



ISBN : 978-979-097-402-9

# *Prosiding* ***SNMPM UNDIP 2015***

***SEMINAR NASIONAL MATEMATIKA DAN PENDIDIKAN MATEMATIKA  
UNIVERSITAS DIPONEGORO TAHUN 2015***

***Semarang, 12 September 2015***

***Gedung Prof. Soedarto, SH Kampus UNDIP  
Tembalang, Semarang***



**Diselenggarakan oleh :  
JURUSAN MATEMATIKA, FAKULTAS SAINS DAN MATEMATIKA  
UNIVERSITAS DIPONEGORO**

**Prosiding Seminar Nasional  
Matematika dan Pendidikan Matematika  
Universitas Diponegoro Tahun 2015  
(SNMPM UNDIP 2015)**

Tim Reviewer SNMPM UNDIP 2015 :  
(Kerja sama Tim Reviewer SNMPM UNDIP 2015 dan Dewan Editor Jurnal Matematika)

Prof. Dr. Roberd Saragih, MT (ITB)  
Prof. Dr. Budi Nurani, M.Si (UNPAD)  
Prof. Drs. St. Budi Waluyo, M.Si, Pd.D (UNNES)  
Dr. Ch. Rini I. (UGM)  
Dr. Idha Sihwaningrum (UNSOED)  
Prof. Dr. Erna A. (ITS)  
Prof. Dr. Mustafid (UNDIP)  
Dr. Imam Marzuki Shofi (UIN Jakarta)  
Farikhin, Ph.D (UNDIP)  
Dr. Susilo Hariyanto (UNDIP)  
Dr. Sunarsih (UNDIP)  
Bayu Surarso, Ph.D (UNDIP)  
Suryoto, M.Si (UNDIP)  
Kartono, M.Si (UNDIP)  
YD. Sumanto, M.Si (UNDIP)

Tim Editor :  
Nikken Prima Puspita, S.Si, M.Sc  
Sutrisno, S.Si, M.Sc  
Siti Khabibah, S.Si, M.Sc  
Lucia Ratnasari, S.Si, M.Si

ISBN  
978-979-097-402-9

**Jurusan Matematika  
Fakultas Sains dan Matematika  
Universitas Diponegoro**

Copyright © 2015  
Hak Cipta Dilindungi Undang-undang  
All Right Reserved

## KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan atas kehadiran Tuhan Yang Maha Esa sehingga Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Matematika Universitas Diponegoro dapat menyelenggarakan Seminar Nasional bertajuk Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika Universitas Diponegoro 2015 (SNMPM UNDIP 2015) dan menerbitkan prosiding sebagai media publikasi makalah-makalah yang dipresentasikan pada seminar tersebut. Tentunya kegiatan tersebut dan terbitnya prosiding ini dapat terselenggara atas kerjasama yang baik diantara panitia, peserta dan seluruh pihak yang terkait, untuk itu panitia menyampaikan terima kasih yang sebanyak-banyaknya kepada semua pihak yang telah mendukung dan berpartisipasi sehingga kegiatan ini dapat terlaksana dengan baik.

Seminar dan prosiding ini kami selenggarakan dan kami terbitkan guna memfasilitasi para Dosen, Guru, peneliti dan pemerhati matematika dan pendidikan matematika untuk mempresentasikan dan mempublikasikan hasil penelitian atau kajian serta berdiskusi membahas tentang fenomena-fenomena aktual yang berkaitan dengan Matematika dan Pendidikan Matematika. Selain itu juga kami berharap seminar tersebut dan prosiding ini dapat menjadi tempat bertemunya para akademisi dan para pelaku industri sehingga hasil-hasil penelitian atau kajian para akademisi dapat dipublikasikan dan diterapkan di dunia industri ataupun dunia pendidikan guna memperkuat peran ilmu Matematika dan Pendidikan Matematika dalam menopang kemajuan teknologi dan karakter bangsa Indonesia.

Semoga acara seminar tersebut dan prosiding ini dapat kami adakan dan terbitkan secara berkelanjutan guna memfasilitasi pengembangan ilmu Matematika, Pendidikan Matematika serta aplikasinya. Untuk itu, kritik dan saran dari para peserta atau para pembaca akan kami terima dengan senang hati guna perbaikan pada kegiatan-kegiatan semacam pada masa yang akan datang.

*Semarang, November 2015*  
*Panitia SNMPM UNDIP 2015*

## DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL  
KATA PENGANTAR  
DAFTAR ISI

### **Bidang Analisis, Aljabar dan Kombinatorik**

SEMIRING MATRIKS FUZZY PERSEGI  
Suroto, Ari Wardayani, Achmad Abdurrazaq ..... 1

PERTIDAKSAMAAN NORMA EUCLID DARI MATRIKS RATAAN ARITMATIK, MATRIKS RATAAN  
GEOMETRIK, MATRIKS RATAAN HARMONIK  
Zaky Nurzamzami, Lucia Ratnasari, YD Sumanto ..... 5

BEBERAPA BARISAN DI RUANG ATSUJI YANG MEMPUNYAI TITIK CLUSTER  
Suarsih Utama dan Nora Hariadi ..... 10

ANALISIS KONVERGENSI DARI KOMPUTASI INVERS MATRIKS CENTROSMMETRIC  
Nur Khasanah, Farikhin, Bayu Surarso ..... 15

BILANGAN KROMATIK-b DAN KONTINU-b PADA GRAF VERTEX SWITCHING DAN GRAF SPLIT  
Rahmatika Fajar Safitri, R. Heri SU., Siti Khabibah ..... 21

APLIKASI TEORI KEKONGRUENAN UNTUK MENGKONVERSIKAN HARI SAPTAWARA DAN  
PANCAWARA PADA KALENDER MASEHI  
Arindia Dwi Kurnia, Lely Kartika Jauhara, Agus Sugdanha, Agung Prabowo, Agustini Tripena Br. Sb. 20

APLIKASI TEORI KEKONGRUENAN UNTUK MENENTUKAN HARI SAPTAWARA DAN  
PANCAWARA PADA TANGGAL HIJRIYAH TERTENTU  
Irfan Nurhidayat, Viqi Nursekha, Agung Prabowo, Agus Sugandha ..... 25

### **Bidang Matematika Terapan**

APLIKASI METODE DEKOMPOSISI LU DI BIDANG GEOTHERMAL  
Widowati, Ririn Sulpiani ..... 29

ALGORITMA FUZZY KERNEL C-MEANS UNTUK MENENTUKAN TINGKAT KEGANASAN  
ASTROSITOMA (KANKER OTAK)  
Zuherman Rustam dan Aini Suri Talita ..... 35

PENERAPAN PROGRAM LINIER FUZZY TIDAK PENUH UNTUK OPTIMASI PRODUKSI JENANG  
DAN MINO PADA HOME INDUSTRY "LABA-LABA"  
Rizky Hdanayani, Bambang Irawanto ..... 41

MODEL OPTIMASI ECONOMIC ORDER QUANTITY (EOQ) DENGAN SISTEM PARSIAL BACKORDER DAN ALL UNIT DISCOUNT Achmad Robeth Taufiqiy, Nikken Prima P., Farikhin .....	46
STRATEGI KONTROL OPTIMAL DAN SOLUSI NUMERIK UNTUK EPIDEMIK DBD PADA POPULASI MANUSIA DAN VEKTOR Titi Indah Lestari, Kartono, R. Heru Tjahjana .....	52
ESTIMASI PARAMETER DALAM MODEL DEPRESIASI HARGA UNTUK KOMODITI KAKAO DAN MOBIL Zani Anjani Rafsanjani, Farikhin, Siti Khabibah .....	57
MODEL DINAMIK PENYEBARAN PENYAKIT LEPTOSPIROSIS Olivia P., Widowati, Suryoto .....	63
MODEL DINAMIK DENGAN KONTROL PADA POPULASI PENDERITA DIABETES MELITUS Anindita Henindya P., Kartono, Sunarsih .....	70
FUNGSI POTENSIAL LISTRIK PADA PERMUKAAN BUMI DENGAN BEBERAPA LAPISAN Aini Suri Talita dan Sri Mardiyati .....	75
PERANAN ILMU MATEMATIKA DALAM PENGEMBANGAN TURBIN ANGIN SEBAGAI ENERGI ALTERNATIF Akhmad Khimly, Ronny Susetyoko, Nur Fadlilah Husndananti, Iffan Rosyadi Ali, Rio Adi Kristian, Tio Rizkianto Widcaksono .....	81
MODEL DINAMIK DISKRIT PRODUKSI SEL DARAH MERAH Dyah, Nurshofia Sani, Mashuri, Rina Reorita .....	87
UJI SEFFICIENT FOLLOW-UP UNTUK ANALISIS CURE RATE PENDERITA KANKER PAYUDARA Nurkaromah Dwidayati .....	93
SOLUSI DARI MODEL DINAMIK INTERAKSI PERTUMBUHAN IKAN BANDENG DAN UDANG WINDU Ririn, Widowati, Sapto, Sunarsih .....	99
ANALISIS KESTABILAN MODEL PENGHILANGAN POLUTAN ANORGANIK DENGAN MENGUNAKAN JAMUR Lilin, Widowati, Sapto .....	104
PEMODELAN PRODUK DOMESTIK REGIONAL BRUTO (PDRB) SEKTOR INDUSTRI DENGAN PENDEKATAN SPASIAL DATA PANEL Abdul karim dan Rochdi Wasono .....	109

UPAH MINIMUM DAN TENAGA KERJA REMAJA REMAJA: PENDEKATAN SPASIAL PANEL Ribut Nurul Tri Wahyuni .....	113
PEMILIHAN PORTOFOLIO OPTIMAL UNTUK PERUSAHAAN ASURANSI DENGAN LOSS AVERSION Kornelia Paskatria C, R. Heru Tjahjana, Farikhin .....	119
MODEL OPTIMASI ECONOMIC ORDER QUANTITY (EOQ) UNTUK BARANG YANG MENGALAMI PENYUSUTAN Warno Yulistio, Siti Khabibah, Djuwandi .....	122
<b>Bidang Statistika</b>	
MODEL VECTOR ERROR CORRECTION PADA EMISI CO2 Anugerah Karta Monika .....	125
PEMODELAN PASANG SURUT AIR LAUT DI KOTA SEMARANG DENGAN PENDEKATAN REGRESI NONPARAMETRIK POLINOMIAL LOKAL KERNEL Tiani Wahyu Utami dan Indah Manfaati Nur .....	133
ESTIMASI PENGELUARAN PER KAPITA DI KABUPATEN REMBANG DENGAN PENDEKATAN SAE- NONPARAMETRIK Iswahyudi Suprayitno dan Moh. Darsyah .....	140
PENGARUH HUMAN CAPITAL TERHADAP PERTUMBUHAN EKONOMI INDONESIA Andi Kurniawan .....	149
OPTIMISASI PORTOFOLIO MEAN-VARIANCE ASET- LIABILITAS DENGAN RATAAN DAN VOLATILITAS TAK KONSTAN Sukono, Sudradjat Supian, Dwi Susanti .....	155
<b>Bidang Pendidikan Matematika</b>	
STRATEGI PEMBELAJARAN UNTUK MENGEMBANGKAN DISPOSISI MATEMATIS PADA PEMBELAJARAN MATEMATIKA Nia Rachmawati, Sugeng Sutiarso .....	163
UPAYA MENINGKATKAN HASIL BELAJAR MATEMATIKA MATERI PECAHAN SEDERHANAMELALUI MEDIA KARTU PECAHAN DI KELAS III SD NEGERI 1 KARANGBOYO Anita Dewi Utami .....	170
PENGUNAAN SCAFFOLDING DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA Novio Dinisa Putri, Sugeng Sutiarso .....	176

PENGEMBANGAN BAHAN AJAR BERBASIS WOLFRAM MATHEMATICA PADA MATA KULIAH ALJABAR LINIER Aryo Andri Nugroho, Lukman Harun, Noviana Dini Rahmawati .....	186
PEMBELAJARAN CREATIVE PROBLEM SOLVING (CPS) TERHADAP KEMAMPUAN BERPIKIR KRITIS DAN DISPOSISI MATEMATIS SISWA Dian Novitasari dan Ratu Sarah Fauziah Iskandar .....	191
PENGEMBANGAN BAHAN AJAR SEGIEMPAT BERBASIS PENDEKATAN SAINTIFIK PADA MATAKULIAH KAPITA SELEKTA MATEMATIKA SMP Usep Kosasih, Asep Darodjat dan Sidiq Aulia Rahman .....	201
EKSPERIMENTASI MODEL PEMBELAJARAN INQUIRY LEARNING DAN DISCOVERY LEARNING TERHADAP KEMAMPUAN KOMUNIKASI MATEMATIS PADA MATERI BANGUN RUANG SISI DATAR DITINJAU DARI KECERDASAN SPASIAL SISWA SMP NEGERI SE-KOTA SURAKARTA TAHUN PELAJARAN 2014 / 2015 Abdul Aziz, Budiyono dan Sri Subanti .....	209
SELF ESTEEM, KREATIVITAS, DAN PENDIDIKAN MATEMATIKA REALISTIK Julianti Mustika, Sri Hastuti Noer .....	211
PEMBELAJARAN MATEMATIKA DENGAN ALAT PERAGA LINTASAN BERLOGIKA PADA MATERI LOGIKA MATEMATIKA Lestiana .....	220
EFEKTIFITAS PENGGUNAAN MEDIA DIGITAL MATH GAME DENGAN MODEL ETNOMATEMATIKA PADA MATA KULIAH MATEMATIKA SMA Achmad Buchori, Noviana Dini Rahmawati, Sudargo .....	227
PENGEMBANGAN E-MODUL DENGAN MODEL GUIDED NOTE TAKING (GNT) PADA MATA KULIAH PENDIDIKAN MATEMATIKA II PROGRAM S1 PGSD BI DI POKJAR KOTA SEMARANG DI TINJAU DARI KEEFEKTIFANNYA Nurmawati, Ismartoyo, Edy Prayitno .....	233
PROSES BERPIKIR REFLEKTIF SISWA KELAS X MAN NGAWI YANG BERKEMAMPUAN AWAL MATEMATIKA TINGGI DALAM PEMECAHAN MASALAH BERDASARKAN LANGKAH KRULIK DAN RUDNICK Ulfa Masamah dan Imam Sujadi .....	238
SELF EFFICACY SEBAGAI KARAKTER DALAM MATEMATIKA Fertilia Ikashaum, Sri Hastuti Noer .....	248

ANALISIS KEBUTUHAN AWAL DAN PERENCANAAN BAHAN AJAR BERBASIS DIGITAL STORYTELLING UNTUK MENINGKATKAN KOPETENSI PEDAGOGIK MAHASISWA (STUDI KASUS MATA KULIAH STRATEGI PEMBELAJARAN) A.Y. Soegeng, Ysh, Anton Sukarno, Ida Dwijayanti .....	254
DESAIN PERANGKAT PEMBELAJARAN BERKARAKTER DENGAN PENDEKATAN INQUIRY BERBANTUAN CABRI 3D PADA MATAKULIAH GEOMETRI RUANG Venissa Dian Mawarsari .....	260
KEMANDIRIAN BELAJAR SISWA DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA Rahmah .....	267
KETERAMPILAN BERPIKIR KREATIF DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA Herlin Novalia, Sri Hastuti Noer .....	274
PENGEMBANGAN MATIKLOPEDIA BERBASIS PENDIDIKAN KARAKTER DI SEKOLAH MENENGAH PERTAMA SE- WILAYAH KEDUNGSAPUR DI TINJAU KEEFEKTIVANNYA Sutrisno, Dhian Endahwuri, Achmad Buchori .....	279
PENGEMBANGAN PERMAINAN ULAR TANGGA DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA DI SEKOLAH DASAR Rahaju .....	288

## SEMIRING MATRIKS FUZZY PERSEGI

Suroto<sup>1</sup>, Ari wardayani<sup>2</sup>, Achmad Abdurrazzaq<sup>3</sup>  
<sup>1,2,3</sup>Jurusan Matematika UNSOED Purwokerto

**Abstract.** This paper discussed about algebraic structure that constructed from fuzzy matrices. By using binary operation on fuzzy semiring, we proved that set all of square fuzzy matrices is semiring.

**Keywords:** fuzzy, matrices, square, semiring

### 1. PENDAHULUAN

Operasi biner pada suatu himpunan tak kosong  $S$  merupakan suatu fungsi dari  $S \times S$  ke  $S$  [5]. Monoid merupakan suatu system matematika yang terdiri atas sebuah himpunan tak kosong dan dilengkapi dengan sebuah operasi biner yang memenuhi sifat asosiatif dan memiliki elemen identitas [3]. Selanjutnya suatu monoid yang operasi binernya bersifat komutatif dinamakan monoid komutatif.

Suatu semiring  $R$  merupakan sebuah himpunan tak kosong  $R$  yang dilengkapi dengan dua buah operasi biner yakni penjumlahan dan pergandaan yang memenuhi  $R$  adalah monoid komutatif terhadap operasi penjumlahan,  $R$  monoid terhadap operasi pergandaan, berlaku sifat distributive pergandaan terhadap penjumlahan, dan elemen identitas penjumlahan merupakan elemen penyerap pada  $R$  [1]. Suatu semiring dikatakan komutatif apabila operasi pergandaannya bersifat komutatif. Semiring yang terbentuk dari interval tutup  $[0,1]$  yang dilengkapi dengan operasi penjumlahannya adalah maksimum serta operasi pergandaannya adalah minimum dinamakan semiring fuzzy [4].

Matriks fuzzy merupakan matriks yang entri-entrinya merupakan elemen pada semiring fuzzy [2]. Selanjutnya operasi penjumlahan dan pergandaan matriks fuzzy ini didefinisikan sebagaimana operasi penjumlahan dan pergandaan pada matriks biasa, tetapi operasi penjumlahan dan pergandaan pada

entri-entrinya mengadopsi dari operasi penjumlahan dan pergandaan pada semiring fuzzy. Selain itu, pembahasan mengenai matriks fuzzy juga telah dilakukan [6], [3].

Pada makalah ini dibahas mengenai struktur aljabar yang terbentuk dari matriks fuzzy persegi dengan operasi penjumlahan dan pergandaannya seperti pada [2]. Pada bagian utama makalah ini akan disajikan pembuktian dari himpunan semua matriks fuzzy persegi terhadap operasi penjumlahannya merupakan monoid komutatif, terhadap operasi pergandaannya merupakan monoid. Lebih lanjut juga dibuktikan bahwa himpunan semua matriks fuzzy persegi merupakan suatu semiring.

### 2. MATRIKS FUZZY PERSEGI

Matriks fuzzy merupakan suatu matriks yang entri-entrinya merupakan elemen dari semiring fuzzy.

**Definisi 1.** Sistem matematika  $([0,1], \text{maks}, \text{min})$  merupakan semiring, dan selanjutnya dinamakan semiring fuzzy.

**Definisi 2.** Misalkan  $[0,1]$  adalah semiring fuzzy, maka matriks  $A = [a_{ij}]$  dengan  $a_{ij} \in [0,1]$  dinamakan matriks fuzzy. Selanjutnya, suatu matriks fuzzy dikatakan persegi apabila banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom.

Operasi penjumlahan dan pergandaan matriks fuzzy didefinisikan sebagaimana operasi penjumlahan dan pergandaan matriks biasa. Misalkan  $A = [a_{ij}]$  dan  $B =$

$[b_{ij}]$  masing-masing merupakan matriks fuzzy persegi yang berordo  $n$ , maka operasi penjumlahan dan pergandaannya didefinisikan berturut-turut sebagai

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}] = [\text{maks}\{a_{ij}, b_{ij}\}]$$

dan

$$AB = [\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}] \\ = [\text{maks}_{k=1}^n \{\min\{a_{ik}, b_{kj}\}\}]$$

untuk  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

**Contoh 3.** Misalkan diketahui matriks fuzzy persegi  $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,8 & 1 \end{pmatrix}$  dan  $B = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix}$ , maka hasil penjumlahan dari  $A$  dan  $B$  adalah

$$A + B = \begin{pmatrix} \text{maks}\{0,1, 0,3\} & \text{maks}\{0,2, 0,4\} \\ \text{maks}\{0,8, 0\} & \text{maks}\{1, 0,5\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 \\ 0,8 & 1 \end{pmatrix}$$

dan hasil pergandaan dari  $A$  dan  $B$  adalah

$$AB = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

### 3. SEMIRING MATRIKS FUZZY PERSEGI

Bagian ini merupakan bagian utama dari makalah ini yang menjelaskan pembuktian dari himpunan semua matriks fuzzy merupakan suatu semiring.

**Lemma 4** Misalkan  $M$  adalah himpunan semua matriks fuzzy persegi, maka  $M$  terhadap operasi penjumlahan merupakan monoid

**Bukti:**

Misalkan ambil sembarang matriks fuzzy persegi  $A = [a_{ij}]$ ,  $B = [b_{ij}]$  dan  $C = [c_{ij}]$  yang berordo  $n$ . Perhatikan bahwa

i. Hasil penjumlahan dari  $A$  dan  $B$  yakni  $A + B = [a_{ij} + b_{ij}] = [\text{maks}\{a_{ij}, b_{ij}\}]$  juga merupakan matriks fuzzy persegi. Dengan demikian operasi penjumlahannya bersifat tertutup pada himpunan  $M$

ii. Operasi penjumlahan bersifat asosiatif pada  $M$ . Hal ini dikarenakan

$$(A+B)+C = [a_{ij} + b_{ij}] + [c_{ij}] \\ = [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}] \\ = [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})]$$

$$= [a_{ij}] + [b_{ij} + c_{ij}] \\ = A + (B+C)$$

iii. Matriks  $0 = [0_{ij}]$  dimana  $0_{ij} = 0$  untuk setiap  $i$  dan  $j$ , merupakan identitas terhadap operasi penjumlahan pada  $M$

Berdasarkan uraian i, ii, dan iii diperoleh  $M$  adalah monoid terhadap operasi penjumlahan. ■

**Lemma 5** Misalkan  $M$  adalah himpunan semua matriks fuzzy persegi, maka operasi penjumlahan pada monoid  $M$  bersifat komutatif

**Bukti:**

Dari uraian Lemma 4 sudah dibuktikan bahwa  $M$  merupakan suatu monoid. Misalkan ambil sembarang matriks fuzzy persegi  $A = [a_{ij}]$  dan  $B = [b_{ij}]$  maka berlaku

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}] = [b_{ij} + a_{ij}] = B + A.$$

Dengan demikian operasi penjumlahan bersifat komutatif pada  $M$ , sehingga  $M$  merupakan monoid komutatif. ■

**Lemma 6** Misalkan  $M$  adalah himpunan semua matriks fuzzy persegi, maka  $M$  terhadap operasi pergandaan merupakan monoid

**Bukti:**

Misalkan ambil sembarang matriks fuzzy persegi  $A = [a_{ij}]$ ,  $B = [b_{ij}]$  dan  $C = [c_{ij}]$  yang berordo  $n$ . Perhatikan bahwa

1. Hasil pergandaan dari  $A$  dan  $B$  yakni

$$AB = [\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}] \\ = [\text{maks}_{k=1}^n \{\min\{a_{ik}, b_{kj}\}\}]$$

Juga merupakan matriks fuzzy persegi. Dengan demikian operasi pergandaannya bersifat tertutup pada himpunan  $M$

2. Operasi pergandaan bersifat asosiatif pada  $M$ . Hal ini dikarenakan

$$(AB)C = [\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}] [c_{ij}] \\ = [\sum_{t=1}^n (\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj})_{it} c_{tj}] \\ = [\sum_{t=1}^n a_{it} (\sum_{k=1}^n b_{ik} c_{kj})_{tj}] \\ = [a_{ij}] [\sum_{k=1}^n b_{ik} c_{kj}] \\ = A(BC)$$

3. Matriks  $I = [a_{ij}]$  dimana  $a_{ij} = 1$  untuk  $i = j$ , dan  $a_{ij} = 0$  untuk setiap  $i \neq j$ , merupakan elemen identitas terhadap operasi pergandaan pada  $M$

Berdasarkan uraian 1, 2, dan 3 diperoleh bahwa  $M$  merupakan suatu monoid terhadap operasi pergandaan.

**Lemma 7** Misalkan  $M$  adalah himpunan semua matriks fuzzy persegi, maka berlaku sifat distributive operasi pergandaan terhadap operasi penjumlahan pada  $M$ .

**Lemma 8** Elemen identitas penjumlahan pada  $M$  merupakan elemen penyerap terhadap operasi pergandaan

**Bukti:**

Perhatikan bahwa elemen identitas terhadap operasi penjumlahan pada  $M$  adalah matriks  $0 = [0_{ij}]$  dimana  $0_{ij} = 0$  untuk setiap  $i$  dan  $j$ . Untuk setiap matriks fuzzy persegi  $A = [a_{ij}]$  berlaku

$$\begin{aligned} A0 &= [\sum_{k=1}^n a_{ik} 0_{kj}] \\ &= [\text{maks}\{\min\{a_{ik}, 0\}\}] \\ &= [a_{ik}] = A, \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} 0A &= [\sum_{k=1}^n 0_{ik} a_{kj}] \\ &= [\text{maks}\{\min\{0, a_{kj}\}\}] \\ &= [a_{kj}] = A \end{aligned}$$

Dengan demikian matriks  $0$  merupakan elemen penyerap terhadap operasi pergandaan pada  $M$ . ■

Teorema berikut merupakan hasil utama pada makalah ini.

**Teorema 9** Misalkan  $M$  adalah himpunan semua matriks fuzzy persegi, maka  $M$  merupakan semiring terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan

**Bukti:**

Perhatikan bahwa

Menurut Lemma 4 sudah diuraikan bahwa  $M$  merupakan monoid terhadap operasi penjumlahan, menurut Lemma 5 dijelaskan bahwa  $M$  merupakan monoid komutatif terhadap operasi penjumlahan, Lemma 6 menjelaskan bahwa  $M$  merupakan monoid terhadap operasi pergandaan, sementara Lemma 7 menguraikan bahwa berlaku sifat

distributive pergandaan terhadap operasi penjumlahan pada  $M$ , dan menurut Lemma 8 sudah diuraikan juga bahwa elemen identitas penjumlahan merupakan elemen penyerap terhadap operasi pergandaan pada  $M$ . Dari uraian-uraian tersebut dapat disimpulkan bahwa  $M$  merupakan suatu semiring terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan. ■

Untuk selanjutnya, semiring pada Teorema 9 ini cukup dinamakan sebagai semiring matriks fuzzy persegi.

#### 4. KESIMPULAN

Dari himpunan semua matriks fuzzy dapat dibentuk suatu semiring dengan cara mendefinisikan operasi penjumlahan dan pergandaannya sebagai penjumlahan dan pergandaan seperti pada matriks biasa, tetapi dengan memanfaatkan juga operasi penjumlahan dan pergandaan pada semiring fuzzy untuk operasi penjumlahan dan pergandaan pada entri-entrinya. Penelitian selanjutnya bias dilakukan pada pembentukan semimodul atas semiring matrik fuzzy persegi ini.

#### 5. DAFTAR PUSTAKA

- [1] F. Baccelli, G. Cohen, J.G. Olsder, dan J. Pierre, Synchronization and linearity. An algebra for discrete event systems. Wiley Series on Probability and Mathematical Statistics, 1992.
- [2] H. Wang, H. The Fuzzy Non Singular Matrices. Dept of Basis Liaoyang of Petrochemistry China
- [3] J.B. Fraleigh, A First Course in Abstract Algebra, 7<sup>th</sup> Edition. New Addison-Wesley Publishing Company. New York, 2002.
- [4] S.R Rees, Graphs, Matrices, and Designs. Marcel Dekker, Inc. New York, 1993.
- [5] T.W. Judson, Abstract Algebra Theory and Application. Amerika Serikat: Virginia Commonwealth University Mathematics, 2011.
- [6] Y. Chongxin, dan T. Xiang, Fuzzy Singular Matrices., Dept. of Basis,

Qiqihar College of Light Industry  
Qiqihar, China

- [7] Y. Chongxin, Y. Jie, L. Mai, dan Y. Chengde, The research of special fuzzy matrices. Qiqihar Light-Chemical Engineering Institute, China
-

## PERTIDAKSAMAAN NORMA EUCLID DARI MATRIKS RATAAN ARITMATIK, MATRIKS RATAAN GEOMETRIK, MATRIKS RATAAN HARMONIK

**Zaky Nurzamzami<sup>1</sup>, Lucia Ratnasari, S.Si, M.Si<sup>2</sup>, Drs. YD Sumanto, M.Si<sup>3</sup>**  
<sup>1,2,3</sup>Program Studi Matematika FSM Universitas Diponegoro  
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Tembalang Semarang

*zakynurzamzami@gmail.com*  
*ratnasari.lucia@yahoo.com*

**ABSTRAK.** Matriks adalah kumpulan elemen-elemen yang tersusun di dalam baris dan kolom. Elemen-elemen yang membentuk matriks disebut entri. Matriks yang entri-entrinya berbentuk rumusan dari rataan Aritmatik, rataan Geometrik, rataan Harmonik disebut matriks rataan Aritmatik ( $A$ ), matriks rataan Geometrik ( $G$ ), matriks rataan Harmonik ( $H$ ). Invers Hadamard dari

suatu matriks  $A_{n \times n}$  didefinisikan dengan  $A^{o^{-1}} = \left[ \frac{1}{a_{ij}} \right]_{n \times n}$  dengan  $a_{ij}$  adalah entri dari matriks

$A_{n \times n}$  dan  $a_{ij} \neq 0$ . Norma matriks adalah suatu bilangan riil yang merupakan besaran matriks. Norma matriks dapat dicari menggunakan norma Euclid. Dalam tugas akhir ini dibahas mengenai norma Euclid dari matriks rataan Aritmatik, matriks rataan Geometrik, matriks rataan Harmonik dan norma Euclid dari invers Hadamard matriks rataan Aritmatik ( $A^{o^{-1}}$ ), matriks rataan Geometrik ( $G^{o^{-1}}$ ), matriks rataan Harmonik ( $H^{o^{-1}}$ ). Norma Euclid dari matriks rataan Aritmatik, matriks rataan Geometrik, matriks rataan Harmonik membentuk pertidaksamaan  $\|A\|_E \geq \|G\|_E \geq \|H\|_E$  dan norma Euclid dari invers Hadamard matriks rataan Aritmatik, matriks rataan Geometrik, matriks rataan Harmonik membentuk pertidaksamaan  $\|H^{o^{-1}}\|_E \geq \|G^{o^{-1}}\|_E \geq \|A^{o^{-1}}\|_E$ .

**Kata kunci:** matriks rataan Aritmatik, matriks rataan Geometrik, matriks rataan Harmonik, norma Euclid, invers Hadamard.

### I. PENDAHULUAN

Matriks merupakan hal yang berkaitan erat dengan aljabar linier. Matriks adalah kumpulan elemen-elemen yang tersusun di dalam baris dan kolom. Elemen-elemen yang membentuk matriks sering disebut entri dari matriks, entri dari matriks dapat berupa bilangan-bilangan. Rata-rata atau rataan adalah suatu bilangan yang mewakili sekumpulan data. Rataan terbagi menjadi 3 macam, yaitu rataan aritmatik ( $A.M$ ), rataan geometrik ( $G.M$ ) dan rataan harmonik

( $H.M$ ). Dari ketiga rataan tersebut bisa dituliskan dalam pertidaksamaan sebagai berikut  $A.M \geq G.M \geq H.M$ .

Didefinisikan matriks yang entri-entrinya berbentuk rumusan dari rataan aritmatik, rataan geometrik dan rataan harmonik yang disebut matriks rataan Aritmatik, matriks rataan Geometrik, matriks rataan Harmonik dan salah satu jenis invers matriks yang dikenal dengan nama Invers Hadamard. Matriks rataan Aritmatik, matriks rataan Geometrik, matriks rataan Harmonik merupakan matriks

persegi yang memiliki entri dari rumusan ketiga rataan tersebut, dimana entri matriks baris ke- $i$  dan kolom ke- $j$  merupakan rumusan ketiga rataan.

Norm matriks adalah suatu bilangan riil yang merupakan besaran matriks. Norma matriks yang digunakan adalah *Euclidean norm* (norma Euclid). Pada makalah ini dibahas mengenai norma Euclid dan hubungan norma Euclid dari matriks rataan Aritmatik, matriks rataan Geometrik, matriks rataan Harmonik. Norma Euclid dan hubungan norma Euclid dari invers Hadamard matriks rataan Aritmatik, matriks rataan Geometrik, matriks rataan Harmonik.

## II. HASIL DAN PEMBAHASAN

### Definisi 2.1 [8]

Matriks  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  disebut matriks rataan Aritmatik jika  $a_{ij} = \frac{i+j}{2}$  dengan  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

### Definisi 2.2 [8]

Matriks  $G = [g_{ij}]_{n \times n}$  disebut matriks rataan Geometrik jika  $g_{ij} = \sqrt{ij}$  dengan  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

### Definisi 2.3 [8]

Matriks  $H = [h_{ij}]_{n \times n}$  disebut matriks rataan Harmonik jika  $h_{ij} = \frac{2ij}{i+j}$  dengan  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

### Teorema 2.1 [8]

Jika matriks  $H = \left[ \frac{2ij}{i+j} \right]_{n \times n}$  adalah matriks rataan Harmonik, maka norma

Euclid dari matriks  $H$  adalah

$$\|H\|_E = 2\sqrt{a+b-c+d-e+f}$$

dengan

$$a = \frac{1}{15} (6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n)$$

$$[\Psi(1, n+2) - \Psi(1, 2n+1)],$$

$$b = (n^4 + 2n^3 + n^2)$$

$$[\Psi(n+2) - \Psi(2n+1)],$$

$$c = \frac{1}{15} \Psi(n+2), \quad d = \frac{1}{30} \Psi(2n+1),$$

$$e = \frac{\gamma}{30} \text{ dan}$$

$$f = \frac{33n^4 + 18n^3 - 29n^2 - 8n + 4}{60}.$$

Berikut ini diberikan nilai norma Euclid dari matriks rataan Aritmatik, matriks rataan Geometrik, matriks rataan Harmonik dengan mensimulasikan beberapa nilai  $n$  dengan  $n \in \mathbb{R}^+$  yang diperoleh dalam tabel sebagai berikut.

**Tabel 2.1 Nilai norma Euclid dari matriks rataan Aritmatik, matriks rataan Geometrik, matriks rataan Harmonik**

$n$	$\ A\ _E$	$\ G\ _E$	$\ H\ _E$
1	1	1	1
2	3.08	3	2.92
3	6.24	6	5.79
10	58.63	55	52.54
100	5446.90	5050	4816.54

Dari hasil simulasi untuk beberapa nilai  $n$  seperti pada Tabel 2.1 dapat dilihat bahwa membentuk pertidaksamaan  $\|A\|_E \geq \|G\|_E \geq \|H\|_E$ .

Selanjutnya akan ditunjukkan  $\|A\|_E \geq \|G\|_E \geq \|H\|_E$  berlaku untuk sebarang  $n$ .

**Teorema 2.2**

Jika  $A = \left[ \frac{i+j}{2} \right]_{n \times n}$ ,  $G = \left[ \sqrt{ij} \right]_{n \times n}$  dan  $H = \left[ \frac{2ij}{i+j} \right]_{n \times n}$  dengan  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , maka berlaku  $\|A\|_E \geq \|G\|_E \geq \|H\|_E$ .

**Bukti**

Diberikan  $A = \left[ \frac{i+j}{2} \right]_{n \times n}$ ,  $G = \left[ \sqrt{ij} \right]_{n \times n}$  dan  $H = \left[ \frac{2ij}{i+j} \right]_{n \times n}$  dengan  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , maka akan ditunjukkan

$$\|A\|_E \geq \|G\|_E \geq \|H\|_E \quad (2.2)$$

Terlebih dahulu akan ditunjukkan

$$\|A\|_E^2 \geq \|G\|_E^2 \geq \|H\|_E^2 \quad (2.3)$$

Karena fungsi  $f(x) = \sqrt{x}$  monoton naik, maka berlaku (2.3)  $\Rightarrow$  (2.2).

$$(i) \|A\|_E^2 - \|G\|_E^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i^2 + j^2) \geq 0$$

Oleh karena  $\|A\|_E^2 - \|G\|_E^2 \geq 0$ , maka

$$\|A\|_E^2 \geq \|G\|_E^2 \Rightarrow \|A\|_E \geq \|G\|_E$$

$$(ii) \|G\|_E^2 - \|H\|_E^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \frac{ij(i-j)^2}{(i+j)^2} \right) \geq 0$$

Oleh karena  $\|G\|_E^2 - \|H\|_E^2 \geq 0$ , maka

$$\|G\|_E^2 \geq \|H\|_E^2 \Rightarrow \|G\|_E \geq \|H\|_E.$$

Sehingga diperoleh  $\|A\|_E \geq \|G\|_E \geq \|H\|_E$ . ■

**Definisi 2.4 [4]**

Diberikan  $A = \left[ a_{ij} \right]_{n \times n}$  dan  $B = \left[ b_{ij} \right]_{n \times n}$  matriks berukuran  $n \times n$  dengan  $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}^+$ . Perkalian Hadamard dari matriks  $A$  dan matriks  $B$  didefinisikan

$$A \circ B = \left[ a_{ij} \right]_{n \times n} \circ \left[ b_{ij} \right]_{n \times n} = \left[ a_{ij} b_{ij} \right]_{n \times n}$$

dengan  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

Matriks identitas ( $I$ ) pada perkalian Hadamard adalah matriks persegi dimana elemen-elemennya adalah 1.

**Definisi 2.5 [8]**

Diberikan  $A = \left[ a_{ij} \right]_{m \times n}$  sebagai sebarang matriks yang ukurannya  $m \times n$ , maka

invers Hadamard dari  $A$  adalah

$$A^{o^{-1}} = \left[ \frac{1}{a_{ij}} \right]_{m \times n} \text{ dengan } a_{ij} \in \mathbb{R}^+ \text{ dan } a_{ij} \neq 0.$$

Berikut ini diberikan nilai norma Euclid dari invers Hadamard matriks rata-rata Aritmatik, matriks rata-rata Geometrik, matriks rata-rata Harmonik dengan mensimulasikan beberapa nilai  $n$  dengan  $n \in \mathbb{R}^+$  yang diperoleh dalam tabel sebagai berikut.

**Tabel 2.2 Nilai norma Euclid dari invers Hadamard matriks rata-rata Aritmatik, matriks rata-rata Geometrik, matriks rata-rata Harmonik**

$n$	$\ A^{o^{-1}}\ _E$	$\ G^{o^{-1}}\ _E$	$\ H^{o^{-1}}\ _E$
1	1	1	1
2	1.46	1.5	1.54
3	1.75	1.83	1.93
10	2.60	2.93	3.47
100	3.93	5.19	9.76

Dari hasil simulasi untuk beberapa nilai  $n$  seperti pada Tabel 2.2 dapat dilihat bahwa membentuk pertidaksamaan

$$\|H^{o^{-1}}\|_E \geq \|G^{o^{-1}}\|_E \geq \|A^{o^{-1}}\|_E.$$

Selanjutnya akan ditunjukkan  $\|H^{o^{-1}}\|_E \geq \|G^{o^{-1}}\|_E \geq \|A^{o^{-1}}\|_E$  berlaku untuk sebarang  $n$ .

**Teorema 2.3**

Jika  $A^{o^{-1}} = \left[ \frac{i+j}{2} \right]_{n \times n}$ ,  $G^{o^{-1}} = \left[ \sqrt{ij} \right]_{n \times n}$

dan  $H^{o^{-1}} = \left[ \frac{2ij}{i+j} \right]_{n \times n}$  dengan

$i, j = 1, 2, \dots, n$ , maka berlaku

$$\|H^{o^{-1}}\|_E \geq \|G^{o^{-1}}\|_E \geq \|A^{o^{-1}}\|_E.$$

**Bukti**

Diberikan  $A^{o^{-1}} = \left[ \frac{i+j}{2} \right]_{n \times n}$ ,

$G^{o^{-1}} = \left[ \sqrt{ij} \right]_{n \times n}$  dan  $H^{o^{-1}} = \left[ \frac{2ij}{i+j} \right]_{n \times n}$

dengan  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , maka akan ditunjukkan

$$\|H^{o^{-1}}\|_E \geq \|G^{o^{-1}}\|_E \geq \|A^{o^{-1}}\|_E \quad (2.5)$$

Terlebih dahulu akan ditunjukkan

$$\|H^{o^{-1}}\|_E^2 \geq \|G^{o^{-1}}\|_E^2 \geq \|A^{o^{-1}}\|_E^2 \quad (2.6)$$

Karena fungsi  $f(x) = \sqrt{x}$  monoton naik, maka berlaku (2.5)  $\Rightarrow$  (2.6).

$$(i) \quad \|H^{o^{-1}}\|_E^2 - \|G^{o^{-1}}\|_E^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \frac{(i-j)^2}{4(ij)^2} \right) \geq 0$$

Oleh karena  $\|H^{o^{-1}}\|_E^2 - \|G^{o^{-1}}\|_E^2 \geq 0$ ,

maka  $\|H^{o^{-1}}\|_E \geq \|G^{o^{-1}}\|_E$ .

$$(ii) \quad \|G^{o^{-1}}\|_E^2 - \|A^{o^{-1}}\|_E^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \frac{(i-j)^2}{ij(i+j)^2} \right) \geq 0$$

Oleh karena  $\|G^{o^{-1}}\|_E^2 - \|A^{o^{-1}}\|_E^2 \geq 0$ ,

maka  $\|G^{o^{-1}}\|_E \geq \|A^{o^{-1}}\|_E$ .

Sehingga diperoleh

$$\|H^{o^{-1}}\|_E^2 \geq \|G^{o^{-1}}\|_E^2 \geq \|A^{o^{-1}}\|_E^2. \quad \blacksquare$$

**III. DAFTAR PUSTAKA**

- [1] Abramowitz, M. and I. A. Stegun. 1970. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. National Bureau of Standards. Washington D.C.
- [2] Anton, Howard and Chris Rorres. 2004. *Aljabar Linear Elementer*. Erlangga. Jakarta.
- [3] Arfken, George B., Hans J. Webber and Frank E. Harris. 2005. *Mathematical Methods For Physicist A Comprehensive Guide Seventh Edition*. Elsevier Academic Press. United States of America.
- [4] Bhatia, Rajendra. 1997. *Graduate Texts in Mathematics: Matrix Analysis*. Springer. New York.
- [5] Bullen, P.S. 1988. *Handbook of Means and Their Inequalities*. University of Columbia. Canada.
- [6] Medina, Luis A. and Victor H. Moll. 2009. The Integrals in Gradshteyn and Ryzhik. Part 10: The Digamma Function. *Mathematical Sciences*, Vol. 17: 45-66.
- [7] Pudjiastuti BSW. 2006. *Matriks Teori dan Aplikasi*. Graha Ilmu. Yogyakarta.
- [8] Solak, Suleyman and Mine Aytakin. 2010. A Note on the Euclidean Norms of Matrices with Arithmetic-Geometric-Harmonic Means. *Applied*

- Mathematical Sciences*, Vol. 4, 31: 1553-1561.
- [9] Spiegel, Murray R. 1981. *Schaum's Outline of Theory and Problems of Complex Variables With an Introduction to Conformal Mapping and Its Application SI (Metric) Edition*. McGraw-Hill International Book Company. Singapore.
- [10] Widowati, R. Heri Sulisty U., Farikhin. 2012. *Kalkulus*. UPT UNDIP PRESS. Semarang.

## BEBERAPA BARISAN DI RUANG ATSUJI YANG MEMPUNYAI TITIK *CLUSTER*

Suarsih Utama<sup>1</sup> dan Nora Hariadi<sup>2</sup>

Departemen Matematika Fakultas MIPA Universitas Indonesia, [suarsih.utama@sci.ui.ac.id](mailto:suarsih.utama@sci.ui.ac.id)  
Departemen Matematika Fakultas MIPA Universitas Indonesia, [nora.hariadi@sci.ui.ac.id](mailto:nora.hariadi@sci.ui.ac.id)

**Abstrak.** Ruang Atsui adalah ruang metrik  $(X, d)$  dengan setiap fungsi kontinu yang bernilai real pada ruang tersebut merupakan fungsi kontinu seragam. Ruang Atsui memiliki beragam sifat-sifat fungsionalnya, sifat himpunan titik akumulasinya, sifat barisannya, dan lain-lain. Pada makalah ini diperlihatkan barisan-barisan di ruang Atsui yang mempunyai titik *cluster*, yaitu dua barisan yang asimtotik, barisan dari pasangan titik terisolasi di  $X$ , barisan pada himpunan titik akumulasi di  $X$ , dan barisan Pseudo Cauchy.

**Kata kunci :** ruang Atsui, barisan asimtotik, barisan dari pasangan titik terisolasi, barisan pada himpunan titik akumulasi, barisan Pseudo Cauchy.

### 1. PENDAHULUAN

Ruang Atsui adalah ruang metrik  $(X, d)$  dengan setiap fungsi kontinu yang bernilai real pada ruang tersebut merupakan fungsi kontinu seragam. Junji Nagata mungkin merupakan orang pertama yang mempelajari ruang ini pada tahun 1950. Setelah itu penelitian tentang ruang Atsui terus berlanjut antara lain dilakukan oleh A.A. Monteiro, M.M. Peixoto, Masahiko Atsui, Gerald Beer, dan S.G. Mrowka serta V.A. Effremovic [3]. Berdasarkan hasil penelitian yang diperoleh oleh matematikawan tersebut, ruang Atsui mempunyai beberapa nama yaitu ruang *Lebesgue*, ruang kontinu seragam, ruang yang dilengkapi dengan metrik normal. Namun Gerald Beer adalah orang pertama yang menyebut ruang tersebut dengan ruang Atsui [3]. Hasil-hasil dari penelitian yang berlangsung hampir 40 tahun dikumpulkan oleh Jain dan Kundu menjadi 25 syarat yang setara agar suatu ruang metrik merupakan ruang Atsui. Pada makalah ini diperlihatkan beberapa barisan di ruang Atsui yang mempunyai titik *cluster*.

### 2. HASIL DAN PEMBAHASAN

#### 2.1 Teori Pendukung

Untuk membuktikan tiga teorema yang terkait dengan jenis-jenis barisan di ruang Atsui  $(X, d)$  yang mempunyai titik *cluster*

dibutuhkan beberapa definisi, lema, dan teorema pendukung sebagai berikut.

**Definisi 2.1** Misalkan  $(X, d)$  adalah ruang metrik dan  $A \subseteq X$ . Titik  $x \in X$  adalah titik akumulasi dari  $A$  jika setiap lingkungan dari  $x$  memuat setidaknya satu titik di  $A$  yang berbeda dari  $x$ . [5]

Himpunan titik akumulasi dari  $A$  dinyatakan dengan  $A'$ . Lebih lanjut, titik terisolasi di  $A$  didefinisikan sebagai titik di  $A$  yang bukan merupakan titik akumulasi [4]. Selain itu [2] menyebut titik akumulasi dengan nama titik *cluster*.

**Teorema 2.2** Misalkan  $(X, d)$  adalah ruang metrik. Himpunan  $A \subseteq X$  adalah himpunan tutup di  $X$  jika dan hanya jika  $A$  mengandung semua titik akumulasinya. [5]

**Definisi 2.3** Misalkan  $(X, d)$  adalah ruang metrik dengan  $A, B \subseteq X$ . Jarak antara dua subhimpunan  $A$  dan  $B$  adalah  $d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$ . [1]

**Definisi 2.4** Misalkan  $(X, d)$  adalah ruang metrik. Fungsi  $f: [0, 1] \rightarrow X$  dikatakan sebagai lintasan (*path*) di  $X$  jika  $f$  merupakan fungsi yang kontinu dan memenuhi  $f(0) \neq f(1)$ . Dalam hal ini, ruang metrik  $(X, d)$  dikatakan mengandung lintasan. [3]

Berikut ini diberikan definisi dari dua barisan yang asimtotik, barisan dari pasangan titik terisolasi, dan barisan pseudo-Cauchy.

