-\frac{b}{a}+2)(m-\frac{b}{a}+1)A_2)]x^{m-\frac{b}{a+1}} + \ldots\ldots\ldots +$$

$$[(a(m-\frac{b}{a}+n)(m-\frac{b}{a}+n-2)+e)A_{n-1}+b(m-\frac{b}{a}+n)(m-\frac{b}{a}+n-1)A_n]x^{m-\frac{b}{a}+n-1}$$

Dapat dilihat bahwa akar-akar persamaan indisialnya adalah $m_1 = b/a$ dan $m_2 = (b/a) + 1$ ternyata selisih kedua akar tersebut adalah bilangan bulat. Diambil $A_1 = 0$ dan agar memenuhi formula rekursi berikut;

$$a(m-\frac{b}{a}+n)(m-\frac{b}{a}+n-2)+e)A_{n-1} = -b(m-\frac{b}{a}+n)(m-\frac{b}{a}+n-1)A_n$$

Atau

$$-b(m-\frac{b}{a}+n)(m-\frac{b}{a}+n-1)A_n = a(m-\frac{b}{a}+n)(m-\frac{b}{a}+n-2)+e)A_{n-1}$$

Maka $$A_n = -\frac{a(m-\frac{b}{a}+n)(m-\frac{b}{a}+n-2)+e}{b(m-\frac{b}{a}+n)(m-\frac{b}{a}+n-1)}A_{n-1}$$

Kemudian akan dicari polinomial-polinomial monic dari formula rekursif diatas

$$A_n = -\frac{a(m-\frac{b}{a}+n-1+1)(m-\frac{b}{a}+n-1-1)+e}{b(m-\frac{b}{a}+n-1+1)(m-\frac{b}{a}+n-1)}A_{n-1}$$

$$A_n = -\frac{a(m-\frac{b}{a}+1)_n(m-\frac{b}{a}-1)_n+e}{b(m-\frac{b}{a}+1)_n(m-\frac{b}{a})_n}A_{n-1}$$

$$A_n = (-1)^n \frac{a^n (m-\frac{b}{a}+1)_n (m-\frac{b}{a}-1)_n + e^n}{b^n (m-\frac{b}{a}+1)_n (m-\frac{b}{a})_n} A_{n-1}$$

$$A_n = (-1)^n \frac{a^n (m-\frac{b}{a}+1)_n (m-\frac{b}{a}-1)_n}{b^n (m-\frac{b}{a}+1)_n (m-\frac{b}{a})_n} + (-1)^n \frac{e^n}{b^n (m-\frac{b}{a}+1)_n (m-\frac{b}{a})_n} A_{n-1}$$

$$A_n = \left(-\frac{a}{b}\right)^n \frac{(m-\frac{b}{a}-1)_n}{(m-\frac{b}{a})_n} + \left(-\frac{e}{b}\right)^n \frac{1}{(m-\frac{b}{a}+1)_n (m-\frac{b}{a})_n} A_{n-1}$$

$A_1(n) = \left(m-\frac{b}{a}-2\right)$, $B_1(n) = \left(m-\frac{b}{a}-1\right)$, $C_1(n) = 1$, $C_1(n+1) = 1$ dan $Z_1 = -\frac{a}{b}$ dan

$A_2(n) = 1$, $B_2(n) = \left(m-\frac{b}{a}\right)$, $C_2(n) = \left(m-\frac{b}{a}-1\right)$, $C_2(n+1) = 1$ dan $Z_2 = -\frac{e}{b}$.

Maka dari sini diperoleh deret hypergeometrik berupa

$$y_2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(-\frac{a}{b}\right)^n \frac{(m-\frac{b}{a}-1)_n}{(m-\frac{b}{a})_n} + \left(-\frac{e}{b}\right)^n \frac{1}{(m-\frac{b}{a}+1)_n (m-\frac{b}{a})_n}\right)x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(-\frac{a}{b}\right)^n \frac{(m-\frac{b}{a}-1)_n}{(m-\frac{b}{a})_n}\right)x^n + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(-\frac{e}{b}\right)^n \frac{1}{(m-\frac{b}{a}+1)_n (m-\frac{b}{a})_n}\right)x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(m - \frac{b}{a} - 1)_n}{(m - \frac{b}{a})_n} \right) \left(-\frac{a}{b} x \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(m - \frac{b}{a} + 1)_n (m - \frac{b}{a})_n} \right) \left(-\frac{e}{b} x \right)^n$$

$$= {}_1F_1(m - \frac{b}{a} - 1; m - \frac{b}{a}; -\frac{a}{b} x) - {}_0F_2(-; m - \frac{b}{a} + 1, m - \frac{b}{a}; -\frac{e}{b} x)$$

