

# JFMA FUNGSI TERDEKATI DAN SIFAT-SIFATNYA

*by* Abdul Aziz

---

**Submission date:** 06-May-2019 09:30AM (UTC+0700)

**Submission ID:** 1125412146

**File name:** 6\_-\_Jurnal\_aziz.docx (248.02K)

**Word count:** 1122

**Character count:** 6356

---

# FUNGSI TERDEKATI DAN SIFAT-SIFATNYA

Abdul Aziz<sup>1</sup>, Susilo Hariyanto<sup>2</sup>, Y.D Sumanto<sup>3</sup>, Solikhin<sup>4</sup>

<sup>1,2,3,4</sup>Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Diponegoro  
Jl. Prof. Soedarto, SH, Tembalang Semarang, Indonesia 50275  
Email: <sup>1</sup>abdulaziz01@yahoo.com

**Abstract.** In this paper, we have defined an approachable function using a simple function on a compact sets. Furthermore the simple properties of the function was examined and it was obtained that measurable function, continuous function, and bounded function are approachable function along the function space is a linier space.

**Keywords:** Simple function, Measurable function, Tag partition

**Abstrak.** Pada artikel ini, didefinisikan fungsi terdekati menggunakan suatu fungsi sederhana pada himpunan kompak. Selanjutnya dikaji sifat – sifat sederhana dari fungsi tersebut dan diperoleh bahwa fungsi terukur, fungsi kontinu, dan fungsi terbatas semuanya merupakan fungsi terdekati serta ruang fungsi tersebut merupakan ruang linier.

**Kata kunci:** Fungsi sederhana, fungsi terukur, partisi tanda

## I. PENDAHULUAN

Himpunan tak terhingga lebih sulit ditangani dari pada himpunan terhingga. Namun ada himpunan tak terhingga yang mempunyai sifat seperti himpunan terhingga, yaitu himpunan kompak. Himpunan kompak mempunyai peranan penting dalam domain suatu fungsi. Himpunan  $A \subseteq \square$  dikatakan kompak jika himpunan  $A$  tertutup dan terbatas [1]. Selanjutnya himpunan kompak juga digeneralisasi dalam ruang Euclide  $\square^n$  [2]. Misalkan  $S \subseteq \square^m$  adalah himpunan kompak,  $\delta$  adalah fungsi positif pada  $S$ ,  $P_\delta$  adalah  $\{(I_k, t_k)\}_{k=1}^n$  yang memenuhi  $t_k \in S$ , dan  $\{I_k\}$  adalah himpunan sel – sel yang tidak saling tumpang tindih dan  $t_k \in I_k \subseteq N(t_k, \delta(t_k))$  dengan  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ .  $P_\delta$  disebut partisi bertanda  $\delta$  – fine terkait pada  $S$  [2] jika  $S \subseteq \bigcup_{k=1}^n I_k$ . Volume dari  $I = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$  adalah

$\mu(I) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$  [3]. Dengan menggunakan volume tersebut, himpunan  $S \subseteq \square^m$  dikatakan terukur  $-\delta$  jika untuk setiap  $\varepsilon > 0$ , terdapat fungsi positif  $\delta$  sehingga jika  $P_\delta = \{(I_k, t_k)\}_{k=1}^n$  dan  $Q_\delta = \{(J_i, r_i)\}_{i=1}^v$  berturut – turut merupakan partisi bertanda  $\delta$  – fine terkait pada  $S$  dan partisi bertanda  $\delta$  – fine terkait pada  $R^m - S$  maka  $\sum_k \sum_j \mu(I_k \cap J_j) < \varepsilon$  [4].

Selanjutnya, ukuran luar  $S$  diberikan dengan  $\mu(S) = \inf_{\delta} \sup_{P_\delta} \sum_{k=1}^n \mu(I_k)$ .

Pada artikel ini, penulis menggunakan fungsi sederhana -  $P_\delta$  untuk mendefinisikan fungsi terdekati (*approachable function*) pada himpunan kompak dan mengkaji sifat – sifatnya.