**Definisi 2.5** Dua barisan  $(x_n)$  dan  $(y_n)$  di ruang metrik  $(X, d)$  dikatakan bersifat asimtotik, ditulis sebagai  $(x_n) \asymp (y_n)$ , jika untuk setiap  $\varepsilon > 0$  terdapat bilangan asli  $N$  sehingga untuk setiap bilangan asli  $n$  yang lebih besar dari  $N$  berlaku  $d(x_n, y_n) < \varepsilon$ . [4]

**Definisi 2.6** Barisan  $(x_n)$  dari titik-titik terisolasi yang berbeda di ruang metrik  $(X, d)$  dikatakan barisan dari pasangan titik terisolasi jika  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{2n-1}, x_{2n}) = 0$ . [4]

**Definisi 2.7** Barisan  $(x_n)$  di ruang metrik  $(X, d)$  dikatakan barisan pseudo-Cauchy jika untuk setiap  $\varepsilon > 0$  dan untuk setiap  $n \in \mathbb{N}$ , terdapat  $j, k \in \mathbb{N}$  dengan  $j, k > n$  dan  $j \neq k$  sehingga  $d(x_j, x_k) < \varepsilon$ . [4]

**Definisi 2.8** Ruang Atsuji adalah ruang metrik dengan setiap fungsi kontinu bernilai real di ruang tersebut merupakan fungsi yang kontinu seragam. [4]

**Teorema 2.9** Untuk sembarang ruang metrik  $(X, d)$ , kedua pernyataan berikut adalah ekuivalen:

- i.  $(X, d)$  adalah ruang Atsuji.
- ii. Untuk setiap pasangan himpunan tutup  $A$  dan  $B$  yang tidak kosong dan saling lepas di  $(X, d)$  berlaku  $d(A, B) > 0$ . [4]

Dari Teorema 2.9 bisa disimpulkan bahwa ruang Atsuji adalah ruang normal.

## 2.2 Pembahasan

Selain definisi dan teorema di atas dibutuhkan lima lema untuk membuktikan tiga teorema mengenai jenis-jenis barisan di ruang Atsuji yang memiliki titik cluster. Empat lema pertama diambil dari [4]. Lema 2.10 dan Lema 2.11 dibuktikan pada

[8] dan Lema 2.12 dibuktikan pada [6]. Lema kelima diambil dari [7].

**Lema 2.10** Misalkan barisan  $(x_n)$  dan  $(y_n)$  adalah barisan di ruang metrik  $(X, d)$  yang memenuhi  $(x_n) \asymp (y_n)$ . Jika barisan  $(x_n)$  konvergen ke  $x \in X$ , maka  $(y_n)$  juga konvergen ke  $x$ .

**Bukti:** Misalkan  $\varepsilon > 0$  sembarang. Karena barisan  $(x_n)$  dan  $(y_n)$  asimtotik, maka terdapat bilangan asli  $N_1$  sehingga untuk  $n > N_1$  berlaku  $d(x_n, y_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Lebih lanjut, karena barisan  $(x_n)$  konvergen ke  $x$  maka terdapat bilangan asli  $N_2$  sehingga untuk  $n > N_2$  berlaku  $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Pilih  $N = \max\{N_1, N_2\}$ , maka untuk  $n > N$ , berlaku:

$$d(y_n, x) \leq d(y_n, x_n) + d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Berarti barisan  $(y_n)$  konvergen ke  $x$ .

**Akibat 2.11** Misalkan barisan  $(x_n)$  dan  $(y_n)$  adalah barisan di ruang metrik  $(X, d)$  yang memenuhi  $(x_n) \asymp (y_n)$ . Jika barisan  $(x_n)$  tidak mempunyai titik cluster maka barisan  $(y_n)$  juga tidak mempunyai titik cluster.

**Bukti:** Andaikan barisan  $(y_n)$  mempunyai titik cluster yaitu  $y$ . Maka terdapat subbarisan  $(y_{n_k})$  dari  $(y_n)$  yang konvergen ke  $y$ . Karena  $(x_n) \asymp (y_n)$  maka  $(x_{n_k}) \asymp (y_{n_k})$ . Menurut Lema 2.10, subbarisan  $(x_{n_k})$  juga konvergen ke  $y$ . Berarti  $y$  adalah titik cluster dari barisan  $(x_n)$ . Hal ini kontradiksi dengan premis yang menyatakan bahwa barisan  $(x_n)$  tidak mempunyai titik cluster. Maka haruslah barisan  $(y_n)$  juga tidak mempunyai titik cluster.

**Lema 2.12** Misalkan  $(x_n)$  adalah barisan di ruang metrik  $(X, d)$  yang tidak mempunyai titik cluster di  $X$  maka  $(x_n)$  terdiri dari titik-titik yang berbeda.

**Bukti:** Karena untuk setiap  $x_i \in (x_n)$  bukan merupakan titik cluster dari  $X$  maka

terdapat  $\varepsilon_i > 0$  sedemikian sehingga setiap lingkungan  $\varepsilon_i$  dari  $x_i$  hanya mengandung titik  $x_i$ . Akibatnya untuk sembarang  $x_i, x_j \in (x_n), d(x_i, x_j) \geq \varepsilon_i + \varepsilon_j$ . Jadi  $x_i$  dan  $x_j$  adalah dua titik yang berbeda. Karena hal ini berlaku untuk sembarang anggota barisan  $(x_n)$ , maka  $(x_n)$  terdiri dari titik-titik yang berbeda.

**Lema 2.13** Misalkan  $(X, d)$  adalah ruang Atsui, maka terdapat suatu ruang metrik  $(M, \rho)$  yang mengandung lintasan sedemikian sehingga setiap fungsi kontinu  $f: (X, d) \rightarrow (M, \rho)$  adalah kontinu seragam.

**Bukti:** Misalkan  $(M, \rho) = ([a, b], |\cdot|)$ ;  $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ . Konstruksi fungsi  $\phi: [0, 1] \rightarrow M$  dengan  $\phi(x) = (b - a)x + a$  yang merupakan fungsi kontinu dan memenuhi  $\phi(0) \neq \phi(1)$ . Maka  $\phi$  adalah suatu lintasan dan  $(M, \rho)$  mengandung lintasan. Misalkan  $f: (X, d) \rightarrow (M, \rho)$  adalah sembarang fungsi kontinu di  $X$  yang bernilai real. Karena  $X$  adalah ruang Atsui, maka  $f$  merupakan fungsi yang kontinu seragam.

**Lema 2.14** Misalkan  $(X, d)$  adalah ruang Atsui. Misalkan pula  $(x_n)$  dan  $(y_n)$  adalah barisan di  $(X, d)$  dengan  $(x_n) \asymp (y_n)$  dan  $x_n \neq y_n, \forall n$ . Jika  $(x_n)$  tidak mempunyai titik cluster, maka dapat dibentuk dua himpunan tutup  $B$  dan  $C$  dari barisan  $(x_n)$  dan  $(y_n)$  dengan  $B \cap C = \emptyset$  dan  $d(B, C) = 0$ .

**Bukti:** Karena barisan  $(x_n)$  tidak mempunyai titik cluster dan  $(x_n) \asymp (y_n)$ , menurut Akibat 2.11, barisan  $(y_n)$  juga tidak mempunyai titik cluster. Berdasarkan Lema 2.12 barisan  $(y_n)$  maupun barisan  $(x_n)$  terdiri dari titik-titik yang berbeda. Selanjutnya konstruksi dua barisan  $(x'_{n_k})$  dan  $(y'_{n_k})$  sedemikian sehingga  $x_{n_k} \neq y_{n_l}$  untuk setiap  $k, l \in \mathbb{N}$  dan  $d(x'_{n_k}, y'_{n_k}) < \frac{1}{k}$  dengan cara sebagai berikut:

- i. Untuk  $n = 1$ , ambil  $x'_{n_1} = x_1$  dan  $y'_{n_1} = y_1$ . Sebut  $S_1 = \{x'_{n_1}\}$  dan  $T_1 = \{y'_{n_1}\}$ . Jelas  $S_1 \cap T_1 = \emptyset$ .
- ii. Misalkan telah dipilih  $x'_{n_1}, x'_{n_2}, \dots, x'_{n_k}$  dan  $y'_{n_1}, y'_{n_2}, \dots, y'_{n_k}$ . Misalkan pula telah dipilih  $S_k = \{x'_{n_1}, x'_{n_2}, \dots, x'_{n_k}\}$  dan  $T_k = \{y'_{n_1}, y'_{n_2}, \dots, y'_{n_k}\}$  sedemikian sehingga  $S_k \cap T_k = \emptyset$ .
- iii. Pilih  $n_{k+1} = \min\{m > n_k, x_m \notin S_k \cup T_k \text{ atau } y_m \in S_k \cup T_k\}$ . Andaikan untuk setiap  $n > n_k, x_n, y_n \in S_k \cup T_k$  maka  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) > 0$ . Kontradiksi dengan premis.
- iv. Jika  $x_{n_{k+1}} \in T_k$  atau  $y_{n_{k+1}} \in S_k$ , pilih  $x'_{n_{k+1}} = y_{n_{k+1}}$  dan  $y'_{n_{k+1}} = x_{n_{k+1}}$ . Selain itu pilih  $x'_{n_{k+1}} = x_{n_{k+1}}$  dan  $y'_{n_{k+1}} = y_{n_{k+1}}$ .

Definisikan himpunan  $B = \{x'_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$  dan  $C = \{y'_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ . Karena  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$  tidak mempunyai titik akumulasi di  $X$ , maka  $B$  dan  $C$  juga tidak mempunyai titik akumulasi di  $X$ . Jadi  $B$  dan  $C$  masing-masing merupakan himpunan tutup. Berdasarkan konstruksi  $(x'_{n_k})$  dan  $(y'_{n_k})$  diperoleh  $B \cap C = \emptyset$ . Karena  $d(x'_{n_k}, y'_{n_k}) < \frac{1}{k}$  maka  $d(B, C) = 0$ .

**Lema 2.15 (Lema Urysohn)** Misalkan  $(X, d)$  adalah ruang normal. Misalkan pula  $A$  dan  $B$  adalah subhimpunan tutup di  $X$  yang saling lepas. Maka terdapat fungsi kontinu bernilai real yang terdefinisi pada  $X$  sedemikian sehingga  $0 \leq f \leq 1$  pada  $X$  dengan  $f(A) = 0$  dan  $f(B) = 1$ . [7]

Berikut dibahas Teorema 2.16, Teorema 2.17, dan Teorema 2.18 yang merupakan teorema utama pada makalah ini.

**Teorema 2.16** Misalkan  $(X, d)$  adalah ruang Atsui,  $(x_n)$  dan  $(y_n)$  adalah dua barisan yang asimtotik di  $(X, d)$  dengan  $x_n \neq y_n, \forall n$ . Maka barisan  $(x_n)$  dan  $(y_n)$  mempunyai titik cluster di  $(X, d)$ .

**Bukti:** Teorema ini akan dibuktikan dengan kontradiksi. Misalkan terdapat dua barisan asimtotik  $(x_n)$  dan  $(y_n)$  di  $(X, d)$  dengan  $x_n \neq y_n, \forall n$  sedemikian sehingga barisan  $(x_n)$  dan juga  $(y_n)$  tidak mempunyai titik *cluster*. Menurut Lema 2.14 dapat diperoleh dua himpunan tutup yang saling lepas  $B$  dan  $C$  dari barisan  $(x_n)$  dan  $(y_n)$  sedemikian sehingga  $d(B, C) = 0$ . Karena  $X$  adalah ruang Atsuj, maka menurut Teorema 2.9,  $(X, d)$  adalah ruang yang normal. Lebih lanjut, berdasarkan Lema 2.15, terdapat fungsi kontinu pada  $X$  yang bernilai real sedemikian sehingga  $0 \leq f \leq 1$  pada  $X$  dengan  $f(B) = 0$  dan  $f(C) = 1$ . Menurut Lema 2.13, terdapat ruang metrik  $(M, \rho)$  yang mengandung lintasan dan suatu fungsi kontinu  $\phi: [0,1] \rightarrow M$  dengan  $a = \phi(0) \neq \phi(1) = b$  dengan  $a, b \in M$ . Misalkan  $g: X \rightarrow M$  adalah suatu fungsi dari  $g(x) = \phi(f(x))$ . Fungsi  $g$  adalah suatu fungsi kontinu karena merupakan komposisi dari dua fungsi kontinu. Karena  $d(B, C) = 0$  dan  $\rho(g(B), g(C)) = \rho(a, b) > 0$ , maka  $g$  bukanlah suatu fungsi yang kontinu seragam. Hal ini kontradiksi dengan Lema 2.13 yang menyatakan bahwa setiap fungsi kontinu dari ruang  $(X, d)$  ke ruang  $(M, \rho)$  merupakan fungsi yang kontinu seragam. Jadi haruslah jika  $(x_n)$  dan  $(y_n)$  adalah dua barisan yang asimtotik di ruang Atsuj dengan  $x_n \neq y_n, \forall n$ , maka barisan  $(x_n)$  dan juga barisan  $(y_n)$  mempunyai titik *cluster*. Menurut Lema 2.10,  $(x_n)$  dan  $(y_n)$  mempunyai titik *cluster* yang sama.

**Teorema 2.17** *Jika  $(x_n)$  dan  $(y_n)$  adalah dua barisan yang asimtotik di ruang Atsuj  $(X, d)$  dengan  $x_n \neq y_n, \forall n$  yang mengakibatkan barisan  $(x_n)$  dan  $(y_n)$  mempunyai titik *cluster* di  $(X, d)$ , maka setiap barisan dari pasangan titik terisolasi di  $(X, d)$  mempunyai titik *cluster* dan setiap barisan di  $X'$ , himpunan titik-titik akumulasi di  $(X, d)$ , mempunyai titik *cluster*. [3]*

**Bukti:** Pertama-tama dibuktikan bahwa barisan dari pasangan titik terisolasi di  $X$  mempunyai titik *cluster*. Menurut Definisi 2.6,  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{2n-1}, x_{2n}) = 0$ . Artinya untuk setiap  $\varepsilon > 0$  terdapat bilangan asli  $N$  sedemikian sehingga  $d(x_{2n-1}, x_{2n}) < \varepsilon$  untuk  $n > N$ . Menurut Definisi 2.5,  $(x_{2n-1}) \approx (x_{2n})$ . Menurut premis barisan  $(x_{2n-1})$  dan barisan  $(x_{2n})$  mempunyai titik *cluster* yang sama. Jadi barisan pasangan titik terisolasi  $(x_n)$  mempunyai titik *cluster*.

Selanjutnya dibuktikan bahwa setiap barisan  $(x_n)$  di  $X'$  mempunyai titik *cluster*. Karena  $(x_n)$  barisan di  $X'$  maka terdapat barisan  $(y_n)$  di  $X$  dengan  $0 < d(x_n, y_n) < 1/n$ . Jadi  $(x_n)$  dan  $(y_n)$  adalah dua barisan yang asimtotik dan menurut premis, barisan  $(x_n)$  dan  $(y_n)$  mempunyai titik *cluster*. Jadi barisan  $(x_n)$  mempunyai titik *cluster*.

**Teorema 2.18** *Jika setiap barisan dari pasangan titik terisolasi di  $(X, d)$  mempunyai titik *cluster* dan setiap barisan di  $X'$ , himpunan titik-titik akumulasi di  $(X, d)$  mempunyai titik *cluster*, maka setiap barisan pseudo-Cauchy di  $(X, d)$  dengan suku-suku berbeda mempunyai titik *cluster*. [3]*

**Bukti:** Misalkan  $(x_n)$  adalah barisan pseudo-Cauchy dengan suku-suku yang berbeda. Ada dua kemungkinan yang terjadi:

- i.  $x_n \in X'$  untuk sebanyak tak hingga  $n$ . Berarti  $(x_n)$  mempunyai subbarisan  $(x_{n_k})$  di  $X'$ . Menurut premis  $(x_{n_k})$  mempunyai titik *cluster*. Jadi barisan  $(x_n)$  juga mempunyai titik *cluster*.
- ii. Hanya ada sebanyak hingga  $x_n \in X'$ . Jadi terdapat bilangan asli  $n_0$  sedemikian sehingga untuk setiap  $n > n_0$ ,  $x_n$  terisolasi di  $X$ . Karena  $(x_n)$  merupakan barisan pseudo-Cauchy dengan titik-titik yang berbeda, maka menurut Definisi 2.7 terdapat subbarisan  $(x_{n_k})$  dari  $(x_n)$  sedemikian sehingga untuk setiap  $k$ ,  $x_{n_k}$  terisolasi

dan  $d(x_{2n_k-1}, x_{2n_k}) < \frac{1}{k}$ . Jadi  $(x_n)$  merupakan barisan dari pasangan titik terisolasi di  $X$ . Menurut premis  $(x_n)$  mempunyai titik *cluster*.

### 3. KESIMPULAN

Pada makalah ini telah diperlihatkan jenis-jenis barisan di ruang Atsuji yang mempunyai titik *cluster*. Barisan-barisan tersebut adalah:

1. Dua barisan yang asimtotik. (Teorema 2.16)
2. Barisan pasangan titik terisolasi di  $X$ . (Teorema 2.17)
3. Barisan pada himpunan  $X'$ . (Teorema 2.17)
4. Barisan pseudo-Cauchy. (Teorema 2.18)

Pembuktian dari jenis-jenis barisan yang mempunyai titik *cluster* merupakan rantai pembuktian searah.

### DAFTAR PUSTAKA

- [1] Armstrong, M.A. (1983). *Basic Topology*. USA: Springer Science.
- [2] Bartle, R.G. & Sherbert, D.R. (2011). *Introduction to Real Analysis* (4th ed.). New York: John Wiley & Sons, Inc.
- [3] Jain, T. dan Kundu, S. (2006). *Atsuji Spaces: Equivalent Conditions*. *Topology Proceedings*. **30**. 301-325.
- [4] Jain, T. dan Kundu, S. (2007). *Atsuji Completions: Equivalent Characterizations. Topology and Its Applications*. **154**. 28-38.
- [5] Kreyszig, E. (1989). *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley and Sons.
- [6] Prasetio, M.I. (2015). *Sifat Subhimpunan dalam Ruang Metrik yang Memiliki Atsuji Completion*. Depok: Universitas Indonesia
- [7] Royden, H.L. (1968). *Real Analysis* (2nd. ed.). New York: Macmillan Publishing Co. Inc.
- [8] Wajih, A. (2015). *Syarat Barisan di Ruang Metrik yang Completion-nya adalah Ruang Atsuji agar Memiliki Subbarisan Cauchy*. Depok: Universitas Indonesia.

## ANALISIS KONVERGENSI DARI KOMPUTASI INVERS MATRIKS *CENTROSYMMETRIC*

Nur Khasanah<sup>1</sup>, Farikhin<sup>2</sup>, Bayu Surarso<sup>3</sup>  
<sup>1,2,3</sup>Universitas Diponegoro

**Abstract.** Matriks *centrosymmetric* merupakan salah satu matriks yang memiliki struktur simetri pada pertengahan matriks. Struktur matriks yang memiliki pola khusus memiliki peranan dalam menentukan keutamaan *pattern recognition*, keseragaman susunan linier antenna, struktur vibrasi, dan osilator kuantum mekanik. Peranan matriks *centrosymmetric* banyak melibatkan invers dari matriks *centrosymmetric*, sehingga memiliki pola dan formula khusus karena sifat khusus yang dimiliki matriks *centrosymmetric*. Penentuan inverse matriks *centrosymmetric* dapat diperoleh dari algoritma dalam menentukan invers dari matriks Hessenberg.

**Keywords:** matriks, *centrosymmetric*, invers, Hessenberg

### 1. Pendahuluan

Ilmu matematika terutama dalam bidang aljabar linier dan teori matriks, memiliki ketertarikan tersendiri bagi peneliti untuk mengkaji lebih mendalam. Perannya dalam dunia matematika membuat para ilmuwan terus melakukan perkembangan ilmu guna mengembangkan hasil penelitian yang telah diteliti terlebih dahulu.

Salah satu topik yang mengalami perkembangan ilmu yakni mengenai matriks *centrosymmetric*. Matriks *centrosymmetric* merupakan salah satu matriks yang memiliki struktur simetri pada pertengahan matriks. Bentuk dan struktur yang unik ini, membuat matriks *centrosymmetric* memiliki daya tarik tersendiri bagi para ilmuwan untuk meneliti tentang keunikan matriks *centrosymmetric*.

Seiring dengan perkembangan jaman, matriks *centrosymmetric* mengalami perkembangan ilmu pula. Dalam penelitian [1] diperoleh algoritma dalam menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks *centrosymmetric*. Karena bentuk dan susunan matriks yang unik, maka diperoleh cara khusus untuk menentukan vektor eigen yang sangat bermanfaat dalam bidang matematika.

Dalam penelitian [2] juga menemukan algoritma dalam perkalian matriks-vektor dari matriks *centrosymmetric*. Dalam

penelitiannya diperoleh cara dan pola khusus yang dimiliki matriks *centrosymmetric* jika dikalikan dengan vektor. Mengingat bahwa matriks *centrosymmetric* banyak digunakan dalam ilmu matematika, maka penelitian ini sangat berguna dalam penelitian-penelitian berikutnya.

Matriks *centrosymmetric* mempunyai keunikan dalam entri-entri matriksnya, maka peneliti matematika tertarik untuk mengkaji lebih dalam mengenai sifat dan karakteristik yang dimiliki oleh matriks *centrosymmetric*. Seperti dalam penelitian [3] menjelaskan bahwa dengan memanfaatkan metode interpolasi dan metode kuadrat terkecil, dikemukakan bahwa matriks yang memiliki sifat matriks *centrosymmetric* memiliki sifat Hermitian. Sebuah penemuan yang menarik yakni semakin meluas cakupan dan keunikan yang dimiliki matriks *centrosymmetric*.

Perkembangan dan kemajuan ilmu matriks *centrosymmetric* telah dirasakan oleh ilmuwan matematika guna penelitian-penelitian yang belum terungkap dalam hasil riset. Tidak hanya dalam ilmu matematika, keistimewaan matriks *centrosymmetric* banyak mengalami peran dalam berbagai ilmu dan bidang kajian. Dalam penelitian [4] mengatakan bahwa matriks *centrosymmetric* merupakan matriks penting dalam berbagai aplikasi seperti dalam analisis numerik, teori

kontrol, proses penggambaran sinyal digital, dan dapat diaplikasikan pada representasi matematika dalam dimensi tinggi, sinyal interferensi elektromagnetik nonlinier yakni seperti matriks *Toplitz*, yakni salah satu jenis khusus dari matriks *centrosymmetric* seperti pada contoh dalam penelitian [5-9]. Dalam berbagai bidang tersebut banyak menyelesaikan permasalahan-permasalahan dengan memanfaatkan matriks *centrosymmetric*. Maka, perkembangan ilmu matriks *centrosymmetric* sangat membantu dalam berbagai bidang terkait.

Selain itu, manfaat matriks *centrosymmetric* dalam penelitian [10] menunjukkan bahwa matriks *centrosymmetric* berperan penting menentukan jumlah area seperti *pattern recognition*, teori antenna, sistem mekanik dan elektrik, dan fisik kuantum. Aplikasi yang spesifik lagi yaitu dalam permasalahan analisis vibrasi yang menggunakan teori dari matriks *centrosymmetric* dalam permasalahan *Ordinary Differential Equation* (ODE).

Salah satu kajian yang banyak dimanfaatkan dalam pemakaian matriks *centrosymmetric* yakni bagaimana mendapatkan invers dari matriks *centrosymmetric*. Dalam penelitian [11] telah dibahas bagaimana menentukan algoritma invers dari matriks Hessenberg. Matriks Hessenberg merupakan salah satu matriks penting dalam analisis numerik. Sebagai contoh peranan dekomposisi matriks Hessenberg dalam peran penting dalam komputasi matriks nilai eigen. Dalam pembahasan [11] dijelaskan algoritma rekursif untuk menghitung invers  $n$ -per- $n$  matriks Hessenberg bawah. Di tahun 2012 [6] telah ditemukan pula spektral radius dari matriks *centrosymmetric* dengan ordo genap. Berdasarkan penelitian terdahulu tersebut, maka algoritma rekursif invers dari matriks Hessenberg dan penemuan dalam penelitian spektral radius dengan ordo genap, maka akan dicari algoritma invers

dari matriks persegi *centrosymmetric* dengan ordo genap. Pada tugas akhir ini akan dikaji mengenai analisis konvergensi dari komputasi dalam menentukan invers matriks *centrosymmetric* agar dapat dimanfaatkan dalam berbagai bidang ilmu dan membantu menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang berkaitan dalam invers matriks *centrosymmetric*.

## 2. Algoritma Invers Matriks Centrosymmetric

Pada pembahasan ini dibahas terlebih dahulu mengenai matriks Hessenberg yang akan digunakan sebagai acuan pengembangan algoritma dalam mendapatkan inverse matriks *centrosymmetric*.

### 2.1 Algoritma Invers Matriks Hessenberg

Dari penelitian yang telah dilakukan oleh Chen dan Yu [10], maka diperoleh hasil sebagai berikut :

#### **Teorema 2.1 [10].**

Jika diberikan matriks  $H$  yakni matriks segitiga bawah Hessenberg yang nonsingular yang semua elemen dari diagonal utama tidak nol, dan  $\tilde{H}$  merupakan matriks seperti yang telah dijelaskan sebelumnya. Partisi  $\tilde{H}^{-1}$  dalam bentuk  $\begin{pmatrix} \alpha & L \\ h & \beta^T \end{pmatrix}$ , dimana  $\alpha, L, h, \beta$  seperti yang telah dijelaskan sebelumnya, maka

- (1).  $H^{-1} = L - h^{-1}\alpha\beta^T$ , dan
- (2).  $\det(H) = (-1)^n h \cdot \prod_{i=1}^{n-1} h_{i,i+1}$ .

dimana  $h_{i,i+1}$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) merupakan elemen diagonal utama dari matriks  $H$ .

Dengan mengkombinasikan iterasi ini dengan Teorema 2.1 saat  $\tilde{H}^{-1}$  merupakan matriks segitiga bawah, maka diperoleh algoritma sebagai berikut [10] :

**Algoritma 1** : Perhitungan  $\tilde{H}^{-1}$ , dengan diketahui  $C$   
input  $n$  dan  $\tilde{H}$ ;

```

C = nol (n + 1); C(n + 1, n +
1) = 1;
untuk j = n: -1: 2
α = -1/Ĥ(j, j); C(j, j) = -α;
    untuk k = j + 1: n + 1
        C(k, j) = α * (C(k, k: n +
1) * Ĥ(k: n + 1, j))
    end
end;
C(1,1) = 1;
    untuk k = 2: n + 1
        C(k, j) = -(C(k, 2: k) *
Ĥ(2: k, 1))
    end.

```

**Algoritma 2 :** Perhitungan  $H^{-1}$  dan  $\det(H)$ , dengan diketahui  $V$  dan  $D$  secara berturut-turut

```

h = C(n + 1, 1); β = -1/h;
V = C(1: n, 2: n + 1) + β *
C(1: n, 1) * C(n + 1, 2: n + 1);
    D = (-1)n * h
    untuk j = 2: n
        D = D * Ĥ(j, j)
    end.

```

Algoritma ini lebih baik dibandingkan dengan algoritma Elouafi [11] yang mana membutuhkan  $\left(\frac{1}{2}n^3 + n^2\right)$  operasi dalam menghitung  $H^{-1}$ .

### 3. Algoritma Invers Matriks

#### Centrosymmetric

**Definisi 1.** Diberikan  $A = (a_{ij})_{n \times n} \in R^{n \times n}$  merupakan matriks *centrosymmetric*, jika  $a_{ij} = a_{n-i+1, n-j+1}$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq n$ , atau equivalen dengan  $J_n A J_n = A$ , dimana  $J_n = (e_n, e_{n-1}, \dots, e_1)$ , dan  $e_i$  merupakan vektor unit dengan elemen ke- $i$  adalah 1 dan elemen yang lainnya yaitu 0.

#### Lemma 3.1 [5].

Diberikan  $A = (a_{ij})_{n \times n} \in R^{n \times n} (n = 2m)$  yaitu matriks *centrosymmetric*, jika dan hanya jika  $A$  memiliki bentuk :

$$A = \begin{pmatrix} B & J_m C J_m \\ C & J_m B J_m \end{pmatrix}, \text{ dan } Q^T A Q = \begin{pmatrix} B - J_m C & 0 \\ 0 & B + J_m C \end{pmatrix},$$

dimana  $B \in R^{m \times m}$ ,  $C \in R^{m \times m}$  dan  $Q = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} I_m & I_m \\ -J_m & J_m \end{pmatrix}$ .

#### Lemma 3.3 [10].

Diberikan matriks Hessenberg  $A \in R^{m \times m}$ , dan  $\tilde{A}$  sama dengan matriks segitiga bawah seperti yang telah disebutkan sebelumnya. Dengan mengasumsikan

$A^{-1} = (c_1, c_2, \dots, c_{m+1})$ , maka seluruh  $c_j$  dapat dihitung secara berulang-ulang sebagai berikut

$$\begin{cases} c_{m+1} = e_{m+1} \\ c_j = (e_j - \sum_{i=j}^m a_{i,j} c_{i+1}) / a_{j-1,j} \\ \text{, untuk } j = m, m-1, \dots, 1 \end{cases}$$

Berdasarkan penelitian sebelumnya dengan penjelasan tersebut, maka diperoleh hasil komputasi dari determinan dan inverse dari matriks centrosymmetric dengan mengamati bentuk [4]

Berdasarkan Lemma 3.1, maka terdapat matriks orthogonal  $P = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} I_m & I_m \\ -J_m & J_m \end{pmatrix}$ , sedemikian sehingga

$$P^T H P = \begin{pmatrix} A - J_m B & 0 \\ 0 & A + J_m B \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Memisalkan  $M = A - J_m B$ ,  $N = A + J_m B$  tak sulit untuk menunjukkan bahwa  $M, N$  keduanya merupakan matriks Hessenberg. Menggunakan operasi inverse pada kedua ruas dari persamaan (3.4), sehingga

$$(P^T H P)^{-1} = P^T H^{-1} P = \begin{pmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & N^{-1} \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Dari Lemma 3.1, maka diketahui bahwa matriks  $H^{-1}$  juga merupakan matriks *centrosymmetric*, dan dapat diasumsikan bahwa

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} K & J_m Q J_m \\ Q & J_m K J_m \end{pmatrix}, \text{ dan } P^T H^{-1} P = \begin{pmatrix} K - J_m Q & 0 \\ 0 & K + J_m Q \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Dari persamaan (3.5) dan (3.6), dapat diperoleh

$$\begin{cases} K - J_m Q = M^{-1} \\ K + J_m Q = N^{-1} \end{cases} \text{ dengan kata lain} \\ \begin{cases} K = \frac{M^{-1} + N^{-1}}{2} \\ J_m Q = \frac{N^{-1} - M^{-1}}{2} \end{cases} \quad (3.7)$$

Dengan menunjukkan

$$\tilde{M}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_M & L_M \\ h_M & \beta_M^T \end{pmatrix}, \tilde{N}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_N & L_N \\ h_N & \beta_N^T \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

, maka berdasarkan Lemma 3.1, diperoleh persamaan

$$M^{-1} = L_M - h_M^{-1} \alpha_M \beta_M^T, N^{-1} = L_N - h_N^{-1} \alpha_N \beta_N^T. \quad (3.9)$$

Berdasarkan persamaan (3.6), (3.7) dan (3.9), akan diperoleh hasil perhitungan dari inverse dari matriks  $H$ .

**Teorema 3.1 [4].**

Diberikan  $H, P, M, N, \tilde{M}^{-1}, N^{-1}$  seperti yang telah dijelaskan sebelumnya, maka

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} K & J_m Q J_m \\ Q & J_m K J_m \end{pmatrix},$$

dimana

$$K = \frac{M^{-1} + N^{-1}}{2}, J_m Q = \frac{N^{-1} - M^{-1}}{2},$$

dan

$$M^{-1} = L_M - h_M^{-1} \alpha_M \beta_M^T, N^{-1} = L_N - h_N^{-1} \alpha_N \beta_N^T.$$

Dengan memperhatikan untuk inverse  $\tilde{M}^{-1}, N^{-1}$  dapat menggunakan metode dalam Lemma 3.3.

Dari persamaan (3.4), diperoleh

$$H = P \begin{pmatrix} A - J_m B & 0 \\ 0 & A + J_m B \end{pmatrix} P^T = P \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} P^T,$$

maka

$$\det(H) = \det(P) \cdot \det \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} \cdot \det(P^T) = \det(M) \cdot \det(N).$$

Diberikan  $(g_{ij})_{m \times m} \in R^{m \times m}, N = (q_{ij})_{m \times m} \in R^{m \times m}$ . Dari Lemma 2, diperoleh

$$\det(M) = (-1)^m h_M \cdot \det(\tilde{M}) = (-1)^m h_M \cdot \prod_{i=1}^{m-1} g_{i,i+1}, \\ \det(N) = (-1)^m h_N \cdot \det(\tilde{N}) = (-1)^m h_N \cdot \prod_{i=1}^{m-1} q_{i,i+1} \cdot \\ \text{sehingga} \\ \det(H) = (-1)^m h_M \cdot \prod_{i=1}^{m-1} g_{i,i+1} \cdot (-1)^m h_N \cdot \prod_{i=1}^{m-1} q_{i,i+1} \\ = h_N \cdot h_M \cdot \prod_{i=1}^{m-1} (g_{i,i+1} \cdot q_{i,i+1}).$$

**Teorema 3.2 [4].**

Diberikan  $H, P, M, N, \tilde{M}^{-1}, N^{-1}$  seperti yang telah dijelaskan sebelumnya, maka

$$\det(H) = h_N \cdot h_M \cdot \prod_{i=1}^{m-1} (g_{i,i+1} \cdot q_{i,i+1}).$$

**4. Kesimpulan**

Dalam penelitian sebelumnya telah diteliti mengenai algoritma dalam mendapatkan inverse dari matriks Hessenberg. Berdasarkan yang telah diperoleh dari algoritma inverse dari matriks Hessenberg, dapat dicari juga algoritma dalam menentukan inverse dari matriks *centrosymmetric* berdasarkan sifat khusus yang dimiliki oleh matriks *centrosymmetric* dengan mempertimbangkan angka penjalaran yang lebih kecil dibandingkan dengan penemuan di penelitian sebelumnya. Peranan matriks *centrosymmetric* dapat diterapkan dalam ODE dengan berdasarkan penelitian sebelumnya.

**5. Daftar Pustaka**

[1] Alan L. Andrew, Eigenvector of certain matrices, Linear Algebra and Its Appl. 7 (1973) 151-162.  
 [2] A. Melman, Symmetric centrosymmetric matrix-vector multiplication, Linear Algebra and Its Appl. 320 (2000) 193-198.  
 [3] Magdy Tawfik Hanna and Sana Ahmed Mansoori, A centrosymmetric matrix based technique for the interpolation of

- a hermitian signal, Numerical Linear Algebra with Appl. 10 (2003) 701-720
- [4] Di Zhao and Hongyi Li, On the computation of inverse and determinant of a kind of special matrices, Appl. Math. Comput. 250 (2015) 721-726.
- [5] W.F. Trench, Characterization and properties of a matrices with generalized symmetry of skew symmetric, Linear Algebra Appl. 377 (2004) 207-218.
- [6] H.-Y. Li, D. Zhao, F. Dai, D.-L. Su, On the spectral radius of a nonnegative centrosymmetric matrix, Appl. Math. Comput. 218 (9) (2012) 4962-4966.
- [7] W.C. Pye, T.L. Boullion and T.A. Atchison, The pseudoinverse of a centrosymmetric matrix, Linear Algebra and Its Appl. 6 (1973) 201-204.
- [8] H.-Y. Li, Z.-S. Gao, D. Zhao, Least squares solution of the matrix equation  $AXB+CYD=E$  with the least norm for symmetric arrowhead matrices, Appl. Math. Comput. 226 (2014) 719-724.
- [9] D. Zhao, H.-Y. Li, D.-L. Su, A numerical algorithm on the computation of the stationary distribution of a discrete time homogenous Markov chain, Math. Probl. Eng. 2012 (2012).
- [10] Datta and Morgera, On the reducibility of centrosymmetric matrices-Application in engineering problems, Circuits System Signal Process. Vol.8, No. 1, 1989
- [11] Yue-Hui Chen and Cheng-Yi Yu, A new algorithm for computing the inverse and determinant of a Hessenberg matrix, Appl. Math. Comput. 218 (2011) 4433-4436.
- [12] M. Elouafi, A.D. Aiat Hadj, A new recursive algorithm for inverting Hessenberg matrices, Appl. Math. Comput. 214 (2009) 497-499.
- [13] G.H. Golub, C.F. Van Loan, Matrix Computations, third ed., Johns Hopkins University Press, Baltimore and London, 1996. pp. 341-352.
- [14] Zhong-Yun Liu, Some properties of centrosymmetric matrices, Appl. Math. Comput. 141 (2003) 297-306.
- [15] X.G. Lv, T. Z. Huang, J. Le, A note on computing the inverse and determinant of a pentadiagonal Toeplitz matrix, Appl. Math. Comput. 206 (2008) 327-331.
- [16] Zhen-yun Peng and Xi-yang Hu, Lei Zhang, The inverse problem of centrosymmetric matrices with a submatrix constrain, Journal of Computational Mathematics, Vol.22, No.4, China (2004) 535-544.

## APLIKASI TEORI KEKONGRUENAN UNTUK MENGKONVERSIKAN HARI SAPTAWARA DAN PANCAWARA PADA KALENDER MASEHI

Arindia Dwi Kurnia<sup>1)</sup>, Lely Kartika Jauhara<sup>2)</sup>, Agus Sugandha<sup>3)</sup>,  
Agung Prabowo<sup>4)</sup>, Agustini Tripena Br. Sb.<sup>5)</sup>

1, 2, 3, 4, 5) Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,  
Universitas Jenderal Soedirman

Jl. Dr. Soeparno No. 64 Karangwangkal Purwokerto, Indonesia 53123

e-mail: arindiadwikurnia@gmail.com<sup>1)</sup>; aufklarung.profhara@gmail.com<sup>2)</sup>,  
agussugandha@ymail.com<sup>3)</sup>; agung\_ngph@yahoo.com<sup>4)</sup>; tripena1960@yahoo.co.id<sup>5)</sup>

**Abstract.** Pada Kalender Jawa terdapat dua buah nama hari yaitu hari pancawara dan hari saptawara. Saptawara merupakan siklus tujuh hari sekali (seperti siklus mingguan saat ini). Dalam Kalender Masehi, nama-nama hari saptawara identik dengan Senin, Selasa, Rabu, Kamis, Jumat, Sabtu dan Minggu. Sedangkan pancawara merupakan siklus lima hari sekali. Kalender Masehi tidak mengenal siklus pancawara ini. Nama-nama hari pancawara adalah Legi, Paing, Pon, Wage dan Kliwon. Tujuan penelitian ini adalah membuat formulasi matematika untuk mengkonversikan hari *saptawara* dan *pancawara* pada Kalender Masehi dengan menggunakan teori kekongruenan dan fungsi tangga. Sehingga hasil formulasi tersebut dapat digunakan untuk membantu mencari hari saptawara dan pancawara melalui tanggal, bulan dan tahun yang diketahui.

**Keywords:** *pancawara, saptawara.*

### 1. PENDAHULUAN

Pada kalender Jawa, terdapat dua nama hari yakni hari *saptawara* dan *pancawara*. Di mana hari *saptawara* merupakan siklus tujuh hari sekali (seperti siklus mingguan saat ini). Nama-nama hari *saptawara* adalah *Soma, Anggara, Buda, Respati, Sukra, Tumpak/Saniscara* dan *Radite*. Dalam kalender Masehi, nama-nama hari *saptawara* identik dengan Senin, Selasa, Rabu, Kamis, Jumat, Sabtu dan Minggu. Sedangkan *pancawara* merupakan siklus lima hari sekali. Kalender Masehi tidak mengenal siklus *pancawara* ini. Nama-nama hari *pancawara* adalah *Legi, Paing, Pon, Wage*, dan *Kliwon*.

Pada umumnya masyarakat Jawa mempunyai budaya ramalan yang digunakan untuk menentukan kalender jawa ketika akan mengadakan hajatan atau selamatan seperti pesta pernikahan, kelahiran (*weton*) dan kematian. Ramalan tentang penanggalan jawa tersebut dianggap penting, karena setiap hari *saptawara* dan *pancawara* memiliki arti sendiri yang dipercayai

oleh masyarakat Jawa. Untuk menentukan hari *saptawara* dan *pancawara* tersebut, perlu diketahui terlebih dahulu tentang penanggalan dalam kalender Masehi saat ini. Dengan diketahuinya penanggalan dalam kalender Masehi tersebut, maka nama hari *saptawara* dan *pancawara* dapat ditentukan dengan menggunakan aplikasi dari teori bilangan yakni teori kekongruenan.

### 2. ISI

#### 2.1 Kalender Masehi

Kalender masehi adalah kalender modern yang dipakai sekarang berasal dari bangsa romawi yang baru menggunakan sistem *syamsiyah* sejak tahun 46 sebelum masehi. Dahulu bangsa romawi memakai system lunar, kemudian mereka memadukan kedua system (*qamariyah-syamsiyah*) seperti bangsa yahudi. Tujuh bulan lamanya 29 hari, empat bulan lainnya 31 hari, dan satu bulan lainnya 28 hari. Jadi setahun lamanya 355 hari. Kemudian ada bulan tambahan yang disebut *mercedonius* sebagai bulan ketiga belas. Urutan nama

bulannya sebagai berikut : *martius, aprilis, maius, junius, quintiles, sextilis, September, October, November, December, januarius dan februarius*. Pada tahun 153 sebelum masehi, *pontific maximus* (senat romawi) menetapkan bulan *januarius* sebagai bulan pertama. Dengan urutan nama bulan tetap, sehingga terjadi kesalahan kaprahan dalam menebut nama bulan. Misalnya bulan oktober yang berasal dari kata latin. *Octa*, yang berarti delapan, kini menjadi bulan kesepuluh.

## 2.2 Saptawara

*Saptawara* membagi satuan harinya menjadi tujuh, yaitu: *radite, soma, anggara, budha, wrespati, sukra, saniscara* atau tumpak. Namun, ketujuh satuan hari tersebut merupakan istilah-istilah yang diadopsi dari system kalender Saka sejak masuknya pengaruh India di Nusantara. Sebabkalender Saka, Gregorian, Hijriah maupun yang lain, tidak memiliki siklus lain kecuali *saptawara* (siklus yang terdiri dari tujuh hari) sehingga *saptawara* yang dalam konteks lokalitas Nusantara disebut jejean pun diubah istilah sesuai dengan agama yang mendominasi. Di Indonesia, saat ini saptawara membagi satuan harinya menggunakan istilah: Senin, Selasa, Rabu, Kamis, Jum'at, Sabtu, Minggu. Dalam istilah internasional: *Sunday, Monday, Tuesday, Wednesday, Thursday, Friday, Saturday*. Namun, dalam banyak literatur, saptawara di sini hanya disebutkan istilah India-nya saja, sehingga dikhawatirkan makna filosofis yang terkandung dalam jejean yang merupakan produk asli pemikiran asli Nusantara hilang seiring berjalannya waktu. Oleh karenanya, dalam pada ini penulis hanya akan memaparkan *saptawara* dalam konteks Nusantara : jejean.

## 2.3 Pancawara

*Pancawara* adalah nama dari sebuah pekan atau minggu yang terdiri dari 5 hari, dalam budaya Jawa dan Bali. *Pancawara* juga disebut sebagai hari pasaran dalam bahasa Jawa karena beberapa pasar tradisional pada zaman dahulu hanya buka pada hari tertentu saja, misalkan Pasar Legi dan Pasar Pon di Solo hanya buka pada hari Legi dan Pon saja dalam satu minggu kalender Jawa (siklus 5 hari). Dalam sistem penanggalan Jawa dan Bali, terdapat 2 macam siklus waktu: siklus mingguan dan siklus pasaran. Dalam siklus mingguan, satu minggu dibagi menjadi 7 hari, seperti yang kita kenal sekarang (Senin, Selasa, Rabu, Kamis, Jumat, Sabtu, dan Minggu). Dalam siklus pasaran, satu pekan terdiri dari 5 hari pasaran. Nama-nama hari dalam sistem *pancawara* (pasaran) ini adalah: *paing – pon – wage – kliwon – legi/umanis*.

Menurut kalender Jawa, tiap hari dan tanggal dalam sistem kalender Masehi selalu mempunyai dua macam nama hari. Misalnya 1 Januari 2001 adalah hari Senin - Paing, berikutnya tanggal 2 Januari 2001 adalah hari Selasa - Pon, kemudian diikuti hari Rabu - Wage, disusul hari Kamis - Kliwon, Jumat - Legi, Sabtu - Paing, Minggu - Pon, Senin - Wage, Selasa - Kliwon, dan seterusnya. Kombinasi dua macam hari ini sampai sekarang masih dipakai dalam penerbitan surat kabar berbahasa Jawa, seperti harian Kedaulatan Rakyat yang terbit di kota Yogyakarta.

## 2.4 FungsiBlanganBulatTerbesar (FungsiTangga)

Domain : R  
Range : Himpunan  
bilangan bulat  
Lambang :  $x$  menyatakan  
bilangan *bulat terbesar yang lebih*

kecil atau sama dengan  $x$ , yaitu:  
 $x=n$ , jika  $n \leq x \leq n+1$   
 Fungsi  $f(x) = x$  dinamakan *fungsi bilangan bulat terbesar* (fungsi tangga)  
 Grafik : Menyerupai Tangga  
 Contoh: Jika  $x = 3,6$ . Maka  $x = 3,6=3$

### 2.5 Modulo atau Kekongruenan

Misalkan  $a$  dan  $b$  adalah suatu bilangan bulat. Jika  $m$  suatu bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1, maka  $a$  dikatakan kongruen dengan  $b$  modulo  $m$  ( ditulis  $a \equiv b \pmod{m}$  ) jika  $m$  membagi habis  $(a - b)$ .

Atau  $a \equiv b \pmod{m}$  jika  $a$  dan  $b$  memberikan sisa yang sama bila dibagi oleh  $m$ .

Contoh:  $5 \equiv 2 \pmod{3}$ , 2 adalah sisa pembagian oleh 3.

## 3. PEMBAHASAN

### a. Menentukan Hari Saptawara

Hari *saptawara* dapat ditentukan dengan formulasi matematika sebagai berikut [2]:

$$W_s = k + [2,6m - 0,2] - 2c + y + \left[\frac{y}{4}\right] + \left[\frac{c}{4}\right] \pmod{7}$$

dengan  $k$  = tanggallahir,  $m$  = angka bulan lahir,  $c$  = angka abad,  $y$  = dua digit setelah angka abad pada bulan Maret s.d Desember. Sedangkan untuk bulan Januari dan Februari,  $y$  = dua digit setelah angka abad dikurangi satu.

**Tabel 3.1.**Angka bulan lahir

Nama Bulan	AngkaBulan
Maret	1
April	2
Mei	3

Juni	4
Juli	5
Agustus	6
September	7
Oktober	8
November	9
Desember	10
Januari	11
Februari	12

**Tabel 3.2.**Sisa perhitungan

Nama Hari	Angka Hari
Minggu	0
Senin	1
Selasa	2
Rabu	3
Kamis	4
Jumat	5
Sabtu	6

Contoh :Menentukan hari *saptawara* pada tanggal 17 Agustus 1945

$$k=17, m=6, c=19, y=45$$

$$W_s = 17 + [2,6m - 0,2] - 2c + y + \left[\frac{y}{4}\right] + \left[\frac{c}{4}\right] \pmod{7}$$

$$= 17 + [2,6 \times 6 - 0,2] - 2 \times 19 + 45 + \left[\frac{45}{4}\right] +$$

$$\left[\frac{19}{4}\right] \pmod{7}$$

$$= 17 + [15,4] - 38 + 45 + [11,25] + [4,75] \pmod{7}$$

$$= 17 + 15 - 38 + 45 + 11 + 4 \pmod{7}$$

$$= 54 \pmod{7}$$

$$= 5 \text{ (Jum'at)}$$

Jadi hari kelahiran kemerdekaan Indonesia jatuh pada hari Jumat.