Menurut algorima ini bahwa

$$= x^{-\frac{b}{a}} \left({}_1F_1(m - \frac{b}{a} - 1; m - \frac{b}{a}; -\frac{a}{b} x) - {}_0F_2(-; m - \frac{b}{a} + 1, m - \frac{b}{a}; -\frac{e}{b} x) \right)$$

Selanjutnya akan dicari fungsi dari solusi $(cx + d)y'(x) = 0$ dapat dengan mudah solusi itu dicari adalah

$$y'(x) = \frac{0}{cx + d} = 0$$

$$y(x) = \int 0 dx = c_1 \rightarrow y(x) = c_1$$

Maka diperoleh solusi menurut algoritma petkovšek

$$c_1 y(x) = c_1 (c_2 y_1(x) + c_3 y_2(x))$$

$$= c_1 c_2 ({}_1F_1(m - 1; m + 1; -\frac{a}{b} x) - {}_0F_2(-; m + 1, m; -\frac{e}{b} x)) +$$

$$c_1 c_3 x^{-\frac{b}{a}} \left({}_1F_1(m - \frac{b}{a} - 1; m - \frac{b}{a}; -\frac{a}{b} x) - {}_0F_2(-; m - \frac{b}{a} + 1, m - \frac{b}{a}; -\frac{e}{b} x) \right))$$

$$= A\left({}_1F_1(m-1; m+1; -\frac{a}{b}x) - {}_0F_2(-; m+1, m; -\frac{e}{b}x)\right) +$$

$$Bx^{-\frac{b}{a}}\left({}_1F_1(m-\frac{b}{a}-1; m-\frac{b}{a}; -\frac{a}{b}x) - {}_0F_2(-; m-\frac{b}{a}+1, m-\frac{b}{a}; -\frac{e}{b}x)\right))$$

BAB IV

KESIMPULAN

Algoritma Petkovšek merupakan algoritma yang singkat dalam mencari semua solusi hypergeometrik pada persamaan diferensial yang mempunyai bentuk khusus dan pada tingkat yang lebih rumit. Oleh karena itu, Algoritma ini menjadi unik. Algoritma Petkovšek hanya menggunakan dua langkah yaitu mencari akar serta titik singular di $x = 0$ dan reduksi orde. Khususnya dalam tugas akhir ini diterapkan pada persamaan diferensial orde dua dengan koefisien polynomial.

Algoritma Petkovšek mempunyai kekurangan dan kelebihan dalam menemukan semua solusi hypergeometrik pada persamaan diferensial. Kekurangan dari algoritma ini adalah hanya bisa diterapkan untuk persamaan diferensial yang mempunyai bentuk khusus seperti $\sum_{i=0}^{r}(\gamma_i x+\varepsilon_i)x^i y^{(i)}(x)=0$ sehingga tidak bisa diterapkan untuk sebarang persamaan diferensial. Kelebihan dari algoritma ini yang signifikan adalah pada reduksi orde, yang ini tidak dimiliki oleh algoritma HYPER. Fungsi dari reduksi orde itu sendiri dapat mempermudah dalam pencarian solusi hypergeometrik.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Anton, howard.1991. **Aljabar Linear Elemeneter**. Jakarta : ERLANGGA

[2]. Ayres, Frank, JR, Ph. D and Ault, JC, M.Sc.1999. **PERSAMAAN DIFERENSIAL dalam satuan SI Metric**. Jakarta : ERLANGGA

[3]. J. Leon, Steven. 2001. **ALJABAR LINEAR DAN APLIKASINYA.** Jakarta : ERLANGGA. (Edisi 5).

[4]. Salvy, Bruno and M. Petkovšek. 1994. **Finding All Hypergeometric Solutions of Linear Differential Equations**. From http://www.google.com, (search).

[5]. Waluya, S.B. 2006. **PERSAMAAN DIFERENSIAL**. Yogyakarta : Graha Ilmu