---

---

## II. FUNGSI TERDEKATI DAN SIFAT – SIFATNYA

Sebelum membahas fungsi terdekati pada himpunan kompak, terlebih dahulu didefinisikan fungsi sederhana –  $P_\delta$  dan fungsi terukur –  $\delta$ .

**Definisi 2.1. [3]** Misalkan  $S \subseteq \mathbb{R}^m$  adalah himpunan kompak,  $\delta$  adalah fungsi positif pada  $S$ , dan  $P_\delta = \{(I_k, t_k)\}_{k=1}^n$  adalah partisi  $\delta$  – fine terkait  $S$ . Fungsi  $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$  disebut fungsi sederhana –  $P_\delta$  pada  $S$  jika terdapat  $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  sedemikian sehingga

$$\varphi = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{I_k \cap S}.$$

**Definisi 2.2.** Misalkan  $S \subseteq \mathbb{R}^m$  adalah himpunan terukur -  $\delta$ . Fungsi  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  disebut fungsi terukur –  $\delta$  jika untuk setiap  $I \subseteq \mathbb{R}$  berlaku  $f^{-1}(I) = \{x \in S \mid f(x) \in I\}$  adalah himpunan terukur -  $\delta$ .

Selanjutnya dibahas fungsi baru yang dinamakan fungsi terdekati pada himpunan kompak beserta sifat – sifatnya.

**Definisi 2.3.** Misalkan  $S \subseteq \mathbb{R}^m$  adalah himpunan kompak. Fungsi  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  disebut fungsi terdekati (*approachable function*) jika untuk setiap  $\varepsilon > 0$ , terdapat fungsi positif  $\delta$  pada  $S$  sedemikian sehingga jika  $P_\delta = \{(I_k, t_k)\}_{k=1}^n$  adalah partisi bertanda  $\delta$  – fine terkait  $S$  maka terdapat fungsi sederhana –  $P_\delta$   $\varphi$  pada  $S$  sedemikian sehingga  $|\varphi(x) - f(x)| < \varepsilon$ .

11

Dari definisi di atas, dapat diperoleh beberapa sifat sebagai berikut.

**Teorema 2.4.** Misalkan  $S \subseteq \mathbb{R}^m$  adalah himpunan kompak. Jika fungsi  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  terukur –  $\delta$  maka  $f$  adalah fungsi terdekati.

**Bukti:**

Pertama – tama ambil sebarang  $\varepsilon > 0$ . Selanjutnya dengan mengambil sebarang  $y \in \mathbb{R}$ ,

terdapat  $A_y \subseteq \left(y - \frac{\varepsilon}{2}, y + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ . Karena  $f$  terukur –  $\delta$  maka  $f^{-1}(A_y)$  adalah himpunan

terukur –  $\delta$ . Selanjutnya jelas  $S \subseteq \bigcup_{y \in f(S)} f^{-1}(A_y)$ . Karena  $S$  kompak maka terdapat

$y_1, y_2, \dots, y_n \in S$  sehingga  $S \subseteq \bigcup_{k=1}^n f^{-1}(A_{y_k})$ . Selanjutnya untuk setiap  $f^{-1}(A_{y_k})$ ,

terdapat partisi bertanda  $\delta$  – fine terkait  $f^{-1}(A_{y_k})$   $P_{\delta_k} = \{(I_{k_i}, t_{k_i})\}_{i=1}^{m_k}$  dengan  $k = 1, 2, 3, \dots,$

$r$ . Dengan memilih  $c_i = f(t_{k_i})$  dengan  $t_{k_i} \in I_{k_i}$  maka untuk setiap  $x \in S$ , terdapat

$I_{k_i} \subseteq f^{-1}(A_{y_k})$  sehingga  $x \in I_{k_i} \subseteq f^{-1}(A_{y_k})$ . Dari sini berakibat

---

$f(x) \in A_{y_k} \subseteq \left( y_k - \frac{\varepsilon}{2}, y_k + \frac{\varepsilon}{2} \right)$ . Oleh karena  $x, t_{k_i} \in I_{k_i}$  maka  $|f(x) - c_i| = |f(x) - f(t_{k_i})| < \varepsilon$ .