### b. Menentukan Hari Pancawara

#### 3.2.1 Tahun Kabisat

Banyaknya tahun kabisat pada setiap abad berbeda-beda. Setiap 100 tahun terdiri dari 76 tahun biasa dan 24 tahun kabisat. Banyaknya tahun kabisat selama 100 tahun ada 24, maka sisa hari selama tahun tersebut adalah  $24 \equiv 4 \pmod{5}$  atau 4 hari. Selanjutnya, tahun kabisat selama 200 tahun ada 48, maka sisa hari

selama tahun tersebut adalah  $48 \equiv 3 \pmod{5}$  atau 3 hari. Banyaknya tahun kabisat selama 300 tahun ada 72, maka sisa hari selama tahun tersebut adalah  $72 \equiv 2 \pmod{5}$  atau 2 hari. Sedangkan selama 400 tahun, banyaknya tahun kabisat ada 96 tahun. Akan tetapi, karena setiap tahun yang merupakan kelipatan dari 400 adalah tahun kabisat, maka banyaknya tahun kabisat selama tahun tersebut akan ditambah satu, sehingga ada 97 tahun kabisat. Dengan kata lain, sisa hari selama 400 tahun adalah  $97 \equiv 2 \pmod{5}$  atau 2 hari. Begitu pula dalam 800 tahun, 1200 tahun dan 1600 tahun juga terdapat 2 sisa hari. Selanjutnya, banyaknya tahun kabisat antara tahun 1600 sampai dengan tahun  $N$ ,  $N \geq 1600$  diperoleh dari :

1. Banyaknya tahun kabisat setiap 4 tahun sekali yaitu ada  $\left[ \frac{(N-1600)}{4} \right]$
2. Banyaknya tahun kabisat setiap 100 tahun sekali yaitu ada  $\left[ \frac{(N-1600)}{100} \right]$
3. Banyaknya tahun kabisat setiap 400 tahun sekali yaitu ada  $\left[ \frac{(N-1600)}{400} \right]$

Karena sisa hari pada tahun kabisat 1600 ada 2 hari, maka banyaknya tahun kabisat sampai dengan tahun ke- $N$  menjadi :

$$dN = 2 + \left( \left[ \frac{(N-1600)}{4} \right] + \left[ \frac{(N-1600)}{100} \right] + \left[ \frac{(N-1600)}{400} \right] \right)$$

dapat disederhanakan menjadi

$$dN = \left[ \frac{N}{4} \right] - \left[ \frac{N}{100} \right] + \left[ \frac{N}{400} \right] - 386$$

Jika  $N = 100C + Y$  maka

$$\begin{aligned} dN &= 24C + \left[ \frac{Y}{4} \right] + \left[ \frac{C}{4} \right] - 386 \pmod{5} \\ &= 4C + \left[ \frac{Y}{4} \right] + \left[ \frac{C}{4} \right] - 1 \pmod{5} \end{aligned}$$

Dimana  $d_N$  = banyaknya tahun kabisat.  $c$  = angka abad,  $y$  = dua digit terakhir setelah angka abad.

### 3.2.2 Inspeksi Bulan

Tabel 3.4 Sisa hari dalam satu bulan

Nama Bulan	Sisa Jumlah Hari (mod 5)
Maret - April	$31 \equiv 1 \pmod{5}$
April - Mei	$30 \equiv 0 \pmod{5}$
Mei - Juni	$31 \equiv 1 \pmod{5}$
Juni - Juli	$30 \equiv 0 \pmod{5}$
Juli - Agustus	$31 \equiv 1 \pmod{5}$
Agustus - September	$31 \equiv 1 \pmod{5}$
September - Oktober	$30 \equiv 0 \pmod{5}$
Oktober - November	$31 \equiv 1 \pmod{5}$
Nov - Desember	$30 \equiv 0 \pmod{5}$
Desember - Januari	$31 \equiv 1 \pmod{5}$
Januari - Februari	$31 \equiv 1 \pmod{5}$
<b>Jumlah</b>	<b>7</b>
<b>Rata-rata</b>	<b>0.6</b>

Perhatikan bahwa terdapat 11 sisa perhitungan dengan total 7 hari, maka rata-ratanya adalah 0,6 sisa hari. Sehingga dengan cara inspeksi diperoleh formulasi matematika yang tepat yaitu:  $b = [0.6m + 1.8] - 2$ .

### 3.2.3 Formulasi Hari Pancawara

Hari *pancawara* dapat ditentukan dengan formulasi matematika sebagai berikut:

$W_p = \text{tanggal} + \text{bulan} + \text{banyaknya tahun kabisat tahun ke-}N \pmod{5}$ .

Sehingga diperoleh formulasi hari pancawara secara umum:

$$W_p = k + [0.6m + 1.8] - 2 + 4C + \left[ \frac{Y}{4} \right] + \left[ \frac{C}{4} \right] - 1 \pmod{5}$$

$$W_p = k + [0.6m + 1.8] + 4C + \left[ \frac{Y}{4} \right] + \left[ \frac{C}{4} \right] - 3 \pmod{5}, \text{ dengan } k = \text{tanggal.}$$

**Tabel 3.3** Sisa perhitungan  
*pancawara*

Nama Pancawara	Sisa Perhitungan Pancawara
Legi/Manis	0
Paing	1
Pon	2
Wage	3
Kliwon	4

Contoh :

Menentukan hari *pancawara* untuk tanggal 17 Agustus 1945.

Diketahui:  $k=17$ ,  $m=6$ ,  $c=19$  dan  $y=45$ , nilai  $c=19$

Ditanyakan Wp?

Jawab :

$$Wp = k + [0.6m + 1.8] + 4C + \left[\frac{Y}{4}\right] + \left[\frac{C}{4}\right] - 3 \pmod{5}$$

$$= 17 + (4 \times 6 + 1.8) + [0.6 \times 6 + 1.8] + \left[\frac{45}{4}\right] + \left[\frac{19}{4}\right] - 3 \pmod{5}$$

$$= 17 + 7.8 + [5.4] + [11.25] + [4.75] - 3 \pmod{5}$$

$$= 17 + 7.8 + [5.4] + [11.25] + [4.75] - 3 \pmod{5}$$

## 5. DAFTAR PUSTAKA

- [1] <https://spektrumku.wordpress.com/2008/12/09/mencari-hari-pasaran-jawa-dalam-kalender-masehi-menggunakan-aritmatika-sederhana/> diakses 25 Juni 2015 pukul 09:03 WIB.
- [2] Rosen, K. H. (1986). *Elementary Number Theory and Its Application*. Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts.
- [3] [Scriptoriummathjava.weebly.com](http://Scriptoriummathjava.weebly.com)

$$= 110 \pmod{5}$$

$$= 0 \pmod{5}$$

Legi/Manis.

Jadi, hari *pancawara* untuk kemerdekaan Indonesia yaitu Legi/Manis.

## 4. KESIMPULAN

1. Formulasi matematika untuk hari *saptawara* yaitu:

$$W_s = k + [2.6m - 0.2] - 2c + y + \left[\frac{Y}{4}\right] + \left[\frac{C}{4}\right] \pmod{7}$$

2. Formulasi matematika untuk hari *pancawara* yaitu:

$$Wp = k + [0.6m + 1.8] + 4C + \left[\frac{Y}{4}\right] + \left[\frac{C}{4}\right] - 3 \pmod{5}$$

## APLIKASI TEORI KEKONGRUENAN UNTUK MENENTUKAN HARI SAPTAWARA DAN PANCAWARA PADA TANGGAL HIJRIYAH TERTENTU

Irfan Nurhidayat<sup>1)</sup>, Viqi Nursekha<sup>2)</sup>, Agung Prabowo<sup>3)</sup>, Agus Sugandha<sup>4)</sup>,  
dan Agustini Tripena Br. Sb.<sup>5)</sup>

1, 2, 3, 4, 5) Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,  
Universitas Jenderal Soedirman

Jl. Dr. Soeparno No. 64 Karangwangkal Purwokerto, Indonesia 53123

e-mail:

irfannurhidayat09@gmail.com<sup>1)</sup>

viqinursekha@unsoed.ac.id<sup>2)</sup>

agung\_nghp@yahoo.com<sup>3)</sup>

agussugandha@ymail.com<sup>4)</sup>

tripena1960@yahoo.co.id<sup>5)</sup>

**Abstrak.** Prasasti kerajaan Islam banyak menggunakan penanggalan Hijriyah. Penanggalan tersebut menjadi menarik sebab di dalamnya terkandung pola atau struktur tertentu yang terkait dengan teori kekongruenan. Akibatnya, Penanggalan Hijriyah pada prasasti dapat dipandang sebagai sandi bilangan tahun. Tujuan penulisan artikel ini adalah mengonversi kalender Hijriyah pada kalender Masehi serta mencari hari *saptawara* dan *pancawara*-nya, dengan menggali kebenaran-kebenaran dari prasasti yang telah ditemukan sejarahwan, karena mungkin saja hasil prasasti yang dituliskan sejarahwan berupa tanggal, hari, bulan, tahun prasasti masih keliru. Metode penelitian yang dilakukan adalah penelusuran pustaka.

**Kata kunci:** *hijriyah, kekongruenan, prasasti kerajaan islam.*

**Mathematical Subject Classification 2010:** 11A07 ; 01A29

### 1. PENDAHULUAN

Penentuan awal bulan Ramadhan dan Syawal pada hakikatnya didasarkan pada penentuan awal bulan tahun Qamariyah yang perhitungannya didasarkan pada peredaran bulan mengelilingi bumi. Sistem ini dikenal dengan sistem Qamariyah, lunar sistem atau tahun candra [4].

Idul Fitri tahun 1427 H masih menyisakan bayang-bayang kenangan. Peralnya, hari raya yang semestinya sangat ditunggu-tunggu kedatangannya oleh ratusan juta umat Islam di Indonesia, tiba-tiba menjelang hari H-nya, banyak bahkan mayoritas mereka dibuat bingung oleh keputusan yang masih simpang siur mengenai ketetapan kapan hari H-nya. Sebenarnya masalah ini bukanlah hal baru di negeri kita ini [4]. Oleh karena itu, penelitian ini sangat penting dilakukan sebagai acuan para sejarahwan untuk menentukan kebenaran hari *saptawara* dan *pancawara* pada tanggal Hijriyah tertentu.

### 2. APLIKASI TEORI KEKONGRUENAN UNTUK MENENTUKAN HARI SAPTAWARA DAN PANCAWARA PADA TANGGAL HIJRIYAH TERTENTU

Inti dari pembahasan yang akan dikaji penulis, yaitu dengan mengonversi kalender Hijriyah pada kalender Masehi, dengan menggali kebenaran-kebenaran dari prasasti yang telah ditemukan sejarahwan, karena mungkin saja hasil prasasti yang dituliskan sejarahwan berupa tanggal, hari, bulan, tahun prasasti masih keliru. Untuk itu, penulis berpikir agar tidak terjadi kesalahan perihal penentuan tanggal, hari, bulan, tahun ditemukan prasasti oleh sejarahwan, maka dengan aplikasi kekongruenan akan meminimalisir kesalahan dari sejarahwan.

#### 2.1 Menentukan Hari *Saptawara* dan Hari *Pancawara*

Menurut [2] menjelaskan, dalam masyarakat Jawa, hari lahir seseorang disebut *weton* yang dinyatakan oleh kombinasi dua jenis hari, yaitu *saptawara* dan *pancawara*. *Saptawara* disebut juga hari tujuh, *dina pitu*,

*minggon* atau *padinan*. Sedangkan *pancawara* disebut hari lima, *dina lima* atau *pasaran*. *Weton* selalu memunculkan nama hari *saptawara* terlebih dahulu. Kombinasi *saptawara* dan *pancawara* tidak hanya muncul dalam *weton* tetapi digunakan dalam semua peristiwa yang memerlukan penamaan hari. Terkait dengan *weton*, manusia Jawa akan merayakan ulang hari lahir setiap 35 hari sekali. Jika seseorang lahir pada hari *saptawara* Selasa dan hari *pancawara* Paing, maka *weton*-nya adalah Selasa-Paing (tidak disebut Paing-Selasa). Tiga puluh lima hari selanjutnya, Selasa-Paing muncul kembali. Apabila tanggal dalam Kalender Masehi diketahui, maka kombinasi hari *saptawara-pancawara* dapat ditentukan, baik dengan metode yang dikembangkan dari teori kekongruenan maupun metode yang telah digunakan orang Jawa selama ini.

Kata '*sapta*' berarti tujuh dan kata '*wara*' berarti hari. Kedua kata tersebut berasal dari bahasa Sansekerta. Kata '*saptawara*' dapat diartikan 'hari yang berjumlah tujuh'. Dengan kata lain, *saptawara* adalah siklus tujuh harian. Penggunaan siklus tujuh harian dalam budaya Jawa identik dengan siklus satu minggu dalam kalender Masehi. Siklus tujuh harian '*saptawara*' telah digunakan sejak era Mataram Kuno (732 Masehi). Prasasti Canggal dari tahun 732 Masehi memahatkan nama hari *Soma* yang identik dengan hari Senin. Nama-nama hari *saptawara* mengalami perubahan nama sesuai dengan perkembangan masyarakat Jawa dari penganut Hindu dan Budha hingga Islam. Berikut ini adalah nama-nama hari *saptawara*.

**Tabel 1.** Nama-Nama Hari *Saptawara*

Periode 654 s.d. 1555 S 732 s.d. 1633 M	Periode 1555 J s.d. sekarang 1633 M s.d. sekarang	Bahas a Indone sia	Konvers i dalam Kalende r Masehi
<i>Dite/Radite/Raditya</i>	<i>Ahad/Minggu</i>	Minggu	Sunday
<i>Soma</i>	<i>Senen</i>	Senin	Monday
<i>Anggara</i>	<i>Slasa</i>	Selasa	Tuesday
<i>Budha/Buda</i>	<i>Rebo</i>	Rabu	Wednesday
<i>Respati/Wrhaspati</i>	<i>Kemis</i>	Kamis	Thursday
<i>Sukra</i>	<i>Jemuah</i>	Jumat	Friday

<i>Tumpak/Sanicara</i>	<i>Setu</i>	Sabtu	Saturday
------------------------	-------------	-------	----------

Kata '*panca*' berarti lima dan kata '*wara*' berarti hari. Kedua kata tersebut berasal dari bahasa Sansekerta. Kata '*pancawara*' dapat diartikan 'hari yang berjumlah lima'. Dengan kata lain, *pancawara* adalah siklus lima harian. Penggunaan siklus lima harian dalam budaya Jawa tidak ditemukan dalam kalender Masehi. Siklus harian '*pancawara*' digunakan lebih lambat dibanding siklus tujuh harian *saptawara*. Penggunaan *pancawara* baru direkam dalam Prasasti Manjusirgrha dari tahun 792 Masehi yang memahatkan nama hari *Pon*. Nama-nama hari *pancawara* cenderung tidak berubah. Namun, terdapat nama-nama sepadan yang juga digunakan. Berikut ini adalah nama-nama hari *pancawara*.

**Tabel 2.** Nama-Nama Hari *Pancawara*

Periode 654 s.d. 1555 S 732 s.d. 1633 M	Periode 1555 J s.d. sekarang 1633 M s.d. sekarang	Bahasa Indones ia	Konver si dalam Kalend er Masehi
<i>Pahing</i>	<i>Paing</i>	-	-
<i>Pon</i>	<i>Pon</i>	-	-
<i>Wagai</i>	<i>Wage</i>	-	-
<i>Kaliwuan</i>	<i>Kliwon</i>	-	-
<i>Umanis/Manis</i>	<i>Legi/Manis</i>	-	-

## 2.2 Rumus Penentuan Awal Bulan Hijriyah Kekongruenan

*Definisi* [3]: Jika  $m$  suatu bilangan bulat positif, maka  $a$  kongruen dengan  $b$  modulo  $m$  (ditulis  $a \equiv b \pmod{m}$ ) bila  $m$  membagi  $(a - b)$ . Jika  $m$  tidak membagi  $(a - b)$  maka dikatakan bahwa  $a$  tidak kongruen dengan  $b$  modulo  $m$  (ditulis  $a \not\equiv b \pmod{m}$ ).

*Teorema* [3]:  $a \equiv b \pmod{m}$  bila dan hanya bila ada bilangan bulat  $k$  sehingga  $a = mk + b$ .

Siklus Kalender dengan Hisab Urfi [1]

1. Satu daur/siklus kalender Hijriyah = 30 tahun (10631 hari), terdiri dari 11 tahun kabisat/panjang (355 hari tiap tahun) dan 19 tahun *basithah*/pendek (354 hari tiap tahun).
2. 11 tahun kabisat dalam kalender Hijriyah adalah tahun ke- 2, 5, 7, 10, 13, 15, 18, 21, 24, 26 dan 29. Jadi dalam 18 tahun

- kabisatnya adalah tahun ke- 2, 5, 7, 10, 13, 15, 18, (ada 7 tahun).
3. Pada tahun 1582, Paus Gregorius ke-XIII atas saran ahli falaknya merubah tanggal 5 Oktober menjadi 15 Oktober (maju 10 hari), selain itu tahun 1700, 1800 dan 1900 yang semula termasuk tahun panjang dirubah menjadi tahun pendek (maju 3 hari lagi), sehingga jumlahnya 13 hari.
  4. Satu siklus kalender Masehi = 4 tahun (1461 hari), terdiri dari 1 tahun panjang/kabisat (366 hari dalam satu tahun) dan 3 tahun pendek (365 hari dalam satu tahun).
  5. Tanggal 01 Muharram 01 H, bertepatan dengan hari Kamis tanggal 15 Juli 622 M.
  6. 12 bulan Hijriyah : (1)Muharram, (2)Shafar, (3)Rabi'ul Awal, (4)Rabi'ul Akhir, (5)Jumadil Awal, (6)Jumadil Akhir, (7)Rajab, (8) Sya'ban, (9)Ramadhan, (10)Syawwal, (11)Dzulqa'dah, (12)Dzulhijjah.

(Rumus 1)

Misalkan T = tanggal Hijriyah, B = bulan Hijriyah, Th = tahun Hijriyah, SK = banyak siklus kabisat Hijriyah, SPS = sisa pembagian siklus, KSPS = Kabisat dari SPS tahun, (B-1)H = konversi bulan Hijriyah ke hari, diperoleh (T, B, Th) = (Th-1) tahun + (B-1) bulan + T hari.

(1)  $Th - 1 = 30.SK + SPS$ ,

(2)  $D = [SK.10631 + SPS.354 + KSPS + (B-1)H + T]$  hari,

(3) Mencari hari *saptawara*  $D \pmod{7}$  dan *pancawara*  $D \pmod{5}$ .

Untuk mengetahui harinya, maka *saptawara*  $D \pmod{7} = N_s$  dengan  $N_s : 0 = \text{Rabu}, 1 = \text{Kamis}, 2 = \text{Jumat}, 3 = \text{Sabtu}, 4 = \text{Minggu}, 5 = \text{Senin}, 6 = \text{Selasa}$ ; *pancawara*  $D \pmod{5} = N_p$  dengan  $N_p : 0 = \text{Wage}, 1 = \text{Kliwon}, 2 = \text{Manis}, 3 = \text{Pahing}, 4 = \text{Pon}$ .

(4) Mengonversi tanggal Hijriyah ke Masehi  $D + 227015$  (selisih hari Masehi dengan Hijriyah) + 13 (tambahan hari Gregorius) = TM,

$TM = 1461.H + S$ , dengan 1461 adalah jumlah hari pada siklus kabisat masehi (4 tahun)

$TM = 4.H + (365.V + Vq)$ , dengan H, S, V, Vq  $\in$  bilangan bulat positif

$Vq = (31+28+31+30+\dots + Ir)$  atau untuk tahun kabisat masehi  $Vq = (31+29+31+30+\dots + Ir)$ ,

$Vq - Ir = 31+28/29+31+30+\dots = n$  bulan,

Maka diperoleh  $[Ir, (n+1), 4.H+V+1]$  Masehi = [tanggal, bulan, tahun] Masehi.

## 2.3 Menentukan Kebenaran Nama Hari Saptawara dan Nama Hari Pancawara

Telah dijelaskan pada Tabel 1 dan Tabel 2 nama-nama hari *saptawara* dan *pancawara*, berikut akan diuji kebenaran nama hari *saptawara* dan *pancawara*.

Contoh 2.1

Diketahui 01 Muharram 1437 H, tentukan tanggal masehi, *Saptawara*, *Pancawara*.

Penyelesaian:

dengan (Rumus 1) diperoleh

(01, Muharram, 1437) = 1436 tahun + 0 bulan + 1 hari.

(1)  $1436 = 30.47 + 26$ , diperoleh SK = 47 dan SPS = 26 (dalam 26 tahun hijriyah ada 10 tahun kabisat, sehingga KSPS = 10)

(2)  $[47.10631 + 26.354 + 10 + 0 + 1]$  hari = 508872 hari,

(3) Mencari hari *saptawara*  $508872 \pmod{7} \equiv 0 = \text{Rabu}$ , dan *pancawara*  $508872 \pmod{5} \equiv 2 = \text{Manis}$ ,

(4) Mengonversi tanggal Hijriyah ke Masehi

$508872 + 227015 + 13 = 735900$ ,

735900 hari = 1461 hari x 503 + 1017 hari, diperoleh H = 503 dan S = 1017

735900 hari = 4 tahun x 503 + (365.2 + 287) hari, diperoleh V = 2 dan Vq = 287

$287 = (31+28+31+30+31+30+31+30+31+14)$ , diperoleh Ir = 14

$287 - 14 = (31+28+31+30+31+30+31+30+31)$  = 9 bulan, diperoleh n = 9

Maka diperoleh [14, 10, 2015] = [14, Oktober, 2015]. Sehingga 01 Muharram 1437 H bertepatan dengan Rabu Manis, 14 Oktober 2015 M.

## 3. METODE

Penulis melakukan studi pustaka dalam menemukan bukti sejarah, yaitu dengan membaca, mempelajari, mencari bahan dari literatur atau dengan mencari referensi lain seperti dari internet yang dapat membantu dalam penyusunan penelitian. Batasan penelitian ini dari 01 Muharram 01 H, yang bertepatan dengan hari Kamis tanggal 15 Juli 622 M [4].

## 4. KESIMPULAN

Dalam artikel ini penulis tidak hanya mengonversi kalender Hijriyah menjadi kalender Masehi tetapi dengan menggunakan (Rumus 1) penulis bisa mengonversi kalender Hijriyah menjadi kalender Masehi serta dapat menentukan hari *Saptawara* dan *Pancawara* sekaligus.

### **UCAPAN TERIMA KASIH**

Puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT, karena berkat limpahan taufik, hidayah dan inayah-Nya hingga penulis dapat menyelesaikan artikel ini dengan judul “Aplikasi Teori Kekongruenan untuk Menentukan Hari *Saptawara* dan *Pancawara* pada Tanggal Hijriyah Tertentu”. Sholawat serta salam semoga tetap tercurah kepada junjungan kita, Nabi Besar Muhammad SAW. Penulis mengucapkan terimakasih yang sebesar-besarnya kepada DIPA UNSOED Nomor DIPA-023.04.2.189899/2015 Tanggal 14 November 2014 yang telah mendanai penelitian ini.

Penulis menyadari masih terdapat kekurangan dalam penyusunan artikel ini. Oleh karena itu, saran dan kritik yang membangun sangat penulis harapkan. Akhir kata, penulis mengharapkan karya ilmiah ini dapat bermanfaat bagi penulis khususnya, dan pembaca pada umumnya.

### **5. DAFTAR PUSTAKA**

- [1] Majelis Tarjih dan Tajdid PP Muhammadiyah, (2009). *Pedoman Hisab Muhammadiyah*. Cetakan II. Yogyakarta: Majelis Tarjih dan Tajdid PP Muhammadiyah.
  - [2] Prabowo, A., (2011). “Sengkala: Sandi Bilangan Tahun”. *Prosiding Seminar Nasional Matematika 2011, Universitas Parahyangan*; **Vol. 6 ; Th. 2011 ;** 240-248.
  - [3] Sukirman, (2006). *Pengantar Teori Bilangan*. Cetakan I. Yogyakarta: Hanggar Kreator.
  - [4] Wahyuningsih, S., (2008). *Aplikasi Segitiga Bola Langit Dalam Penentuan Awal Bulan Tahun Qamariyah*. Skripsi. Purwokerto: Universitas Muhammadiyah Purwokerto.
-

## APLIKASI METODE DEKOMPOSISI LU DI BIDANG GEOTHERMAL

Widowati<sup>1</sup>, Ririn Sulpiani<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Jurusan Matematika FSM UNDIP

Jl. Prof Soedharto SH Tembalang Semarang

UniversitasDiponegoro

[wiwied.mathundip@gmail.com](mailto:wiwied.mathundip@gmail.com)<sup>1</sup>, [ririn.sulpiani@gmail.com](mailto:ririn.sulpiani@gmail.com)<sup>2</sup>

**Abstrak.** Permasalahan nyata dibidang sains dan teknologi dapat direpresentasikan dalam persamaan matematika begitu pula dibidang geothermal. Pada kawasan manifestasi panas bumi Gedong songo, Gunung Ungaran, Semarang, telah dilakukan penelitian mengenai perubahan suhu dan aliran fluida dengan metode pengukuran suhu permukaan dangkal, ketinggian, dan *spontaneous-potential*. Kemudian dari data tersebut dikaji hubungan antara suhu dan ketinggian dengan *spontaneous-potential* dalam bentuk persamaan regresi linear ganda dengan  $n$  parameter. Dalam rangka menentukan nilai parameter dari persamaan regresi dapat digunakan metode dekomposisi LU(*Lower-Upper*). Pada metode ini, sistem persamaan linear dituliskan kedalam bentuk matriks dengan matriks koefisien  $P$  berukuran  $n \times n$  dapat difaktorkan atau didekomposisikan menjadi matriks segitiga bawah  $L$  dan matriks segitiga atas. Selanjutnya nilai parameter dapat dicari dengan substitusi maju dan mundur. Dari sini diperoleh hubungan positif antara perubahan suhu terhadap *spontaneous-potential*. Nilai parameter mengindikasikan bahwa semakin tinggi nilai suhu semakin tinggi pula nilai *spontaneous-potential*. Hal ini menunjukkan bahwa kawasan geothermal Gedongsongo, Gunung Ungaran, Semarang merupakan daerah permeable tinggi dan pada daerah tersebut terdapat fumarol.

**Kata Kunci :** dekomposisi LU, suhu, *spontaneous-potential*, model regresi, geothermal

### 1. PENDAHULUAN

Pada saat ini bahan bakar minyak dan bahan bakar gas semakin langka, hal ini dikarenakan pemakaian energi tersebut yang semakin meningkat dan belum diimbangi dengan ketersediaan sumber energi tersebut. Hal ini akan terus terjadi karena bahan bakar-bahan bakar tersebut sifatnya yang tidak terbarukan. Oleh karena itu diperlukan sumber energi alternatif yang masih cukup menjanjikan kemanafaatannya untuk mengatasi kelangkaan dan semakin mahalnya bahan bakar minyak bumi dan gas. Salah satu sumber energi alternatif adalah energi yang berasal dari geothermal (panasbumi)[1]. Di Kawasan Gedongsongo, Kecamatan Sumowono, Kabupaten Semarang, Jawa Tengah yang terletak  $\pm 1370$  m di atas

permukaan laut terdapat manifestasi panas bumi ditandai dengan sumber air panas dan fumarol [2]. Adanya manifestasi ini membuat peneliti tertarik untuk mengkaji lebih lanjut ditinjau dari bidang ilmu matematika. Penelitian telah dilakukan guna mengeksplorasi potensi panas bumi yang ada dengan metode *spontaneous-potential* (SP) [3,4,5]. Di daerah manifestasi panas bumi Gedongsongo terdapat aliran fluida yang muncul ke permukaan sebagai manifestasi panas bumi seperti fumarol, air panas dan daerah alterasi [2]. Selanjutnya, tentang pemodelan matematika sistem panas bumi dengan pemodelan komputasi berdasarkan data geofisika [6,7].

Dalam Paper ini hubungan suhu dan ketinggian terhadap *spontaneous-potensial* akan dikemukakan secara matematis dengan data yang diperoleh dari penelitian

di kawasan manifestasi geothermal di daerah Gedongsongo melalui model regresi berganda, dan akan dijelaskan bagaimana cara menentukan parameter-parameter pada persamaan model regresi berganda. Dalam penentuan parameter-parameter persamaan regresi digunakan metode kuadrat terkecil yang menghasilkan sistem persamaan linear (SPL). Selanjutnya, akan dikaji bagaimana menyelesaikan sistem persamaan linear. Untuk menyelesaikan sistem persamaan linier ini digunakan metode dekomposisi LU.

**2. METODE DEKOMPOSISI LU**

Dalam rangka merepresentasikan hubungan antara suhu dan ketinggian dengan *spontaneous-potential*, digunakan model matematika dalam bentuk persamaan regresi linear ganda. Secara umum dalam regresi linear ganda hubungan antara variabel bebas ( $X_k$ ) dan variabel tak bebas ( $Y$ ) dituliskan dalam bentuk sebagai berikut, misalkan dari sampel penelitian diperoleh data  $\{Y_i, X_{1i}, X_{2i}, \dots, X_{ki}\}$  untuk  $i=1, \dots, n$ , maka penaksir model regresi linear gandanya adalah

$$y = a + b_1X_1 + b_2X_2 + \dots + b_nX_n$$

dengan  $a, b_1, \dots, b_n$  adalah parameter. Kemudian dengan metode kuadrat terkecil diperoleh sistem persamaan linear seperti di bawah ini

$$\begin{aligned} na + \sum_{i=1}^n X_{1i}b_1 + \sum_{i=1}^n X_{2i}b_2 + \dots + \sum_{i=1}^n X_{ki}b_k &= \sum_{i=1}^n Y_i \\ \sum_{i=1}^n X_{1i}a + \sum_{i=1}^n X_{1i}^2b_1 + \sum_{i=1}^n X_{1i}X_{2i}b_2 + \dots + \sum_{i=1}^n X_{1i}X_{ki}b_k &= \sum_{i=1}^n X_{1i}Y_i, \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n X_{ki}a + \sum_{i=1}^n X_{ki}X_{1i}b_1 + \dots + \sum_{i=1}^n X_{ki}X_{2i}b_2 + \dots + \sum_{i=1}^n X_{ki}^2b_k &= \sum_{i=1}^n X_{ki}Y_i \end{aligned} \tag{1}$$

Dalam rangka penyederhanaan penulisan dan tanpa mengurangi keumuman sistem persamaan linier(1) dituliskan dalam bentuk persamaan matriks [8],

$$PX = Q$$

dimana,

$$\begin{aligned} P &= \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix}, \\ X &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \\ Q &= \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2}$$

Dalam hal ini,  $P$  adalah matriks koefisien non singular,  $X$  adalah vektor dengan komponen variabel  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , dan  $Q$  adalah vektor dengan komponen variabel  $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ . Sistem persamaan linier dapat diselesaikan dengan beberapa metode dekomposisi LU.

Matriks  $P$  berukuran  $n \times n$  dapat didekomposisikan menjadi matriks segitiga bawah  $L$  dan matriks segitiga atas  $U$  [9], yaitu

$$P = LU$$

Pendekomposisinya sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \dots & p_{2n} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \dots & p_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix} \tag{3}$$

Matriks diagonal bawah  $L$  semua diagonal utamanya adalah 1, sedangkan matriks  $U$  tidak ada aturan tertentu pada diagonal utamanya dapat dilihat seperti pada persamaan (3) diatas.

Berdasarkan persamaan (3) sistem persamaan linear dapat dituliskan kembali menjadi

$$PX = Q$$

$$LUX = Q$$

Definisikan  $UX = Y$ , sehingga  $LY = Q$

Kemudian, tentukan nilai  $x_1, x_2, \dots, x_n$  dengan menggunakan teknik substitusi mundur (*backward substitution*) sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 UX &= Y \\
 \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad (4)
 \end{aligned}$$

Selanjutnya, dengan menggunakan teknik substitusi maju (*forward substitution*) diperoleh  $y_1, y_2, \dots, y_n$  seperti di bawah ini.

$$\begin{aligned}
 LY &= Q \\
 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \quad (5)
 \end{aligned}$$

### 3. ALGORITMA METODE DEKOMPOSISI LU

Metode dekomposisi LU dapat dijelaskan dengan menggunakan algoritma berikut,

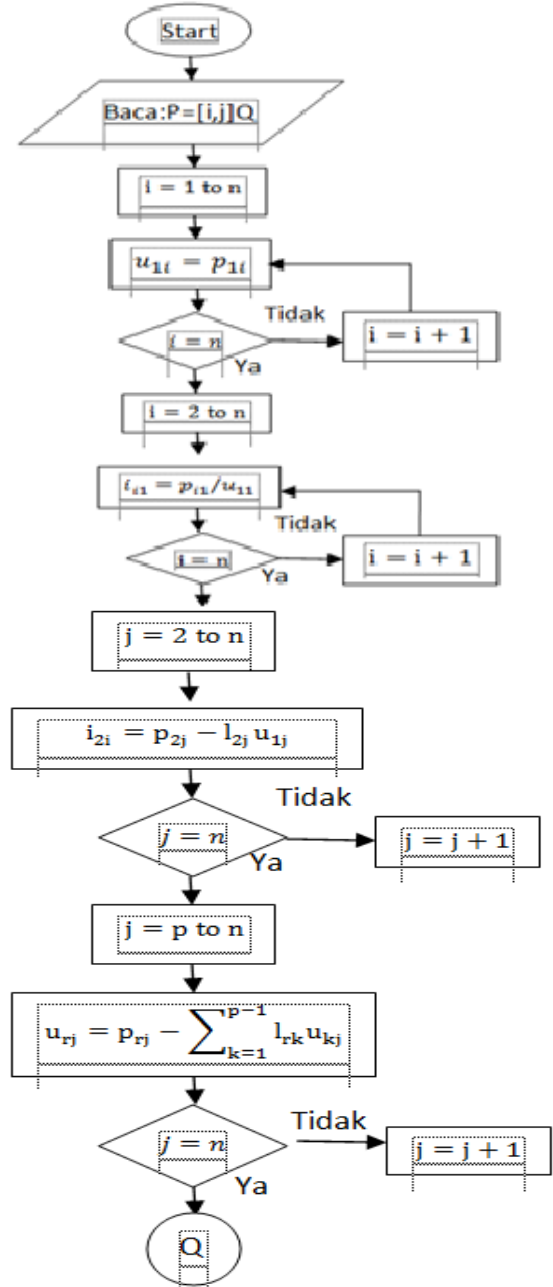
0. Diberikan, matrix  $P = [p_{ij}]$ ,  $Q$
1. Cari untuk  $i = 2, 3, \dots, n$  dan  $j = 1, 2, \dots, n$ ;  
 $u_{1j} := p_{1j}$ ,  
 $l_{i1} := p_{i1}/u_{11}$
2. Cari untuk  $i = 3, 4, \dots, n$  dan  $j = 2, 3, \dots, n$ ;  
 $u_{2j} := p_{2j} - l_{21}u_{1j}$   
 $l_{i2} := (p_{i2} - l_{i1}u_{12})/u_{22}$
3. Cari untuk  $i = s+1, s+2, \dots, n$  dan  $j = r, r+1, \dots, n$ ;

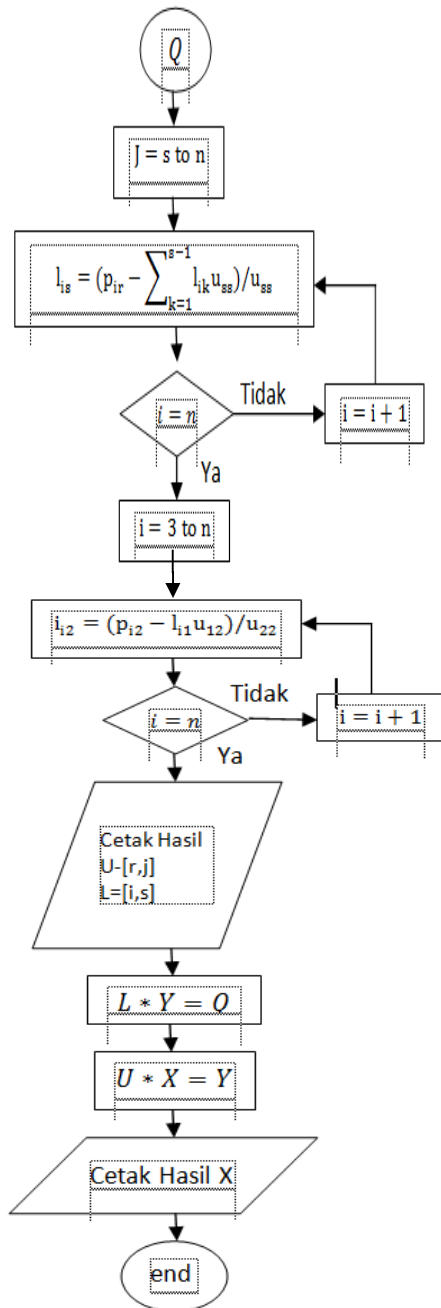
$$u_{rj} := p_{rj} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk}u_{kj}$$

$$l_{is} := (p_{ir} - \sum_{k=1}^{s-1} l_{ik}u_{sk})/u_{ss}$$

4. Tentukan nilai  $Y$  dari persamaan  $LY=Q$ .
5. Tentukan nilai  $X$  dari persamaan  $UX=Y$ .

Penjelasan dari algoritma dapat dilihat melalui flowchart pada gambar berikut,





Gambar 3.1 Flowchart Decomposisi LU

#### 4. STUDI KASUS : KAWASAN GEOTHERMAL GEDONGSONGO

Berdasarkan data suhu, ketinggian, dan *spontaneous-potensial* yang diperoleh dari data penelitian yang telah dilakukan di kawasan geothermal Gedongsongo, Gunung Ungaran, Semarang, Jawa Tengah [5] akan dipaparkan pencarian parameter yang merupakan koefisien dari persamaan

regresi linear ganda. Persamaan ini menyatakan hubungan fungsional antara suhu, ketinggian, dan *spontaneous-potensial*. Langkah awal untuk mendapatkan model regresi berdasarkan data suhu, ketinggian, dan *spontaneous-potensial*. Disinidigunakan data suhu permukaan dangkal dengan pengukuran pada kedalaman 50 cm. Variabel terdiri dari variabel bebas  $X_1, X_2$  yaitu suhu dan ketinggian dan variabel tak bebas  $y$  yaitu *spontaneous-potensial*. Kemudian, dengan perhitungan diperoleh sistem persamaan linier yang dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} 12 & 464,35 & 16577 \\ 464,35 & 22852,53 & 640355,40 \\ 16577 & 640355,40 & 22902527 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 887,15 \\ 41054,47 \\ 1222383 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Penyelesaian dari sistem persamaan linier dihitung dengan menggunakan metode Dekomposisi LU untuk memperoleh nilai parameter model regresi. Langkah pertama untuk menyelesaikan sistem persamaan linier dengan menggunakan Dekomposisi LU adalah sebagai berikut.

1. Membentuk matriks A menjadi matriks L dan matriks U kita misalkan diatas dengan matriks  $PX = Q$ .

$$P = \begin{bmatrix} 12 & 464,35 & 16577 \\ 464,35 & 22852,53 & 640355,40 \\ 16577 & 640355,40 & 22902527 \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} a \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 887,15 \\ 41054,47 \\ 1222383 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya membentuk matriks P menjadi matriks L dan matriks U dapat dilakukan dengan operasi baris elementer pada sistem persamaan linier sehingga matriks P terbentuk menjadi matriks L (matriks segitiga bawah) dan matriks U (matriks

segitiga atas) atau dengan menggunakan program Matlab.

1. Koefisien matriks  $L$  dan matriks  $U$  setelah dilakukan perhitungan, diperoleh hasil

$$U = \begin{bmatrix} 0,0017 \times 10^7 & 0,06 \times 10^7 & 2,29 \times 10^7 \\ 0 & 0,0005 \times 10^7 & -0,0001 \times 10^7 \\ 0 & 0 & -0,0000 \times 10^7 \end{bmatrix}$$

dan matriks  $L = \begin{bmatrix} 0,0007 & 0,0002 & 1 \\ 0,03 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2. Kemudian untuk memperoleh nilai  $Y$  dengan persamaan  $LY = Q$

$$\begin{bmatrix} 0,0007 & 0,0002 & 1 \\ 0,03 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 887,15 \\ 41054,47 \\ 1222383 \end{bmatrix}$$

Dengan substitusi maju sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned} y_1 &= 1,22 \times 10^6 \\ y_2 &= 0,0069 \times 10^6 \\ y_3 &= 0,00 \times 10^6 \end{aligned}$$

Atau dapat ditulis

$$y = \begin{bmatrix} 1,22 \times 10^6 \\ 0,0068 \times 10^6 \\ 0,00 \times 10^6 \end{bmatrix}$$

3. Selanjutnya mencari nilai dengan persamaan  $UX = Y$

$$\begin{bmatrix} 0,0017 \times 10^7 & 0,06 \times 10^7 & 2,29 \times 10^7 \\ 0 & 0,0005 \times 10^7 & -0,0001 \times 10^7 \\ 0 & 0 & -0,00 \times 10^7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,22 \times 10^6 \\ 0,0068 \times 10^6 \\ 0,00 \times 10^6 \end{bmatrix}$$

Dengan substitusi mundur sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned} a &= 905,72 \\ b_1 &= 1,23 \\ b_2 &= -0,64 \end{aligned}$$

Atau dapat ditulis

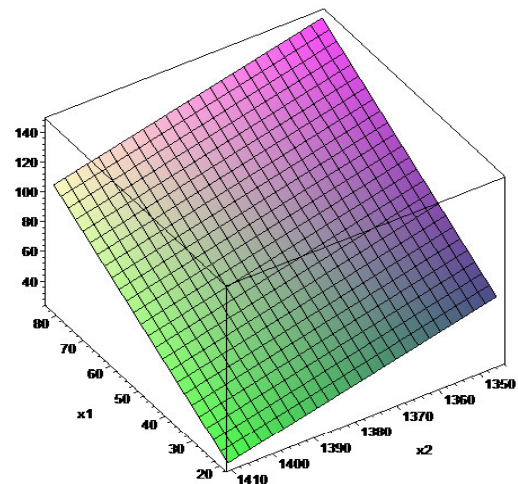
$$X = \begin{bmatrix} 905,72 \\ 1,23 \\ -0,64 \end{bmatrix}$$

Sehingga nilai parameter model regresi yang diperoleh =  $\{(905,72, 1,23, -0,64)\}^T$

Model regresi linier berganda hubungan suhu dan ketinggian terhadap *spontaneous-potensial* (SP) dengan menggunakan metode dekomposisi LU adalah sebagai berikut.

$$Y = 905,72 + 1,23X_1 - 0,64X_2$$

**Gambar 4.1** Hubungan suhu ( $x_1$ ) dan ketinggian



( $x_2$ ) terhadap SP ( $y$ )

Dari Gambar 4.1 terlihat bahwa hubungan suhu dan ketinggian terhadap *spontaneous-potensial* mengindikasikan kenaikan suhu akan menyebabkan *spontaneous-potensial* meningkat, tetapi sebaliknya untuk hubungan ketinggian dengan *spontaneous-potensial*. Apabila ketinggian naik akan menyebabkan *spontaneous-potensial* menurun.

## 5. KESIMPULAN

Metode dekomposisi LU telah digunakan untuk menentukan nilai parameter dari persamaan regresi linear ganda. Dari studi kasus dengan menggunakan data suhu, ketinggian, dan *spontaneous-potensial* yang diperoleh dari data manifestasi panas bumi Gedongsongo, Gunung Ungaran, Semarang diperoleh sistem persamaan linier. Solusi dari sistem persamaan linier tersebut merupakan parameter dari model regresi linier berganda yang merepresentasikan hubungan antara suhu dan ketinggian terhadap *spontaneous-potensial*. Dari hasil model regresi yang diperoleh dapat diketahui bahwa peningkatan suhu akan menyebabkan *spontaneous-potensial* juga meningkat, tetapi sebaliknya untuk hubungan ketinggian dengan *spontaneous-potensial*. Karena terdapat fumarol dan aliran air panas di kawasan manifestasi panas bumi Gedongsongo yang diteliti hal ini mengindikasikan bahwa daerah tersebut terdeteksi sebagai daerah dengan *permeable* tinggi.

## 6. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Singarimbun, A, dkk, *Estimation of Parameter Distribution and Injection Process in Geothermal Reservoir*, Internatioanal Journal of Energy and Environment, Issue 6, volume 6, 2012.
- [2] Setyaningsih, Wahyu, *Potensi Lapangan Panasbumi Gedongsongo Sebagai Sumber Energi Alternatif dan Penunjang Perekonomian Daerah*, Unnes, Vol. 8 No.1 Januari 2011.
- [3] Fritjof Fagerlund, Graham Heinson *Detecting subsurface groundwater flow in fractured rock using self-potential (SP) methods*, Environmental Geology, 43 (7), 782-79410.1007/s00254-002-0693-x, 2003.
- [4] Agussetyawan, Sachio Ehara, Yasuhiro Fujimitsu, Hakim Saibi, *Assessment of Geothermal Potential at Ungaran Volcano, Indonesia Deduced from Numerical Analysis*. Proceedings 34th Workshop on Geothermal Reservoir Engineering, Stanford Unuversity, California, USA, 2009.
- [5] Widowati, Agus Setyawan, Mustafid, Muhammad Nur, Sudarno, Udi Harmoko, Satriyo, Gunawan, Agus Subagio, HeruTjahjana, Djalal Er Riyanto, Suhartono, Moch A Mukid, Jatmiko Endro Suseno, *Pemodelan Matematika dan Analisa Sebaran Suhu Permukaan Serta Kandungan Kimia untuk Karakterisasi Panasbumi di Gedongsongo, Gunung Ungaran, Semarang, Jawa Tengah*, Laporan Penelitian, Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Diponegoro, Semarang, 2013.
- [6] Warren Mannington, Michael O'Sullivan, David Bullivant, *Computer modelling of the Wairakei-Tauhara geothermal system*, New Zealand, Geothermics, 33(4), 401-419, 2004.
- [7] Nova Susanti, *Pemodelan Sistem Panasbumi Pincara Kabupaten Luwu Utara Sulawesi Selatan Berdasarkan Data Geofisika*, in, Universitas Indonesia, Depok, 2011.
- [8] Gozali, M.S, *Aljabar Linier*. Universitas Pendidikan Indonesia. Bandung, 2010.
- [9] Rahayu, Yuniarsih, *Implementasi Metode Dekomposisi LU pada Regresi Linier Berganda*. Semarang : Seminar Nasional Teknologi Informasi dan Komunikasi Terapan, 23 Juni 2012.

## ALGORITMA FUZZY KERNEL C-MEANS UNTUK MENENTUKAN TINGKAT KEGANASAN ASTROSITOMA (KANKER OTAK)

Zuherman Rustam<sup>1</sup>, Aini Suri Talita<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia, rustam@ui.ac.id

<sup>2</sup>Fakultas Ilmu Komputer dan Teknologi Industri, Universitas Gunadarma, ainisuri@staff.gunadarma.ac.id

**Abstrak.** Astrositoma merupakan jenis kanker otak yang paling sering ditemukan setelah meningioma. Penentuan tingkat keganasan Astrositoma sangat diperlukan pada saat diagnosis pra-bedah, pra-radiasi, dan pra-kemoterapi karena tingkat keganasan yang berbeda akan menentukan penanganan dan pengobatan yang berbeda. Untuk menentukan tingkat keganasan tersebut dapat dilakukan dengan menganalisa Image MRI dan menghitung metabolit MRS otak. Dalam penelitian ini, penentuan tingkat keganasan Astrositoma dilakukan dengan menggunakan Algoritma Fuzzy Kernel C-Means. Metode ini merupakan perluasan dari Fuzzy C-Means, dengan harapan akan memberikan keakuratan lebih tinggi dalam menentukan tingkat keganasan Astrositoma.

**Keywords:** Astrositoma, Fuzzy C-Means, Fungsi Kernel, Fuzzy Kernel C-Means

**Abstract.** Astrocytoma is a type of brain cancer that most often found after Meningioma. Determination of the malignancy level of Astrocytoma is required at the time of pre-surgical diagnosis, pre-radiation, and pre-chemotherapy because for different malignancy levels of Astrocytoma the types of the treatment are also different. Determination of its malignancy levels can be done by analyzing the data of MRI and MRS metabolite calculation of brain tissue. In this study, the determination of the malignancy level of Astrocytoma was done by using Kernel Fuzzy C-Means Algorithm. This method is an extension of the Fuzzy C-Means that we claim to provide higher accuracy in determining the degree of malignancy of Astrocytoma.

**Keywords:** Astrocytoma, Fuzzy C-Means, Kernel Function, Fuzzy Kernel C-Means

### 1. Pendahuluan

Astrositoma merupakan suatu jenis kanker otak yang berasal dari suatu jenis khusus dari sel *glial*, yaitu *astrocytes*, sel-sel otak yang berbentuk bintang. Jenis tumor ini, biasanya tidak menyebar di luar otak dan sumsum tulang belakang dan biasanya tidak mempengaruhi organ-organ lain. Astrositoma adalah *glioma* yang paling umum dan dapat terjadi di sebagian besar otak dan kadang-kadang di sumsum tulang belakang. Astrositoma, secara umum dapat dibagi menjadi dua kelas:

- *Narrow zones of infiltration* (tumor yang sebagian besar bersifat invasif, misalnya, *pilocytic astrocytoma*,

*subependymal giant cell astrocytoma*, dan *pleomorphic xanthoastrocytoma*)

- *Diffuse zones of infiltration* (misalnya, *high-grade astrocytoma*, *anaplastic astrocytoma*, dan *glioblastoma*), yang memiliki kemampuan untuk muncul di setiap lokasi di CNS (*Central Nervous System*), biasanya terjadi pada orang dewasa; dan memiliki kecenderungan untuk meningkat ke derajat berikutnya. [1]

Astrositoma merupakan tumor primer otak yang paling sering terjadi dan sangat bervariasi dari lesi derajat keganasan rendah sampai lesi dengan derajat keganasan tinggi.

Klasifikasi histologi dan derajat keganasan yang tepat pada *glioma* sangatlah penting. Secara praktis perbedaan yang paling mendasar adalah memisahkan *glioma* difus dengan *glioma* yang berbatas tegas. [2]

Berdasarkan hasil ketetapan *World Health Organization* (WHO), hispatologi Astrositoma di klasifikasikan menjadi 4 derajat atau 4 kelas yaitu : [3]

- Derajat I : *Juvenile Pilocytic Astrocytoma* (JPA)
- Derajat II : *Low-Grade Astrocytoma*
- Derajat III : *Anaplastic Astrocytoma*
- Derajat IV : *Glioblastoma Astrocytoma* (GBM)

Sarana diagnosis seperti CT (*computed tomography*) dan MRI (*magnetic resonance imaging*) sangat membantu untuk melakukan diagnosis dan penanganan (*treatment*) Astrositoma. Kedua pemeriksaan tersebut hanya menghasilkan gambar atau keadaan anatomi yang normal dan yang ada kelainan, tetapi tidak memperlihatkan metabolisme kimia jaringan. Masalah diagnosis Astrositoma kadang-kadang sulit dibedakan dengan kelainan yang lain, sebagai contoh untuk Astrositoma dengan derajat keganasan rendah, bila hanya dilakukan pemeriksaan MRI konvensional sulit dibedakan dengan infeksi. Sedangkan penanganan kelainan tersebut sangat berbeda, sehingga melakukan diagnosis secara pasti akan membantu untuk pengobatan penyakit secara tepat. Untuk itu, diperlukan suatu metode sebagai alat bantu untuk membedakan tingkat keganasan Astrositoma. Pada penelitian ini akan dikembangkan suatu algoritma yang dapat menentukan tingkat keganasan Astrositoma. Metode yang akan digunakan adalah metode-metode yang berbasis pada *Fuzzy Clustering*.

Penelitian mengenai Astrositoma yang berbasis *Fuzzy clustering* telah dilakukan oleh Ye et al. [4]. Pada penelitian tersebut, dari 280 kasus Astrositoma, ditemukan 111 kasus merupakan *Low-Grade Astrocytoma* dan 169 merupakan *High-Grade Astrocytoma*. Penelitian oleh Yang et al. berbasis pada *Magnetic Resonance Imaging* (MRI) and data klinis. Berdasarkan penelitian tersebut, terlihat faktor-faktor yang berpengaruh adalah usia, *mass effect* (efek dari massa berkembang yang menghasilkan efek patologis sekunder dengan mendorong atau menggosur jaringan sekitarnya), edema (akumulasi abnormal cairan dalam interstitium), peningkatan *post-contrast*, suplai darah, pengapuran (*calcification*), dan pendarahan (*haemorrhage*).

Pada makalah ini, penelitian yang dilakukan berbasis pada data *Magnetic Resonance Spectroscopy*, yaitu pemeriksaan radiologi penunjang. Pemeriksaan radiologi, biasanya dipakai oleh dokter ahli setelah dilakukan pemeriksaan klinis. Pemeriksaan radiologi yang kita kenal selama ini adalah *MRI* dan *CT-Scan*. Kedua pemeriksaan tersebut hanya menghasilkan gambar atau keadaan anatomi antara yang normal dan yang ada kelainan, tetapi tidak memperlihatkan metabolisme kimia jaringan. Klasifikasi Astrositoma berbasis *Fuzzy clustering* yang lain telah dilakukan antara lain dengan menggunakan *Fuzzy C-Means* [5], *Possibilitic C-Means* [6] dan *Spherical K-Means* [7]. Pada makalah ini akan dibahas aplikasi *Fuzzy Kernel C-Means* untuk menentukan derajat keganasan Astrositoma.

## 2. Magnetic Resonance Spectroscopy (MRS)

Pada makalah ini data yang diklasifikasikan ke dalam empat kelas Astrositoma berdasarkan derajat keganasannya adalah data MRS. Untuk mendapatkan data *Spectroscopy*, terlebih

dahulu dilakukan pengambilan MRI yang digunakan untuk menentukan lokasi yang dicurigai mengandung Astrositoma. Lokasi ini disebut *localizer*. Dari *localizer* yang dihasilkan ditentukan lagi lokasi *Volume of Interest* (VOI), dimana pada lokasi inilah dilakukan penekanan air yang mengakibatkan terjadinya perbedaan resonansi, sehingga metabolit-metabolit yang berbeda dapat diukur kuantitasnya.

Ada 7 metabolit utama yang diukur dalam menentukan keganasan suatu penyakit Astrositoma, yaitu N-Acetil Aspartate (NAA), Creatine (Cr), Choline (Cho), Lipid (Lip), Lactate (Lac), Myoinositol (MI), dan Glutamine-glutamate (Glx). Data yang sudah didapat kemudian dibentuk menjadi sebuah vektor  $x \in \mathbb{R}^7$  untuk selanjutnya digunakan sebagai data klasifikasi dalam metode *fuzzy clustering*, dimana data tersebut sudah diketahui kelasnya berdasarkan hasil pemeriksaan patologi anatomi.

### 3. Metode Fuzzy C-Means (FCM)

Metode Fuzzy C-Means merupakan salah satu metode *clustering* yang ditemukan oleh Bezdek [8]. Untuk suatu himpunan data masukan  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  dengan  $x_i \in \mathbb{R}^d$ , kita definisikan suatu matriks *membership* berukuran  $n \times c$ ,  $U = [u_{ij}]$ ,  $1 \leq i \leq n$  dan  $1 \leq j \leq c$  dan himpunan pusat *cluster*  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_c\}$  yang setiap elemennya adalah anggota dari  $\mathbb{R}^d$ . Model matematika dari metode FCM adalah

$$J(U, V) = \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^c u_{ij}^m d^2(x_i, v_j) \quad (1)$$

Dengan kendala:

$$\sum_{j=1}^c u_{ij} = 1, i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n u_{ij} > 0, j = 1, 2, \dots, c \quad (3)$$

$$u_{ij} \in [0,1], i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, c \quad (4)$$

Dengan  $d$  adalah fungsi disimilaritas dan  $m \in [1, \infty]$  adalah derajat *fuzziness*. Pusat *cluster* dan nilai *membership* diperbaharui dengan formula:

$$v_j = \frac{\sum_{i=1}^n u_{ij}^m x_i}{\sum_{i=1}^n u_{ij}^m}, j = 1, 2, \dots, c \quad (5)$$

$$u_{ij} = \left( \sum_{j=1}^c \left( \frac{d(x_i, v_j)}{d(x_i, v_j^t)} \right)^{\frac{2}{m-1}} \right)^{-1}, i = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

### 4. Metode Kernel

Vapnik [9] mengemukakan konsep metode kernel yang kemudian dikembangkan oleh Scholkopf et al. [10]. Metode ini memberikan kontribusi yang berarti pada penelitian-penelitian di bidang klasifikasi. Penggunaannya pada *Support Vector Machines* (SVM) oleh Christianini dan Taylor [11] dan Muller et al. [12] menghasilkan kenaikan keakuratan dibandingkan dengan metode klasifikasi klasik. Metode ini cocok digunakan pada data yang tidak terpisahkan secara linier dan berdimensi besar.

Untuk menerapkan metode ini, kita bangun suatu pemetaan  $\phi$  dari ruang *input*  $\mathbb{R}^d$  ke ruang *feature*  $F$ , dengan dimensi dari  $F$  lebih besar dari dimensi ruang *input*. Klasifikasi dilakukan pada data hasil transformasi di ruang *feature*. Salah satu kendalanya adalah untuk menentukan jarak antara  $\phi(x)$  dan  $\phi(y)$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^d$ . Selain daripada itu operasi di  $F$  cenderung “mahal”. Kendala ini diatasi dengan mendefinisikan suatu fungsi yang disebut kernel,  $K(x_i, x_j) = \phi(x_i) \phi^t(x_j)$ . Terdapat berbagai jenis fungsi kernel, pada penelitian ini yang digunakan adalah kernel Gaussian:

$$K(x, y) = \exp\left(-\frac{\|x-y\|^2}{\sigma^2}\right) \quad (7)$$

## 5. Metode Fuzzy Kernel C-Means

Teknik klasifikasi dapat mengklasifikasikan data  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ,  $x_i \in R^n, i = 1, 2, \dots, n$  menjadi beberapa kelas (*cluster*). Data yang memiliki karakteristik sama ditempatkan pada kelas yang sama. Setiap kelas direpresentasikan oleh sebuah vektor  $v_j \in R^d$ . *Vector Quantization* merupakan salah satu metode klasifikasi. Pada metode VQ, data  $di = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset R^n$  dipetakan ke suatu himpunan  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_c\} \subset R^d$  yang disebut juga himpunan *prototype, medoid, signature* atau *codebook*. Setelah *prototype* terbentuk, dibentuk suatu model optimisasi yang melibatkan dua himpunan yaitu himpunan *Membership Functions* dan himpunan *Prototype*. Untuk menyelesaikan masalah optimisasi yang seperti ini, digunakan prinsip *Alternating Minimization Algorithm* (AMA) [8], dimana untuk mendapatkan solusi optimumnya dilakukan proses iterasi untuk memperbaharui himpunan *Membership Functions* dan himpunan *Prototype*. Teknik *clustering* yang berdasarkan pada VQ dan prinsip AMA diantaranya adalah *Fuzzy C-Mean* (FCM) [8], *Possibilitic C-Mean* (PCM) [13], dan *Generalized Fuzzy C-Mean* [14].

Pada pembahasan Fuzzy LVQ oleh Karayiannis [14], nilai derajat *fuzziness*  $m$  yang berbeda digunakan dalam setiap tahapan iterasi, yaitu  $m = m_i + \frac{t}{T}(m_f - m_i)$ , dimana  $m_i$  dan  $m_f$  masing-masing merupakan nilai awal dan nilai akhir dari  $m$ , serta  $T$  menunjukkan banyaknya iterasi maksimum.

Ketika nilai  $m_i$  diberikan besar dan nilai  $m_f$  kecil (atau sebaliknya), diharapkan nilai  $m$  akan menurun (atau sebaliknya) pada setiap iterasi. Berdasarkan percobaan yang telah dilakukan, nilai derajat *fuzziness*  $m$  yang berbeda ini diperlukan karena ada terdapat perbedaan jenis data, baik yang memerlukan nilai besar, maupun kecil.

Algoritma Fuzzy Kernel C-Means dibangun dengan menerapkan konsep metode Fuzzy C-Means [8], Fungsi Kernel [9, 10, 11, 12], dan derajat *fuzziness* [15].

Input	: $X, c, m_i, m_f, \varepsilon, T$
Output	: $U$ dan $V$
1.	Inisialisasi $V^0 = [v_1, v_2, \dots, v_c]$ , $v_j \in C_j$
2.	Untuk $t = 1$ sampai $T$
3.	$m = m_i + \frac{t(m_f - m_i)}{T}$
4.	$b = -\frac{1}{m-1}$
5.	Hitung <i>membership</i> $U^1 = [u_{ij}]$ , $1 \leq i \leq n$ , $1 \leq j \leq c$ dengan menggunakan $u_{ij} =$ $\frac{d^b(x_i, v_j)}{\sum_{k=1}^c d^b(x_i, v_k)^b}$ , $1 \leq i \leq$ $n, 1 \leq j \leq c$
6.	Perbaharui pusat Cluster $V^t = [v_1, v_2, \dots, v_c]$ , dimana $v_j = \frac{\sum_{i=1}^n u_{ij}^m x_i}{\sum_{i=1}^n u_{ij}^m}$ , $j =$ $1, 2, \dots, c$
7.	Jika $E = \sum_{j=1}^c k^2(v_{jt}, v_{jt-1}) \leq$ $\varepsilon$ , <i>STOP</i> .
8.	$t = t + 1$

Algoritma 1. Algoritma Fuzzy Kernel C-Means

Menurut Bezdek, kedua barisan  $\{U^t, V^t\}$  pada Algoritma 1 akan konvergen ke nilai minimum dari  $J(U, V)$  [8].

## 6. Hasil Percobaan

Algoritma 1 diaplikasikan pada masalah penentuan tingkat keganasan

Astrositoma dengan menggunakan data dari Laboratorium Radiologi FKUI, Jakarta. Data diambil dari 36 orang pasien pengidap Astrositoma dengan derajat keganasan tertentu yang tidak dibatasi jenis kelamin maupun usia. Dari data yang ada, sebagian digunakan sebagai *data training* yang digunakan untuk membentuk model klasifikasi, sedangkan sisanya digunakan sebagai *data testing* untuk menentukan keakuratan klasifikasi yang telah terbentuk sebagai hasil dari pengaplikasian Algoritma 1.

Pada percobaan digunakan Algoritma 1 yang dibangun pada makalah ini dan Algoritma Fuzzy C-Means sebagai pembanding. Pada Algoritma Fuzzy Kernel C-Means (FKCM), digunakan fungsi Kernel Gaussian dengan parameter  $\sigma = 0.05$ . Pada setiap percobaan, untuk suatu *data testing* tertentu, dilakukan 10 kali pengulangan, dimana pengambilan data dilakukan secara acak.

Hasil rata-rata keakuratan klasifikasi tingkat keganasan Astrositoma dengan menggunakan Algoritma 1 maupun Fuzzy C-Means (FCM) dapat dilihat pada Tabel 1. Dapat dilihat bahwa dibandingkan dengan metode FCM, metode FKCM memberikan keakuratan klasifikasi yang lebih baik.

Tabel 1. Presentase Keakuratan Klasifikasi Tingkat Keganasan Astrositoma dengan Menggunakan FCM dan FKCM

Data Training (%)	FCM	FKCM
10	65	70
20	70	85
30	67	80

40	70	84
50	73	85
60	85	90
70	80	94
80	78	92
90	85	99

## 7. Kesimpulan

Pada makalah ini diberikan algoritma Fuzzy Kernel C-Means (FKCM) yang digunakan untuk mengklasifikasi data MRS ke dalam 4 kelas Astrositoma yang dibedakan berdasarkan derajat keganasannya. Berdasarkan hasil percobaan terlihat bahwa penggunaan fungsi kernel dapat meningkatkan keakuratan klasifikasi.

Penelitian ini dapat dilanjutkan dengan mengembangkan metode lain yang lebih akurat untuk menentukan derajat keganasan Astrositoma. Serta dimungkinkan untuk menggunakan kernel non-parametrik pada metode kernel yang digunakan pada penelitian ini.

## Ucapan terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih dan apresiasi setinggi-tingginya kepada Dr. Jacob Pandelaki dari Departemen Radiologi FK UI atas saran yang diberikan maupun materi tentang Astrositoma. Serta kepada pimpinan laboratorium Radiologi FKUI yang telah mengizinkan penggunaan data Astrositoma dalam penelitian ini.

## 8. Daftar Pustaka

- [1] B. Kennedy dan J. E. Harris, Astrocytoma, Medscape, <http://emedicine.medscape.com/article/>

- [283453-overview](#), diunduh pada: 4 Mei 2015.
- [2] D. J. Brat dan T. B. Mapstome , "Malignant Glioma Physiology: Cellular Response to hypoxia and Its Role in Tumor Progression", *Ann Intern Med.*, pp. 659-68, 2003.
- [3] M. Bernstein dan M. S. Berger, *Neuro-Oncology The Essentials*, New York: Thieme, 2000.
- [4] C. Z. Ye, J. Yang, D. Y. Geng, Y. Zhou, dan N. Y. Chen, "Fuzzy Rules to Predict Degree of Malignancy in Brain Glioma", *Med. Biol. Eng. Comput.*, 40, pp. 145-152, 2002.
- [5] A. Fikri, Z. Rustam, dan J. Pandelaki, "Brain Cancer (Astrocytoma) Clustering menggunakan Metode Fuzzy C-Means", *Prosiding Seminar Nasional Matematika 2010, FMIPA UI*, 1, ISSN: 1907 – 2562, 2010.
- [6] A. P. Wibowo, Z. Rustam, dan J. Pandelaki, "Clustering Brain Cancer Menggunakan Metode Possibilistic C-Means", *Prosiding Seminar Nasional Matematika 2010, FMIPA UI*, 1, ISSN: 1907 – 2562, 2010.
- [7] A. Krismanti, Z. Rustam, dan J. Pandelaki, "Aplikasi Spherical K-Means pada Pengklasifikasian Brain Cancer", *Prosiding Seminar Nasional Matematika 2010, FMIPA UI*, 1, ISSN: 1907 – 2562, 2010.
- [8] J. Bezdek, *Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms*, New York: Plenum, 1981.
- [9] V. N. Vapnik, *Statistical Learning Theory*, New York: Wiley, 1998.
- [10] B. Scholkopf, A. Smola dan K. R. Muller, "An Nonlinear Component Analysis as a Kernel Eigenvalue Problem", *Neural Computation*, 10, No. 3, pp. 1299-1319, 1998.
- [11] N. Cristianini dan J. S. Taylor, *An Introduction to SVMs and Other kernel-based Learning Methods*, Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- [12] K. R. Muller, S. Mika, G. Ratsch, K. Tsuda dan B. Scholkopf, "An Introduction to Kernel-Based Learning Algorithms", *IEEE Trans. On Neural Networks*, 12, No. 2, 2001.
- [13] R. Krishnapuram dan J. Keller, "Possibilitic C-Means : Insight and Recommendations Approach to Clustering", *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 4, No. 3, pp.385-393, 1996.
- [14] N. B. Karayiannis, "An Soft Learning Vector Quantization and Clustering Algorithms Base on Ordered Aggregation Operators", *IEEE Trans. On Neural Networks*, 11, No. 5, 2000.
- [15] N. B. Karayiannis dan J. Bezdek, "An Integrated Approach to Fuzzy Learning Vector Quantization and Fuzzy C-Means", *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, 5, No. 4, pp. 622-628, 1997.

## PENERAPAN PROGRAM LINIER FUZZY TIDAK PENUH UNTUK OPTIMASI PRODUKSI JENANG DAN MINO PADA HOME INDUSTRY “LABA-LABA”

Rizky Handayani<sup>1</sup>, Bambang Irawanto<sup>2</sup>

<sup>1</sup>PS Matematika FMIPA UGM, <sup>2</sup>Jurusan Matematika FSM Universitas Diponegoro

<sup>1</sup>Sekip Utara BLS 21 Yogyakarta 55281, <sup>2</sup>Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Tembalang Semarang <sup>2</sup>

**Abstrak.** Program linear merupakan metode matematik dalam mengalokasikan sumber daya yang terbatas untuk mencapai suatu tujuan seperti memaksimalkan keuntungan dan meminimumkan biaya yang dinyatakan dalam sebuah fungsi linear yang disebut fungsi objektif dengan syarat-syarat atau kendala yang dinyatakan dalam bentuk persamaan atau pertidaksamaan linear. Namun dalam beberapa situasi dijumpai fungsi objektif atau kendala yang tidak tegas atau fuzzy. Penyelesaian dengan metode simpleks atau grafik hanya berlaku untuk kendala atau fungsi objektif yang tegas, demikian pula halnya dengan program aplikasi POM-QM for Windows 3. Masalah optimasi produksi jenang dan mino adalah masalah menentukan keuntungan maksimum dari pembuatan makanan khas daerah Klampok yaitu jenang dan mino. Masalah ini dapat dinyatakan dalam sebuah model program linier fuzzy tidak penuh. Nilai fuzzy yang dimaksud adalah keuntungan dari produk jenang dan mino, dengan asumsi bahwa nilai tersebut linear maka penerapan bilangan trapezoidal fuzzy dalam masalah program linear fuzzy tidak penuh akan diubah menjadi model masalah program linear tegas menggunakan fungsi ranking untuk kemudian hasilnya dapat disimulasikan dengan aplikasi POM-QM for Windows 3.

**Kata kunci:** program linear fuzzy tidak penuh, bilangan trapezoidal fuzzy, fungsi ranking, program linear

### 1. PENDAHULUAN

Salah satu masalah yang dihadapi oleh para pengusaha home industry makanan khas daerah Klampok adalah menentukan jumlah produksi yang optimum sehingga diperoleh keuntungan yang maksimum. Hal ini dapat dimaklumi mengingat keuntungan yang diperoleh para pengusaha tersebut besarnya tidak dapat ditentukan. Jika musim liburan atau hari raya keuntungan yang diperoleh bisa mencapai dua kali lipat atau lebih dari hari biasa, akan tetapi keuntungan yang diperoleh pun bisa mengalami penurunan jika sepi pembeli. Sehingga keuntungan yang diperoleh tidaklah pasti nilainya.

Program linear adalah suatu teknik dalam riset operasi untuk memecahkan masalah optimasi (memaksimalkan atau meminimumkan) dengan menggunakan persamaan pertidaksamaan linear dalam mencari pemecahan yang optimum dengan memperhatikan batasan-batasan yang ada. Agar persoalan dapat dipecahkan menggunakan program linear maka persoalan harus dapat dirumuskan secara matematis, fungsi objektif harus dibuat optimum, fungsi objektif dan kendala atau batasan harus linear, semua batasan harus

dinyatakan dalam persamaan atau pertidaksamaan linear dan semua variabelnya harus tidak negatif.

Dalam hal ini persoalan yang timbul adalah berapa besar masing-masing jenis produk harus diproduksi sehingga hasil penjualan maksimum. Masalah lain yang muncul adalah nilai keuntungan yang tidak tegas atau *fuzzy* menyebabkan persoalan tidak dapat diselesaikan dengan mudah mengingat belum tersedia algoritma untuk penyelesaian masalah program linear *fuzzy*.

Teori himpunan *fuzzy* dapat digunakan untuk menangani masalah ketidakpastian tersebut dengan memperkenalkan himpunan yang dinyatakan dengan suatu fungsi keanggotaan yang memetakan setiap domain pada himpunan *fuzzy* ke tepat satu bilangan real pada interval tertutup  $[0,1]$ . Teori himpunan *fuzzy* banyak diterapkan dalam berbagai disiplin ilmu seperti dalam program linier. Kemudian dengan menerapkan bilangan *trapezoidal fuzzy*, masalah program linear *fuzzy* diubah menjadi masalah program linear tegas dengan menggunakan fungsi ranking untuk kemudian diselesaikan dengan metode

yang sudah tersedia yaitu metode simpleks atau grafik.

## 2. TINJAUAN PUSTAKA

### 2.1. Bilangan Trapezoidal Fuzzy

**Definisi 2.1.** [1] Bilangan fuzzy disebut bilangan trapezoidal fuzzy apabila memiliki fungsi keanggotaan sebagai berikut:

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{a^L - x}{\alpha}, & a^L - \alpha \leq x < a^L \\ 1, & a^L \leq x \leq a^U \\ 1 - \frac{x - a^U}{\beta}, & a^U < x \leq a^U + \beta \\ 0, & \text{lainnya.} \end{cases}$$

**Definisi 2.2.** [1] Bilangan trapezoidal fuzzy dapat dinyatakan dengan  $\tilde{a} = (a^L, a^U, \alpha, \beta)$  dengan  $a^L < a^U$  ( $a^L \neq a^U$ ),  $\alpha > 0, \beta > 0$  dan  $a^L, a^U, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Core dari bilangan trapezoidal fuzzy  $\tilde{a}$  adalah  $[a^L, a^U]$  dan support dari bilangan trapezoidal fuzzy  $\tilde{a}$  adalah  $(a^L - \alpha, a^U + \beta)$ .

**Definisi 2.3.** [1] Diberikan dua bilangan trapezoidal fuzzy yaitu  $\tilde{a} = (a^L, a^U, \alpha, \beta)$  dan  $\tilde{b} = (b^L, b^U, \gamma, \theta)$ , dengan  $\tilde{a}, \tilde{b} \in F(\mathbb{R})$  dan  $a^L, a^U, \alpha, \beta, b^L, b^U, \gamma, \theta \in \mathbb{R}$ . Operasi dari bilangan trapezoidal fuzzy didefinisikan sebagai berikut:

1. Negasi:  $(-\tilde{a}) = (-a^U, -a^L, \beta, \alpha)$
2. Penjumlahan:  $\tilde{a} + \tilde{b} = (a^L + b^L, a^U + b^U, \alpha + \gamma, \beta + \theta)$
3. Pengurangan:  $\tilde{a} - \tilde{b} = (a^L - b^U, a^U - b^L, \alpha + \theta, \beta + \gamma)$
4. Perkalian dengan skalar:
  - untuk  $k \geq 0, k \in \mathbb{R}$  maka  $k\tilde{a} = (ka^L, ka^U, k\alpha, k\beta)$
  - untuk  $k < 0, k \in \mathbb{R}$  maka  $k\tilde{a} = (ka^U, ka^L, -k\beta, -k\alpha)$ .

**Definisi 2.4.** [1] Nilai fungsi ranking yang digunakan untuk mengurutkan bilangan trapezoidal fuzzy didefinisikan:  $\mathfrak{R}(\tilde{a}) = \frac{a^L + a^U}{2} + \frac{1}{4}(\beta - \alpha)$  dengan  $\tilde{a} = (a^L, a^U, \alpha, \beta), \tilde{a} \in F(\mathbb{R})$ .

**Definisi 2.5.** [1] Sifat-sifat relasi yang digunakan untuk mengurutkan setiap bilangan trapezoidal fuzzy  $\tilde{a}, \tilde{b} \in F(\mathbb{R})$

dan skalar  $k \in \mathbb{R}$  didefinisikan sebagai berikut:  $\tilde{a} > \tilde{b}$  jika  $\mathfrak{R}(\tilde{a}) > \mathfrak{R}(\tilde{b})$ ,  $\tilde{a} < \tilde{b}$  jika  $\mathfrak{R}(\tilde{a}) < \mathfrak{R}(\tilde{b})$ , dan  $\tilde{a} = \tilde{b}$  jika  $\mathfrak{R}(\tilde{a}) = \mathfrak{R}(\tilde{b})$ .

### 2.2. Program Linier Fuzzy Tidak Penuh

Salah satu bentuk program linear fuzzy tidak penuh yaitu program linier dengan koefisien fungsi tujuan fuzzy. Secara umum bentuk masalah program linier dengan koefisien fungsi tujuan fuzzy dirumuskan sebagai berikut [1]:

Memaksimalkan atau meminimalkan  $\tilde{z} = \sum_{j=1}^n \tilde{c}_j x_j$  (3.1.1)

terhadap  $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j (\leq, \geq) b_i, (i = 1, 2, \dots, m)$  (3.1.2)

$x_j \geq 0, (j = 1, 2, \dots, n)$  (3.1.3)

Langkah-langkah metode simpleks untuk menyelesaikan masalah program linear dengan koefisien fungsi tujuan fuzzy dirumuskan sebagai berikut [1]:

1. Mengubah bentuk umum masalah program linear dengan koefisien fungsi tujuan fuzzy ke dalam bentuk standar, yaitu dengan menambah variabel tambahan atau variabel semu.
2. Menyusun tabel simpleks awal masalah program linear dengan koefisien fungsi tujuan fuzzy dalam bentuk standar dengan syarat bahwa kendala utama sudah tersusun Gauss-Jordan dengan ruas kanan sudah tak negatif.
3. Menguji keoptimalan pada tabel awal dengan melihat nilai  $y_{0j} = \mathfrak{R}(\tilde{z}_j - \tilde{c}_j)$  untuk semua  $j$ . Jika  $y_{0j} \geq 0$  untuk semua  $j$  maka tabel dikatakan optimal.
4. Jika tabel awal belum optimal, maka langkah selanjutnya adalah memperbaiki tabel dengan mengganti satu variabel basis. Mengganti variabel basis dilakukan dengan dua aturan, yaitu:
  - i. KUNCI I (Entering Variable)

Pilih  $r$ , sehingga  $y_{0r} = \min\{y_{0j}\}$ .

dengan  $r$  adalah kolom ke- $r$  variabel yang bukan basis.

ii. KUNCI II (*Leaving Variable*)

Pilih baris ke- $s$  yang memenuhi  $R_i = \frac{y_{so}}{y_{sr}} =$

$\min\left\{\frac{y_{io}}{y_{ir}} \mid y_{ir} > 0\right\}$ , dengan  $s$

adalah variabel basis yang keluar. Jika ditemukan  $y_{ir} < 0$ , maka proses dihentikan, karena masalah program linear dengan koefisien fungsi tujuan fuzzy menjadi tak terbatas.

- Memilih  $y_{sr}$  sebagai unsur kunci dan memperbarui tabel simpleks fuzzy. Apabila tabel simpleks baru belum optimal, maka dilakukan langkah ketiga dan seterusnya hingga diperoleh tabel yang sudah optimal.

### 3.HASIL DAN PEMBAHASAN

*Home industry* makanan bernama “Laba-laba” di daerah Klampok memproduksi makanan khas daerah Klampok yaitu jenang dan mino. Untuk memproduksi jenang dan mino dibutuhkan 5 jenis bahan baku, yaitu tepung ketan, tepung terigu, gula merah, minyak sayur, dan kelapa. Setiap kg jenang membutuhkan  $\frac{4}{9}$  kg tepung ketan,  $\frac{7}{9}$  kg gula merah, dan 2 butir kelapa. Setiap kg mino membutuhkan  $\frac{1}{2}$  kg tepung terigu,  $\frac{1}{2}$  kg gula merah, dan  $\frac{1}{40}$  kg minyak sayur. Akibat keterbatasan gudang bahan baku dan dana yang ada, bahan baku yang disediakan tiap minggu adalah 300 kg tepung ketan, 75 kg tepung terigu, 600 kg gula merah, 4 kg minyak sayur, dan 50 butir kelapa.

Produk tersebut dikerjakan melalui 2 proses pengerjaan manual, yaitu Proses I adalah proses pengolahan adonan sampai menjadi makanan siap saji dan Proses II adalah proses pengemasan makanan

(*packing*). Untuk membuat jenang dibutuhkan waktu 5 jam pada Proses I dan 16 jam pada Proses II, sedangkan untuk membuat mino dibutuhkan waktu 8 jam pada Proses I dan 1 jam pada Proses II. Jumlah karyawan pada Proses I sebanyak 4 orang, sedangkan pada Proses II sebanyak 6 orang. Para karyawan bekerja mulai pukul 08.00 sampai pukul 17.00 dengan istirahat selama 1 jam mulai pukul 12.00 sampai pukul 13.00, selama 7 hari kerja dalam 1 minggu.

Keuntungan per kg untuk jenang sebesar Rp 7.000,00 sampai Rp 9.000,00 dan untuk mino sebesar Rp 13.000,00 sampai Rp 15.000,00. Keuntungan per kg kedua produk tersebut seringkali berubah sesuai dengan kondisi pasar. Ketika musim libur panjang dan libur lebaran order produk tersebut banyak berdatangan dan dituntut untuk segera memenuhinya, maka keuntungan per kg untuk jenang bisa bertambah hingga 3 kali lipat tetapi tidak pernah mencapai Rp 27.000,00 dan untuk mino juga bisa bertambah hingga 2 kali lipat tetapi tidak pernah mencapai Rp 30.000,00. Akan tetapi pada hari-hari biasa ketika produk tersebut sulit untuk terjual, maka keuntungan per kg untuk jenang bisa berkurang tetapi tidak pernah mencapai Rp 6.000,00 dan untuk mino juga bisa berkurang tetapi tidak pernah mencapai Rp 10.000,00.

Berdasarkan kondisi tersebut, berapakah keuntungan maksimum yang bisa didapat oleh *home industry* makanan “Laba-laba”?

- Memformulasikan permasalahan di atas ke dalam model matematika.

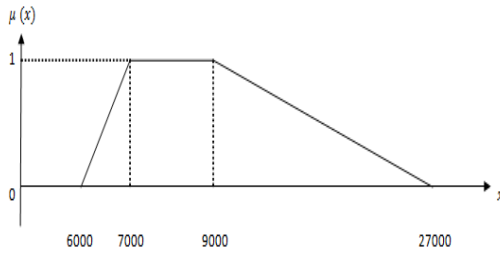
Jam kerja karyawan per minggu dapat dihitung sebagai berikut:

Proses I:  $4 \times 8 \times 7 = 224$  jam/minggu

Proses II:  $6 \times 8 \times 7 = 336$  jam/minggu.

Keuntungan untuk kedua produk tersebut dapat dibentuk ke dalam bilangan *trapezoidal fuzzy* sebagai berikut:

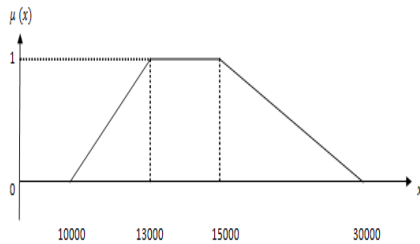
**Produk I (Jenang):**



**Gambar 3.1** Bilangan Trapezoidal Fuzzy untuk Keuntungan Produk I

Keuntungan per kg untuk Produk I (jenang) dalam bilangan *trapezoidal fuzzy* yaitu (7000,9000,1000,18000) atau dapat ditulis menjadi (7,9,1,18) dalam ribuan rupiah.

**Produk II (Mino):**



**Gambar 3.2** Bilangan Trapezoidal Fuzzy untuk Keuntungan Produk II

Keuntungan per kg untuk Produk II (mino) dalam bilangan *trapezoidal fuzzy* yaitu (13000,15000,3000,15000) atau dapat ditulis menjadi (13,15,3,15) dalam ribuan rupiah.

Variabel keputusan:

$x_1$  = jumlah Produk I (jenang) yang dibuat dalam kg

$x_2$  = jumlah Produk II (mino) yang dibuat dalam kg

Kasus tersebut dapat diformulasikan sebagai berikut:

Memaksimumkan:  $\tilde{z} = (7,9,1,18) x_1 + (13,15,3,15) x_2$

dengan kendala  $\frac{4}{9} x_1 \leq 300$

$$\frac{1}{2} x_2 \leq 75$$

$$\frac{7}{9} x_1 + \frac{1}{2} x_2 \leq 600$$

$$\frac{1}{40} x_2 \leq 4$$

$$2x_1 \leq 50$$

$$5x_1 + 8x_2 \leq 224$$

$$16x_1 + x_2 \leq 336$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Solusi dari masalah program linear dengan koefisien fungsi tujuan *fuzzy* dicari menggunakan metode simpleks.

- Diperoleh nilai fungsi tujuan *fuzzy* dan *crisp* optimalnya yaitu  $\tilde{z} = \left( \frac{38920}{123}, \frac{53816}{123}, \frac{35896}{123}, \frac{100632}{123} \right)$  dan  $z = \frac{250208}{492} = 508.5529$ . Dengan nilai solusi penyelesaian *crisp* optimalnya adalah  $(x_1, x_2) = \left( \frac{2464}{123}, \frac{1904}{123} \right) = (20.0325, 15.4797)$ .
- Jadi, keuntungan maksimum yang bisa didapat oleh *home industry* makanan “Laba-laba” dalam memproduksi jenang dan mino adalah sebesar Rp 508.552,90 dengan jumlah jenang yang harus diproduksi sebanyak 20,0325 kg dan jumlah mino yang harus diproduksi sebanyak 15,4797 kg.

**4. KESIMPULAN**

Program linear dengan koefisien fungsi tujuan *fuzzy* dapat diterapkan untuk masalah optimasi produksi jenang dan mino. Penerapan bilangan *trapezoidal fuzzy* pada koefisien fungsi tujuan dapat digunakan untuk mengatasi masalah ketidakpastian pada keuntungan dari penjualan mino dan jenang tersebut sehingga dapat ditentukan secara pasti berapa jumlah jenang dan mino yang harus diproduksi agar diperoleh keuntungan yang optimal.

**5. DAFTAR PUSTAKA**

[1] Nezam Mahdavi-Amiri, Seyed Hadi Nasserri, Alahbakhsh Yazdani. 2009. “Fuzzy Primal Simplex Algorithms for Solving Fuzzy Linear Programming Problems”, *Iranian Journal of Operation Research*. No.2, pp.68-84.

[2] Seyed Hadi Nasserri, E. Ardil. 2005. “Simplex Method for Fuzzy Variable Linear Programming Problems”. World Academy of Science,

Engineering, and Techonology.  
No.8, pp.198-202.

- [3] Seyed Hadi Nasser, E. Ardil, A. Yazdani, R. Zaefarian. 2005. "Simplex Method for Solving Linear Programming Problems with Fuzzy Numbers". World Academy of Science, Engineering, and Techonology. No.10, pp.284-288.
- [4] Susilo, Frans. 2006. *Himpunan dan Logika Kabur*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
-

## MODEL OPTIMASIECONOMIC ORDER QUANTITY (EOQ) DENGAN SISTEM PARSIAL BACKORDER DAN ALL UNIT DISCOUNT

Achmad Robeth Taufiqiy<sup>1</sup>, Nikken Prima P.<sup>2</sup>, Farikhin<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup>Jurusan Matematika FSM Universitas Diponegoro

Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Tembalang Semarang

[Robethahmad99@yahoo.com](mailto:Robethahmad99@yahoo.com)<sup>1</sup>

**Abstrak.** Penulisan ini menggabungkan beberapa model optimasi persediaan barang yaitu model optimasi *Economic Order Quantity* (EOQ), model optimasi EOQ dengan *all unit discount* dan model optimasi EOQ dengan sistem parsial *backorder* menjadi model optimasi EOQ dengan sistem parsial *backorder* dan *all unit discount*. Selain *supplier* memberikan diskon untuk pembelian dalam skala tertentu, dalam model ini terdapat dua kondisi jika terjadi *stockout* yaitu konsumen bersedia menunggu atau tidak bersedia menunggu barang datang.

**Kata kunci :** Persediaan, *Economic Order Quantity*, *All Unit Discount*, Parsial *backorder*

### 1. PENDAHULUAN

Salah satu model yang dipakai untuk menentukan biaya persediaan yang minimal adalah model *Economic Order Quantity* (EOQ). Model EOQ dikembangkan pertama kali oleh Harris pada tahun 1913 [1]. Asumsi yang dikembangkan dalam model dipandang sulit diterapkan dalam kehidupan nyata karena dalam model EOQ tidak diperbolehkan adanya kekosongan barang (*stockout*), untuk itu [2] mengembangkan model EOQ dasar dimana diperbolehkan adanya *stockout*. *Stockout* ini dibedakan menjadi dua kasus yaitu model *backorder* dan model *lost sales*.

Model *backorder* terjadi apabila terdapat kekosongan persediaan di gudang namun konsumen bersedia menunggu sampai barang datang, sedangkan pada model *lost sales*, saat terjadi kekosongan persediaan di gudang konsumen tidak bersedia menunggu sampai barang datang. Tri Choirunnisa pada [3] menggabungkan kedua situasi ini model *backorder* dan model *lost sales* menjadi model EOQ dengan sistem parsial *backorder* dengan menggunakan  $\beta$  sebagai persentase kekurangan yang akan menjadi *backorder* karena *stockout*. Jika  $\beta = 1$  artinya semua

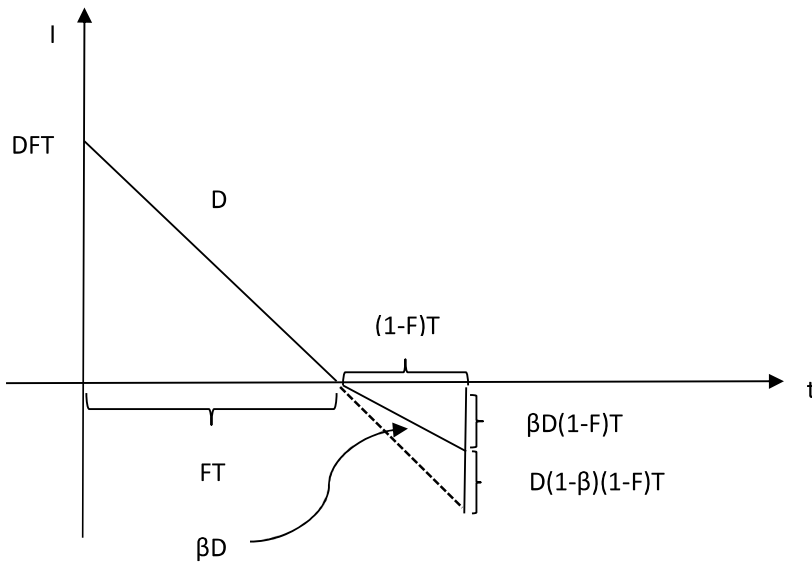
konsumen bersedia menunggu sampai barang datang dan  $\beta = 0$  artinya semua konsumen tidak bersedia menunggu sampai barang datang.

Seiring dengan perkembangan zaman banyak peneliti telah mengembangkan dan mengkaji model EOQ menjadi berbagai macam model EOQ yang baru seperti model EOQ dengan *all unit discount*. Model EOQ dengan *all unit discount* digunakan sebagai strategi penetapan harga diskon dengan tujuan mendorong para pembeli untuk memesan lebih banyak lagi. Model EOQ dengan *all unit discount* merupakan kebijakan memberi diskon tertentu pada setiap unit yang dibeli setelah banyaknya unit yang dibeli tersebut melebihi pemesanan yang ditentukan.

Dalam Penulisan ini dikaji penggabungan beberapa model tersebut menjadi model optimasi *Economic Order Quantity* (EOQ) dengan sistem parsial *backorder* dan *all unit discount* dan setelah model diformulasikan dilakukan simulasi numerik terhadap model *Economic Order Quantity* (EOQ) dengan sistem parsial *backorder* dan *all unit discount* tersebut.

## 2. HASIL DAN PEMBAHASAN

Tujuan dari model ini yaitu menghitung berapa banyak barang yang sebaiknya harus dipesan agar mendapatkan potongan harga yang optimal dan dapat memaksimalkan keuntungan yang diperoleh.



**Gambar 2.1** Model optimasi *EOQ* dengan sistem parsial *backorder* [6]

**Keterangan :**

$D$  : Jumlah permintaan barang dalam satu bulan  
 $P$  : Harga jual barang per unit  
 $i$  : Persentase biaya penyimpanan barang dalam per unit per bulan  
 $A_j$  : Biaya pemesanan barang ke  $j$  dalam satu kali pemesanan  
 $C_j$  : Biaya pembelian barang ke  $j$  dalam per unit  
 $q_j$  : Batas tingkat jumlah pemesanan ke  $j$  terjadi,  
 $\pi$  : Biaya *backorder* per unit  
 $\pi'_j$   
 $C_g$  : Biayakerugianbarang per unit per bulan  
 $T$  : Waktu dalam satu siklus pemesanan  
 $T_1$  : Waktutidakterjadinyastockout  
 $T_2$  : Waktuterjadinyastockout  
 $Q$  : Jumlah pesanan yang optimal dalam satu siklus pemesanan  
 $\beta$  : Persentase kekurangan barang yang akan menjadi *backorder*  
 $B$  : Jumlah *backorder* barang  
 $F_j$  : Persentase permintaan barang ke  $j$  yang akan dipenuhi dari persediaan dalam satu bulan  
 $I$  :Tingkat persediaan maksimum  
 $CTC$  : Biaya total persediaan per siklus  
 $CTP$  : Biaya total persediaan per siklus  
 $ATC$  : Biaya total persediaan per bulan  
 $ATP$  : Total keuntungan per bulan  
 Gambar 2.1 menjelaskan tentang persediaan barang dimana terdapat sebesar  $DFT$  barang yang tersedia dan terjadi kekosongan barang (*stockout*) dalam waktu  $(1-F)T$  dan jumlah konsumen yang bersedia menunggu (*backorder*) sebesar  $\beta D(1-F)T$  barang serta terjadi *lostsale* sebesar  $D(1-\beta)(1-F)T$  barang dikarenakan konsumen tidak bersedia menunggu barang yang datang sehingga perusahaan kehilangan keuntungan yang seharusnya didapat. Pada model optimasi ini dibahas persediaan barang yang seharusnya tersedia di gudang sehingga perusahaan tidak kehilangan penjualan dan mencegah terjadinya konsumen menunggu

terlalu lama barang yang dipesan datang sehingga konsumen tidak kecewa.

Dalam menghitung biaya total persediaan per siklus dapat menjumlahkan biaya total pembelian, biaya total penyimpanan, biaya total *backorder*, biaya total pemesanan, dan biaya total *stockout*.