Selanjutnya dengan memilih  $\delta = \min \{ \delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_r \}$  maka untuk  $P_\delta = \left\{ (I_j, t_j) \right\}_{j=1}^n$  adalah partisi bertanda  $\delta$ -fine terkait  $S$ . Dari sini berakibat untuk setiap  $t_j$ , terdapat  $A_k$  sehingga  $t_j \in A_k$ . Misalkan  $\varphi = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{I_j \cap S}$  dengan  $c_j = f(t_j)$ . Selanjutnya untuk setiap

$x \in S$ ,  $x \in f^{-1}(A_k)$ , sehingga  $f(x) \in A_k \subseteq \left( y_k - \frac{\varepsilon}{2}, y_k + \frac{\varepsilon}{2} \right)$ . Di sisi lain, untuk setiap  $x \in S$ , terdapat  $j$  sehingga  $x, t_j \in I_j$ . Padahal untuk setiap  $I_j$ , terdapat  $k$  sehingga  $I_j \subseteq f^{-1}(A_k)$ . Selanjutnya oleh karena  $x, t_j \in I_j$  maka  $f(x), f(t_j) \in A_k \subseteq \left( y_k - \frac{\varepsilon}{2}, y_k + \frac{\varepsilon}{2} \right)$ . Sehingga

$$|f(x) - c_j| = |f(x) - f(t_j)| < \varepsilon.$$

**Teorema 2.5.** Misalkan  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  adalah himpunan kompak. Jika fungsi  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  dan fungsi  $g : S \rightarrow \mathbb{R}$  masing-masing adalah fungsi terdekati maka  $f + g$  adalah fungsi terdekati.

**Bukti:**

Karena  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  adalah fungsi terdekati maka untuk setiap  $\varepsilon > 0$ , terdapat fungsi positif  $\delta_1$  pada  $S$  sehingga jika  $P_{\delta_1} = \left\{ (I_k, t_k) \right\}_{k=1}^n$  adalah partisi bertanda  $\delta_1$ -fine terkait  $S$ , terdapat fungsi sederhana  $\varphi$  pada  $S$  sehingga  $|\varphi(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ , untuk semua  $x \in S$ .

Karena  $g : S \rightarrow \mathbb{R}$  adalah fungsi terdekati maka untuk setiap  $\varepsilon > 0$ , terdapat fungsi positif  $\delta_2$  pada  $S$  sehingga jika  $P_{\delta_2} = \left\{ (I_k, t_k) \right\}_{k=1}^n$  adalah partisi bertanda  $\delta_2$ -fine terkait  $S$ , terdapat fungsi sederhana  $\phi$  pada  $S$  sehingga  $|\phi(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ , untuk semua  $x \in S$ .

Selanjutnya dengan mengambil sebarang  $\varepsilon > 0$ . Pilih  $\delta = \min \{ \delta_1, \delta_2 \}$  sehingga untuk  $P = \left\{ (I_k, t_k) \right\}_{k=1}^n$  adalah partisi bertanda  $\delta$ -fine terkait  $S$  maka terdapat fungsi sederhana  $\varphi + \phi$  pada  $S$  sehingga untuk semua  $x \in S$ , berlaku  $|\varphi(x) + \phi(x) - (f(x) + g(x))| \leq |\varphi(x) - f(x)| + |\phi(x) - g(x)| < \varepsilon$ .

**Teorema 2.6.** Misalkan  $S \subseteq \mathbb{R}^m$  adalah himpunan kompak. Jika fungsi  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  adalah fungsi terdekati dan  $k$  adalah bilangan real maka  $kf$  adalah fungsi terdekati.