Total biaya persediaan (per siklus) = Biaya Total Pembelian + Biaya Total Penyimpanan + Biaya Total Pemesanan + Biaya Total *Backorder* + Biaya Total *Stockout*

$$CTC_j(F_j, T_j) = A_j + C_j D \left( F_j + \beta(1 - F_j) \right) T_j + \frac{iC_j D F_j^2 T_j}{2} + \frac{\pi \beta D (1 - F_j)^2 T_j^2}{2} + C_g (1 - \beta) (1 - F_j) D T_j \quad (2.1)$$

$$ATC_j(F_j, T_j) = \frac{A_j}{T_j} + C_j D \left( F_j + \beta(1 - F_j) \right) + \frac{iC_j D F_j^2 T_j}{2} + \frac{\pi \beta D (1 - F_j)^2 T_j}{2} + C_g (1 - \beta) (1 - F_j) D \quad (2.2)$$

$$ATP_j(F_j, T_j) = PD - \left( \frac{A_j}{T_j} + \pi'_j D (1 - \beta) (1 - F_j) + \frac{iC_j D F_j^2 T_j}{2} + \frac{\pi \beta D (1 - F_j)^2 T_j}{2} + C_j D \right) \quad (2.3)$$

Nilai  $PD$  selalu tetap karena jumlah penjualan perusahaan per bulan selalu tetap, maka total persediaan per bulan ( $ATC_j$ ) menjadi

$$ATC_j(F_j, T_j) = \frac{A_j}{T_j} + \pi'_j D (1 - \beta) (1 - F_j) + \frac{iC_j D F_j^2 T_j}{2} + \frac{\pi \beta D (1 - F_j)^2 T_j}{2} + C_j D \quad (2.4)$$

Persamaan (2.4) dapat dituliskan dalam bentuk

$$ATC(F_j, T_j) = \frac{G_0}{T_j} + T_j (G_1 F_j^2 - 2G_2 F_j + G_2) - G_3 F_j + G_3 + G_4 \quad (2.5)$$

dimana

$$G_0 = A_j$$

$$G_1 = \frac{D(iC_j + \beta\pi)}{2}$$

$$G_2 = \frac{D\beta\pi}{2}$$

$$G_3 = \pi'_j D(1 - \beta)$$

$$G_4 = C_j D$$

dengan  $G_i > 0$  untuk  $i = 1, 2, 3, 4$  dan  $G_1 > G_2$

Persamaan (2.5) dituliskan kembali dalam persamaan berikut

$$ATC(F_j, T_j) = \frac{G_0}{T_j} + T_j r(F_j) + q(F_j) \quad (2.6)$$

dimana

$$r(F_j) = G_1 F_j^2 - 2G_2 F_j + G_2$$

$$q(F_j) = -G_3 F_j + G_3 + G_4.$$

$$\frac{dATC}{dT_j} = -\frac{G_0}{T_j^2} + r(F_j) = 0$$

$$T_j = \sqrt{\frac{G_0}{r(F_j)}} = \sqrt{\frac{2A_j}{[iC_j D F_j^2 + \pi \beta D (1 - F_j)^2]}} \quad (2.7)$$

$$ATC(F_j) = 2\sqrt{r(F_j)G_0 + q(F_j)} \quad (2.8)$$

$$F_j^* = \frac{G_3 + 2T_j G_2}{2T_j G_1} = \frac{\pi' j (1 - \beta) + \pi \beta T_j}{T_j (iC_j + \pi \beta)} \quad (2.9)$$

$$T_j^* = \sqrt{\frac{2A_j (iC_j + \pi \beta)}{\beta \pi i C_j D} - \frac{(1 - \beta)^2 \pi'^2 j}{\beta \pi i C_j}} \quad (2.10)$$

$T^*$  parsial backorder  $\geq T^*$ EOQ

$$\frac{2A_j}{DiC_j} \left( \frac{iC_j + \pi \beta}{\beta \pi} \right) - \frac{(1 - \beta)^2 \pi'^2 j}{iC_j \beta \pi} \geq \frac{2A_j}{DiC_j}$$

$$\beta \geq 1 - \frac{\sqrt{2A_j i C_j D}}{\pi' j D}$$

(2.11)

$$\beta \geq \beta^* = 1 - \frac{\sqrt{2A_j i C_j D}}{\pi' j D}$$

(2.12)

$$Q^* = DT_j (F_j + \beta(1 - F_j))$$

(2.13)

Dan untuk mencari biaya total persediaan minimum jika  $Q^*$  tidak ada pada interval  $q_j \leq Q < q_{j+1}$ .

$$T_j = \frac{q_j}{D(F_j + \beta(1 - F_j))}$$

Selanjutnya  $T_j$  pada Persamaan 2.14 disubstitusikan ke Persamaan 2.4

$$ATC(F_j) = \frac{A_j D (F_j + \beta(1 - F_j))}{q_j} + \pi' j D (1 - \beta) (1 - F_j) +$$

$$\frac{q_j (iC_j F_j^2 + \pi \beta (1 - F_j)^2)}{2(F_j + \beta(1 - F_j))} + C_j D \quad (2.15)$$

$$F'_j = \frac{\beta}{(1 - \beta)} \left( -1 + \sqrt{\frac{(iC_j \beta + \pi) q_j}{\beta \left( q_j (iC_j + \beta \pi) + 2 \left( \frac{A_j}{q_j} - \pi' j \right) D (1 - \beta)^2 \right)}} \right) \quad (2.16)$$

Kemudian untuk menyelesaikan Model Optimasi *Economic Order Quantity* (EOQ) dengan Sistem Parsial *Backorder* dan *All Unit Discount*, ada beberapa langkah-langkah untuk mendapatkan keuntungan yang optimal yaitu [6] :

1. Menentukan  $q_{n+1} = \infty$
2. Hitung  $\beta'_j = 1 - \frac{\sqrt{2A_j i C_j D}}{\pi' j D}$  untuk masing-masing  $j = n, n - 1, \dots, 1$

- (a) Jika  $0 \leq \beta'_j \leq \beta$  atau  $\beta < 0$  maka akan terjadi parsial *backorder* selanjutnya menghitung  $T_j$  dan  $F_j$  pada Persamaan 2.9 dan 2.10

- (a.1) Jika  $q_j \leq DT_j (F_j + \beta(1 - F_j)) < q_{j+1}$  maka  $T_j = T_j^*$  dan  $F_j = F_j^*$  karena sudah dalam interval diatas dan selanjutnya menghitung total keuntungan perbulan pada Persamaan 2.3

- (a.2) Jika  $DT_j (F_j + \beta(1 - F_j)) < q_j$ 
  - (a.2.1) Dikarenakan  $q_j$  tidak dalam interval maka selanjutnya menghitung  $F_j$  dan  $T_j$  dengan menggunakan Persamaan (2.14) dan (2.16)

Selanjutnya menghitung total keuntungan perbulan pada Persamaan 2.3

- (a.2.2) Misal  $F_j = 1$  dan  $T_j = \sqrt{\frac{2A_j}{iC_j D}}$ . Dan jika  $DT_j < q_j$  maka  $T_j = \frac{q_j}{D}$ . Karena  $F_j = 1$  maka tidak ada

kekurangan barang selanjutnya menghitung nilai keuntungan perbulan  $ATP_j(F_j, T_j) = PD - \left( C_j D + \frac{A_j}{T_j} + \frac{iC_j D T_j}{2} \right)$

(a.2.3) Misal  $F_j = 0$  dan  $T_j = \infty$  dan selanjutnya menghitung keuntungan dari tidak adanya persediaan barang  $-\pi'_j D$

(a.2.4) Bandingkan keuntungan dari masing-masing sub a.2.1, a.2.2, dan a.2.3. Pilihlah yang paling maksimal keuntungannya dan tentukan  $T_j = T_j^*$  dan  $F_j = F_j^*$  jika sudah menentukan keuntungan yang paling maksimal.

(a.3) Jika  $DT_j (F_j + \beta(1 - F_j)) \geq q_{j+1}$

(a.3.1) Hitung  $F'_j$  dan  $T_j$  dengan menggunakan Persamaan (2.14) dan (2.15). Selanjutnya menghitung total keuntungan perbulan pada Persamaan 2.3

(a.3.2) Misal  $F_j = 1$  dan  $T_j = \sqrt{\frac{2A_j}{iC_j D}}$ . Dan jika  $DT_j \geq q_{j+1}$  maka  $T_j = \frac{q_{j+1}}{D}$ . Karena  $F_j = 1$  maka tidak ada kekurangan barang selanjutnya hitung nilai keuntungan perbulan  $ATP_j(F_j, T_j) = PD - \left( C_j D + \frac{A_j}{T_j} + \frac{iC_j D T_j}{2} \right)$

(a.3.3) Misal  $F_j = 0$  dan  $T_j = \infty$  dan hitung keuntungan dari tidak adanya persediaan barang  $-\pi'_j D$

(a.3.4) Bandingkan keuntungan dari masing-masing sub

a.3.1, a.3.2, dan a.3.3. Pilihlah yang paling maksimal keuntungannya dan tentukan  $T_j = T_j^*$  dan  $F_j = F_j^*$  jika sudah menentukan keuntungan yang paling maksimal.

(b) Jika  $0 \leq \beta < \beta'_j$  Maka tidak terjadi parsial *backorder* dan tidak ada kekurangan persediaan karena semua permintaan terpenuhi sehingga  $F_j = 1$

dan  $T_j = \sqrt{\frac{2A_j}{iC_j D}}$

(b.1) Jika  $q_j \leq DT_j < q_{j+1}$  Karena  $F_j = 1$  maka tidak ada kekurangan barang selanjutnya hitung nilai keuntungan perbulan  $ATP_j(F_j, T_j) = PD - \left( C_j D + \frac{A_j}{T_j} + \frac{iC_j D T_j}{2} \right)$

(b.2) Jika  $DT_j < q_j$  maka  $T_j = \frac{q_j}{D}$  Selanjutnya menghitung keuntungan pertahun. Karena  $F_j = 1$  maka tidak ada kekurangan barang selanjutnya hitung nilai keuntungan perbulan  $ATP_j(F_j, T_j) = PD - \left( C_j D + \frac{A_j}{T_j} + \frac{iC_j D T_j}{2} \right)$

(b.3) Jika  $DT_j \geq q_{j+1}$  maka  $T_j = \frac{q_{j+1}}{D}$  Selanjutnya menghitung keuntungan perbulan. Karena  $F_j = 1$  maka tidak ada kekurangan barang selanjutnya hitung nilai keuntungan perbulan  $ATP_j(F_j, T_j) = PD - \left( C_j D + \frac{A_j}{T_j} + \frac{iC_j D T_j}{2} \right)$

(b.4) Bandingkan keuntungan dari masing-masing sub b.1, b.2, dan b.3. Pilihlah yang paling maksimal keuntungannya dan tentukan  $T_j = T_j^*$  dan  $F_j = F_j^*$  jika sudah menentukan keuntungan yang paling maksimal.

3. Bandingkan keuntungan dari masing-masing solusi untuk  $j =$

$n, n-1, \dots, 1$  dan setelah itu pilihlah keuntungan yang paling maksimal dan tentukan  $T_j = T_j^*$  dan  $F_j = F_j^*$  sebagai solusi optimal jika sudah menentukan keuntungan yang paling maksimal.

4. Menggunakan  $T_j^*$  dan  $F_j^*$  dari langkah ketiga, kemudian hitung  $Q^* = DT_j (F_j + \beta(1 - F_j))$  dan  $B^* = \beta(1 - F_j)DT_j$

### 3. KESIMPULAN

Model optimasi *Economic Order Quantity* dengan sistem parsial *backorder* dan *all unit discount* dapat dipergunakan dalam masalah persediaan barang yang melibatkan kesediaan konsumen apakah konsumen bersedia menunggu atau tidak bersedia menunggu barang pada saat barang habis, selain itu juga dari *supplier* memberikan diskon perusahaan jika konsumen memenuhi syarat tertentu dalam pemesanan.

### 4. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Harris, F.W., 1913. How many parts to make at once, *Factory, The magazine of Management* 10 (1913) 135-136, 152, *Reprinted in Operations Research*, Vol 38, No.6, hlm 947-950.
- [2] Zipkin, P.H. 2000. *Foundations of Inventory Management*. New York : McGraw Hill.
- [3] Choirunnisa, Tri. 2014. Model Economic Order Quantity dengan sistem parsial backorder. Skripsi, Jurusan Matematika Universitas Diponegoro. Semarang
- [4] Nasution, Arman Hakim dan Yudha Prasetyawan. 2008. *Perencanaan dan Pengendalian Produksi*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- [5] Taleizadeh, A.A., Pentico, D.W., 2014. An Economic Order Quantity Model with Partial Backordering and All Unit Discount,

*International Journal of Production Economics*, 155, hal. 172-184.

- [6] Pentico, D.W., Drake, M.J. 2007. The deterministic EOQ with partial backordering: a new approach, *European Journal of Operational Research*, Vol 194, No.1, hlm 102-113.
-

## STRATEGI KONTROL OPTIMAL DAN SOLUSI NUMERIK UNTUK EPIDEMIK DBD PADA POPULASI MANUSIA DAN VEKTOR

Titi Indah Lestari<sup>1</sup>, Kartono<sup>2</sup>, R. Heru Tjahjana<sup>3</sup>  
1,2,3 Jurusan Matematika FSM Universitas Diponegoro

**Abstract.** Dengue Haemorrhagic Fever (DHF) is a disease which is spread by mosquitoes. To see the flow of the spread of Dengue virus, a mathematical model of the human population and vector population was established. The human population consists of Susceptible class, Exposed class, Infected class, and Recovered class, while the vector population consists of Susceptible class and Infected class. To control the spread of DHF disease, an optimal control strategy is required in the form of prevention control and treatment control that is applied in these *SEIR-SI* model. The results of numerical simulations carried out by the method of Fourth Order Runge-Kutta using MATLAB shows that application of the two controls is very influential to lower the Exposed and Infected human population, and reduce the Infected vector populatio.

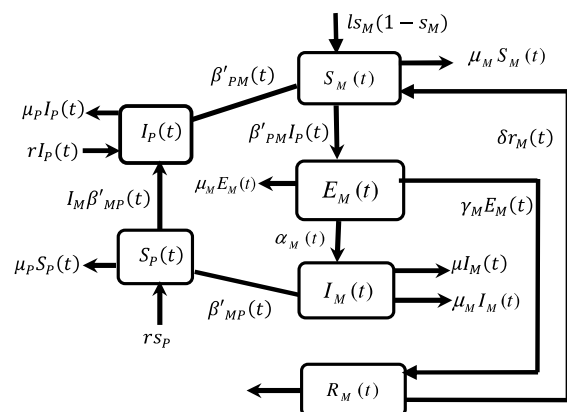
**Keywords:** *SEIR-SI* model, Dengue Haemorrhagic Fever, Optimal Control, Runge Kutta Fourth Order, MATLAB

### 1. PENDAHULUAN

Demam Berdarah Dengue (DBD) merupakan salah satu penyakit yang ditularkan oleh nyamuk *Aedes aegypti*. Upaya yang dilakukan untuk memberantas perkembangan penyakit ini diantaranya program 3M (menguras, menutup, dan mengubur), pengobatan pada individu terinfeksi, dan pemberantasan populasi vektor dengan insektisida. Sebelumnya skripsi yang membahas tentang wabah penyakit sudah pernah ditulis oleh Setyawan (2011) yang membahas penyebaran penyakit campak dan demam berdarah *Dengue* untuk dianalisis kestabilannya [1], dan Arimbi (2014) mengenai penyebaran virus *Dengue* pada populasi manusia dan perantara untuk dicari solusi numeriknya [2]. Pembahasan mengenai kontrol optimal juga telah ditulis oleh Jonner *et al* (2012) yang membahas kontrol optimal vaksinasi model epidemiologi tipe SIR [3]. Pada tugas akhir ini penulis tertarik untuk menentukan strategi kontrol optimal untuk pengendalian epidemik DBD dan solusi numeriknya.

### 2. KONSTRUKSI MODEL KONTROL OPTIMAL

Simbol M diberikan untuk populasi manusia dan P untuk populasi perantara (nyamuk *Aedes aegypti*). Populasi manusia diklasifikasikan menjadi 4 kelas. Diberikan notasi  $S_M$  untuk kelas *susceptible*,  $E_M$  untuk kelas *exposed*,  $I_M$  untuk kelas *infected*, dan  $R_M$  untuk kelas *recovered*. Sedangkan pada populasi perantara diklasifikasikan menjadi 2 kelas. Diberikan notasi  $S_P$  untuk kelas *susceptible* dan  $I_P$  untuk kelas *infected* [4]. Diagram perpindahan antar kelas penyebaran virus *Dengue* pada populasi manusia dan nyamuk digambarkan pada Gambar berikut



**Gambar 2.1** Transfer dinamik antar kelas pada populasi manusia dan perantara

Dengan menerapkan dua perlakuan kontrol yaitu  $0 \leq u_1 \leq 1$  : kontrol pencegahan berupa kampanye pengendalian 3M dan pemberantasan populasi perantara dengan insektisida, dan  $0 \leq u_2 \leq 1$  : Pengobatan pada individu terinfeksi, maka model matematika kontrol optimal yang berhasil direkonstruksi adalah sebagai berikut

$$\left. \begin{aligned} \frac{ds_M}{dt} &= ls_M(1 - s_M) - (\mu_M + (1 - u_1)\beta'_{PM}i_P)s_M + \delta r_M \\ \frac{de_M}{dt} &= (1 - u_1)\beta'_{PM}i_P s_M - (\alpha_M + \gamma_M + \mu_M)e_M \\ \frac{di_M}{dt} &= \alpha_M e_M - (\eta_M u_2 + \mu_M + \mu)i_M \\ \frac{dr_M}{dt} &= \eta_M u_2 i_M + \gamma_M e_M - \mu_M r_M - \delta r_M \\ \frac{ds_P}{dt} &= r s_P - (\mu_P + (1 - u_1)\beta'_{MP}i_M)s_P \\ \frac{di_P}{dt} &= (1 - u_1)(r i_P + \beta'_{MP}i_M s_P) - \mu_P i_P \end{aligned} \right\} (1)$$

Parameter yang digunakan didapat dari data Kelurahan Tembalang (2014), data Puskesmas Rowosari (2014), serta hasil wawancara dengan Dr. Ir. Martini, M. Kes (2015)

Definisi Parameter	Notasi	Nilai
Laju pertumbuhan alami pada populasi manusia	$l$	0,0088
Laju kematian alami populasi manusia	$\mu_M$	0,0042
Laju kematian manusia karena DBD	$\mu$	0,0625
Laju dimana individu <i>exposed</i> menjadi individu <i>infected</i>	$\alpha_M$	0,62
Laju kesembuhan penyakit	$\eta_M$	0,94
Laju kesembuhan dari individu bergejala	$\gamma_M$	0,58
Peluang dari sembuh menjadi rentan kembali	$\delta$	0,9
Laju pertumbuhan alami populasi nyamuk	$r$	0,4
Laju kematian alami populasi nyamuk	$\mu_P$	0,48
Tingkat kontak langsung nyamuk terinfeksi dengan manusia rentan	$\beta'_{PM}$	1,05
Tingkat kontak langsung manusia terinfeksi dengan nyamuk rentan	$\beta'_{MP}$	0,45
Banyaknya gigitan yang dilakukan satu ekor nyamuk terinfeksi per hari	$b_i$	1,4
Banyaknya gigitan yang dilakukan satu ekor nyamuk rentan per hari	$b_s$	0,6
Peluang transmisi virus <i>Dengue</i> dari nyamuk ke manusia	$p_{PM}$	0,75
Peluang transmisi virus dari manusia ke nyamuk	$p_{MP}$	0,75

**Tabel 2.1** Definisi parameter yang digunakan dalam simulasi

Asumsi- asumsi yang digunakan adalah : Populasi tertutup, artinya pada populasi manusia maupun populasi

nyamuk dewasa tidak ada proses emigrasi dan imigrasi; Laju pertumbuhan pada manusia adalah laju pertumbuhan Logistik, sedangkan laju pertumbuhan pada nyamuk adalah laju pertumbuhan Malthusian; Penyakit menular melalui kontak langsung antara nyamuk dewasa yang terinfeksi dengan manusia rentan, antara manusia yang terinfeksi dengan nyamuk dewasa yang rentan terinfeksi, dan melalui nyamuk betina ke telurnya; Tingkat kontak langsung antara nyamuk dewasa dengan manusia dipengaruhi oleh besarnya peluang transmisi virus *Dengue* dan banyaknya gigitan yang dilakukan oleh satu ekor nyamuk dewasa per hari; Populasi nyamuk *Susceptible* dan populasi nyamuk *Infected* mempunyai laju pertumbuhan alami yang sama; Nyamuk dewasa yang menggigit dan menghisap darah manusia hanya nyamuk dewasa betina.

### 2.1 Penyelesaian Kontrol Optimal

Diformulasikan fungsi obyektif  $J$  yang meminimalkan jumlah manusia terinfeksi dan biaya penerapan kontrol  $\{u_1, u_2\}$  sebagai berikut

$$J = \min_{u_1, u_2} \int_0^{t_1} (B_1 i_M + B_2 u_1^2 + B_3 u_2^2) dt \quad (2)$$

dimana  $B_1$  adalah konstanta bobot yang bersesuaian dengan manusia terinfeksi.  $B_2$  dan  $B_3$  adalah konstanta yang disesuaikan dengan kuadrat kontrol sebagai penyeimbang dari  $u_1$  dan  $u_2$ , dengan syarat  $B_1 + B_2 + B_3 = 1$  dan  $B_1 > B_2 > B_3$ .  $t = 0$  adalah waktu awal, dan  $t_1$  adalah waktu akhir. Selanjutnya bentuk fungsi Lagrangian sebagai berikut

$$L = B_1 i_M + B_2 u_1^2 + B_3 u_2^2 \quad (3)$$

Bentuk Hamiltonian  $H$  dari masalah tersebut adalah

$$H = L + \lambda_1(t) \frac{ds_M}{dt} + \lambda_2(t) \frac{de_M}{dt} + \lambda_3(t) \frac{di_M}{dt} + \lambda_4(t) \frac{dr_M}{dt} + \lambda_5(t) \frac{ds_P}{dt} + \lambda_6(t) \frac{di_P}{dt} \quad (4)$$

dimana  $\lambda_i(t)$ , untuk  $i=1,2,3,4,5,6$  adalah variabel adjoint yang ditentukan dengan menyelesaikan persamaan *Co-state* menggunakan prinsip minimum Pontryagin [5]:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial s_M} = -\lambda_1 l(1 - 2s_M) + \lambda_1 \mu_M + \\ &\quad (\lambda_1 - \lambda_2)(1 - u_1)\beta'_{PM}i_P \\ \dot{\lambda}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial e_M} = \lambda_2(\alpha_M + \gamma_M + \mu_M) - \lambda_3\alpha_M - \lambda_4\gamma_M \\ \dot{\lambda}_3 &= -\frac{\partial H}{\partial i_M} = -B_1 + (\lambda_3 - \lambda_4)\eta_M u_2 + \lambda_3(\mu_M + \\ &\quad \mu) + (\lambda_5 - \lambda_6)(1 - u_1)\beta'_{MP}S_P \\ \dot{\lambda}_4 &= -\frac{\partial H}{\partial r_M} = -\lambda_1\delta + \lambda_4(\mu_M + \delta) \quad (5) \\ \dot{\lambda}_5 &= -\frac{\partial H}{\partial s_P} = \lambda_5(\mu_P - r) + (\lambda_5 - \lambda_6)(1 - \\ &\quad u_1)\beta'_{MP}i_M \\ \dot{\lambda}_6 &= -\frac{\partial H}{\partial i_P} = (\lambda_1 - \lambda_2)(1 - u_1)\beta'_{PM}S_M + \lambda_6(\mu_P - \\ &\quad (1 - u_1)r) \end{aligned}$$

yang memenuhi kondisi transversalitas  $\lambda_i(t) = 0$ , untuk  $i=1,2,3,4,5,6$ . Kondisi optimal diperoleh melalui

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u_1} = 0 &\Rightarrow 2B_2 u_1 + (\lambda_1 - \lambda_2)\beta'_{PM}i_P S_M + \\ &\quad (\lambda_5 - \lambda_6)\beta'_{MP}i_M S_P - \lambda_6 r i_P = 0 \quad (6) \\ \frac{\partial H}{\partial u_2} = 0 &\Rightarrow 2B_3 u_2 + (-\lambda_3 + \lambda_4)\eta_M i_M = 0 \end{aligned}$$

Sehingga didapatkan solusi optimal

$$\begin{aligned} u_1^* &= \frac{(\lambda_2^* - \lambda_1^*)\beta'_{PM}i_P S_M + (\lambda_6^* - \lambda_5^*)\beta'_{MP}i_M S_P + \lambda_6^* r i_P}{2B_2} \quad (7) \\ u_2^* &= \frac{(\lambda_3^* - \lambda_4^*)\eta_M i_M}{2B_3} \end{aligned}$$

## 2.2 Simulasi Numerik

Selanjutnya persamaan (1) diselesaikan secara numerik dengan menggunakan metode Runge Kutta orde-4 dengan menghitung *step-size* ( $h$ ) terlebih dahulu [6][7]. Batas waktu  $t$  yang digunakan untuk simulasi numerik yaitu  $0 \leq t \leq 12$ , sehingga batas bawah  $a = 0$  dan batas atas  $b = 12$ . Iterasi dilakukan sebanyak  $N = 120$ , sehingga

$$h = \frac{b-a}{N} = \frac{12-0}{120} = 0,1 \quad (8)$$

Diskritisasi pada model penyebaran virus *Dengue* dengan kontrol dilakukan pada persamaan *state* (1) dan persamaan *co-state* (5), dengan syarat keadaan akhir

bebas (*Free End-Point*) [8] dimana keadaan awal tetap, yaitu  $s_M(0) = 0,9897$ ;  $e_M(0) = 0,0047$ ;  $i_M(0) = 0,0029$ ;  $r_M(0) = 0,0027$ ;  $s_P(0) = 0,5$ ; dan  $i_P(0) = 0,5$ ; sedangkan nilai keadaan akhir bebas, yaitu  $\lambda_1(12) = 0$ ,  $\lambda_2(12) = 0$ ,  $\lambda_3(12) = 0$ ,  $\lambda_4(12) = 0$ ,  $\lambda_5(12) = 0$ , dan  $\lambda_6(12) = 0$ . Pada hasil simulasi akan dianalisis pengaruh penerapan kontrol  $u_1$  saja dan kontrol  $u_2$  saja pada model penyebaran virus *Dengue*.

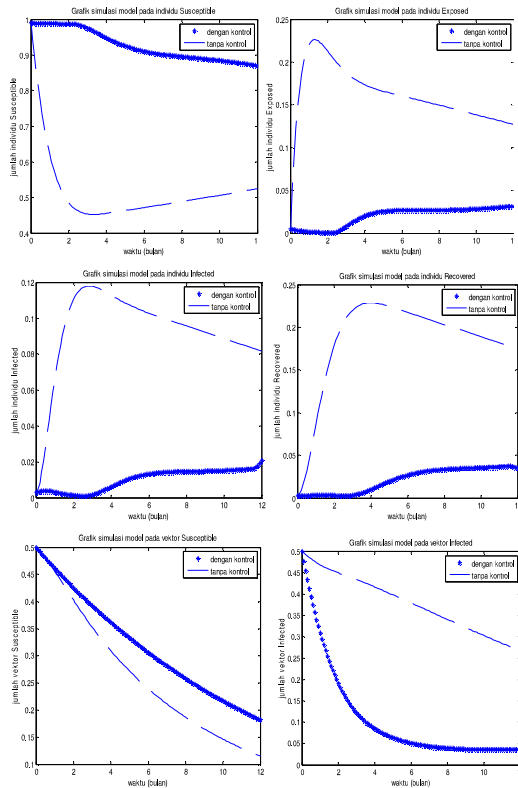
## 3. HASIL SIMULASI

Pada tabel 2. jumlah proporsi populasi manusia ( $s_M + e_M + i_M + r_M$ ) saat  $t_1 = 12$  dengan kontrol  $u_1$  dan  $u_2$  mengalami kenaikan, dari 0,9073 menjadi 0,9565 (kenaikan sebesar 5,4%). Hal ini menunjukkan bahwa penerapan kontrol  $u_1$  dan  $u_2$  dapat mengurangi risiko kematian akibat virus *Dengue*. Berbeda dengan jumlah populasi nyamuk ( $s_P + i_P$ ) pada  $t_1 = 12$  dengan kontrol, proporsinya mengalami penurunan dari 0,3829 menjadi 0,2187 (penurunan sebesar 42,9%). Hal ini menunjukkan penerapan kontrol  $u_1$  dan  $u_2$  dapat mengurangi jumlah populasi nyamuk perantara virus *Dengue*, serta dapat menurunkan jumlah penderita pada populasi manusia kelas *Infected*.

Pada Tabel 3. jumlah proporsi populasi manusia ( $s_M + e_M + i_M + r_M$ ) saat  $t_1 = 12$  dengan kontrol  $u_1$  mengalami kenaikan, dari 0,9073 menjadi 0,9540 orang (kenaikan sebesar 5,2%). Hal ini menunjukkan bahwa penerapan kontrol  $u_1$  dapat mengurangi risiko kematian akibat virus *Dengue*. Jumlah populasi nyamuk ( $s_P + i_P$ ) pada  $t_1 = 12$  dengan kontrol, proporsinya mengalami penurunan dari 0,3829 menjadi 0,2210 (penurunan sebesar 42,3%). Hal ini menunjukkan penerapan kontrol  $u_1$  sangat berpengaruh mengurangi jumlah populasi nyamuk perantara virus *Dengue*, tetapi tidak dapat meminimalkan jumlah penderita pada populasi manusia kelas *Infected*.

**Tabel 2.2** Proporsi awal dan proporsi akhir pada populasi manusia dan perantara tanpa kontrol dan dengan kontrol ( $u_1, u_2$ ) dengan  $B_1 = 0,7$ ;  $B_2 = 0,2$ ; dan  $B_3 = 0,1$

	Proporsi pada $t_0 = 0$	Proporsi pada $t_1 = 12$	
		Tanpa Kontrol	Dengan Kontrol $u_1$ dan $u_2$
$s_M$	0,9897	0,5245	0,8699
$e_M$	0,0047	0,1269	0,0314
$i_M$	0,0029	0,0816	0,0207
$r_M$	0,0027	0,1743	0,0345
<b>Jumlah</b>	<b>1</b>	<b>0,9073</b>	<b>0,9565</b>
$s_P$	0,5	0,1156	0,1820
$i_P$	0,5	0,2673	0,0367
<b>Jumlah</b>	<b>1</b>	<b>0,3829</b>	<b>0,2187</b>



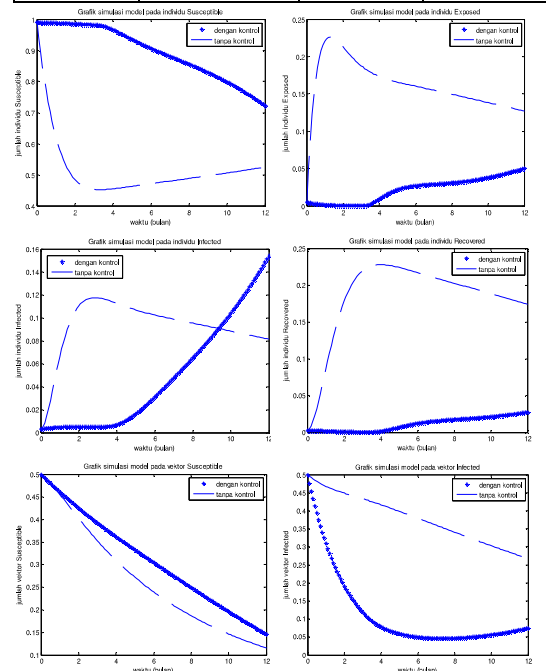
**Gambar 3.1** Grafik simulasi model penyebaran virus *Dengue* pada populasi manusia dan vektor dengan  $u_1$  dan  $u_2$  menggunakan  $B_1 = 0,7$ ;  $B_2 = 0,2$ ; dan  $B_3 = 0,1$ .

Pada Tabel 2.4 jumlah proporsi populasi manusia ( $s_M + e_M + i_M + r_M$ ) saat  $t_1 = 12$  dengan kontrol  $u_2$  mengalami kenaikan, dari 0,9073 menjadi 0,9605 (kenaikan sebesar 5,9%). Hal ini menunjukkan bahwa penerapan kontrol  $u_2$  dapat mengurangi risiko kematian akibat virus *Dengue*. Jumlah populasi nyamuk

( $s_P + i_P$ ) pada  $t_1 = 12$  dengan kontrol, proporsinya mengalami peningkatan tajam dari 0,3829 menjadi 0,6719 (kenaikan sebesar 75,5%). Hal ini menunjukkan penerapan kontrol  $u_2$  saja tidak dapat mengurangi jumlah populasi nyamuk perantara virus *Dengue* dan tidak cukup untuk meminimalkan jumlah penderita DBD.

**Tabel 2.3** Proporsi awal dan proporsi akhir pada populasi manusia dan perantara tanpa kontrol dan dengan kontrol  $u_1$  dengan  $B_1 = 0,8$  dan  $B_2 = 0,2$

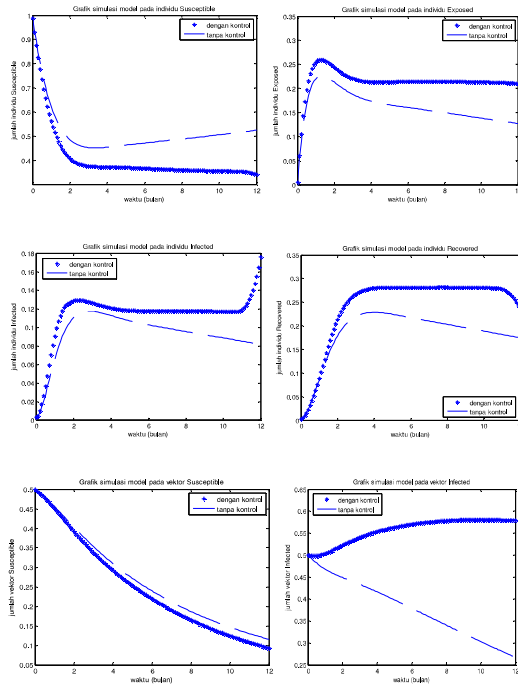
	Proporsi pada $t_0 = 0$	Proporsi pada $t_1 = 12$	
		Tanpa Kontrol	Dengan Kontrol $u_1$
$s_M$	0,9897	0,5245	0,7225
$e_M$	0,0047	0,1269	0,0499
$i_M$	0,0029	0,0816	0,1540
$r_M$	0,0027	0,1743	0,0276
<b>Jumlah</b>	<b>1</b>	<b>0,9073</b>	<b>0,9540</b>
$s_P$	0,5	0,1156	0,1465
$i_P$	0,5	0,2673	0,0745
<b>Jumlah</b>	<b>1</b>	<b>0,3829</b>	<b>0,2210</b>



**Gambar 3.2** Grafik simulasi model penyebaran virus *Dengue* pada populasi manusia dan vektor dengan  $u_1$  saja dengan bobot  $B_1 = 0,8$  dan  $B_2 = 0,2$ .

**Tabel 2.4** Proporsi awal dan proporsi akhir pada populasi manusia dan perantara tanpa kontrol dan dengan kontrol  $u_2$  dengan  $B_1 = 0,9$  dan  $B_3 = 0,1$

	Proporsi pada $t_0 = 0$	Proporsi pada $t_1 = 12$	
		Tanpa Kontrol	Dengan Kontrol $u_2$
$s_M$	0,9897	0,5245	0,3412
$e_M$	0,0047	0,1269	0,2092
$i_M$	0,0029	0,0816	0,1761
$r_M$	0,0027	0,1743	0,2340
<b>Jumlah</b>	<b>1</b>	<b>0,9073</b>	<b>0,9605</b>
$s_P$	0,5	0,1156	0,0925
$i_P$	0,5	0,2673	0,5794
<b>Jumlah</b>	<b>1</b>	<b>0,3829</b>	<b>0,6719</b>



**Gambar 3.3** Grafik simulasi model penyebaran virus *Dengue* pada populasi manusia dan vektor dengan  $u_2$  saja

#### 4. KESIMPULAN

Model kontrol optimal (1) yang berhasil direkonstruksi diselesaikan secara numerik dengan menggunakan Matlab. Dari hasil analisis kontrol diperoleh bahwa penerapan salah satu kontrol saja tidak cukup untuk meminimalkan jumlah penderita DBD meskipun penerapan salah satu kontrol lebih baik daripada tanpa kontrol. Penerapan kedua kontrol dengan konstanta bobot  $B_1 > B_2 > B_3$  dimana  $B_1 + B_2 + B_3 = 1$ , memberikan hasil terbaik, yaitu jumlah penderita DBD berkurang dan jumlah populasi nyamuk

terinfeksi berkurang jika dibandingkan dengan jumlah populasi tanpa kontrol.

#### 5. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Setyawan, A.; 2011. *Analisis Stabilitas pada Penyebaran Penyakit Campak dan Demam Berdarah Dengue di Kabupaten Jember*. Skripsi. Jember: Matematika FMIPA Universitas Jember.
- [2] Arimbi, M. D.; Kartono, S. Khabibah. 2014. *Solusi Numerik Model Matematika Penyebaran Virus Dengue pada Populasi Manusia dan Populasi Perantara*. Skripsi. Semarang: Matematika FSM Undip (unpublished).
- [3] Nainggolan, J.; Sudradjat S.; Asep K. S.; Nursanti A.; 2012. *Kontrol Optimal Vaksinasi Model Epidemiologi Tipe SIR*. Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika, 10 November 2012. Jakarta: Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY.
- [4] Kartono, dkk. 2014. *Pengembangan Model Matematika Kontrol Optimal Epidemi DBD*. Semarang: Matematika FSM Undip.
- [5] Subiono. 2013. *Sistem Linear dan Kontrol Optimal (Version 2.1.1)*. Surabaya: Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- [6] Patil, P. B.; U. P. Verma. 2010. *Numerical Computational Methods*. Revised Edition. New Delhi :Narosa Publishing House.
- [7] Mathews, J. H.; Kurtis D. Fink. 2004. *Numerical Methods Using Matlab*. Fourth Edition. USA:Pearson Prentice Hall.
- [8] Chachuat, B. C.; 2007. *Nonlinear and Dynamic Optimization from Theory to Practice*. IC-32: Winter Semester 2006/2007. Switzerland: Automatic Control Laboratory, EPFL

## ESTIMASI PARAMETER DALAM MODEL DEPRESIASI HARGA UNTUK KOMODITI KAKAO DAN MOBIL

Zani Anjani Rafsanjani<sup>1</sup>, Farikhin<sup>2</sup>, Siti Khabibah<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Universitas Diponegoro, zani.anjani4@gmail.com

<sup>2</sup>Universitas Diponegoro, farikhin.math.undip@gmail.com

<sup>3</sup>Universitas Diponegoro

**Abstract.** Depresiasi komoditi adalah penurunan nilai fisik barang dengan berlalunya waktu yang dihitung dari perubahan harga komoditi tersebut. Depresiasi relatif merupakan hasil bagi antara perubahan nilai depresiasi pada waktu tertentu terhadap nilai depresiasi mula-mula. Percepatan penurunan atau peningkatan depresiasi relatif komoditi didefinisikan menggunakan persamaan diferensial linier orde dua. Besarnya percepatan laju depresiasi relatif berbanding secara proporsional dengan kecepatan penurunan/ peningkatan depresiasi relatif. Persamaan tersebut diselesaikan untuk mendapatkan fungsi depresiasi relatif komoditi. Dalam makalah ini, digunakan model depresiasi untuk menjelaskan depresiasi komoditi dari dua produk yaitu kakao dan otomotif yang menunjukkan trend tertentu dari kedua produk tersebut yang berlaku sama terhadap model.

**Keywords:** Depresiasi, Persamaan Diferensial Linier Orde Dua, Trend

### 1. Pendahuluan

Depresiasi merupakan penyusutan nilai barang seiring berlalunya waktu serta penggunaan. Depresiasi komoditi dapat terjadi pada kondisi struktur pasar persaingan sempurna yang dijelaskan Salvator [10]. Penyebab terjadinya depresiasi adalah penyimpanan barang komoditi selama jangka waktu tertentu sehingga nilainya berkurang secara fisik. Faktor tersebut mengakibatkan komoditi bahan pangan dan komoditi otomotif terkena dampak depresiasi.

Penyusutan depresiasi dibedakan menjadi dua yakni peningkatan depresiasi relatif dan penurunan depresiasi relatif. Proses peningkatan dan penurunan depresiasi relatif ini dapat dinyatakan sebagai proses percepatan perubahan harga yang dituliskan dalam model persamaan diferensial linier orde dua. Model ini secara lengkap dijelaskan oleh Zeithamer pada [14] dan [15]. Dalam paper ini, dilakukan estimasi parameter dengan menggunakan estimasi parameter nonlinier *least squares* pada model percepatan penurunan depresiasi relatif harga komoditi untuk menentukan trend depresiasi relatif harga pada komoditi kakao dan komoditi mobil, serta

menganalisis trend depresiasi relatif komoditi.

### 2. Pembahasan

Pasar persaingan sempurna merupakan struktur pasar yang memenuhi kondisi (1) terdapat banyak penjual dan pembeli, (2) kemungkinan antara penjual dan pembeli dalam mempengaruhi harga sangat kecil, (3) produk yang dijual homogen, (4) terdapat mobilitas sumberdaya yang sempurna, dan (5) agen ekonomi memiliki pengetahuan yang sempurna mengenai kondisi pasar [10]. Depresiasi relatif komoditi didefinisikan sebagai perbandingan antara selisih besarnya komoditi pada waktu  $t$  terhadap besarnya komoditi pada waktu  $t_0$  dengan besarnya komoditi pada waktu  $t_0$ . Dalam hal ini diasumsikan bahwa salah satu pasar pada model struktur pasar memenuhi kondisi pasar persaingan sempurna Salvator [10]. Persamaan depresiasi relatif pada waktu  $t$  dengan komoditi awal  $w(t_0) = w_0$  didefinisikan sebagai Zeithamer [16]

$$RD(t) = \frac{w(t) - w(t_0)}{w(t_0)}; t \geq t_0 \quad (1)$$

dengan  $RD(t) =$  depresiasi relatif komoditi pada waktu  $t$

$w(t)$  = besarnya depresiasi langsung komoditi pada saat  $t$   
 $w(t_0)$  = besarnya depresiasi langsung komoditi saat mula-mula  
 Persamaan depresiasi relatif pada Persamaan (1) digunakan untuk menentukan nilai depresiasi relatif komoditi dari depresiasi harga komoditi.

**2.1 Estimasi Parameter Model Depresiasi Relatif Komoditi Mobil**

Depresiasi relatif harga komoditi merupakan perubahan harga relatif komoditi. Proses penurunan depresiasi relatif harga komoditi dinyatakan sebagai penurunan perubahan percepatan dari depresiasi relatif harga komoditi. Proses penurunan percepatan depresiasi relatif harga komoditi dituliskan dalam bentuk persamaan diferensial linier orde dua yang dituliskan oleh Zeithamer [16] sebagai

$$\frac{d^2RD(t)}{dt^2} = -B \frac{dRD(t)}{dt} \quad (2)$$

dengan  $B$  konstanta positif ( $B > 0$ ), kondisi awal  $RD(t_0) = RD_0$ ,  $\frac{dRD(t_0)}{dt} = v_0 > 0$ . Solusi yang diperoleh dari Persamaan (1) adalah

$$RD(t) = RD_0 - \frac{v_0}{B} + \frac{v_0}{B} e^{B(t-t_0)} \quad (3)$$

Pada Persamaan (2) karena nilai parameter  $B > 0$  maka nilai  $\frac{d^2RD(t)}{dt^2} < 0$ , sehingga fungsi depresiasi relatif harga komoditi merupakan fungsi *purely* konkaf.

Pada paper ini dibahas komoditi mobil Innova G untuk menjelaskan proses penurunan depresiasi relatif harga komoditi. Diasumsikan kondisi pasar pada komoditi mobil Innova G memenuhi persaingan sempurna Salvator [10]. Berikut ini diberikan data depresiasi mobil Innova G serta nilai depresiasi relatif komoditi pada tahun 2008 hingga tahun 2014 pada bursa otomotif dengan sumber CV. Jaya Automotif

Tabel 3.4.1. Depresiasi Toyota Innova G tahun 2008 - 2014

Tahun	$t$	Depresiasi (Juta)	$RD(t)$
2008	0	30	0
2009	1	20.1	-0.33
2010	2	8.75	-0.70833333
2011	3	6.75	-0.78833333
2012	4	4.82	-0.83933333
2013	5	4.68	-0.844
2014	6	2.74	-0.9086666

Fungsi depresiasi relatif komoditi mobil innova G adalah

$$RD_i = -\frac{0.333}{B} + \frac{0.33}{B} e^{-B t_i} \quad (4)$$

dengan  $i = 1,2,3,4,5,6$

Langkah-langkah yang dilakukan dalam estimasi parameter adalah

Iterasi 1:

1. Menentukan nilai parameter tebakan  $B^0 = 0.28$
2. Menghitung nilai  $\Delta B^{j+1} = -[\nabla^2 f(B)]^{-1} \nabla f(B^{j+1})$

$\nabla f_i(B^{j+1})$

$$= \frac{0.3300}{B} \begin{pmatrix} -\frac{1}{B} + \frac{e^{-B}}{B} + e^{-B} \\ -\frac{1}{B} + \frac{e^{-2B}}{B} + 2e^{-2B} \\ -\frac{1}{B} + \frac{e^{-3B}}{B} + 3e^{-3B} \\ -\frac{1}{B} + \frac{e^{-4B}}{B} + 4e^{-4B} \\ -\frac{1}{B} + \frac{e^{-5B}}{B} + 5e^{-5B} \\ -\frac{1}{B} + \frac{e^{-6B}}{B} + 6e^{-6B} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -0.3300 + \frac{0.3300}{B} - \frac{0.3300}{B} e^{-B} \\ -0.7083 + \frac{0.3300}{B} - \frac{0.3300}{B} e^{-2B} \\ -0.7883 + \frac{0.3300}{B} - \frac{0.3300}{B} e^{-3B} \\ -0.8393 + \frac{0.3273}{B} - \frac{0.3273}{B} e^{-4B} \\ -0.8440 + \frac{0.3273}{B} - \frac{0.3273}{B} e^{-5B} \\ -0.9087 + \frac{0.3273}{B} - \frac{0.3273}{B} e^{-6B} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -0.1372 \\ -0.4584 \\ -0.8656 \\ -1.2976 \\ -1.7181 \\ -2.1068 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -0.0422 \\ -0.2029 \\ -0.1185 \\ -0.0453 \\ 0.0439 \\ 0.0839 \end{pmatrix}$$

$\nabla f_i(0.28) = 0.0790$

$$\begin{aligned} \nabla^2 f_i(B^{j+1}) &= \frac{(0.3300)^2}{B} \begin{pmatrix} -\frac{1}{B} + \frac{e^{-B}}{B} + e^{-B} \\ -\frac{1}{B} + \frac{e^{-2B}}{B} + 2e^{-2B} \\ -\frac{1}{B} + \frac{e^{-3B}}{B} + 3e^{-3B} \\ -\frac{1}{B} + \frac{e^{-4B}}{B} + 4e^{-4B} \\ -\frac{1}{B} + \frac{e^{-5B}}{B} + 5e^{-5B} \\ -\frac{1}{B} + \frac{e^{-6B}}{B} + 6e^{-6B} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -\frac{1}{B} + \frac{e^{-B}}{B} + e^{-B} \\ -\frac{1}{B} + \frac{e^{-2B}}{B} + 2e^{-2B} \\ -\frac{1}{B} + \frac{e^{-3B}}{B} + 3e^{-3B} \\ -\frac{1}{B} + \frac{e^{-4B}}{B} + 4e^{-4B} \\ -\frac{1}{B} + \frac{e^{-5B}}{B} + 5e^{-5B} \\ -\frac{1}{B} + \frac{e^{-6B}}{B} + 6e^{-6B} \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} -0.3300 + \frac{0.3300}{B} - \frac{0.3300}{B} e^{-B} \\ -0.7083 + \frac{0.3300}{B} - \frac{0.3300}{B} e^{-2B} \\ -0.7883 + \frac{0.3300}{B} - \frac{0.3300}{B} e^{-3B} \\ -0.8393 + \frac{0.3300}{B} - \frac{0.3300}{B} e^{-4B} \\ -0.8440 + \frac{0.3300}{B} - \frac{0.3300}{B} e^{-5B} \\ -0.9087 + \frac{0.3300}{B} - \frac{0.3300}{B} e^{-6B} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{0.66}{B^3} - \frac{0.66e^{-B}}{B^3} - \frac{0.66e^{-B}}{B^2} - \frac{0.3273(1)e^{-B}}{B} \\ \frac{0.66}{B^3} - \frac{0.66e^{-2B}}{B^3} - \frac{0.66e^{-2B}}{B^2} - \frac{0.3273(4)e^{-2B}}{B} \\ \frac{0.66}{B^3} - \frac{0.66e^{-3B}}{B^3} - \frac{0.66e^{-3B}}{B^2} - \frac{0.3273(9)e^{-3B}}{B} \\ \frac{0.66}{B^3} - \frac{0.66e^{-4B}}{B^3} - \frac{0.66e^{-4B}}{B^2} - \frac{0.3273(16)e^{-4B}}{B} \\ \frac{0.66}{B^3} - \frac{0.66e^{-5B}}{B^3} - \frac{0.66e^{-5B}}{B^2} - \frac{0.3273(25)e^{-5B}}{B} \\ \frac{0.66}{B^3} - \frac{0.66e^{-6B}}{B^3} - \frac{0.66e^{-6B}}{B^2} - \frac{0.3273(36)e^{-6B}}{B} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -0.0453 \\ -0.1513 \\ -0.2857 \\ -0.4282 \\ -0.5670 \\ -0.6952 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -0.1164 \\ -0.3890 \\ -0.7345 \\ -1.1010 \\ -1.4577 \\ -1.7876 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} -0.0422 \\ -0.2029 \\ -0.1185 \\ -0.0453 \\ 0.0439 \\ 0.0502 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0.0893 \\ 6.7368 \\ 11.9253 \\ 15.9709 \\ 19.1224 \\ 21.5753 \end{pmatrix} \\ \nabla^2 f_i(0.28) &= 1.2300 \end{aligned}$$

Mencari nilai  $\Delta B^{j+1}$ :

$$\begin{aligned} \Delta B^{j+1} &= -[\nabla^2 f_i(B^{j+1})]^{-1} \nabla f_i(B^{j+1}) \\ \Delta B^{j+1} &= -\frac{1}{1.2300} (0.0790) = -0.0642 \end{aligned}$$

3. Menghitung nilai  $B^{j+1} = B^j + h^j \Delta B^{j+1}$

$$B = B^0 + h \Delta B^{j+1}$$

$$\Rightarrow B = 0.28 - \frac{1}{2} (0.0642) = 0.2479$$

4. Ulangi langkah 2 dan 3 jika konvergensi  $\|\Delta B^{j+1}\| < 5 \times 10^{-2}$  terpenuhi

$$\begin{aligned} \|\Delta B^{j+1}\| &= \|-0.0790\| \\ &\leq 5 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

Karena  $\|\Delta B^{j+1}\| \leq 5 \times 10^{-2}$  maka iterasi berhenti.

Jadi diperoleh bahwa nilai  $B = 0.2479$

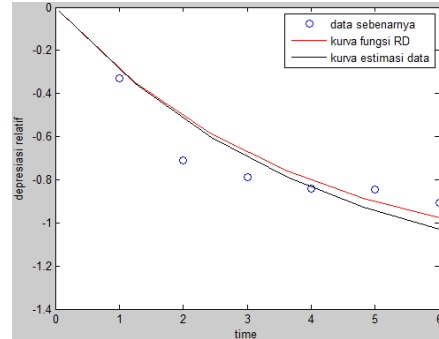
Sehingga diperoleh persamaan laju depresiasi relatif sebagai berikut

$$\frac{dRD^2}{dt^2} = -0.2479 \frac{dRD}{dt}$$

Serta persamaan depresiasi relatif komoditi sebagai

$$RD(t) = -1.2110 + 1.2110 e^{-0.2479 t}$$

Berikut ini diberikan gambar fungsi depresiasi relatif  $RD$  untuk komoditi mobil Innova G. Dari gambar tersebut menunjukkan bahwa error yang diberikan kecil, jadi nilai  $B$  yang sesuai dengan model



Gambar 1. Grafik fungsi depresiasi relatif komoditi mobil Innova G

Pada Gambar 1 terlihat bahwa sebaran data untuk komoditi mobil Innova G cenderung turun setiap waktu. hal ini menunjukkan bahwa trend depresiasi relatif untuk komoditi mobil Innova G turun setiap waktu.

## 2.2 Estimasi Parameter Model Depresiasi Relatif Komoditi Kakao

Depresiasi relatif harga komoditi merupakan perubahan harga relatif komoditi. Proses peningkatan depresiasi relatif harga komoditi dinyatakan sebagai peningkatan perubahan percepatan dari depresiasi relatif harga komoditi. Proses peningkatan percepatan depresiasi relatif harga komoditi dituliskan dalam bentuk persamaan diferensial linier orde dua dituliskan oleh Zeithamer [16] sebagai

$$\frac{d^2 RD(t)}{dt^2} = B \frac{dRD(t)}{dt} \quad (6)$$

dengan  $B$  konstanta positif ( $B > 0$ ), kondisi awal  $RD(t_0) = RD_0$ ,

$\frac{dRD(t_0)}{dt} = v_0 > 0$ . Solusi yang diperoleh dari Persamaan (1) adalah

$$RD(t) = RD_0 - \frac{v_0}{B} + \frac{v_0}{B} e^{B(t-t_0)} \quad (7)$$

Pada Persamaan (2) karena nilai parameter  $B > 0$  maka nilai  $\frac{d^2RD(t)}{dt^2} > 0$ , sehingga fungsi depresiasi relatif harga komoditi merupakan fungsi *purely* konvek.

Pada paper ini dibahas komoditi bubuk kakao untuk menjelaskan proses peningkatan depresiasi relatif harga komoditi. Kondisi pasar komoditi bubuk kakao diasumsikan memenuhi kondisi pasar persaingan sempurna. Berikut ini diberikan data depresiasi bubuk kakao serta nilai depresiasi relatif komoditi.

Tabel 2. Depresiasi Komoditi Bubuk Kakao

Laporan tahunan ICCO *the world cocoa organization*

Tahun	Depresiasi (%)	$RD(t)$
2007/2008	0.55	0
2008/2009	0.73	0.3273
2009/2010	1.35	1.4545
2010/2011	1.71	2.1091
2011/2012	1.68	2.0545
2012/2013	1.92	2.4909

Fungsi depresiasi relatif komoditi mobil innova G adalah

$$RD_i = -\frac{0.3273}{B} + \frac{0.3273}{B} e^{B.t_i} \quad (8)$$

dengan  $i = 1,2,3,4,5$

Pada bagian ini dilakukan estimasi parameter  $B$  untuk mendapatkan nilai parameter yang sesuai dengan model, dengan meminimalkan fungsi objektif depresiasi relatif

$$\min f_i(B^{j+1}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^t \left( y_i - \frac{0.3273}{B} + \frac{0.3273}{B} e^{B.t_i} \right)^2 \quad (9)$$

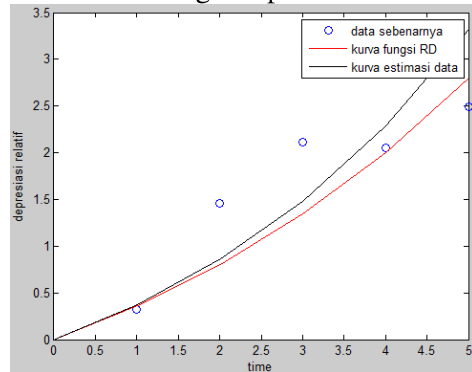
Dengan langkah yang sama dengan kasus pada komoditi mobil Innova G, diperoleh nilai parameter  $B = 0.1980$ . Sehingga diperoleh persamaan laju depresiasi relatif komoditi bubuk kakao sebagai berikut

$$\frac{d^2RD}{dt^2} = 0.1980 \frac{dRD}{dt}$$

Dengan solusi persamaan diferensial

$$RD(t) = -1.6496 + 1.6496 e^{0.1980 t}$$

Dapat diketahui bahwa nilai parameter  $B$  sesuai dengan model, karena error yang diberikan kecil. Berikut ini diberikan gambar kurva fungsi depresiasi relatif  $RD$ .



Gambar 2. Grafik fungsi depresiasi relatif komoditi bubuk kakao

Dilihat dari sebaran data depresiasi relatif komoditi bubuk kakao pada Gambar 2, sebaran data cenderung naik. Hal ini menunjukkan bahwa trend depresiasi relatif untuk komoditi bubuk kakao naik setiap waktu.

### 3. Kesimpulan

Persamaan  $\frac{d^2RD}{dt^2}(t) = B \frac{dRD}{dt}(t)$  nilai parameter depresiasi relatif  $B$  adalah positif yang menunjukkan bahwa harga depresiasi relatif meningkat. Pada proses peningkatan depresiasi relatif ditunjukkan oleh komoditi bahan pangan bubuk kakao. Estimasi nonlinier *least squares* metode Newton, menghasikan nilai parameter depresiasi relatif  $B = 0.1980$ . Sebaran

data depresiasi relatif harga komoditi bubuk kakao menunjukkan trend yang terbentuk adalah trend naik, dengan kenaikan sebesar 19,80% setiap tahun.

Persamaan  $\frac{d^2RD}{dt^2}(t) = -B \frac{dRD}{dt}(t)$  nilai parameter depresiasi relatif  $B$  adalah negatif yang menunjukkan bahwa harga depresiasi relatif turun. Pada proses penurunan depresiasi relatif ditunjukkan oleh komoditi mobil Innova G. Estimasi nonlinier *least squares* metode Newton, menghasikan nilai parameter depresiasi relatif sebesar  $B = 0.2479$ . Sebaran data depresiasi relatif harga komoditi bubuk mobil Innova G menunjukkan trend yang terbentuk adalah trend turun, dengan penurunan sebesar 24,79% setiap tahun.

#### 4. Daftar Pustaka

- [1] Ahman, Eeng dan Indriani, Epi. 2007. *Membina Kompetensi Ekonomi*. Bandung: Grafindo Media Pratama.
- [2] Bartle, Robert G., Sherbert, Donald R. 2011. *Introduction to the Real Analysis, 4th ed.* New York: John Wiley & Sonc, Inc.
- [3] Bhat, S dan Patibandla, R. 2011. *Metal Fatigue and Basic Theoretical Models: A Riview*. Tamil: Intech.
- [4] Bittinger, Marvin L. and Ellenbogen, David J. 2007. *Calculus and Its Applications*, 9th ed., New York: Pearson Addison Wesley.
- [5] Boyce, William E., and DiPrima, Richard C., *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. New York: John Wiley & Sonc, Inc.
- [6] Cangel, Yunus A., Palm III William J., 2013. *Differential Equation for Trench*, William F., 2013. *Elementary Differential Equation with Boundary Value Problem*. Texas: America Institute of Mathematics *.Engineers and Scientists*. New York: McGraw-Hill.
- [7] DeGarmo, E. Paul., Sullivan, Wilam G., Bontadelli, James A., and Wicks, Elin M. (2001). *Ekonomi Teknik: Engineering Economy*, edisi kesepuluh., Jakarta: PT Prenhalindo.
- [8] Englezos, Peter and Kalogerakis, Nicolas. 2001. *Applied Parameter Estimation for Chemical Engineers*. New York: Marcel Dekker, Inc.
- [9] Mantegna, Rosario N., and Stanley, H. Eugene. 2004. *An introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [10] Salvatore, Dominick. 2004, *Managerial Economics: Ekonomi Manajerial dalam perekonomian global*. Jakarta: Salemba.
- [11] Steward, James. 2009. *Kalkulus: Calculus. Edisi 5 buku 1*. Jakarta: Salemba Teknika.
- [12] Trench, William F., 2013. *Elementary Differential Equation with Boundary Value Problem*. Texas: America Institute of Mathematics.

- [13] Widowati, Sulisty, R. Heri, Farikhin. 2012. KALKULUS. Semarang: UPT UNDIP PRESS.
- [14] Zeithamer, T. 2010. “A Deterministic Differential Equation for the Fall in Market Value of Goods with Acceleration”, *EuMotion*. Vol.10 Hal. 1-7.
- [15] Zeithamer, T. 2012.”Economic Phenomena on the View Point of the Mechanics of Materials”, *Procedia-Social and Behavioral Science*. Vol:55 Hal. 547-553.
- [16] Zeithamer, T. 2013. “Possible Use of Deterministic Equation of Motion in Commodity Price Theory and for Training Appraisers”, *Procedia-Social and Behavioral Sciences*. Vol: 106. Hal. 2063-2070.

## MODEL DINAMIK SIR PENYEBARAN PENYAKIT LEPTOSPIROSIS

Olivia Pangestu<sup>1</sup>, Widowati<sup>2</sup>, Suryoto<sup>3</sup>  
<sup>1,2,3</sup>Jurusan Matematika FSM Universitas Diponegoro  
Jl. Prof. Soedarto, S.H. Tembalang Semarang  
[olviapangestu@gmail.com](mailto:olviapangestu@gmail.com)

**Abstract.** Penyakit Leptospirosis merupakan penyakit yang disebabkan oleh virus leptospira dari tikus sebagai vektor yang menularkan pada manusia. Pada tugas akhir ini dikaji model matematika tak linier yang menjelaskan penyebaran penyakit leptospirosis dengan model SIR (*Sisceptible, Infected, Rcovered*) untuk populasi manusia dan model SI (*Susceptible, Infected*) untuk populasi vektor. Dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Dari hasil analisis kestabilan diketahui titik ketimbangan bebas penyakit tidak stabil sedangkan titik kesetimbangan endemik stabil asimotik lokal. Kemudian dilakukan simulasi numerik menggunakan metode Runge Kutta Orde 4, solusi numerik menunjukkan bahwa perubahan parameter laju kelahiran manusia dan vektor mempengaruhi jumlah manusia yang rentan, manusia yang terinfeksi, dan manusia yang sembuh serta jumlah vektor yang rentan dan vektor yang terinfeksi. Berdasarkan hasil simulasi dapat dilakukan pengendalian penyebaran penyakit leptospirosis dengan mengurangi jumlah populasi vektor.

**Kata Kunci:** Penyakit Leptospirosis, Model Matematika, Analisa Kestabilan

### 1. Pendahuluan

Leptospirosis adalah penyakit infeksi akut yang dapat menyerang manusia maupun hewan (*zoonosis*) [1]. Leptospirosis adalah penyakit menular yang disebabkan oleh bakteri *Leptospira* yang pathogen. Gejala yang umum dijumpai adalah demam, sakit kepala, mual-mual, nyeri otot, muntah. Kadang-kadang dijumpai konjungtivitis, ikterus, anemia dan gagal ginjal[2]. Penyakit ini bersifat musiman, di daerah beriklim sedang masa puncak insiden dijumpai pada musim panas dan musim gugur karena temperatur adalah faktor yang mempengaruhi kelangsungan hidup leptospira, sedangkan di daerah tropis insidens tertinggi selama musim hujan [3].

Penyakit Leptospirosis ini mendapat perhatian dari berbagai lapisan masyarakat, baik dari ahli di bidang kedokteran yang mempunyai andil besar dalam mencegah perluasan penyakit, begitu juga dari bidang ilmu pengetahuan yang terus berkembang, matematika berperan dalam menganalisis dan memberikan informasi mengenai gambaran penyebaran penyakit. Faktor-faktor yang menyebabkan terjadinya penyakit tersebut dalam kehidupan

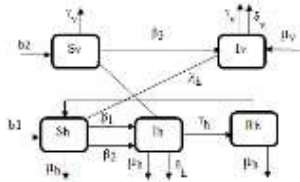
awalnya dianalisis yang kemudian diubah ke dalam bentuk model matematika yang menjadikan fenomena ini agar lebih tepat dipahami. Model matematika interaksi antara leptospirosis, vektor yang terinfeksi dan populasi manusia yang merupakan model dengan mempertimbangkan interaksi manusia rentan dengan vektor yang terinfeksi dan terkait penyakit dengan tingkat kematian pada manusia dan vektor yang terinfeksi, yang telah dibuat oleh Gul Zaman. dkk. (2012) memahami sifat dasar dari model epidemik, mereka merumuskan secara rinci dan mendefinisikan parameter yang terlibat dalam model [4].

Model penyebaran leptospirosis ini terdapat lima kelas, yaitu  $Sh(t)$  adalah jumlah manusia rentan pada waktu  $t$ ;  $Ih(t)$  jumlah manusia dalam populasi yang terinfeksi leptospirosis pada waktu  $t$ ;  $Rh(t)$  adalah jumlah manusia dalam populasi yang pulih pada waktu  $t$ . Untuk populasi vektor, misalkan  $Sv(t)$  adalah vektor yang rentan pada waktu  $t$ ;  $Iv(t)$  adalah vektor yang terinfeksi pada waktu  $t$ . Dari model yang telah dirumuskan yang kemudian dikaji pola epidemiknya dengan mencari solusi dari model terlebih dahulu,

kemudian menginterpretasikan hasil kajian ke dalam keadaan sebenarnya.

## 2. Pemodelan Matematika Penyakit Leptospirosis

Dinamika perpindahan antar kelas penyebaran penyakit leptospirosis yang ada di masyarakat dan terjadi pada populasi manusia dan vektor dapat digambarkan dalam diagram pada Gambar 2.1 sebagai berikut:



Gambar 2.1 Konsep diagram interaksi antara populasi manusia dengan populasi vektor

Parameter-parameter yang digunakan antara lain,  $b_1$  yang menunjukkan laju kelahiran populasi manusia sedangkan  $b_2$  menunjukkan laju kelahiran populasi vektor.  $\beta_1$  menyatakan laju penyebaran/penularan langsung antara manusia yang rentan dengan manusia yang terinfeksi,  $\beta_2$  menyatakan laju penyebaran/penularan langsung antara manusia yang rentan dengan vektor (tikus) yang terinfeksi,  $\beta_3$  menyatakan laju penyebaran/penularan langsung antara vektor (tikus) yang rentan dengan manusia yang terinfeksi.  $\delta_h$  adalah laju kematian manusia akibat penyakit leptospirosis,  $\delta_v$  adalah laju kematian vektor akibat penyakit leptospirosis. Laju kematian alami manusia dinyatakan dengan  $\mu_h$ , laju kematian alami vektor dinyatakan dengan  $\mu_v$ . Untuk tingkat penyembuhan manusia yang terinfeksi dinyatakan dengan  $\gamma_h$ , sedangkan pada vektor tidak terdapat proses penyembuhan pada vektor yang terinfeksi maka  $\gamma_v$  menyatakan laju kematian vektor. Sementara  $\lambda_h$  ialah laju manusia yang sembuh ketika kembali rentan terinfeksi.

### 2.1 Proses Perubahan pada Kelas Susceptible Human (Sh)

Jumlah manusia rentan pada waktu  $t$  dinotasikan dengan  $S_h(t)$  dan jumlah

manusia rentan pada waktu  $\Delta t + t$  adalah  $S_h(t + \Delta t)$ . Sehingga laju perubahan manusia yang masuk ke dalam populasi pada waktu  $\Delta t$  adalah  $b_1 \Delta t$ . Laju perubahan manusia yang masuk ke dalam kelas rentan akibat penularan langsung dari manusia yang terinfeksi pada waktu  $\Delta t$  adalah  $\beta_1 S_h I_h \Delta t$ . Laju perubahan manusia yang masuk ke dalam kelas rentan akibat penularan langsung dari vektor yang terinfeksi pada waktu  $\Delta t$  adalah  $\beta_2 S_h I_v \Delta t$ . Laju kematian alami individu pada kelas rentan itu sendiri pada waktu  $\Delta t$  adalah  $\mu_h S_h \Delta t$ . Laju perubahan manusia dari kelas pulih menjadi kelas rentan pada waktu  $\Delta t$  adalah  $\lambda_h R_h \Delta t$ . Maka proses perubahan pada kelas *susceptible human* atau manusia rentan dalam tiap satuan waktu adalah

$$S_h(t + \Delta t) = S_h(t) + b_1 \Delta t - \mu_h S_h \Delta t - \beta_1 S_h I_h \Delta t - \beta_2 S_h I_v \Delta t + \lambda_h R_h \Delta t$$

$$S_h(t + \Delta t) - S_h(t) = b_1 \Delta t - \mu_h S_h \Delta t - \beta_1 S_h I_h \Delta t - \beta_2 S_h I_v \Delta t + \lambda_h R_h \Delta t$$

$$S_h(t + \Delta t) - S_h(t) = \Delta t (b_1 - \mu_h S_h - \beta_1 S_h I_h - \beta_2 S_h I_v + \lambda_h R_h)$$

$$\frac{S_h(t + \Delta t) - S_h(t)}{\Delta t} = b_1 - \mu_h S_h - \beta_1 S_h I_h - \beta_2 S_h I_v + \lambda_h R_h$$

$$\frac{\Delta S_h}{\Delta t} = b_1 - \mu_h S_h - \beta_1 S_h I_h - \beta_2 S_h I_v + \lambda_h R_h$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S_h}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} b_1 - \mu_h S_h - \beta_1 S_h I_h - \beta_2 S_h I_v + \lambda_h R_h$$

$$\frac{dS_h}{dt} = b_1 - \mu_h S_h - \beta_1 S_h I_h - \beta_2 S_h I_v + \lambda_h R_h$$

Didapatkan laju perubahan pada kelas *susceptible human* sebagai berikut:

$$\frac{dS_h}{dt} = b_1 - \mu_h S_h - \beta_1 S_h I_h - \beta_2 S_h I_v + \lambda_h R_h \quad (2.1)$$

### 2.2 Proses Perubahan pada Kelas Infected Human (Ih)

Jumlah populasi manusia yang terinfeksi pada waktu  $t$  dinotasikan dengan

$I_h(t)$  dan jumlah manusia rentan pada waktu  $\Delta t + t$  adalah  $I_h(t + \Delta t)$ . Sehingga laju perubahan manusia dari kelas rentan menjadi kelas terinfeksi akibat penularan langsung dari manusia yang terinfeksi pada waktu  $\Delta t$  adalah  $\beta_1 S_h I_h \Delta t$ . Laju perubahan manusia dari kelas rentan menjadi kelas terinfeksi akibat penularan langsung dari vektor yang terinfeksi pada waktu  $\Delta t$  adalah  $\beta_2 S_h I_v \Delta t$ . Laju kematian alami individu pada kelas terinfeksi itu sendiri pada waktu  $\Delta t$  adalah  $\mu_h I_h \Delta t$ . Laju tingkat kematian terkait manusia yang terinfeksi penyakit pada waktu  $\Delta t$  adalah  $\delta_h I_h \Delta t$ . Laju tingkat pemulihan manusia terinfeksi itu sendiri pada waktu  $\Delta t$  adalah  $\gamma_h I_h \Delta t$ . Maka proses perubahan pada kelas *infected human* atau manusia terinfeksi dalam tiap satuan waktu adalah

$$\begin{aligned} I_h(t + \Delta t) &= I_h(t) + \beta_1 S_h I_h \Delta t \\ &\quad + \beta_2 S_h I_v \Delta t - \mu_h I_h \Delta t \\ &\quad - \delta_h I_h \Delta t - \gamma_h I_h \Delta t \\ I_h(t + \Delta t) - I_h(t) &= \beta_1 S_h I_h \Delta t + \beta_2 S_h I_v \Delta t \\ &\quad - \mu_h I_h \Delta t - \delta_h I_h \Delta t \\ &\quad - \gamma_h I_h \Delta t \\ I_h(t + \Delta t) - I_h(t) &= \Delta t (\beta_1 S_h I_h + \beta_2 S_h I_v \\ &\quad - \mu_h I_h - \delta_h I_h - \gamma_h I_h) \\ \frac{I_h(t + \Delta t) - I_h(t)}{\Delta t} &= \beta_1 S_h I_h + \beta_2 S_h I_v - \mu_h I_h \\ &\quad - \delta_h I_h - \gamma_h I_h \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta I_h}{\Delta t} = \beta_1 S_h I_h + \beta_2 S_h I_v - \mu_h I_h - \delta_h I_h - \gamma_h I_h$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta I_h}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \beta_1 S_h I_h + \beta_2 S_h I_v - \mu_h I_h - \delta_h I_h - \gamma_h I_h$$

$$\frac{dI_h}{dt} = \beta_1 S_h I_h + \beta_2 S_h I_v - \mu_h I_h - \delta_h I_h - \gamma_h I_h$$

Didapatkan laju perubahan pada kelas *infected human* sebagai berikut:

$$\frac{dI_h}{dt} = \beta_1 S_h I_h + \beta_2 S_h I_v - \mu_h I_h - \delta_h I_h - \gamma_h I_h \quad (2.2)$$

### 2.3 Proses Perubahan pada Kelas *Recovered Human* (Rh)

Jumlah populasi manusia yang pulih pada waktu  $t$  dinotasikan dengan

$R_h(t)$  dan jumlah populasi manusia pada waktu  $\Delta t + t$  adalah  $R_h(t + \Delta t)$ . Sehingga laju perubahan tingkat pemulihan manusia dari kelas terinfeksi menjadi kelas pulih pada waktu  $\Delta t$  adalah  $\gamma_h I_h \Delta t$ . Laju kematian alami manusia yang pulih pada waktu  $\Delta t$  adalah  $\mu_h R_h \Delta t$ . Laju perubahan manusia yang pulih menjadi rentan kembali pada kelas manusia pulih itu sendiri pada waktu  $\Delta t$  adalah  $\lambda_h R_h \Delta t$ . Maka proses perubahan pada kelas *recovered human* atau manusia pulih pada dalam tiap satuan waktu adalah

$$\begin{aligned} R_h(t + \Delta t) &= R_h(t) + \gamma_h I_h \Delta t - \mu_h R_h \Delta t \\ &\quad - \lambda_h R_h \Delta t \\ R_h(t + \Delta t) - R_h(t) &= \gamma_h I_h \Delta t - \mu_h R_h \Delta t \\ &\quad - \lambda_h R_h \Delta t \\ R_h(t + \Delta t) - R_h(t) &= \Delta t (\gamma_h I_h - \mu_h R_h - \lambda_h R_h) \\ \frac{R_h(t + \Delta t) - R_h(t)}{\Delta t} &= \gamma_h I_h - \mu_h R_h - \lambda_h R_h \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta R_h}{\Delta t} = \gamma_h I_h - \mu_h R_h - \lambda_h R_h$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta R_h}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \gamma_h I_h - \mu_h R_h - \lambda_h R_h$$

$$\frac{dR_h}{dt} = \gamma_h I_h - \mu_h R_h - \lambda_h R_h$$

Didapatkan laju perubahan pada kelas *recovered human* sebagai berikut:

$$\frac{dR_h}{dt} = \gamma_h I_h - \mu_h R_h - \lambda_h R_h \quad (2.3)$$

### 2.4 Proses Perubahan pada Kelas *Susceptible Vektor* (Iv)

Jumlah populasi vektor yang rentan pada waktu  $t$  dinotasikan dengan  $S_v(t)$  dan jumlah populasi vektor yang rentan pada waktu  $\Delta t + t$  adalah  $S_v(t + \Delta t)$ . Sehingga laju pertumbuhan populasi vektor rentan pada waktu  $\Delta t$  adalah  $b_2 \Delta t$ . Laju perubahan tingkat kematian vektor yang rentan itu sendiri pada waktu  $\Delta t$  adalah  $\gamma_v S_v \Delta t$ . Laju perubahan vektor yang rentan akibat penularan manusia terinfeksi pada waktu  $\Delta t$  adalah  $\beta_3 S_v I_h \Delta t$ . Maka proses perubahan pada kelas *susceptible vector* atau vektor rentan dalam tiap satuan waktu adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 S_v(t + \Delta t) &= S_v(t) + b_2\Delta t - \gamma_v S_v \Delta t \\
 &\quad - \beta_3 S_v I_h \Delta t \\
 S_v(t + \Delta t) - S_v(t) &= b_2\Delta t - \gamma_v S_v \Delta t \\
 &\quad - \beta_3 S_v I_h \Delta t \\
 S_v(t + \Delta t) - S_v(t) &= \Delta t(b_2 - \gamma_v S_v - \beta_3 S_v I_h) \\
 \frac{S_v(t + \Delta t) - S_v(t)}{\Delta t} &= b_2 - \gamma_v S_v - \beta_3 S_v I_h
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta S_v}{\Delta t} &= b_2 - \gamma_v S_v - \beta_3 S_v I_h \\
 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S_v}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} b_2 - \gamma_v S_v - \beta_3 S_v I_h
 \end{aligned}$$

$$\frac{dS_v}{dt} = b_2 - \gamma_v S_v - \beta_3 S_v I_h$$

Didapatkan laju perubahan pada kelas *susceptible vector* sebagai berikut:

$$\frac{dS_v}{dt} = b_2 - \gamma_v S_v - \beta_3 S_v I_h \quad (2.4)$$

### 2.5 Proses Perubahan pada Kelas *Infected Vektor (Iv)*

Jumlah populasi vektor yang terinfeksi pada waktu  $t$  dinotasikan dengan  $I_v(t)$  dan jumlah populasi vektor yang terinfeksi pada waktu  $\Delta t + t$  adalah  $I_v(t + \Delta t)$ . Laju perubahan pembawa penyakit dari klas vektor yang rentan menjadi kelas vektor terinfeksi akibat penularan oleh manusia terinfeksi pada waktu  $\Delta t$  adalah  $\beta_3 S_v I_h \Delta t$ . Laju kematian alami populasi vektor terinfeksi itu sendiri pada waktu  $\Delta t$  adalah  $\mu_v I_v \Delta t$ . Laju perubahan tingkat kematian vektor pada waktu  $\Delta t$  adalah  $\gamma_v I_v \Delta t$ . Laju perubahan tingkat kematian vektor terkait vektor yang terinfeksi penyakit pada waktu  $\Delta t$  adalah  $\delta_v I_v \Delta t$ . Proses perubahan pada klas *infected vector* atau vektor terinfeksi dalam tiap satuan waktu adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 I_v(t + \Delta t) &= I_v(t) + \beta_3 S_v I_h \Delta t + \mu_v I_v \Delta t \\
 &\quad - \gamma_v I_v \Delta t - \delta_v I_v \Delta t \\
 I_v(t + \Delta t) - I_v(t) &= \beta_3 S_v I_h \Delta t + \mu_v I_v \Delta t \\
 &\quad - \gamma_v I_v \Delta t - \delta_v I_v \Delta t \\
 I_v(t + \Delta t) - I_v(t) &= \Delta t(\beta_3 S_v I_h + \mu_v I_v - \gamma_v I_v \\
 &\quad - \delta_v I_v)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{I_v(t + \Delta t) - I_v(t)}{\Delta t} &= \beta_3 S_v I_h + \mu_v I_v - \gamma_v I_v \\
 &\quad - \delta_v I_v \\
 \frac{\Delta I_v}{\Delta t} &= \beta_3 S_v I_h + \mu_v I_v - \gamma_v I_v - \delta_v I_v \\
 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta I_v}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \beta_3 S_v I_h + \mu_v I_v - \gamma_v I_v \\
 &\quad - \delta_v I_v
 \end{aligned}$$

$$\frac{dI_v}{dt} = \beta_3 S_v I_h + \mu_v I_v - \gamma_v I_v - \delta_v I_v$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta I_v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \beta_3 S_v I_h + \mu_v I_v - \gamma_v I_v - \delta_v I_v$$

$$\frac{dI_v}{dt} = \beta_3 S_v I_h + \mu_v I_v - \gamma_v I_v - \delta_v I_v$$

Didapatkan laju perubahan pada kelas *infected vector* sebagai berikut

$$\frac{dI_v}{dt} = \beta_3 S_v I_h + \mu_v I_v - \gamma_v I_v - \delta_v I_v \quad (2.5)$$

Dari persamaan (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) dan (2.5) diperoleh sistem persamaan diferensial orde satu yang menjelaskan laju penyebaran penyakit leptospirosis antara populasi manusia dengan populasi vektor, sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{dS_h}{dt} &= b_1 - \mu_h S_h - \beta_1 S_h I_h - \beta_2 S_h I_v + \\
 &\quad \lambda_h R_h \\
 \frac{dI_h}{dt} &= \beta_1 S_h I_h + \beta_2 S_h I_v - \mu_h I_h - \delta_h I_h - \\
 &\quad \gamma_h I_h \\
 \frac{dR_h}{dt} &= \gamma_h I_h - \mu_h R_h - \lambda_h R_h
 \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\frac{dS_v}{dt} = b_2 - \gamma_v S_v - \beta_3 S_v I_h$$

$$\frac{dI_v}{dt} = \beta_3 S_v I_h + \mu_v I_v - \gamma_v I_v - \delta_v I_v$$

### 3. Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit dan Endemik

Berdasarkan sistem persamaan diferensial (2.1) didapat dua titik kesetimbangan yaitu

1. Titik kesetimbangan bebas penyakit  
Titik kesetimbangan bebas penyakit artinya populasi pada wilayah terbebas dari penyakit sehingga  $I_h = 0$ ,  $R_h = 0$ ,  $I_v = 0$  dan diperoleh sistem persamaan diferensial (2.1) selalu mempunyai titik kesetimbangan penyakit  $E_1 = (\frac{b_1}{\mu_h}, 0, 0, \frac{b_2}{\gamma_v}, 0)$ .
2. Titik Kesetimbangan Endemik  
Titik kesetimbangan artinya di dalam populasi terdapat wabah penyakit leptospirosis. Langkah mendapatkan titik kesetimbangan endemik dari

sistem (2.1) setidaknya salah satu dari komponen terinfeksi dari sistem (2.1) bukan nol. Misalkan populasi manusia terinfeksi ( $I_h$ ) didefinisikan oleh persamaan  $I_h^0 = I_h^*$ , sehingga diperoleh:

titik kesetimbangan endemik,

$$(S_h^*, I_h^*, R_h^*, S_v^*, I_v^*) = \left( \frac{Q_1 Q_2 (\gamma_h - \beta_2 \beta_3)}{\beta_2 Q_1 (\gamma_h - \beta_2 \beta_3) + \beta_2 \beta_3}, \frac{\beta_2 \beta_3}{Q_1 (\gamma_h - \beta_2 \beta_3)}, \frac{\beta_2 \beta_3}{Q_1 (\gamma_h - \beta_2 \beta_3)}, \frac{\beta_2 \beta_3}{Q_1 (\gamma_h - \beta_2 \beta_3)}, \frac{\beta_2 \beta_3}{Q_1 (\gamma_h - \beta_2 \beta_3)} \right)$$

### 3.1 Bilangan Reproduksi

Bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ) penyebaran leptospirosis didefinisikan sebagai rata-rata jumlah individu dalam populasi yang terinfeksi leptospirosis baru yang diproduksi langsung maupun tidak langsung dari satu individu terinfeksi pada periode penyebaran penyakit dalam populasi rentan. Bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ) penyebaran leptospirosis adalah

$$R_0 = \frac{b_1}{\mu_h} \left( \frac{\beta_2 \beta_3 b_2}{Q_1 Q_2 \gamma_v} + \frac{\beta_1}{Q_2} \right)$$

### 3.2 Analisis Kestabilan di Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit dan Endemik

Analisis kestabilan model matematika penyebaran leptospirosis di titik kesetimbangan bebas penyakit yang awalnya berupa sistem persamaan diferensial nonlinier, kemudian dilakukan linearisasi sistem dari model tersebut dengan menggunakan deret Taylor sehingga diperoleh sistem persamaan diferensial linier, lalu ditentukan dengan kriteria kestabilan yang diberikan oleh teorema berikut,

#### **Teorema 3.1. [12]**

Untuk  $R_0 \geq 1$ , maka kesetimbangan bebas penyakit di titik  $E_1$  dari sistem (2.1) stabil asimtotik lokal. Jika  $Q_2 > \frac{\beta_1 b_1}{\mu_h}$ , maka kesetimbangan bebas penyakit di titik  $E_1$  dari sistem (3.6) tidak stabil.

#### **Bukti**

Mengingat nilai bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ) yang telah didapatkan pada pembahasan sebelumnya, bahwa:

$$R_0 = \frac{b_1}{\mu_h} \left( \frac{\beta_2 \beta_3 b_2}{Q_1 Q_2 \gamma_v} + \frac{\beta_1}{Q_2} \right) \geq 1$$

$$R_0 = \frac{\beta_2 \beta_3 b_1 b_2 + \beta_1 b_1 (\gamma_v Q_1)}{Q_1 Q_2 \mu_h \gamma_v} \geq 1$$

$$(Q_1 Q_2 \mu_h \gamma_v) R_0 = \beta_2 \beta_3 b_1 b_2 + \beta_1 b_1 (\gamma_v Q_1) \geq 1$$

Berdasarkan analisa kestabilan pada titik kesetimbangan bebas penyakit leptospirosis diperoleh matriks jacobian pada titik kesetimbangan bebas penyakit leptospirosis adalah sebagai berikut,

$$J_1 = \begin{bmatrix} -\mu_h & -\beta_1 \frac{b_1}{\mu_h} & \lambda_h & 0 & -\beta_2 \frac{b_1}{\mu_h} \\ 0 & M_1 & 0 & 0 & \beta_2 \frac{b_1}{\mu_h} \\ 0 & \gamma_h & -Q_3 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_3 \frac{b_2}{\gamma_v} & 0 & -\gamma_v & 0 \\ 0 & \beta_3 \frac{b_2}{\gamma_v} & 0 & 0 & -Q_1 \end{bmatrix}$$

Dengan  $M_1 = \beta_1 \frac{b_1}{\mu_h} - Q_2$  dan

menggunakan operasi baris elementer didapatkan persamaan karakteristik dari matriks Jacobian di atas, sbb:

$$(-\mu_h - \lambda)(M_1 - \lambda) \left( -\beta_3 \frac{b_2}{\gamma_v} Q_3 - \lambda \right) (-\gamma_v - \lambda) \left( -Q_1 M_1 - \beta_2 \beta_3 \frac{b_1 b_2}{\mu_h \gamma_v} - \lambda \right) = 0$$

Dengan menggunakan nilai  $M_1$ ,  $S_h^0$ ,  $S_v^0$  dan penyusunan kembali sehingga didapatkan,

$$\lambda_5 = -Q_1 M_1 - \beta_2 \beta_3 \frac{b_1 b_2}{\mu_h \gamma_v} < 0$$

$$-Q_1 \left( \beta_1 \frac{b_1}{\mu_h} - Q_2 \right) - \beta_2 \beta_3 \frac{b_1 b_2}{\mu_h \gamma_v} < 0$$

$$Q_1 Q_2 - \beta_1 \frac{b_1}{\mu_h} Q_1 - \beta_2 \beta_3 \frac{b_1 b_2}{\mu_h \gamma_v} < 0$$

$$\frac{Q_1 Q_2 \mu_h \gamma_v - \beta_1 b_1 Q_1 \mu_h \gamma_v - \beta_2 \beta_3 b_1 b_2}{\mu_h} < 0$$

$$-Q_1 Q_2 \mu_h \gamma_v + \beta_1 b_1 Q_1 \mu_h \gamma_v + \beta_2 \beta_3 b_1 b_2 > 0$$

$-Q_1 Q_2 \mu_h \gamma_v + (Q_1 Q_2 \mu_h \gamma_v) R_0 > 0$   
 $Q_1 Q_2 \mu_h \gamma_v (R_0 - 1) > 0$  karena  $R_0 \geq 1$ , titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik jika semua nilai eigen bernilai

negatif, sehingga  $\lambda_4 < 0 \Leftrightarrow M_1 < 0$ , dengan  $M_1 = \beta_1 \frac{b_1}{\mu_h} - Q_2 < 0$ ,  $\lambda_4$  akan bernilai negatif jika  $Q_2 > \frac{\beta_1 b_1}{\mu_h}$ . Semua nilai eigen memiliki hasil negatif jika  $Q_2 > \frac{\beta_1 b_1}{\mu_h}$ , maka terbukti bahwa sistem di atas adalah stabil asimtotik lokal. Namun jika  $Q_2 < \frac{\beta_1 b_1}{\mu_h}$  sehingga  $\lambda_4$  bernilai positif, karena terdapat setidaknya satu nilai eigen yang bernilai positif maka sistem di atas tidak stabil.

**Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan Endemik**

Berdasarkan analisa kestabilan model matematika pada titik kesetimbangan endemik matriks jacobianya adalah sebagai berikut,

$$J(S_h^*, I_h^*, R_h^*, S_v^*, I_v^*) = \begin{bmatrix} -\mu_h - \beta_2 I_v^* - \beta_1 I_h^* & -\beta_2 S_h^* & \lambda_h & 0 & -\beta_2 S_h^* \\ \beta_2 I_v^* + \beta_1 I_h^* & \beta_2 S_h^* - Q_2 & 0 & 0 & \beta_2 S_h^* \\ 0 & \gamma_h & -Q_3 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_3 S_v^* & 0 & -\gamma_v - \beta_5 I_h^* & 0 \\ 0 & \beta_3 S_v^* & 0 & \beta_5 I_h^* & -Q_1 \end{bmatrix}$$

Menggunakan operasi baris elementer didapatkan persamaan karakteristik dari matriks Jacobian di atas, sbb:

$$(-Z_1 - \lambda)(Z_3 - \lambda)(-\beta_3 S_h^* Q_3 - \lambda)(-\gamma_v - \lambda)(\gamma_v(Z_6) - Z_5 Q_1 - \lambda) = 0$$

Sehingga dari persamaan karakteristik di atas didapatkan lima nilai eigen antara lain,  $\lambda_1 = -Z_1 < 0$ ,  $\lambda_2 = -\gamma_v < 0$ ,  $\lambda_3 = -\beta_3 S_h^* Q_3 < 0$

$\lambda_4 = Z_3 = Z_1(-Q_2 + \beta_1 S_h^*) - Z_2 \beta_1 S_h^*$  dengan  $Z_1 \geq 0, Z_2 \geq 0, \beta_1 > 0, S_h^* > 0, Q_2 > 0$  maka  $\lambda_4$  akan bernilai negatif jika  $Z_1 \beta_1 S_h^* < Z_1 Q_2 + Z_2 \beta_1 S_h^*$

$\lambda_5 = \gamma_v Z_6 - Z_5 Q_1, \lambda_5 = \gamma_v Z_6 - Z_5 Q_1$  dengan  $\gamma_v > 0, Z_6 \geq 0, Z_5 \geq 0, Q_1 > 0$  maka  $\lambda_5$  akan bernilai negatif jika  $\gamma_v Z_6 < Z_5 Q_1$

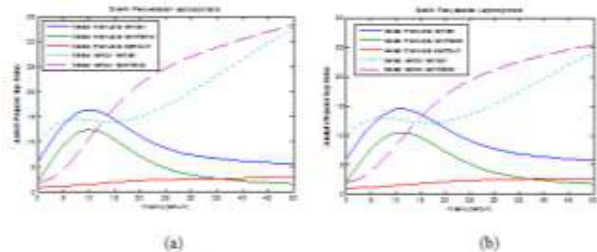
Dengan demikian semua nilai eigen akan bernilai negatif jika  $Z_1 \beta_1 S_h^* < Z_1 Q_2 + Z_2 \beta_1 S_h^*$  dan  $\gamma_v Z_6 < Z_5 Q_1$  sehingga titik kesetimbangan endemik tersebut adalah stabil asimtotik lokal. Namun jika  $Z_1 \beta_1 S_h^* > Z_1 Q_2 + Z_2 \beta_1 S_h^*$  dan  $\gamma_v Z_6 >$

$Z_5 Q_1$  maka terdapat nilai eigen yang positif sehingga sistem tidak stabil.

**4. Studi Kasus**

Simulasi numerik model matematika ini menggunakan metode Runge-Kutta Orde 4, dengan menggunakan data penyakit leptospirosis Puskesmas Kedung Mundu 2014 dan nilai parameter berdasar literatur dan dilakukan simulasi dengan program Matlab didapatkan, Simulasi untuk Pengaruh Laju Kelahiran Manusia dan Vektor

1.  $b_1 = 1.8$  dan  $b_2 = 1.4$  pada Penyebaran Penyakit Leptospirosis
2.  $b_1 = 1.4$  dan  $b_2 = 1$  pada Penyebaran Penyakit Leptospirosis



Gambar 4.1 (a) Grafik model SIR-SI pada kondisi awal endemik  $b_1 = 1.8$  dan  $b_2 = 1.4$   
(b) Grafik model SIR-SI pada kondisi awal endemik  $b_1 = 1.4$  dan  $b_2 = 1.4$

Pada Gambar 4.1 (Pengaruh Laju Kelahiran Manusi dan Vektor  $b_1 = 1.8$  dan  $b_2 = 1.4$  pada Penyebaran Penyakit Leptospirosis) dan (Pengaruh Laju Kelahiran Manusia dan Vektor  $b_1 = 1.4$  dan  $b_2 = 1$  pada Penyebaran Penyakit Leptospirosis) menunjukkan bahwa semakin besar laju kelahiran manusia mengakibatkan proporsi jumlah manusia yang sembuh semakin besar sehingga jumlah manusia yang rentan dan manuisa yang terinfeksi menurun. Sedangkan semakin besar laju kelahiran vektor mengakibatkan proporsi jumlah vektor yang rentan dan terinfeksi semakin banyak. Sebaliknya, semakin kecil laju kelahiran manusia mengakibatkan proporsi jumlah manusia yang sembuh semakin kecil sehingga jumlah manusia yang rentan dan terinfeksi semakin besar. Untuk laju kelahiran vektor yang semakin kecil mengakibatkan pada proporsi jumlah vektor juga kecil. Hal tersebut menjelaskan bahwa laju kelahiran manusia dan vektor

mempengaruhi proporsi jumlah populasi manusia dan populasi vektor dalam jangka panjang.

### 5. Kesimpulan

Dari hasil pembahasan disimpulkan bahwa model penyebaran penyakit leptospirosis antara populasi manusia dan populasi vektor yang diperoleh merupakan sistem persamaan diferensial tak linier dengan lima variabel, yaitu kelas *susceptible human* (Sh), kelas *Infected human* (Ih), kelas *recovered human* (Rh), kelas *susceptible vektor* (Sv), dan kelas *infected vektor* (Iv). Pada model matematika ini didapatkan dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik.

Dari model matematika tersebut dilakukan simulasi numerik dengan metode Runge Kutta Orde 4, hasil simulasi berdasarkan data Puskesmas Kedung Mundu tahun 2014 diperoleh bahwa besar laju kelahiran manusia ( $b_1$ ) berbanding lurus dengan jumlah manusia yang sembuh dan besar laju kelahiran vektor ( $b_2$ ) berbanding lurus dengan jumlah vektor yang terinfeksi. Sehingga dengan melihat representasi yang ada dapat dilakukan pemberantasan jumlah populasi vektor untuk salah satu usaha mengendalikan penyebaran penyakit leptospirosis.

### 6. Daftar Pustaka

- [1] Rusmini. 2011. *Bahaya Leptospirosis (Penyakit kencing tikus) & Cara Pencegahannya*. Yogyakarta: Gosyen Publishing. Hal 2-85.
- [2] Rejeki, D.S.S. 2005. *Faktor Risiko Lingkungan yang Berpengaruh Terhadap Kejadian Leptospirosis Berat*. Tesis. UNDIP: Semarang.
- [3] Zaman G. 2010. *Dynamical Behavior of Leptospirosis Disease and Role of Optimal Control Theory*, Int. J. Math. Comp. Vol. 7:73-79
- [4] Zaman G., Khan M.A., Islam S., Chohan M.I., Jung J.H.. 2012. *Modeling Dynamical Interaction Between Leptospirosis Infected Vector and Human Population*. Applied Mathematical Science. 6(26): 1287-1302.
- [5] M. Derouich and A. Boutayeb. 2006. *Mathematical modelling and computer simulations of Dengue fever*, App. Math. Comput. Vol. 177: 528-544.
- [6] L. Esteva and C. Vergas. 1999. *A model for dengue disease with variable human populations*. J. Math. Biol. 38: 220-240.
- [7] P. Pongsuumpun, T. Miami and R. Kongnuy. 2008. *Age structural Transmission Model for Leptospirosis*, The third International symposium on Biomedical engineering. 411-416.
- [8] W. Triampo, D. Baowan, I.M. Tang, N. Nuttavut, J. Wong-Ekkabut and G. Dounghawee. 2007. *A simple deterministic model for the spread of leptospirosis in Thailand*. Int. J. Bio. Med. Sci. Vol.2: 22-26.
- [9] Widowati dan Sutimin. 2013. *Pemodelan Matematika : Analisis dan Aplikasinya*. Undip Press : Semarang.
- [10] Budi, Wiji. 2010. *Dinamika Model Rantai Makanan Dua Spesies Dengan Kehadiran Predator Kedua Sebagai Pemangsa Predator Pertama*. Skripsi. UNDIP: Semarang.

## MODEL DINAMIK DENGAN KONTROL PADA POPULASI PENDERITA DIABETES MELITUS

Anindita Henindya P.<sup>1</sup>, Kartono<sup>2</sup>, Sunarsih<sup>3</sup>  
<sup>1,2,3</sup>Jurusan Matematika FSM Universitas Diponegoro

**Abstract.** In this paper is discussed the optimal control problem of a population model of diabetes mellitus. Model of diabetes mellitus population illustrates the flow of development a person suffering diabetes mellitus from pre-diabetes stage, diabetes without complications stage, diabetes with complications stage, until recovered stage. Optimal control aims to minimize the number of diabetics without complications, and the number of diabetics with complications through the implementation of the treatment control ( $u_1$ ) and glucose diet therapy ( $u_2$ ). Moreover, the goal of optimal control is also to minimize the cost of treatment and diet therapy glucose. Optimal control is obtained by applying Pontryagin minimum principle. Optimal control which is obtained from the calculation then simulated to see the effect of the treatment control and glucose diet therapy which is given.

**Keywords:** Optimal Control, Diabetes Mellitus, Pontryagin Minimum Principle.

### 1. Pendahuluan

Diabetes melitus diketahui sebagai suatu penyakit yang disebabkan oleh adanya gangguan menahun terutama pada sistem metabolisme karbohidrat, lemak, dan juga protein dalam tubuh. Gangguan metabolisme tersebut disebabkan kurangnya hormon insulin yang diperlukan dalam proses perubahan gula menjadi tenaga serta sintesis lemak. Kondisi yang demikian itu mengakibatkan terjadinya hiperglikemia, yaitu meningkatnya kadar gula dalam darah atau terdapatnya kandungan gula dalam air kencing dan zat-zat keton serta asam yang berlebihan [1].

Berdasarkan laporan terakhir dari IDF, lebih dari 370 juta orang di seluruh dunia menderita diabetes (8.5% dari populasi orang dewasa) dan hampir 300 juta orang dalam tahap pra diabetes (6.5% dari populasi orang dewasa). Akibatnya, beban sosial-ekonomi diabetes sangat besar dengan hampir lima juta kematian dan lebih dari \$470 miliar dihabiskan untuk pemeliharaan kesehatan pada tahun 2012 [2]. Asosiasi diabetes Amerika memperkirakan bahwa biaya pengobatan tahunan untuk penderita diabetes adalah 5 kali lebih banyak daripada orang tanpa diabetes. Penelitian lain memperkirakan bahwa biaya pengobatan untuk penderita diabetes dengan komplikasi adalah 2-5 kali lebih tinggi daripada untuk penderita diabetes tanpa komplikasi [2]. Beban biaya

diabetes tersebut dapat dikurangi dengan mengendalikan jumlah individu penderita diabetes tanpa komplikasi dan dengan komplikasi.