**Bukti:**

Karena  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  adalah fungsi terdekati maka untuk setiap  $\frac{\varepsilon}{|k|+1} > 0$  dengan  $k$  adalah bilangan real, terdapat fungsi positif  $\delta$  pada  $S$  sehingga jika  $P_\delta = \{(I_k, t_k)\}_{k=1}^n$  adalah partisi bertanda  $\delta$ -fine terkait  $S$ , terdapat fungsi sederhana  $\varphi$  pada  $S$  sedemikian sehingga  $|\varphi(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{|k|+1}$ , untuk semua  $x \in S$ . Selanjutnya ambil sebarang  $\varepsilon > 0$ , dengan mengambil  $\delta$  yang sama dengan  $\delta$  di atas maka untuk  $P_\delta = \{(I_k, t_k)\}_{k=1}^n$  adalah partisi bertanda  $\delta$ -fine terkait  $S$ , terdapat fungsi sederhana  $\varphi$  pada  $S$  sedemikian sehingga untuk semua  $x \in S$  berlaku

$$\begin{aligned} |k\varphi(x) - kf(x)| &= |k| |\varphi(x) - f(x)| \\ &< |k| \left( \frac{\varepsilon}{|k|+1} \right) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

**Teorema 2.7.** Misalkan  $S \subseteq \mathbb{R}^m$  adalah himpunan kompak. Jika fungsi  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  kontinu pada himpunan kompak  $S$  maka  $f$  adalah fungsi terdekati.

**Bukti:**

Karena fungsi  $f$  kontinu pada himpunan kompak  $S$  maka  $f$  kontinu seragam pada  $S$ . Dengan kata lain, untuk setiap  $\varepsilon > 0$ , terdapat  $\delta > 0$  sehingga jika  $x, y \in S$  dengan  $\|x - y\| < \frac{\delta}{2}$  maka  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .

Dengan mengambil sebarang  $\varepsilon > 0$ , pilih  $\frac{\delta}{2}$  dengan  $\delta$  sama dengan  $\delta$  di atas, maka terdapat partisi  $\delta$ -bertanda  $\delta$ -fine terkait  $S$  yaitu  $P_{\frac{\delta}{2}} = \{(I_k, t_k)\}_{k=1}^n$ . Selanjutnya misalkan  $\varphi = \sum c_i \chi_{I_k \cap S}$  dengan  $c_i = f(t_i)$ . Dengan mengambil sebarang  $x \in S$ , terdapat  $I_k$  sehingga  $x \in I_k \cap S \subseteq \left(t_k - \frac{\delta}{2}, t_k + \frac{\delta}{2}\right)$ . Dari sini diperoleh  $\varphi(x) = c_k = f(t_k)$ .

Oleh karena  $t_k, x \in I_k \cap S$  maka  $\|x - t_k\| < \delta$ . Sehingga  $|f(x) - \varphi(x)| = |f(x) - f(t_k)| < \varepsilon$ .

**Teorema 2.8.** Misalkan  $S \subseteq \mathbb{R}^m$  adalah himpunan kompak. Jika fungsi  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  terbatas maka  $f$  adalah fungsi terdekati.

**Bukti:**

Karena  $f$  terbatas maka terdapat bilangan real positif  $M$  sehingga  $-M \leq f \leq M$ . Dengan mengambil sebarang  $\varepsilon > 0$ , menurut sifat Archimedes terdapat bilangan asli  $n$  sehingga  $n > \frac{2M}{\varepsilon}$ . Selanjutnya bagi interval  $[-M, M]$  menjadi sebanyak  $n$  sub interval

yaitu  $I_1, I_2, \dots, I_n$  yang panjangnya masing - masing adalah  $\frac{2M}{n}$ . Oleh karena

$-M \leq f \leq M$  maka  $S \subseteq f^{-1}(-M, M) \subseteq \bigcup_{k=1}^n f^{-1}(I_k)$  dengan  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ .

Selanjutnya karena  $S$  kompak maka  $\overline{f^{-1}(I_k)}$  juga kompak untuk semua  $k$ . Dari sini berakibat untuk setiap  $k$ , terdapat  $\delta_k > 0$  sehingga  $f^{-1}(I_k) \subseteq N(t_k, \delta_k)$ . Selanjutnya pilih  $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_n\}$ . Oleh karena  $\overline{f^{-1}(I_k)}$  kompak maka terdapat partisi

bertanda  $\delta$  - fine terkait  $f^{-1}(I_k)$  yaitu  $P_{J_k} = \left\{ (J_{k_i}, t_{k_i}) \right\}_{i=1}^{m_k}$ . Misalkan

$\varphi = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{m_k} c_{k_i} \chi_{J_{k_i} \cap S}$ , dengan  $c_{k_i} = f(t_{k_i})$ . Dengan mengambil sebarang  $x \in S$ ,

terdapat  $J_{k_i}$  sehingga  $x, t_{k_i} \in J_{k_i} \subseteq \overline{f^{-1}(I_k)}$ . Dari sini berakibat  $f(x), f(t_{k_i}) \in I_k$ ,

sehingga  $|f(x) - \varphi(x)| = |f(x) - f(t_{k_i})| < |I_k| = \frac{2M}{n} < \varepsilon$ .

### III. PENUTUP

Berdasarkan pembahasan di atas, diperoleh kesimpulan bahwa fungsi terdekati pada himpunan kompak dapat didefinisikan menggunakan fungsi sederhana -  $P_\delta$ . Selanjutnya, dari definisi di atas diperoleh beberapa sifat diantaranya fungsi terukur, fungsi kontinu, dan fungsi terbatas semuanya merupakan fungsi terdekati dan ruang fungsi tersebut merupakan ruang linier.

### REFERENSI

- [1] Bartle, R. G. & Sherbert, D. R., (1992). Introduction to Real Analysis second edition. John Wiley & Sons (SEA), Singapore.
- [2] Bartle, R. G. (1976). The Elements of Real Analysis second edition. John Wiley & Sons (SEA), Canada.

- 
- [3] Fremlin, D.H. (2000). Measure Theory (Volume 1). Torres Fremlin, England.
- [4] Pfeffer, W.F., (1993). The Riemann Approach to Integration. Cambridge University Press, New York.
- [5] Kopp, E. & Capinski, M. (2004). Measure, Integral and Probability second edition. Springer-Verlag, London.
-

---

---

# JFMA FUNGSI TERDEKATI DAN SIFAT-SIFATNYA

## ORIGINALITY REPORT

12%

SIMILARITY INDEX

11%

INTERNET SOURCES

6%

PUBLICATIONS

3%

STUDENT PAPERS

## PRIMARY SOURCES

1	<a href="https://fr.scribd.com">fr.scribd.com</a> Internet Source	3%
2	Cece Kustiawan. "KEKONTINUAN FUNGSI PADA RUANG METRIK", Infinity Journal, 2013 Publication	1%
3	Theodore Eisenberg. "On divisibility by 7 and other low valued primes", International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 7/1/2000 Publication	1%
4	<a href="https://ar.scribd.com">ar.scribd.com</a> Internet Source	1%
5	<a href="https://docobook.com">docobook.com</a> Internet Source	1%
6	Submitted to Universitas Diponegoro Student Paper	1%
7	<a href="https://docplayer.info">docplayer.info</a> Internet Source	1%

Submitted to Oxford Brookes University

8	Student Paper	1%
9	<a href="https://ml.scribd.com">ml.scribd.com</a> Internet Source	1%
10	"Inhalte und Maße", Springer-Lehrbuch, 2008 Publication	1%
11	<a href="http://staff.uny.ac.id">staff.uny.ac.id</a> Internet Source	1%

Exclude quotes  On

Exclude bibliography  On

Exclude matches  < 3 words