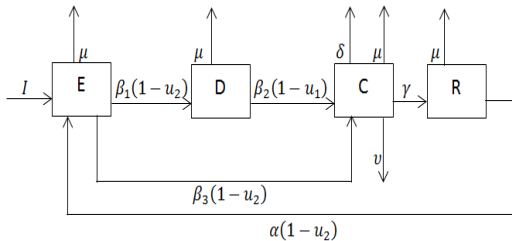
Model matematika tentang banyaknya populasi penderita diabetes melitus telah dikemukakan oleh Boutayeb, A. [2]. Model tersebut memperhatikan perkembangan diabetes dari taraf pra diabetes sampai pada taraf tanpa komplikasi dan taraf komplikasi. Selanjutnya, Boutayeb, A. [2] membentuk model kontrol optimal yang bertujuan untuk mengendalikan banyaknya individu penderita diabetes tanpa komplikasi dan dengan komplikasi dengan menerapkan satu perlakuan kontrol. Berdasarkan model yang telah dibentuk oleh Boutayeb, A., dalam makalah ini dikembangkan bentuk model dinamik dengan kontrol pada populasi penderita diabetes melitus.

Model yang dibentuk memperhatikan perkembangan diabetes dari tahap pra diabetes ke tahap diabetes tanpa komplikasi, tahap diabetes dengan komplikasi dan kemudian sampai ke tahap sembuh. Pengontrolan diabetes dilakukan dengan dua upaya yaitu pengobatan dan terapi diet glukosa. Tujuan dari model yang dibentuk adalah untuk mendapatkan hasil kontrol yang optimal dengan menerapkan prinsip minimum Pontryagin serta melakukan simulasi numerik untuk melihat kerja pengobatan dan terapi diet

glukosa dalam mengendalikan banyaknya penderita diabetes dengan komplikasi dan tanpa komplikasi.

## 2. Model Dinamik dengan Kontrol pada Populasi Penderita Diabetes Melitus

Model dinamik dengan kontrol pada populasi penderita diabetes melitus dapat dikonstruksi dengan memperhatikan skema perpindahan antar kelas sebagai berikut:



Gambar 1. Skema perpindahan antar kelas pada model dinamik dengan kontrol pada populasi penderita diabetes mellitus

dari Gambar 1, modelnya adalah

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= I - (\mu + (\beta_3 + \beta_1)(1 - u_2))E \\ &\quad + \alpha(1 - u_2)R \\ \frac{dD}{dt} &= \beta_1(1 - u_2)E - (\mu + \beta_2(1 - u_1))D \\ \frac{dC}{dt} &= \beta_3(1 - u_2)E + \beta_2(1 - u_1)D \\ &\quad - (\mu + \gamma + v + \delta)C \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma C - (\mu + \alpha(1 - u_2))R \end{aligned} \quad (1)$$

dengan

$E$  = banyaknya individu pra diabetes.

$D$  = banyaknya individu yang menderita diabetes tanpa komplikasi.

$C$  = banyaknya individu yang menderita diabetes dengan komplikasi.

$R$  = banyaknya individu yang telah sembuh dari penyakit diabetes dengan komplikasi.

$I$  = kasus baru diabetes mellitus.

$\mu$  = laju kematian alami

$\gamma$  = laju komplikasi yang disembuhkan

$v$  = laju penderita diabetes dengan komplikasi menjadi cacat

$\delta$  = laju kematian akibat komplikasi

$\beta_1$  = peluang berkembangnya individu pra diabetes menjadi individu penderita diabetes tanpa komplikasi.

$\beta_2$  = peluang berkembangnya individu penderita diabetes tanpa komplikasi menjadi individu penderita diabetes dengan komplikasi.

$\beta_3$  = peluang berkembangnya individu pra diabetes menjadi individu penderita diabetes dengan komplikasi.

$\alpha$  = peluang individu sembuh menjadi individu pra diabetes.

$u_1$  = kontrol pengobatan.

$u_2$  = kontrol terapi diet glukosa.

Asumsi-asumsi yang digunakan adalah

1. Penderita diabetes melitus dengan komplikasi dapat sembuh.
2. Penderita diabetes melitus yang sembuh dapat menjadi individu pra diabetes.
3. Kematian pada penderita pra-diabetes dan diabetes tanpa komplikasi hanya berupa kematian alami.
4. Kematian pada penderita diabetes dengan komplikasi berupa kematian alami dan kematian akibat komplikasi.
5. Laju kematian alami sama di setiap kelas.
6. Peluang perkembangan individu dari satu tahap ke tahap lain tidak bergantung umur, jenis kelamin, dan status sosial.
7. Populasi penduduk bersifat tertutup dalam pengertian bahwa terjadinya pertambahan atau pengurangan jumlah penduduk melalui emigrasi dan imigrasi diabaikan.

## 3. Analisis Kontrol Optimal

### 3.1 Fungsional Objektif (*Performance Index*)

Tujuan dari permasalahan optimasi kontrol optimal yang akan dibentuk adalah meminimalkan banyaknya penderita diabetes tanpa komplikasi dan dengan komplikasi untuk meningkatkan banyaknya individu sembuh. Fungsional objektifnya dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_0^{t_f} (A_1 D(t) + A_2 C(t) + B_1 u_1^2(t) \\ &\quad + B_2 u_2^2(t)) dt \end{aligned} \quad (2)$$

dengan sistem persamaan (1) sebagai kendala, sedangkan  $A_1$  dan  $A_2$  adalah konstanta bobot yang bersesuaian dengan penderita diabetes tanpa komplikasi dan dengan komplikasi. Konstanta  $B_1$  dan  $B_2$  adalah bobot sebagai faktor penyeimbang dari  $u_1$  dan  $u_2$ ,  $t = 0$  adalah waktu awal,  $t_f$  adalah waktu akhir. Kemudian dicari  $u_1^*, u_2^*$  sehingga berlaku

$$J(u_1^*, u_2^*) = \min_{u_1, u_2 \in U} J(u_1, u_2) \quad (3)$$

dengan  $U = \{u_1, u_2 : 0 \leq u_1 \leq 1, 0 \leq u_2 \leq 1, t \in [0, t_f]\}$ .

### 3.2 Penyelesaian Kontrol Optimal

Langkah awal untuk menentukan kontrol optimal adalah membentuk fungsi Hamiltonian. Dalam persoalan ini kasus  $t_f$  tetap dan  $x(t_f) = x_{t_f}$  bebas adalah syarat dari kondisi transversal dengan kontrol terbatas dapat dibentuk fungsi Hamiltoniannya sebagai berikut.

$$H(E, C, D, R, u_1, u_2, \lambda) = L(D, C, u_1, u_2) + \lambda_1 \frac{dE}{dt} + \lambda_2 \frac{dD}{dt} + \lambda_3 \frac{dC}{dt} + \lambda_4 \frac{dR}{dt} \quad (4)$$

dengan

$$L(D, C, u_1, u_2) = A_1 D(t) + A_2 C(t) + B_1 u_1^2(t) + B_2 u_2^2(t) \quad (5)$$

$\frac{dE}{dt}, \frac{dD}{dt}, \frac{dC}{dt}, \frac{dR}{dt}$  sama dengan ruas kanan dari sistem (1),  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  adalah variabel *costate* (variabel keadaan bantu).

Persamaan *costate* dan kondisi stasioner diperoleh dengan menggunakan prinsip minimum Pontryagin sebagai berikut.

a. Persamaan *Costate*

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial E} = \lambda_1 \mu + (\lambda_1 - \lambda_2)(1 - u_2)\beta_1 + (\lambda_1 - \lambda_3)(1 - u_2)\beta_3 \quad (6)$$

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial D} = -A_1 + \lambda_2 \mu + (\lambda_2 - \lambda_3)(1 - u_1)\beta_2 \quad (7)$$

$$\frac{d\lambda_3}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial C} = -A_2 + \lambda_3(\mu + v + \delta) + (\lambda_3 - \lambda_4)\gamma \quad (8)$$

$$\frac{d\lambda_4}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial R} = (\lambda_4 - \lambda_1)\alpha(1 - u_2) + \lambda_4 \mu \quad (9)$$

b. Kondisi Stationer

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = 0 \Rightarrow u_1 = \frac{1}{2B_1} [\beta_2 D(\lambda_3 - \lambda_2)] \quad (10)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_2} = 0 \Rightarrow u_2 = \frac{1}{2B_2} [\beta_1 E(\lambda_2 - \lambda_1) + \beta_3 E(\lambda_3 - \lambda_1) + \alpha R(\lambda_1 - \lambda_4)] \quad (11)$$

Karena  $0 \leq u_1 \leq 1$ , sehingga berdasarkan teori kontrol optimal dengan variabel kontrol terbatas [3] diperoleh

$$u_1^* = \begin{cases} 0, & \frac{1}{2B_1} [\beta_2 D(\lambda_3 - \lambda_2)] \leq 0 \\ \frac{1}{2B_1} [\beta_2 D(\lambda_3 - \lambda_2)], & 0 < u_1 < 1 \\ 1, & \frac{1}{2B_1} [\beta_2 D(\lambda_3 - \lambda_2)] \geq 1 \end{cases} \quad (12)$$

atau dapat ditulis sebagai

$$u_1^* = \min(1, \max(0, \frac{1}{2B_1} [\beta_2 D^*(\lambda_3 - \lambda_2)]))$$

Demikian pula karena  $0 \leq u_2 \leq 1$ , sehingga diperoleh

$$u_2^* = \begin{cases} 0, & \frac{1}{2B_2} [\beta_1 E(\lambda_2 - \lambda_1) + \beta_3 E(\lambda_3 - \lambda_1) + \alpha R(\lambda_1 - \lambda_4)] \leq 0 \\ \frac{1}{2B_2} [\beta_1 E(\lambda_2 - \lambda_1) + \beta_3 E(\lambda_3 - \lambda_1) + \alpha R(\lambda_1 - \lambda_4)], & 0 < u_2 < 1 \\ 1, & \frac{1}{2B_2} [\beta_1 E(\lambda_2 - \lambda_1) + \beta_3 E(\lambda_3 - \lambda_1) + \alpha R(\lambda_1 - \lambda_4)] \geq 1 \end{cases} \quad (13)$$

atau dapat ditulis sebagai

$$u_2^* = \min(1, \max(0, \frac{1}{2B_2} [\beta_1 E^*(\lambda_2 - \lambda_1) + \beta_3 E^*(\lambda_3 - \lambda_1) + \alpha R^*(\lambda_1 - \lambda_4)]))$$

### 4. Simulasi Numerik

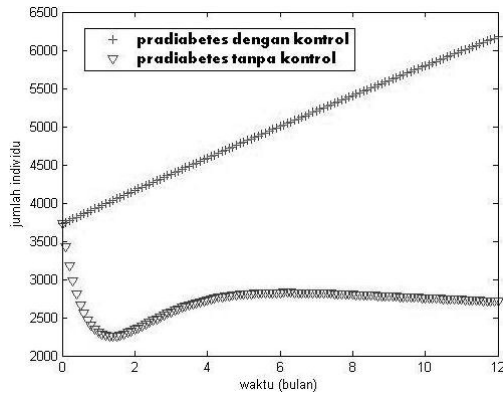
Persamaan (1) diselesaikan secara numerik dengan menggunakan metode Runge Kutta orde 4 dan didiskritisasi menggunakan pendekatan beda maju pada persamaan *state* (1) serta pendekatan beda mundur pada persamaan *costate* (6)-(9). Simulasi menggunakan data dari RS Kariadi periode bulan Januari-Desember tahun 2014 dengan nilai parameter-parameter seperti berikut:

Parameter	Nilai	Parameter	Nilai
$I$	274	$\beta_1$	0,69
$\mu$	0,014	$\beta_2$	0,57
$\gamma$	0,347	$\beta_3$	0,74
$v$	0	$\alpha$	0,5
$\delta$	0,013		

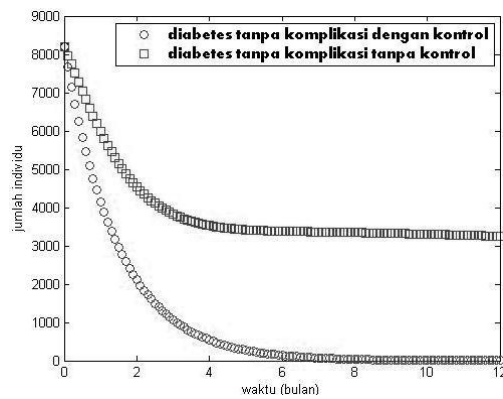
Tabel 1. Nilai parameter untuk simulasi numerik

dan  $E(0) = 3726$  orang,  $D(0) = 8199$  orang,  $C(0) = 10793$  orang,  $R(0) = 3749$  serta  $\lambda_1(12) = 0$ ,  $\lambda_2(12) = 0$ ,  $\lambda_3(12) = 0$ , dan  $\lambda_4(12) = 0$ .

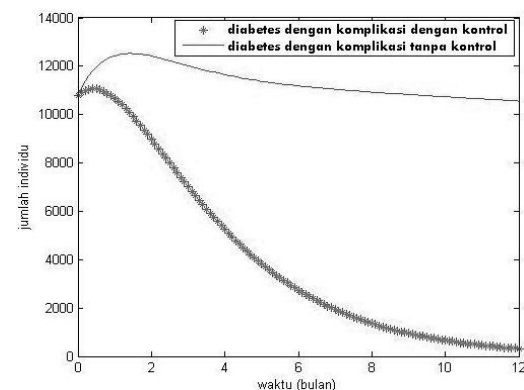
Nilai  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$  dan  $B_2$  diberikan syarat yaitu  $A_1 + A_2 + B_1 + B_2 = 1$  dan  $0 \leq A_1, A_2, B_1, B_2 \leq 1$ . Dipilih  $A_1 = A_2 = B_1 = B_2 = 0,25$ .



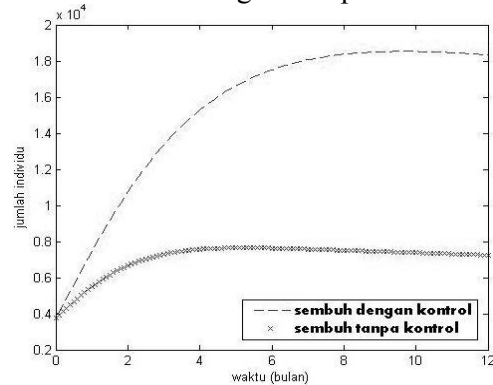
Gambar 2. Grafik simulasi pada kelas pra diabetes



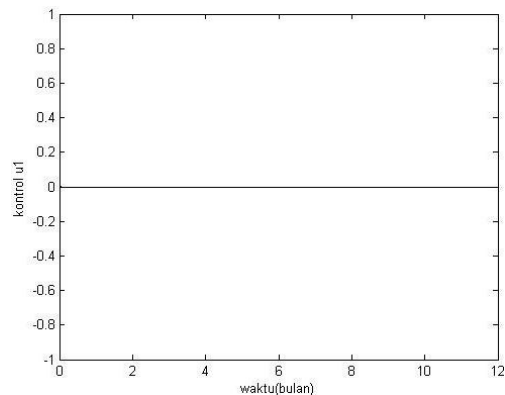
Gambar 3. Grafik simulasi pada kelas diabetes tanpa komplikasi



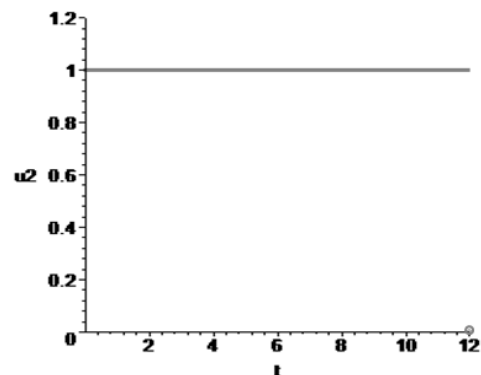
Gambar 4. Grafik simulasi pada kelas diabetes dengan komplikasi



Gambar 5. Grafik simulasi pada kelas sembuh (*recovered*)



Gambar 6. Grafik simulasi untuk kontrol  $u_1$



Gambar 7. Grafik simulasi untuk kontrol  $u_2$

Pada Gambar 6. terlihat bahwa banyaknya kontrol pengobatan ( $u_1$ ) pada awal waktu  $t = 0$  sampai akhir waktu  $t = 12$  bulan bernilai 0 yang artinya pemberian pengobatan tidak bekerja secara efektif untuk mengendalikan banyaknya

penderita diabetes tanpa komplikasi dan dengan komplikasi. Pada Gambar 7. banyaknya kontrol terapi diet glukosa ( $u_2$ ) pada awal waktu  $t = 0$  sampai mendekati  $t = 12$  bulan adalah maksimum sebesar 1, kemudian tepat pada akhir waktu  $t = 12$  bulan pemberian kontrol mencapai nilai 0. Artinya pemberian kontrol terapi diet glukosa bekerja secara efektif untuk mereduksi banyaknya penderita diabetes tanpa komplikasi dan dengan komplikasi serta mengakibatkan bertambahnya individu yang sembuh. Dampak pemberian kontrol untuk tiap kelas dapat dilihat lebih jelas pada Gambar 2-Gambar 5.

### 5. Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan, hasil kontrol yang optimal pada model dinamik dengan kontrol pada populasi penderita diabetes melitus adalah

$$u_1^* = \min(1, \max(0, \frac{1}{2B_1} [\beta_2 D^* (\lambda_3 - \lambda_2)]))$$

$$u_2^* = \min(1, \max(0, \frac{1}{2B_2} [\beta_1 E^* (\lambda_2 - \lambda_1) + \beta_3 E^* (\lambda_3 - \lambda_1) + \alpha R^* (\lambda_1 - \lambda_4)]))$$

Simulasi numerik memperlihatkan bahwa pada saat bobot yang bersesuaian dengan penderita diabetes tanpa komplikasi, bobot yang bersesuaian dengan penderita diabetes dengan komplikasi, bobot penyeimbang dari kontrol pengobatan serta bobot penyeimbang dari kontrol terapi diet glukosa semuanya bernilai sama maka pengontrolan yang diterapkan dapat mereduksi banyaknya penderita diabetes tanpa komplikasi dan dengan komplikasi serta mengakibatkan banyaknya individu sembuh bertambah. Oleh karena itu, strategi penggunaan kontrol adalah dengan memberikan kontrol yang sesuai sehingga hasil yang didapat optimal yaitu mampu mereduksi banyaknya jumlah penderita diabetes tanpa dan dengan komplikasi.

### 6. Daftar Pustaka

- [1] Endang Lanywati. 2001. *Diabetes Melitus Penyakit Kencing Manis*. Yogyakarta: Kanisius.
- [2] Boutayeb, A., Boutayeb, W. and Lamli, M. 2014. Optimal Control Approach to the Dynamics of a Population of Diabetics. *International Journal of Applied Mathematical Sciences* 8(56): 2773 – 2782.
- [3] Kamien, M. I. And Schwartz, N. L. 1991. *Dynamic Optimization*. [e.guigon.free.fr/rsc/book/KamienSchwartz91.pdf](http://e.guigon.free.fr/rsc/book/KamienSchwartz91.pdf). Diakses pada 3 Februari 2015.

## FUNGSI POTENSIAL LISTRIK PADA PERMUKAAN BUMI DENGAN BEBERAPA LAPISAN

Aini Suri Talita<sup>1</sup>, Sri Mardiyati<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Fakultas Ilmu Komputer dan Teknologi Industri, Universitas Gunadarma,  
[ainisuri@staff.gunadarma.ac.id](mailto:ainisuri@staff.gunadarma.ac.id)

<sup>2</sup>Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia, [sri\\_math@sci.ui.ac.id](mailto:sri_math@sci.ui.ac.id)

**Abstrak.** Metode resistivitas listrik merupakan salah satu metode eksplorasi yang dapat digunakan untuk menyelidiki kondisi material di bawah permukaan medium berlapis, termasuk di bawah permukaan bumi, dengan cara mengalirkan arus listrik buatan. Arus listrik dialirkan pada permukaan bumi dengan menggunakan elektroda listrik. Sedangkan potensial listrik diukur dengan menggunakan alat voltmeter pada elektroda potensial. Fungsi potensial listrik perlu diketahui secara eksplisit untuk mendapatkan nilai teoritis dari potensial listrik sebagai data pembandingan dari data sebenarnya. Fungsi potensial listrik tersebut dapat diturunkan dengan menggunakan sifat-sifat vektoris potensial listrik dan konsep persamaan differensial parsial dan syarat batas. Pada makalah ini diturunkan fungsi dari potensial listrik pada permukaan bumi dengan beberapa lapisan dengan memanfaatkan sifat vektoris potensial listrik serta konsep persamaan differensial dan syarat batas.

**Keywords:** Fungsi potensial listrik, resistivitas listrik, arus listrik, persamaan differensial parsial, beda potensial listrik

**Abstract.** Electrical resistivity method is one of the exploration methods that can be used to investigate the condition of the material below the surface of layered medium, including below the surface of the earth, by injecting electric current into the surfaces. Electric current is applied to the surface of the earth by using electric electrode, while the electric potential is measured by using a voltmeter on the electrode potential. Electric potential function should be explicitly defined in order to obtain the theoretical value of the electric potential as comparative data. The electric potential function can be derived by using the vector properties of electric potential and the concept of partial differential equations and boundary conditions. This paper derived the electric potential function on the surface of the Earth with multiple layers by utilizing the vector properties of electric potential and the concept of differential equations and boundary conditions.

**Keywords:** Electric potential function, electrical resistivity, electric current, partial differential equation, electric potential difference

### 1. Pendahuluan

Kebutuhan akan energi semakin berkembang seiring dengan bertambahnya jumlah penduduk dunia. Untuk memenuhi kebutuhan tersebut eksplorasi sumber daya alam makin ditingkatkan. Hal ini turut mendorong para peneliti untuk mengembangkan metode eksplorasi sumber daya alam yang dapat digunakan untuk menemukan lokasi sumber daya alam baru. Metode eksplorasi yang dikembangkan diantaranya adalah metode eksplorasi yang

tidak membutuhkan observasi geologi namun memanfaatkan hasil pengukuran fisik pada permukaan bumi yang diharapkan dapat memberikan informasi mengenai kondisi di bawah permukaan bumi. Salah satu metode tersebut adalah metode resistivitas listrik.

Metode resistivitas listrik ini dikembangkan pada 1912 oleh Conrad Schlumberger yang melakukan percobaan berkaitan dengan resistivitas listrik di Normandy, Prancis [1]. Metode ini

digunakan untuk mendapatkan informasi mengenai kondisi struktur di bawah permukaan bumi dengan cara mengalirkan arus listrik melalui sepasang elektroda listrik kemudian mengukur beda potensial diantara dua elektroda potensial dengan menggunakan voltmeter. Variasi dari kondisi materi di bawah permukaan bumi yang berakibat pada bervariasinya ketahanan (*resistance*) terhadap arus listrik menyebabkan variasi dari perhitungan nilai beda potensial listrik yang diukur di permukaan bumi. Variasi dari nilai beda potensial listrik ini menyediakan informasi mengenai kondisi struktur di bawah permukaan bumi. Pengukuran beda potensial listrik ini dilakukan berulang kali seiring dengan perubahan jarak dari elektroda potensial ke pusat arus listrik [2]. Seperti yang telah dinyatakan sebelumnya pengukuran beda potensial ini dilakukan dengan menggunakan voltmeter. Akan tetapi metode resistivitas listrik membutuhkan nilai teoritis dari potensial listrik sebagai data pembanding. Hal ini menuntut didapatkannya suatu fungsi eksplisit dari potensial listrik pada suatu titik di permukaan bumi yang dialiri arus listrik. Fungsi potensial listrik ini diturunkan dari sifat-sifat vektoris potensial listrik pada suatu medium, termasuk permukaan bumi.

Berdasarkan alasan-alasan tersebut pada makalah ini akan dibahas mengenai penurunan rumus fungsi potensial listrik pada suatu titik di permukaan bumi yang dialiri arus listrik. Pada penelitian ini disumsikan bahwa bumi bersifat isotropik, bumi dialiri arus listrik searah, bumi terdiri atas beberapa lapisan horisontal yang heterogen dengan resistivitas pada masing-masing lapisan merupakan fungsi eksponensial atas kedalaman, serta panas yang diakibatkan adanya konduksi listrik tidak berpengaruh terhadap resistivitas materi.

## 2. Fungsi Potensial Listrik Pada Permukaan Bumi Dengan Beberapa Lapisan

Potensial listrik  $\Phi$  pada suatu titik ketika dialirkan arus listrik searah memenuhi

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi \quad (1)$$

dengan  $\mathbf{E}$  menyatakan medan listrik. Berdasarkan hukum Ohm dan sifat kepadatan arus dimana divergensi dari kepadatan arus bernilai nol kecuali pada sumber arus [3] didapatkan

$$(\nabla\sigma) \cdot \nabla\Phi + \sigma(\nabla \cdot \nabla\Phi) = 0 \quad (2)$$

dengan  $\sigma$  merupakan konduktivitas dari medium dalam hal ini bumi. Jika  $\sigma(r, \theta, z)$  dan  $\Phi(r, \theta, z)$  merupakan fungsi riil dari vektor posisi pada koordinat silinder, maka

$$\left(\frac{\partial\sigma}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{\partial\sigma}{\partial z}\hat{z}\right) \cdot \left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{z}\right) + \sigma\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right) = 0 \quad (3)$$

Karena konduktivitas diasumsikan merupakan fungsi atas kedalaman saja dan potensial listrik pada medium isotropik tidak bergantung pada variabel sudut  $\theta$  maka Persamaan (3) menjadi

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} + \frac{1}{\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

yang merupakan persamaan parsial derajat dua. Persamaan (4) akan diselesaikan dengan metode variabel terpisah [4]. Asumsikan potensial listrik  $\Phi$  memiliki bentuk:  $\Phi(r, z) = R(r)Z(z)$ , sehingga didapat:

$$\frac{1}{R(r)}\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{rR(r)}\frac{dR}{dr} = -\frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z}{dz^2} - \frac{1}{\sigma Z(z)}\frac{d\sigma}{dz}\frac{dZ}{dz} \quad (5)$$

Ruas kiri dari Persamaan (5) merupakan fungsi atas  $r$  sedangkan ruas kanan dari Persamaan (5) merupakan fungsi atas  $z$ . Agar konsisten maka asumsikan:

$$\frac{1}{R(r)} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{rR(r)} \frac{dR}{dr} = -\lambda^2 \quad (6)$$

dengan  $\lambda$  merupakan konstanta pemisah. Akibatnya:

$$\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z}{dz^2} + \frac{1}{\sigma Z(z)} \frac{d\sigma}{dz} \frac{dZ}{dz} = \lambda^2 \quad (7)$$

Dengan mengasumsikan  $\Phi(r, z) = R(r)Z(z)$  dan mengasumsikan  $\lambda$  terletak pada interval  $[0, \infty)$  didapatkan solusi umum dari Persamaan (4) berbentuk

$$\Phi(r, z) = \int_0^\infty F(\lambda) R(\lambda, r) Z(\lambda, z) d\lambda \quad (8)$$

Persamaan (6) dapat ditulis sebagai

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \lambda^2 R(r) = 0 \quad (9)$$

Sedangkan Persamaan (7) dapat ditulis sebagai:

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dz} \frac{dZ}{dz} - \lambda^2 Z(z) = 0 \quad (10)$$

Persamaan (9) merupakan persamaan differensial Bessel derajat nol, sehingga solusinya adalah:

$$R(\lambda, r) = J_0(\lambda r) \quad (11)$$

Sesuai dengan Gambar 1,  $C$  yang merupakan sumber arus  $I$  terletak pada permukaan bumi, yaitu kedalaman  $z = 0$ . Resistivitas pada lapisan ke- $k$  diasumsikan berbentuk: [2]

$$\rho_k = \alpha_k \exp(\beta_k z), \quad h_{k-1} < z < h_k \quad (12)$$

dengan  $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$ . Sehingga didapat konduktivitas pada lapisan ke- $k$ ,  $\sigma_k$  berbentuk [5]:

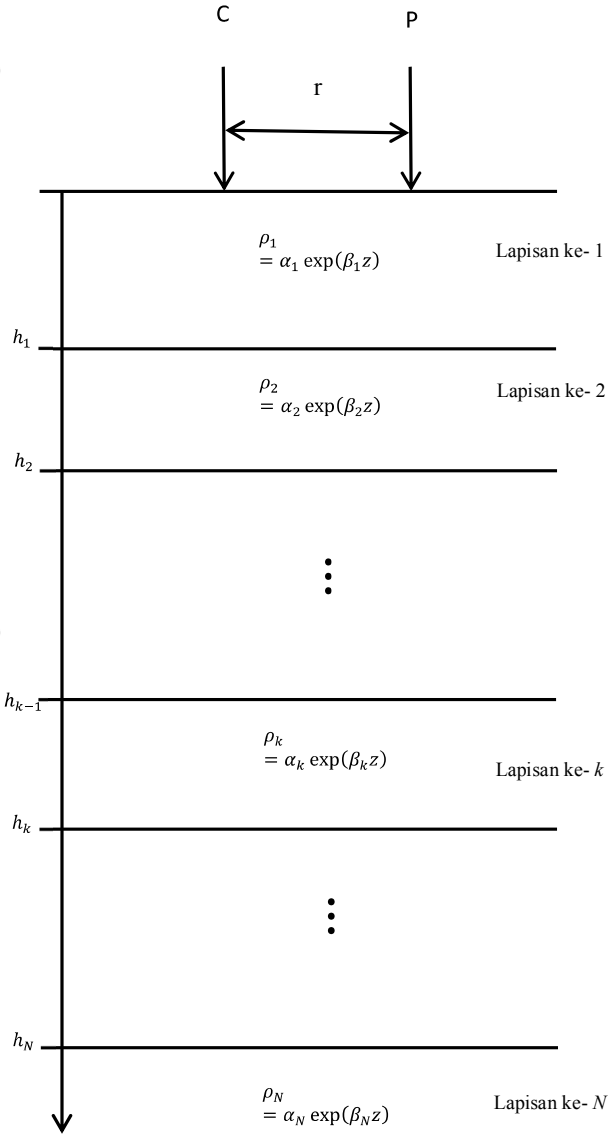
$$\sigma_k = \alpha_k^{-1} \exp(-\beta_k z) \quad (13)$$

Sehingga Persamaan (10) menjadi

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + \beta_k \frac{dZ}{dz} - \lambda^2 Z(z) = 0, \quad h_{k-1} < z < h_k \quad (14)$$

yang merupakan persamaan diferensial homogen derajat dua dengan solusi

$$Z(\lambda, z) = C \exp(\gamma_k^+ z) \text{ dan } Z(\lambda, z) = C \exp(\gamma_k^- z) \quad (15)$$



Gambar 1. Ilustrasi Geometri Model Masalah Potensial Listrik Pada Permukaan Bumi

Keterangan Gambar:

- $C$  merupakan elektroda arus listrik
- $P$  merupakan elektroda potensial listrik
- Bumi diasumsikan terdiri dari  $N$  lapisan

- Ketebalan pada lapisan ke-  $k$  adalah  $h_k - h_{k-1}$
- Resistivitas pada lapisan ke-  $k$  ( $\rho_k$ ) diasumsikan berbentuk fungsi eksponensial yang bergantung pada kedalaman  $z$ .

dengan  $\gamma_k^+ = \frac{\beta_k + \sqrt{\beta_k^2 + 4\lambda^2}}{2}$  dan  $\gamma_k^- = \frac{\beta_k - \sqrt{\beta_k^2 + 4\lambda^2}}{2}$ .

Berdasarkan Persamaan (10) dan (15), solusi partikular dari Persamaan (4) adalah:

$$\Phi_k = C \exp(\gamma_k^+ z) J_0(\lambda r) \text{ dan } \Phi_k = C \exp(\gamma_k^- z) J_0(\lambda r) \quad (16)$$

Sehingga solusi umum dari Persamaan (4) adalah:

$$\Phi_k = \int_0^\infty [A_k(\lambda) \exp(\gamma_k^+ z) + B_k(\lambda) \exp(\gamma_k^- z)] J_0(\lambda r) d\lambda \quad (17)$$

dengan  $\Phi_k$  menyatakan potensial listrik pada lapisan ke- $k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ .

Pada Persamaan (17),  $A_k(\lambda)$  dan  $B_k(\lambda)$  merupakan suatu fungsi sembarang dari  $\lambda$  yang akan dicari dengan menggunakan syarat-syarat batas [6]:

1. Potensial listrik bersifat kontinu pada perbatasan dari lapisan bumi.

$$\Phi_k = \Phi_{k+1}, k = 1, 2, \dots, N - 1 \quad (18)$$

2. Komponen vertikal dari kepadatan arus listrik bersifat kontinu pada perbatasan dari lapisan bumi.

$$\frac{1}{\rho_k(h_k)} \frac{\partial \Phi_k}{\partial z} = \frac{1}{\rho_{k+1}(h_k)} \frac{\partial \Phi_{k+1}}{\partial z}, k = 1, 2, \dots, N - 1 \quad (19)$$

3. Komponen vertikal dari kepadatan arus listrik bernilai nol di permukaan bumi, yaitu  $z = 0$ , kecuali pada lingkungan yang sangat kecil di sekitar pusat arus.

$$\left. \frac{-1}{\rho_1(0)} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{I}{2\pi r} \delta(r) \quad (20)$$

4. Potensial listrik pada kedalaman tak hingga mendekati nol.

Fungsi resistivitas berbentuk  $\rho_1 = \alpha_1 \exp(\beta_1 z)$  pada lapisan pertama. Asumsikan bahwa  $\beta_1 = 0$  sehingga  $\rho_1$  bernilai konstan. Berdasarkan Persamaan (17) didapat:

$$\Phi_1 = \int_0^\infty [A_1(\lambda) \exp(\lambda z) + B_1(\lambda) \exp(-\lambda z)] J_0(\lambda r) d\lambda \quad (21)$$

Dengan menggunakan syarat batas nomor 3, Persamaan (20), dan sifat Transformasi Hankel [7] didapat:

$$B_1(\lambda) - A_1(\lambda) = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \int_0^\infty \delta(r) J_0(\lambda r) dr \quad (22)$$

Dengan menggunakan sifat definisi dan sifat fungsi Dirac Delta [7], didapat:

$$\Phi_1 = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \int_0^\infty \{ \exp(-\lambda z) + \theta_1(\lambda) [\exp(\lambda z) + \exp(-\lambda z)] \} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (23)$$

Dengan  $\theta_1(\lambda) = \frac{2\pi A_1(\lambda)}{\rho_1 I}$ . Jika  $J_0(x)$  adalah fungsi Bessel jenis pertama derajat nol, maka  $\int_0^\infty e^{-at} J_0(bt) dt = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  [8]. Sehingga Persamaan (23) menjadi

$$\Phi_1 = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} + \frac{\rho_1 I}{2\pi} \int_0^\infty \theta_1(\lambda) [\exp(\lambda z) + \exp(-\lambda z)] J_0(\lambda r) d\lambda \quad (24)$$

Bagian  $\frac{\rho_1 I}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}}$  pada Persamaan (24) merupakan potensial listrik yang bersumber dari sumber arus elektroda tunggal pada medium homogen [6], sedangkan  $\frac{\rho_1 I}{2\pi} \int_0^\infty \theta_1(\lambda) [\exp(\lambda z) + \exp(-\lambda z)] J_0(\lambda r) d\lambda$  merupakan faktor potensial listrik yang muncul akibat adanya lapisan heterogen pada bumi. Berdasarkan syarat batas pada Persamaan (18), pada kedalaman  $h_k$ , potensial pada lapisan ke-  $k$  harus bernilai sama dengan potensial pada lapisan ke-  $k + 1$ ,  $k = 2, \dots, N - 1$ , sehingga

$$\begin{aligned} & A_k(\lambda) \exp(\gamma_k^+ h_k) + \\ & B_k(\lambda) \exp(\gamma_k^- h_k) = \\ & A_{k+1}(\lambda) \exp(\gamma_{k+1}^+ h_k) + \\ & B_{k+1}(\lambda) \exp(\gamma_{k+1}^- h_k) \end{aligned} \quad (25)$$

Berdasarkan syarat batas pada Persamaan (19), pada kedalaman  $h_k$ , komponen vertikal dari kepadatan arus pada lapisan ke- $k$  dan lapisan ke- $k + 1$  sama, hal ini mengakibatkan

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho_k} [\gamma_k^+ A_k(\lambda) \exp(\gamma_k^+ h_k) + \\ & \gamma_k^- B_k(\lambda) \exp(\gamma_k^- h_k)] = \\ & \frac{1}{\rho_{k+1}} [\gamma_{k+1}^+ A_{k+1}(\lambda) \exp(\gamma_{k+1}^+ h_k) + \\ & \gamma_{k+1}^- B_{k+1}(\lambda) \exp(\gamma_{k+1}^- h_k)] \end{aligned} \quad (26)$$

Dengan membagi Persamaan (25) dengan Persamaan (26) didapatkan

$$\begin{aligned} & \frac{A_k(\lambda) \exp(\gamma_k^+ h_k) + B_k(\lambda) \exp(\gamma_k^- h_k)}{\gamma_k^+ A_k(\lambda) \exp(\gamma_k^+ h_k) + \gamma_k^- B_k(\lambda) \exp(\gamma_k^- h_k)} = \\ & \frac{\rho_{k+1}}{\rho_k} \frac{A_{k+1}(\lambda) \exp(\gamma_{k+1}^+ h_k) + B_{k+1}(\lambda) \exp(\gamma_{k+1}^- h_k)}{\gamma_{k+1}^+ A_{k+1}(\lambda) \exp(\gamma_{k+1}^+ h_k) + \gamma_{k+1}^- B_{k+1}(\lambda) \exp(\gamma_{k+1}^- h_k)} \end{aligned} \quad (27)$$

Definisikan:

$$S_k(\lambda) = \frac{A_{k+1}(\lambda) \exp(\gamma_{k+1}^+ h_k) + B_{k+1}(\lambda) \exp(\gamma_{k+1}^- h_k)}{\gamma_{k+1}^+ A_{k+1}(\lambda) \exp(\gamma_{k+1}^+ h_k) + \gamma_{k+1}^- B_{k+1}(\lambda) \exp(\gamma_{k+1}^- h_k)}$$

Sehingga Persamaan (27) menjadi:

$$\frac{A_k(\lambda) \exp(\gamma_k^+ h_k) + B_k(\lambda) \exp(\gamma_k^- h_k)}{\gamma_k^+ A_k(\lambda) \exp(\gamma_k^+ h_k) + \gamma_k^- B_k(\lambda) \exp(\gamma_k^- h_k)} = \frac{\rho_{k+1}}{\rho_k} S_k(\lambda) \quad (28)$$

Definisikan  $\chi = \frac{A_k(\lambda)}{B_k(\lambda)}$ . Ruas kiri dari Persamaan (27) menjadi

$$\frac{A_k(\lambda) \exp(\gamma_k^+ h_k) + B_k(\lambda) \exp(\gamma_k^- h_k)}{\gamma_k^+ A_k(\lambda) \exp(\gamma_k^+ h_k) + \gamma_k^- B_k(\lambda) \exp(\gamma_k^- h_k)} = \frac{\chi \exp(\gamma_k^+ h_k) + \exp(\gamma_k^- h_k)}{\gamma_k^+ \chi \exp(\gamma_k^+ h_k) + \gamma_k^- \exp(\gamma_k^- h_k)} \quad (29)$$

Berdasarkan definisi  $\chi$  dan  $S_k(\lambda)$  didapat

$$\chi = -\frac{\exp(\gamma_k^- h_{k-1}) [1 - \gamma_k^- S_k(\lambda)]}{\exp(\gamma_k^+ h_{k-1}) [1 - \gamma_k^+ S_k(\lambda)]} \quad (30)$$

Substitusi Persamaan (30) ke Persamaan (29) dan definisikan  $\exp(\gamma_k^- t_k) = \exp(-\gamma_k^- h_{k-1}) \exp(\gamma_k^- h_k)$  dan beberapa operasi aljabar didapat:

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma_k^- \exp(\gamma_k^+ t_k) S_k(\lambda) - \gamma_k^+ \exp(\gamma_k^- t_k) S_k(\lambda) + \exp(\gamma_k^- t_k) - \exp(\gamma_k^+ t_k)}{\gamma_k^+ \gamma_k^- \exp(\gamma_k^+ t_k) S_k(\lambda) - \gamma_k^+ \gamma_k^- \exp(\gamma_k^- t_k) S_k(\lambda) + \gamma_k^- \exp(\gamma_k^- t_k) - \gamma_k^+ \exp(\gamma_k^+ t_k)} \\ & = \frac{\rho_{k+1}}{\rho_k} S_{k+1}(\lambda) \end{aligned} \quad (31)$$

Definisikan:

$\varepsilon^+ = \exp(\gamma_k^+ t_k)$  dan  $\varepsilon^- = \exp(\gamma_k^- t_k)$  dan selesaikan Persamaan (31) untuk  $S_k(\lambda)$  didapat:

$$S_k(\lambda) = \frac{\rho_k(\varepsilon^+ - \varepsilon^-) + \rho_{k+1} S_{k+1}(\lambda) (\gamma_k^- \varepsilon^- - \gamma_k^+ \varepsilon^+)}{\rho_k (\gamma_k^- \varepsilon^+ - \gamma_k^+ \varepsilon^-) - \rho_{k+1} S_{k+1}(\lambda) (\gamma_k^+ \gamma_k^- \varepsilon^+ - \gamma_k^+ \gamma_k^- \varepsilon^-)} \quad (32)$$

Sehingga relasi rekursif antara  $S_k(\lambda)$  dan  $S_{k+1}(\lambda)$  diberikan oleh Persamaan

$$S_k(\lambda) = \frac{(\varepsilon^+ - \varepsilon^-) + P_k S_{k+1}(\lambda) (\gamma_k^- \varepsilon^- - \gamma_k^+ \varepsilon^+)}{(\gamma_k^- \varepsilon^+ - \gamma_k^+ \varepsilon^-) - P_k S_{k+1}(\lambda) (\gamma_k^+ \gamma_k^- \varepsilon^+ - \gamma_k^+ \gamma_k^- \varepsilon^-)} \quad (33)$$

Sesuai dengan syarat batas bahwa kedalaman tak hingga potensial listrik mendekati nol, maka haruslah  $A_N(\lambda)$  bernilai nol pada bagian terdalam dari lapisan ke-  $N$ . Sehingga berdasarkan definisi  $S_k(\lambda)$ ,  $S_N(\lambda)$  bernilai  $\frac{1}{\gamma_N}$ . Karena  $S_N(\lambda)$  telah diketahui maka dengan menggunakan Persamaan (33), nilai dari  $S_k(\lambda)$ ,  $k = 2, 3, \dots, N - 1$  dapat dicari secara rekursif.

Untuk menghitung potensial listrik pada permukaan bumi,  $\theta_1(\lambda)$  akan diturunkan berdasarkan syarat batas yang ada. Berdasarkan syarat batas pada Persamaan (18), pada kedalaman  $h_1$ , nilai potensial pada lapisan ke-2 sama dengan potensial pada lapisan pertama, dan dengan menggunakan Persamaan (23) didapat

$$\frac{\rho_1 I}{2\pi} \int_0^\infty \{ \exp(-\lambda h_1) + \theta_1(\lambda) [\exp(\lambda h_1) + \exp(-\lambda h_1)] \} J_0(\lambda r) d\lambda = \int_0^\infty [A_2(\lambda) \exp(\gamma_2^+ h_1) + B_2(\lambda) \exp(\gamma_2^- h_1)] J_0(\lambda r) d\lambda \quad (34)$$

Yang dapat dipenuhi untuk setiap nilai  $r$  jika integran pada kedua ruas persamaan sama,

$$\frac{\rho_1 I}{2\pi} \{ \exp(-\lambda h_1) + \theta_1(\lambda) [\exp(\lambda h_1) + \exp(-\lambda h_1)] \} = A_2(\lambda) \exp(\gamma_2^+ h_1) + B_2(\lambda) \exp(\gamma_2^- h_1) \quad (35)$$

Pada kedalaman  $h_1$  komponen vertikal dari kepadatan arus pada lapisan ke-2 sama dengan komponen vertikal dari kepadatan arus pada lapisan pertama, sehingga

$$\frac{I}{2\pi} \{-\lambda \exp(-\lambda h_1) + \theta_1(\lambda)[\lambda \exp(\lambda h_1) - \lambda \exp(-\lambda h_1)]\} = \frac{1}{\rho_2} [\gamma_2^+ A_2(\lambda) \exp(\gamma_2^+ h_1) + \gamma_2^- B_2(\lambda) \exp(\gamma_2^- h_1)] \quad (36)$$

Dengan membagi Persamaan (35) dengan Persamaan (36) dan mengalikan dengan  $\frac{-\lambda \exp(-\lambda h_1) + \theta_1(\lambda)[\lambda \exp(\lambda h_1) - \lambda \exp(-\lambda h_1)]}{\exp(-\lambda h_1)}$

didapat

$$\theta_1(\lambda) = \frac{-1}{\exp(2\lambda h_1) \frac{\rho_1 - \lambda \rho_2 S_2(\lambda)}{\rho_1 + \lambda \rho_2 S_2(\lambda)} + 1} \quad (37)$$

Nilai potensial listrik pada permukaan bumi diperoleh dengan menggunakan Persamaan (23) untuk  $z = 0$  dengan  $\theta_1(\lambda)$  dihitung menggunakan Persamaan (37), yaitu:

$$\Phi_1(r) = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \int_0^\infty [1 + 2\theta_1(\lambda)] J_0(\lambda r) d\lambda \quad (38)$$

### 3. Kesimpulan

Kita telah menurunkan fungsi potensial listrik pada permukaan bumi dengan beberapa lapisan dengan menggunakan sifat vektoris potensial listrik dan konsep persamaan differensial parsial dan syarat batas.

### 4. Daftar Pustaka

- [1] P. V. Sharma, Environmental and Engineering Geophysics, Cambridge : Cambridge University Press, 1997.
- [2] H. S. Kim dan K. Lee, "Response of a Multilayered Earth with Layers Having Exponentially Varying Resistivities", *Geophysics*, 61, pp. 180-191, 1996.
- [3] F. S. Grant dan G. F. West, Interpretation Theory in Applied Geophysics, New York: McGraw-Hill, 1965.
- [4] P. V. O'Neil, Beginning Partial

Differential Equations, Canada: John Wiley & Sons, Inc, 1999.

- [5] D. Halliday, R. Resnick, dan J. Walker, Fundamentals of Physics, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc, 2005.
- [6] O. Koefoed, Geosounding Principles, 1 Resistivity Sounding Measurements, New York: Elsevier Science Publishers B. V., 1979.
- [7] G. B. Arfken dan H. J. Weber, Mathematical Methods for Physicists, San Diego: Academic Press, 1995.
- [8] G. N. Watson, A Treatise on the Theory of the Bessel Functions, Cambridge: Cambridge University Press, 1962.

## PERANAN ILMU MATEMATIKA DALAM PENGEMBANGAN TURBIN ANGIN SEBAGAI ENERGI ALTERNATIF

Akhmad Khimly<sup>1</sup>, Ronny Susetyoko<sup>2</sup>, Nur Fadlilah Husnandanti<sup>3</sup>,  
Iffan Rosyadi Ali<sup>4</sup>, Rio Adi Kristian<sup>5</sup>, Tio Rizkidiyanto Widcaksono<sup>6</sup>.  
Politeknik Elektronika Negeri Surabaya

**Abstrak.**Permasalahan utama yang dihadapi sektor kelistrikan Indonesia saat ini adalah meningkatnya kebutuhan listrik nasional dimana suplai ketenagalistrikan masih bergantung bahan bakar fosil dan pengembangannya memakan waktu lama. Ketersediaan alam seperti energi angin mampu dimanfaatkan untuk dikonversi menjadi energi listrik demi membantu suplai kebutuhan kelistrikan nasional. Dengan mengoptimalkan dan merancang teknologi sesuai dengan kondisi geografis dan kebutuhan menjadi salah satu peranan bangsa demi Indonesia. Dalam perancangan sistem diterapkan penggunaan ilmu matematika dengan berpacu pada *software Q-Blade*. Produk yang diimplementasikan adalah turbin *clark-Y airfoil* modifikasi *winglet*. *Airfoil* tipe *Clark-Y* dipilih karena memiliki gaya angkat yang tinggi dan gaya gesek kecil. Modifikasi *winglet* bertujuan agar aliran angin yang ditangkap turbin tidak langsung terbuang dengan kasar, mengurangi *vortex* pada ujung *blade* sehingga putaran turbin lebih optimal. Dalam konversi daya mekanik ke elektrik digunakan generator sinkron/alternator 12 volt. Untuk menyesuaikan angin yang ditangkap agar daya keluaran maksimal, transmisi dibuat dengan empat step perbandingan. Hingga saat ini turbin angin yang berkembang di pasaran menghasilkan daya 500 watt pada kecepatan angin 12 m/s. Sedangkan turbin *clark-Y airfoil* modifikasi *winglet* ini mampu menghasilkan daya optimal hingga 3000 watt pada kecepatan angin 12 m/s.

**Keywords:** *Q-Blade*, *clark-y*, *winglet*, turbin angin, energi

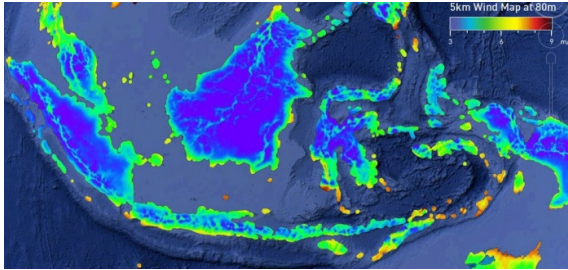
### 1. PENDAHULUAN

Menurut data Kementerian Energi dan Sumber Daya Mineral (ESDM), hingga masuk tahun 2014 tercatat bahwa masih 20% daerah di Indonesia yang belum tersuplai listrik. Hal ini disebabkan karena permintaan energi listrik yang meningkat di tiap harinya di daerah yang sudah tersuplai listrik dan lokasi daerah tanpa listrik yang terpencar-pencar hingga ke pelosok dan PLN kesulitan untuk menambah infrastruktur. Sehingga untuk memenuhi kebutuhan listrik Indonesia hingga 99% masih menunggu sampai tahun 2020.

Untuk menjangkau daerah di Indonesia yang belum tersuplai listrik dengan menggunakan pembangkit listrik yang ada memerlukan dana yang tidak sedikit dan jangka waktu yang lama. Hingga saat ini Indonesia juga masih menggantungkan kebutuhan listrik pada bahan bakar fosil. Disisi lain Indonesia adalah Negara kepulauan yang pendistribusian pabrik pembangkit listrik tidak mampu menjangkau keseluruhan. Hal inilah yang menjadi sumber permasalahan utama.

Dari permasalahan tersebut, salah satu dampaknya Indonesia diprediksi menjadi Negara pengimpor energi pada tahun 2027, hal ini dilihat dalam Gambar 1 tentang meningkatnya impor dibanding ekspor energi. Permasalahan tersebut dapat diantisipasi dengan mengoptimalkan penggunaan energi baru terbarukan yang tersedia secara bebas di Indonesia, salah satunya adalah energi angin.

Penggunaan energi angin didasarkan pada potensi angin yang ada di Indonesia dengan letak geografis berada didaeran tropis dengan kecepatan angin rata-rata 3.5-8 m/s [LAPAN : 2005]. Hal ini juga didukung pemetaan angin *Google Wind Map* yang dapat dilihat pada Gambar 1.1.



**Gambar 1.1** Pemetaan kecepatan angin di Indonesia dengan *Google Wind Map*

Jika dilihat dari pemetaan kecepatan angin, kondisi ini cocok dengan penerapan sistem turbin angin dengan putaran tinggi dan torsi yang kecil. Salah satu jenis turbin angin yang cocok digunakan adalah jenis *Horizontal Axis Wind Turbine* (HAWT). Pada karya ini dipilih turbin tipe HAWT tiga *blade* yang memiliki *coefficient power* maksimum. Tidak hanya mampu dipasang di pesisir pantai, turbin angin tipe ini juga mampu dipasang di tebing ataupun daerah pegunungan sesuai dengan kondisi alam di Indonesia. Turbin ukuran mikro ini pun juga memungkinkan distribusi di seluruh pelosok Indonesia sesuai kondisi geografis Indonesia. Diharapkan dengan adanya turbin angin HAWT tiga *blade* ini mampu menjadi solusi alternatif untuk menjawab permasalahan yang sekarang terjadi dan mampu mengoptimalkan pengembangan energi baru terbarukan sehingga mampu menjawab permasalahan kelistrikan masa depan meningkatkan kemandirian bangsa.

*Blade* atau sudu merupakan bagian utama dari turbin angin. Dalam pemilihan jenis *airfoil* pada kincir angin diperlukan karakteristik *Coefficient of Lift* ( $C_l$ ) yang besar dan *Coefficient of Drag* ( $C_d$ ) yang minimal sehingga *blade* akan terangkat dan berputar pada poros. Pemilihan jenis *airfoil* menggunakan Clark-Y jumlah 3 *blade* dikarenakan memiliki  $C_l/C_d$  yang tinggi dibandingkan dengan jenis *airfoil*

lainnya. Selain itu pemilihan *airfoil* diberikan modifikasi dengan menambahkan *winglet* seperti konsep di ujung sayap pesawat terbang. Secara teori, dengan menggunakan *winglet*, turbulensi yang ada di ujung *blade* mampu diminimalisir dan ukuran *vortex* akan mengecil, gaya hambat pada ujung *blade* berkurang, dan *tip loss* akan berkurang. Hal ini akan menambah performa turbin angin dengan meningkatkan RPM turbin.

Penelitian ini bertujuan untuk merancang dan membuat turbin angin Clark-Y *Airfoil* modifikasi *Winglet* untuk mengoptimalkan pemanfaatan energi terbarukan. Beberapa penelitian terdahulu yang berhubungan dengan ini adalah yang dilakukan oleh J. S. Merchant, J. M. Bondy and K. W. Van Treuren (2010) tentang analisa penggunaan *winglet* pada turbin angin dalam *wind tunnel*. M. Gaunaa and J. Johansen (2007) tentang menentukan nilai efisiensi aerodinamika turbin angin dengan penambahan *winglet*.

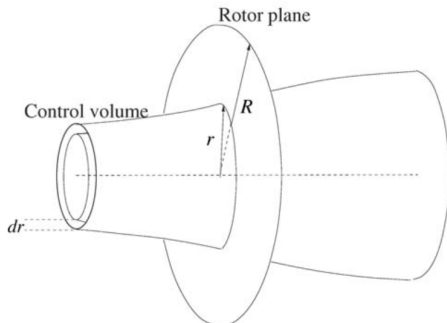
## 2. PERANAN ILMU MATEMATIKA

Ilmu matematika dalam pengembangan turbin angin sangat dibutuhkan, meskipun ilmu dasar yang digunakan dalam hal ini adalah Ilmu mekanika fluida yang mempelajari tentang gerak atau kinetika suatu fluida yang dapat menyebabkan pengaruh pada benda yang dialirinya. Dari situ ilmu matematika membantu dalam perhitungan gaya distribusi pada *sweep area* turbin angin dengan menggunakan metode *Blade Element Momentum* (BEM) untuk menghitung nilai torsi disetiap segmen. Ilmu matematika sangat membantu dalam perhitungan iterasi di metode BEM oleh karena itu Mekanika fluida masih dekat kaitannya dengan ilmu matematika. Di penelitian ini kedua ilmu tersebut akan digunakan dalam evaluasi hasil dari daya

output turbin angin menggunakan modifikasi *winglet* dan tanpa *winglet*.

**Metode Blade Element Momentum**

Metode *Blade Element Momentum* menggabungkan teori momentum dengan peristiwa lokal yang terjadi pada sudu secara sebenarnya. Tabung aliran diperkenalkan dalam teori momentum 1 - D didiskritisasi ke N elemen annular dengan tinggidr, seperti yang ditunjukkan pada gambar 1. Batas lateral elemen ini terdiri dari *streamlines*, dengan kata lain tidak ada aliran memotong elemen.



Gambar 1 Bentuk kontrol volume sebuah lemen annular yang digunakan sebagai model BEM

Pada bagian sebelumnya mengenai momentum teori 1 - D itu membuktikan bahwa distribusi tekanan di sepanjang kurva *streamline* bahwa *wake* tidak memberikan komponen gaya aksial. Oleh karena itu diasumsikan bahwa ini juga berlaku untuk kasus kontrol volume annular ditunjukkan pada gambar 1. *Thrust* dari disk pada volume kontrol dapat ditemukan dari mengintegrasikan persamaan momentum sejak daerah penampang kontrol volume pada bidang rotor adalah  $2\pi r dr$ :

$$dT = (V_0 - u_1)dm = 2\pi r \rho u (V_0 - u_1) dr \tag{2.2}$$

Torsi dM pada elemen annular ditemukan menggunakan integral momen dari persamaan momentum pada volume kontrol dan pengaturan kecepatan rotasional nol di awal aliran rotor dan  $C_\theta$  di wake:

$$dM = r C_\theta dm = 2\pi r^2 \rho u C_\theta dr \tag{2.3}$$

Hal ini juga bisa saja langsung berasal dari persamaan turbin Euler, yakni:

$$dP = \omega dM \tag{2.4}$$

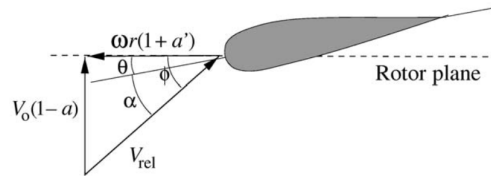
Dari rotor yang ideal ditemukan bahwa kecepatan aksial dalam  $u_1$  bisa dinyatakan oleh aksial induksi faktor a dan kecepatan angin  $V_0$  sebagai  $u_1 = (1 - 2a) V_0$ , dan jika hal ini dimasukkan ke dalam persamaan (2.3) dan (2.4) bersama-sama dengan definisi untuk a dan a' dalam persamaan sebelumnya *thrust* dan torsi dapat dihitung sebagai berikut:

$$dT = 4\pi r \rho V_0^2 a (1 - a) dr \tag{2.5}$$

dan:

$$dM = 4\pi r^3 \rho V_0 \omega (1 - a) a' dr \tag{2.6}$$

Sisi kiri persamaan (2.5) dan (2.6) ditemukan dari aliran lokal sekitar sudu. Hal ini mengingatkan bahwa kecepatan relatif  $V_{rel}$  dilihat dari sisi sudu adalah sebuah kombinasi dari kecepatan aksial  $(1 - a)V_0$  dan tangensial kecepatan  $(1 + a')\omega r$  di rotorplane (lihat gambar 2).



Gambar 2 Kecepatan pada bidang rotor

$\theta$  adalah sudut pasang (pasang) lokal dari sudu, dengan kata lain sudut lokal antara chord dan bidang rotasi. Sudut pasang lokal adalah kombinasi dari sudut pasang,  $\theta_p$ , dan twist dari sudu,  $\beta$ , yaitu  $\theta = \theta_p + \beta$ , dimana sudut pasang adalah sudut antara ujung chord dan rotorplane dan twist adalah diukur relatif terhadap ujung chord.  $\phi$  adalah sudut antara bidang rotasi dan kecepatan relatif,  $V_{rel}$ , dan itu terlihat pada gambar 2 bahwa sudut serangan lokal yang didapatkan yaitu:

$$\alpha = \phi - \theta \tag{2.7}$$

Selanjutnya, terlihat bahwa:

$$\tan \phi = \frac{(1-a)V_0}{(1+a')\omega r} \tag{2.8}$$

Setelah semua persamaan yang diperlukan untuk model BEM telah diturunkan dan algoritma dapat diringkas sebagai 8 langkah di bawah ini. Karena kontrol yang berbeda volume diasumsikan independen,

setiap strip dapat diperlakukan secara terpisah dan solusi pada satu radius dapat dihitung sebelum pemecahan untuk lain radius, dengan kata lain untuk masing-masing volume kontrol algoritma berikut ini diterapkan.

Langkah (1) Inisialisasi  $a$  dan  $a'$ , biasanya  $a = a' = 0$ .

Langkah (2) Hitunglah sudut aliran  $\phi$  menggunakan persamaan (2.8).

Langkah (3) Hitung sudut serangan lokal menggunakan persamaan (2.7).

Langkah (4) Baca nilai  $C_l(\alpha)$  dan  $C_d(\alpha)$  dari tabel.

Langkah (5) Hitunglah  $C_n$  dan  $C_t$  menggunakan persamaan:

$$C_n = C_l \cos \phi + C_d \sin \phi \quad (2.9)$$

$$C_t = C_l \sin \phi + C_d \cos \phi \quad (2.10)$$

Langkah (6) Hitung  $a$  dan  $a'$  menggunakan persamaan:

$$a = \frac{1}{\frac{4 \sin^2 \phi}{\sigma C_n} + 1} \quad (2.11)$$

$$a' = \frac{1}{\frac{4 \sin \phi \cos \phi}{\sigma C_t} + 1} \quad (2.12)$$

Dengan solidity

$$\sigma(r) = \frac{c(r)B}{2\pi r} \quad (2.13)$$

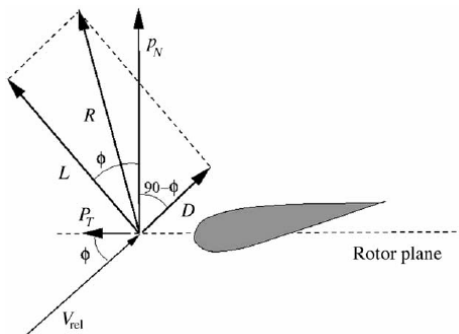
Langkah (7) Jika  $a$  dan  $a'$  telah berubah lebih dari toleransi tertentu, lanjutkan ke langkah 2 dan atau apabila sudah tidak banyak berubah maka sudah selesai.

Menghitung besarnya gaya lift dan gaya drag per satuan panjang

$$L = \frac{1}{2} \rho V r^2 c C_l \quad (2.14a)$$

$$D = \frac{1}{2} \rho V r^2 c C_d \quad (2.14b)$$

Dari rumus diatas gaya lift dan drag dapat diproyeksikan menjadi gaya normal dan tangensial seperti gambar 3



Gambar 3 proyeksi gaya local pada blade

Persamaan gaya normal

$$PN = L \cos \phi + D \sin \phi \quad (2.15)$$

Untuk gaya tangensial

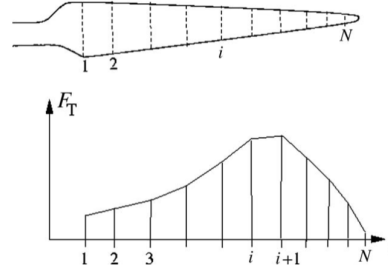
$$PT = L \sin \phi - D \cos \phi \quad (2.16)$$

Karena PN dan PT masi dalam per satuan panjang maka gaya normal dan torsi pada rotor adalah :

$$\text{gaya normal} \\ dT = B PN dr \quad (2.17)$$

$$\text{torsi} \\ dM = r B PT dr \quad (2.18)$$

Dalam perhitungan distribusi torsi per segmen ( $dr$ ) pada blade dapat menggunakan metode Blade Element Method (BEM). Metode membagi blade menjadi bebrapa segmen kemudian akan didapat torsi pada setiap segmen, sehingga dapat dihitung nilai daya yang dibangkitkan per blade.



Gambar 4 distribusi gaya pada blade diasumsikan antara dua radial berbeda posisi  $r_i$  dan  $r_{i+1}$ .

Gambar 4 merupakan model pencacahan segmen pada metode BEM dapat dicari dengan perumusan sebagai berikut :

$$A_i = \frac{p_{T,i+1} - p_{T,i}}{r_{i+1} - r_i} \quad (2.19a)$$

$$B_i = \frac{p_{T,i} r_{i+1} - p_{T,i+1} r_i}{r_{i+1} - r_i} \quad (2.19b)$$

Torsi  $dM$  untuk bagian kecil dari sudu panjang  $dr$  adalah:

$$dM = r p_T dr = (A_i r^2 + B_i r) dr \quad (2.20)$$

dan kontribusi  $M_i$ ,  $i+1$  terhadap total torsi poros dari linear tangensial antara  $r_i$  dan  $r_{i+1}$  yakni:

$$M_{i,i+1} = \left[ \frac{1}{3} A_i r^3 + \frac{1}{2} B_i r^2 \right]_{r_i}^{r_{i+1}} = \frac{1}{3} A_i (r_{i+1}^3 - r_i^3) + \frac{1}{2} B_i (r_{i+1}^2 - r_i^2) \quad (2.21)$$

Total torsi poros adalah jumlah dari semua kontribusi  $M_i$ ,  $i+1$  sepanjang satu sudu dikalikan dengan jumlah sudu:

$$M_{tot} = B \sum_1^{N-1} M_{i,i+1} \quad (2.22)$$

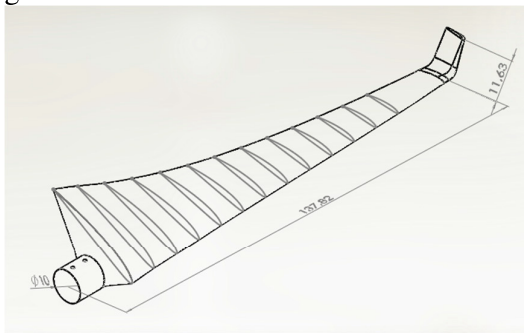
Dengan mengalikan torsi total dengan kecepatan putar maka dapat dihitung daya yang dibangkitkan dengan rumus :

$$P = \omega M_{tot} \quad (2.23)$$

### 3. PENERAPAN/APLIKASI DALAM TURBIN ANGIN

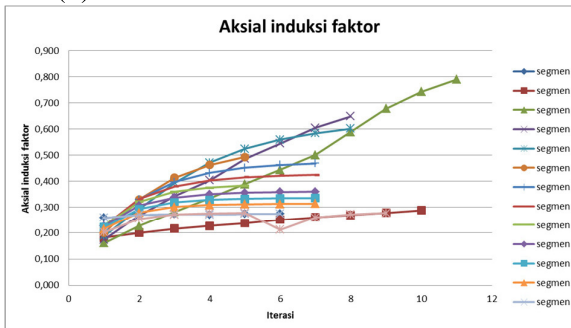
#### Simulasi perhitungan BEM

Simulasi perhitungan daya yang dibangkitkan *blade* dengan implementasi metode BEM yaitu dengan cara mencacah *blade* menjadi segmen-segmen seperti gambar 12

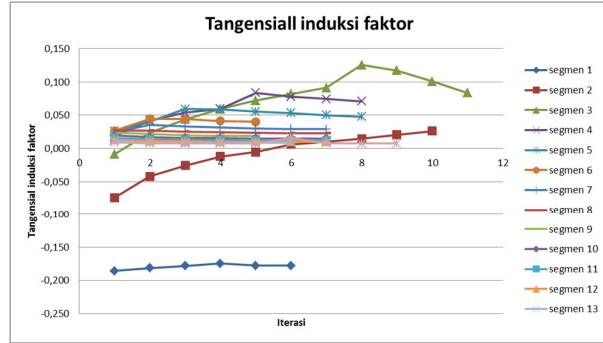


Gambar 5 Segmen-segmen *blade*

kemudian dihitung nilai aksial dan tangensial induksi faktor dengan langkah-langkah pada bab dua dengan metode iterasi sampai mendapatkan nilai yang konvergen, dapat dilihat pada grafik 1(a) dan (b).

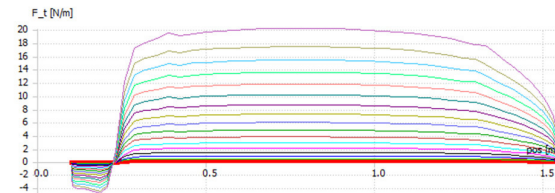


Grafik 1(a) grafik iteasi aksial induksi faktor setiap segmen

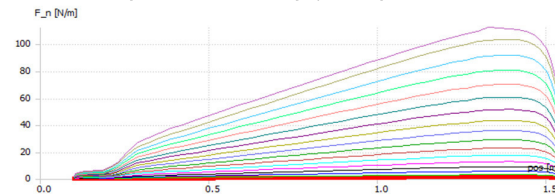


Grafik 1(b) grafik iteasi tangensial induksi faktor setiap segmen

hasil iterasi yang mendekati nilai konvergen akan dicari nilai *angle of attack* menggunakan rumus (2.7). Dari *angle of attack* dapat dianalisa nilai  $C_l$  dan  $C_d$  yang fix dengan menggunakan software *javafoil* atau *Q-blade*, kemudian akan dicari nilai distribusi gaya tangensial dan normal di setiap segmen *blade* menggunakan rumus (2.15) dan (2.16) seperti grafik 2(a) dan (b)



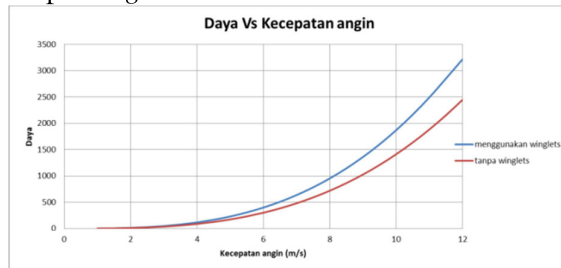
Grafik 2(a) grafik distribusi gaya tangensial



Grafik 2(b) grafik distribusi gaya normal

Untuk mencari besarnya nilai torsi hanya membutuhkan besarnya gaya tangensial ( $F_t$ ), kemudian di masukan dalam rumus (2.19 a dan b). Dari hasil persamaan 2.19 digunakan dalam mencari besarnya torsi di setiap segmen dengan rumus (2.21). Hasil torsi/segmen tersebut kemudian dijumlahkan dan didapatkan torsi total pada *blade*. Setelah mengetahui torsi dan kecepatan angular akan mendapatkan besarnya daya dengan menggunakan rumus (2.23). Setelah itu disimulasikan di kecepatan angin 1- 12 m/s.

Dari langkah tersebut dibandingkan hasil perhitungan daya menggunakan metode BEM menggunakan modifikasi *winglet* dan tanpa *winglet* terhadap kecepatan angin. Pada grafik 3 terlihat bahwa nilai distribusi daya terhadap kecepatan angin menggunakan *winglet* lebih besar dari pada tanpa *winglet*.



Grafik 3 perbandingan daya antar *winglet* dan tanpa *winglet*

#### 4. KESIMPULAN

Dari penerapan ilmu matematika menggunakan metode BEM dalam implementasi pengembangan turbin angin didapatkan hasil yaitu, metode BEM digunakan untuk mengevaluasi daya *blade* menggunakan modifikasi *winglet* dengan tanpa *winglet*. Dari hasil perhitungan tersebut daya yang dihasilkan *blade* dengan modifikasi *winglet* memiliki distribusi daya lebih besar, hal ini jika dilihat dari segi matematik dengan metode pencacahan segmen-segmen *blade* nilai distribusi torsi yang dibangkitkan lebih besar.

#### 5. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Fuglsang, P.; Madsen, H.A. Optimization method for wind turbine rotors. J. Wind Eng. Ind. Aerodyn. 1999, 80, 191–206.
- [2] J. S. Merchant, J. M. Bondy and K. W. Van Treuren, "Wind tunnel analysis of a wind turbine with *winglets*," in ASME Early Career Technical Conference, Tulsa, 2010.
- [3] M. Gaunaa and J. Johansen, "Determination of the Maximum Aerodynamic Efficiency of Wind Turbine Rotors with *Winglets*," Journal of Physics: Conference Series, vol. 75, 2007.
- [4] R. G. Galdamez, D. M. Ferguson and J. R. Gutierrez. 2011, " *Winglet Design and Analysis for Wind Turbine Rotor Blades*". Florida International University.
- [5] S. Gundtoft. 2009. *Wind Turbine*. Edisi 2, University College of Aarhus. Denmark.
- [6] Yurdusev, M.A.; Ata, R.; Cetin, N.S. Assessment of optimum tip speed ratio in wind turbines using artificial neural networks. Energy 2006, 31, 2153–2161.
- [7] <http://en.wikipedia.org/wiki/Wingtipdevice>, diakses pada 28 Mei 2014 pukul 12.28 WIB

## MODEL DINAMIK DISKRIT PRODUKSI SEL DARAH MERAH

Dyah Nurshofia Sani<sup>1</sup>, Mashuri<sup>2</sup>, Rina Reorita<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Jenderal Soedirman

<sup>2</sup>Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Jenderal Soedirman

<sup>3</sup>Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Jenderal Soedirman

**Abstrak.** Model produksi sel darah merah yang telah diperkenalkan oleh Keshet digambarkan sebagai suatu sistem dinamik diskrit berupa sistem persamaan beda linier homogen. Dalam penelitian ini model produksi sel darah merah tersebut dimodifikasi dengan menambahkan parameter baru yang menunjukkan persentase jumlah sel darah merah yang mengalami kematian dalam sumsum tulang. Solusi persamaan yang diperoleh diselesaikan dengan menggunakan metode matriks. Berdasarkan solusi yang diperoleh, kondisi anemia akan terjadi jika daya produksi sel darah merah kurang dari satu, sedangkan kondisi polisitemia akan terjadi jika daya produksi sel darah merah lebih dari satu. Sementara itu, jika daya produksi sel darah merah sama dengan satu, maka dapat terjadi dua kondisi yaitu kondisi normal dan abnormal (anemia dan polisitemia).

**Kata kunci:** model produksi sel darah merah, sistem dinamik diskrit, anemia, polisitemia.

### 1. Pendahuluan

Proses pembentukan sel darah merah disebut eritropoiesis. Eritropoiesis terjadi pada sumsum tulang. Kemudian, sel darah merah yang terbentuk akan dialirkan ke sirkulasi. Seiring dengan berjalannya waktu, sel darah merah yang sudah tua atau rusak akan dihancurkan oleh limpa. Sel darah merah yang telah dihancurkan harus segera digantikan dengan sel darah merah yang baru dengan jumlah yang sama. Jika tidak segera digantikan, maka akan terjadi ketidakseimbangan antara produksi sel darah merah dengan penghancuran sel darah merah, hal ini mengakibatkan jumlah sel darah merah di dalam tubuh menjadi abnormal [1,2].

Berdasarkan uraian tersebut dapat dibentuk model matematika yang menggambarkan produksi sel darah merah. Model produksi sel darah merah yang sebelumnya telah diperkenalkan oleh Keshet [3] ini digambarkan sebagai suatu sistem dinamik diskrit, karena proses pembentukan sel darah merah hanya terjadi pada waktu tertentu saja, sehingga perubahan jumlah sel darah merah hanya diketahui pada waktu tertentu saja. Pada model ini seluruh sel darah merah yang dihasilkan oleh sumsum tulang akan

dialirkan ke sirkulasi sebanyak 100%, padahal menurut Hoffbrand [1] proses pembentukan sel darah merah tidak seluruhnya efisien karena sekitar 10-15% sel darah merah mengalami kematian dalam sumsum tulang, sehingga sel darah merah yang dialirkan ke sirkulasi hanya sebesar 85-90% saja. Oleh karena itu, dalam penelitian ini model produksi sel darah merah tersebut akan dimodifikasi dengan menambahkan parameter baru ke dalam model yang menunjukkan persentase jumlah sel darah merah yang mengalami kematian di sumsum tulang sehingga tidak dialirkan ke sirkulasi.

### 2. Hasil Penelitian

Model produksi sel darah merah dengan penambahan parameter baru yaitu parameter yang menunjukkan persentase jumlah sel darah merah yang mengalami kematian di sumsum tulang sehingga tidak dialirkan ke sirkulasi ( $g$ ) dapat dinyatakan sebagai berikut

$$R(k+1) = (1-f)R(k) + (1-g)M(k)$$
$$M(k+1) = \frac{\gamma f R(k)}{1-g}$$

dengan  $\gamma = \frac{a}{b} = \frac{(1-g)M}{fR}$ ,  $R(k)$  adalah jumlah sel darah merah yang beredar di sirkulasi pada hari ke  $k$ ,  $M(k)$  adalah jumlah sel darah merah yang dihasilkan oleh sumsum tulang pada hari ke  $k$ ,  $f$  adalah persentase jumlah sel darah merah yang dihancurkan oleh limpa,  $\gamma$  adalah daya atau kemampuan produksi sel darah merah,  $a$  adalah jumlah sel darah merah yang diberikan oleh sumsum tulang ke sirkulasi,  $b$  adalah jumlah sel darah merah yang hilang. Penyelesaian dari model tersebut dapat diperoleh menggunakan metode matriks [4].

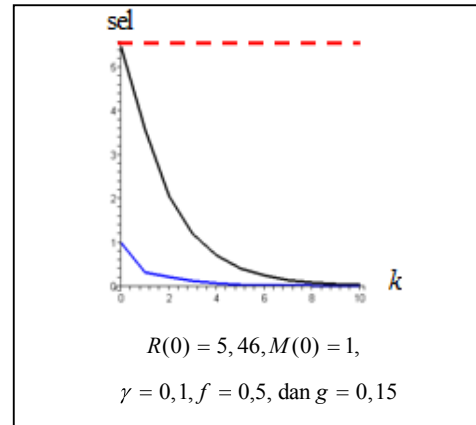
### 2.1 Simulasi

Berdasarkan daya atau kemampuan produksi sel darah merah, simulasi model dibagi menjadi tiga kasus, yaitu pada saat daya atau kemampuan produksi sel darah merah sebesar  $\gamma = 1$ ,  $\gamma < 1$ , dan  $\gamma > 1$ .

#### 2.1.1 Kasus $\gamma < 1$

Pada saat daya atau kemampuan produksi sel darah merah sebesar  $\gamma < 1$ , maka jumlah sel darah merah yang beredar di sirkulasi ( $R$ ) dan jumlah sel darah merah yang dihasilkan oleh sumsum tulang ( $M$ ) dalam jangka waktu yang lama akan menuju nol, artinya jumlah sel darah merah di dalam tubuh dalam jangka waktu yang lama akan habis. Karena  $\gamma < 1$ , maka

$\frac{a}{b} < 1$  atau  $a < b$ , hal ini menunjukkan bahwa jumlah sel darah merah yang diberikan oleh sumsum tulang ke sirkulasi lebih rendah dari jumlah sel darah merah yang hilang. Apabila hal ini terjadi terus menerus, maka jumlah sel darah merah di dalam tubuh akan terus berkurang sampai batas seseorang masuk dalam kriteria anemia (kekurangan darah). Dengan melemahnya  $\gamma$ , jumlah sel darah merah yang beredar di sirkulasi akan lebih cepat berkurang.



**Gambar 1.** Anemia karena menurunnya  $\gamma$

Keterangan:

- : jumlah sel darah merah yang beredar di sirkulasi ( $R$ )
- : jumlah sel darah merah yang dihasilkan oleh sumsum tulang ( $M$ )
- - - : ambang normal jumlah sel darah merah di dalam tubuh

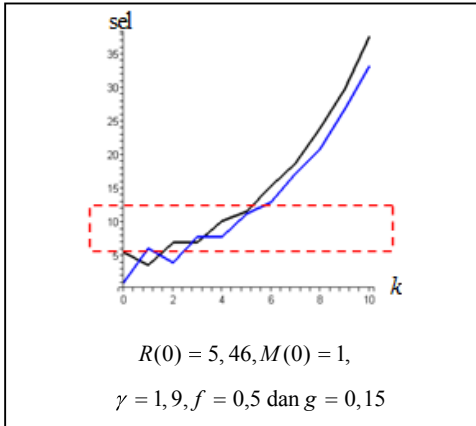
#### 2.1.2 Kasus $\gamma > 1$

Pada saat daya atau kemampuan produksi sel darah merah sebesar  $\gamma > 1$ , maka jumlah sel darah yang beredar di sirkulasi ( $R$ ) dan jumlah sel darah merah yang dihasilkan oleh sumsum tulang ( $M$ ) dalam jangka waktu yang lama akan menuju nilai tak berhingga, artinya dalam jangka waktu lama jumlah sel darah merah dalam tubuh akan terus bertambah. Karena

$\gamma > 1$ , maka  $\frac{a}{b} > 1$  atau  $a > b$ . Berbeda

dengan kasus sebelumnya, pada kasus ini jumlah sel darah merah yang diberikan oleh sumsum tulang ke sirkulasi lebih besar dari jumlah sel darah merah yang hilang. Meningkatnya produksi sel darah merah oleh sumsum tulang, mengakibatkan jumlah sel darah merah yang beredar di sirkulasi akan terus meningkat, sehingga mengakibatkan seseorang mengalami polisitemia (kelebihan darah). Dengan meningkatnya

$\gamma$ , jumlah sel darah merah yang beredar di sirkulasi akan lebih cepat bertambah.



**Gambar 2.** Polisitemia karena meningkatnya  $\gamma$

Keterangan:

- : jumlah sel darah merah yang beredar di sirkulasi ( $R$ )
- : jumlah sel darah merah yang dihasilkan oleh sumsum tulang ( $M$ )
- - - : ambang normal jumlah sel darah merah di dalam tubuh

### 2.1.3 Kasus $\gamma = 1$

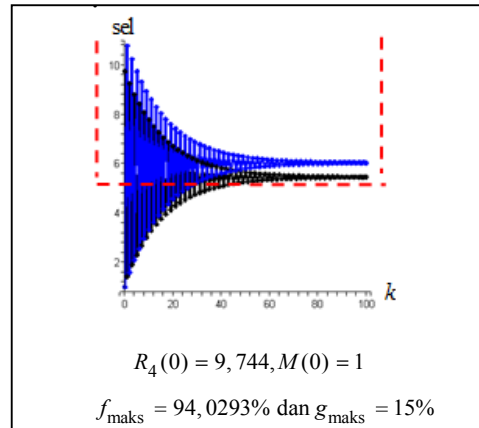
Pada saat daya atau kemampuan produksi sel darah merah sebesar  $\gamma = 1$ , maka  $\frac{a}{b} = 1$  atau  $a = b$ , hal ini menunjukkan bahwa jumlah sel darah merah yang diberikan oleh sumsum tulang ke sirkulasi sama dengan jumlah sel darah merah yang hilang. Oleh karena itu, jumlah sel darah yang beredar di sirkulasi dan jumlah sel darah merah yang dihasilkan oleh sumsum tulang dalam jangka waktu yang lama akan konstan pada suatu nilai. Pada kasus ini jumlah sel darah merah di dalam tubuh dapat dibagi menjadi dua kondisi yaitu pada kondisi normal dan kondisi abnormal. Hal ini bergantung pada nilai persentase jumlah sel darah merah yang dihancurkan oleh limpa dan nilai persentase jumlah sel darah merah yang mengalami kematian di sumsum tulang.

### a. Kondisi normal

Pada kondisi tubuh normal, jumlah sel darah merah yang beredar di sirkulasi sebesar  $5,46 \leq R \leq 12,6$ . Jumlah sel darah merah di dalam tubuh akan tetap normal, apabila persentase jumlah sel darah merah yang dihancurkan oleh limpa ( $f$ ) tetap berada pada rentang normal, seperti yang ditunjukkan oleh Tabel 1 dengan persentase jumlah sel darah merah yang mengalami kematian di sumsum tulang sehingga tidak dialirkan ke sirkulasi ( $g$ ) sebesar 10-15%.

**Tabel 1.**  $f$  pada kondisi normal

$R(0)$	$f$ Normal
$R_1(0) = 5,46$	$0 < f \leq 15,5678\%$
$R_2(0) = 6,888$	$0 < f \leq 41,7216\%$
$R_3(0) = 8,316$	$0 < f \leq 67,8755\%$
$R_4(0) = 9,744$	$0 < f \leq 94,0293\%$
$R_5(0) = 12,6$	$6,74603\% \leq f < 100\%$



**Gambar 3.** Jumlah sel darah merah pada kondisi normal

Keterangan:

- : jumlah sel darah merah yang beredar di sirkulasi ( $R$ )
- : jumlah sel darah merah yang dihasilkan oleh sumsum tulang ( $M$ )
- - - : ambang normal jumlah sel darah merah di dalam tubuh

**b. Kondisi abnormal**

Ada beberapa jenis kelainan jumlah sel darah merah pada tubuh antara lain anemia dan polisitemia. Klasifikasi anemia dan polisitemia dapat dikelompokkan menjadi dua kategori, yaitu pada saat  $g$  abnormal yaitu  $g < 10\%$  atau  $g > 15\%$  serta pada saat  $f$  abnormal seperti yang ditunjukkan pada Tabel 2 dan Tabel 3.

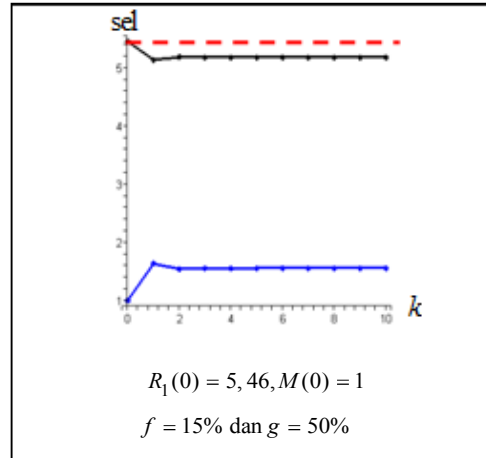
**Tabel 2.**  $f$  pada kondisi anemia

$R(0)$	$f$ pada Anemia
$R_1(0) = 5,46$	$15,5678\% < f < 100\%$
$R_2(0) = 6,888$	$41,7216\% < f < 100\%$
$R_3(0) = 8,316$	$67,8755\% < f < 100\%$
$R_4(0) = 9,744$	$94,0293\% < f < 100\%$
$R_5(0) = 12,6$	-

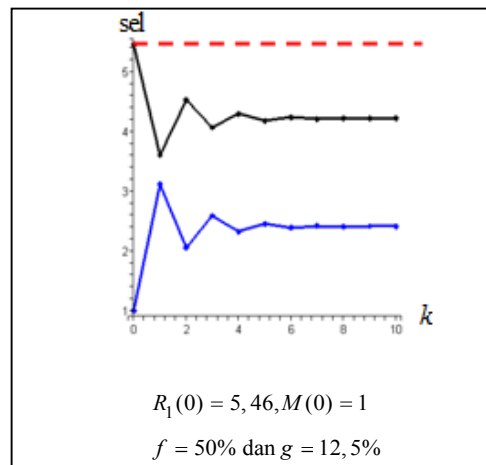
**Tabel 3.**  $f$  pada kondisi polisitemia

$R(0)$	$f$ pada Polisitemia
$R_1(0) = 5,46$	-
$R_2(0) = 6,888$	-
$R_3(0) = 8,316$	-
$R_4(0) = 9,744$	-
$R_5(0) = 12,6$	$0 < f < 6,74603\%$

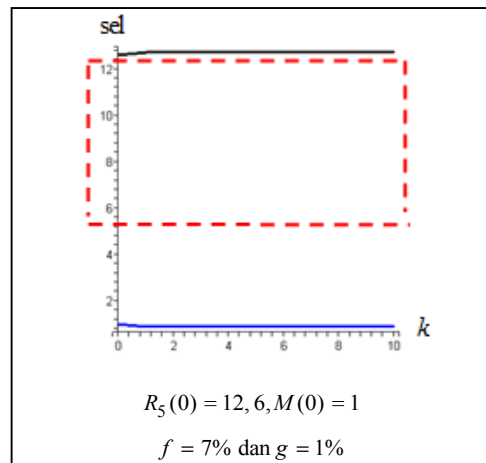
Apabila persentase sel darah merah yang dihancurkan oleh limpa berada di atas batas normal, maka jumlah sel darah merah di dalam tubuh semakin berkurang, sehingga mengakibatkan seseorang mengalami anemia (kekurangan darah) dan apabila persentase sel darah merah yang dihancurkan oleh limpa di bawah batas normal, maka jumlah sel darah merah di dalam tubuh semakin bertambah, sehingga mengakibatkan seseorang mengalami polisitemia (kelebihan darah).



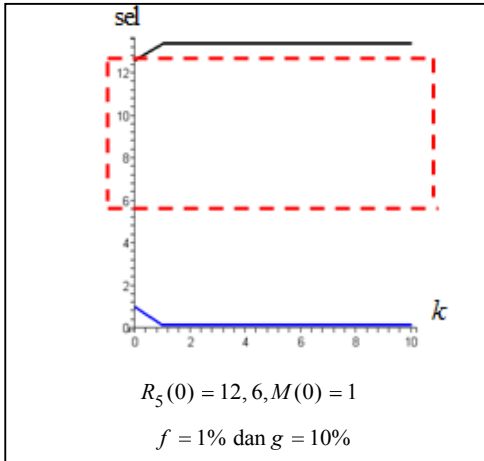
**Gambar 4.** Anemia karena peningkatan  $g$



**Gambar 5.** Anemia karena peningkatan  $f$



**Gambar 6.** Polisitemia karena penurunan  $g$



**Gambar 7.** Polisitemia karena penurunan  $f$

Meningkatnya persentase jumlah sel darah merah yang mengalami kematian di sumsum tulang dan persentase jumlah sel darah merah yang dihancurkan oleh limpa mengakibatkan jumlah sel darah merah yang beredar di sirkulasi menurun, begitu pula sebaliknya.

#### 2.1.4 Terapi Anemia

Salah satu terapi pada penderita anemia berat adalah transfusi darah yang bertujuan untuk meningkatkan jumlah sel darah merah di dalam tubuh. Jadi, apabila dikaitkan pada model, terapi ini bertujuan untuk meningkatkan daya atau kemampuan produksi sel darah merah ( $\gamma$ )

$$\begin{aligned} \gamma^* &= \frac{a}{b} + \frac{T}{b} \\ &= \frac{(1-g)M}{fR} + \frac{T}{fR}, \end{aligned}$$

dengan  $T$  merupakan banyaknya jumlah sel darah merah yang ditransfusi. Semakin besar daya atau kemampuan produksi sel darah merah menunjukkan semakin banyak jumlah sel darah merah yang ditransfusi tetapi semakin pendek batas waktu transfusinya.

#### 2.1.4 Terapi Polisitemia

Salah satu terapi pada penderita polisitemia adalah flebotomi yang bertujuan untuk menurunkan jumlah sel darah merah di dalam tubuh. Jadi, apabila dikaitkan pada model, terapi ini bertujuan untuk menurunkan daya atau kemampuan produksi sel darah merah ( $\gamma$ )

$$\begin{aligned} \gamma^* &= \frac{a}{b} - \frac{F}{b} \\ &= \frac{(1-g)M}{fR} - \frac{F}{fR}, \end{aligned}$$

dengan  $F$  merupakan banyaknya jumlah sel darah merah yang dikeluarkan atau dibuang dari dalam tubuh. Semakin kecil daya atau kemampuan produksi sel darah merah menunjukkan semakin banyak jumlah sel darah merah yang dibuang dari dalam tubuh tetapi semakin pendek batas waktu proses pembuangan.

### 3. Kesimpulan

Berdasarkan solusi yang diperoleh, kondisi anemia akan terjadi jika daya produksi sel darah merah kurang dari satu, sedangkan kondisi polisitemia akan terjadi jika daya produksi sel darah merah lebih dari satu. Sementara itu, jika daya produksi sel darah merah sama dengan satu, maka dapat terjadi dua kondisi yaitu kondisi normal dan abnormal (anemia dan polisitemia).

### 4. Daftar Pustaka

- [1] Hoffbrand, A. V. dkk. 1987. *Kapita Selekta Hematologi Edisi 2*, diterjemahkan Iyan Darmawan. Jakarta: EGC.
- [2] Junqueira, L. C. 1982. *Histologi Dasar edisi 3*, diterjemahkan Dharma. Jakarta: EGC.
- [3] Keshet, L. E. 2005. *Mathematical Models in Biology*. New York: Society for Industrial and Applied Mathematics.

- [4] Luenberger, D. G. 1979. *Introduction to Dynamic System: Theory, Models and Applications*. New York: John Wiley & Son.

## UJI SUFFICIENT FOLLOW-UP UNTUK ANALISIS CURE RATE PENDERITA KANKER PAYUDARA

Nurkaromah Dwidayati

Jurusan Matematika FMIPA UNNES

e-mail: [noengkd\\_unnes@yahoo.co.id](mailto:noengkd_unnes@yahoo.co.id)

**Abstract.** *Cure rate* atau *surviving fraction* merupakan probabilitas untuk sembuh (*cure*), didefinisikan sebagai nilai asimtotik dari fungsi survival untuk waktu menuju tak hingga. Model survival yang dikembangkan untuk estimasi proporsi pasien yang sembuh dalam studi klinik dikenal dengan *cure models*. Model ini selain digunakan untuk mengestimasi proporsi pasien yang sembuh juga digunakan untuk mengestimasi probabilitas survival pasien yang tak sembuh (*uncure*) sampai pada batas waktu yang diberikan. Oleh karena itu model ini dinamakan model *mixture*. *Sufficient follow-up* merupakan problem yang secara alami akan menyertai dalam analisis *cure rate*. Inferensi statistik nonparametrik yang dikembangkan didasarkan pada model *mixture* biner. Statistik uji yang dikembangkan membantu praktisi menentukan apakah *periode* observasi cukup panjang atau tidak, untuk mendeteksi *cured (immune)* individual dalam studi populasi. Uji ini tak dapat diselesaikan berdasar estimasi probabilitas *cure* dengan estimator Kaplan- Meier pada titik observasi terakhir. Sedangkan uji yang dikembangkan Maller & Zhou tidak memberikan solusi yang memuaskan, karena solusi yang diberikan tidak stabil dan mempunyai kecenderungan monoton jika durasi *follow-up* naik. Pada kajian ini dikemukakan alternatif *sufficient follow-up* yang memberikan batas bawah ekspektasi proporsi subyek memperoleh kekebalan (*immune*) dalam ruang yang luas pada *cure models*.

**Kata Kunci:** *cure rate*, *cure models*, model *mixture*, *sufficient follow-up*

### 1. PENDAHULUAN

Untuk estimasi proporsi pasien yang sembuh (*cure*) dan probabilitas survival pasien yang tak sembuh (*uncure*) dalam studi klinik dikembangkan model *mixture* berdasar distribusi *life time* penderita kanker payudara (PKPD). Pada penelitian sebelumnya (Dwidayati, 2009) telah dikembangkan model *mixture* Weibull untuk analisis *cure rate* PKPD dengan *missing data*. Parameter tak diketahui dalam model diestimasi menggunakan algoritma EM (*Expectation Maximization Algorithm*), yang meliputi 2 langkah yaitu: E-step dan M-step. Pada algoritma EM, E-step menghitung ekspektasi fungsi log likelihood untuk estimasi fungsi densitas, fungsi survival dan proporsi pasien yang tak sembuh, sedangkan M-step memuat maksimasi fungsi likelihood terkait dengan estimasi fungsi densitas, fungsi survival dan proporsi pasien yang tak sembuh.

Penyelesaian persamaan yang diperoleh dari turunan pertama pada ekspektasi fungsi log-likelihood dalam bentuk *not close form*. Untuk menyelesaikan persamaan ini diperlukan

iterasi yang tidak dapat dikerjakan secara manual, diperlukan *software* untuk melakukan algoritma yang akurat. Pada penelitian sebelumnya (Dwidayati, 2012), telah dikembangkan program iterasi Newton Raphson terintegrasi dengan algoritma EM berbantuan *software* Matlab. Program komputer yang dikembangkan digunakan untuk menemtukan estimator parameter dalam model *mixture* Weibull.

*Sufficient follow-up* merupakan problem yang secara alami akan menyertai dalam analisis *cure rate*. Inferensi statistik nonparametrik yang dikembangkan didasarkan pada model *mixture* biner. Statistik uji yang dikembangkan membantu praktisi menentukan apakah *periode* observasi cukup panjang atau tidak, untuk mendeteksi *cured (immune)* individual dalam studi populasi. Uji ini tak dapat diselesaikan berdasar estimasi probabilitas *cure* dengan estimator Kaplan-Meier pada titik observasi terakhir. Uji yang dikembangkan Maller & Zhou tidak memberikan solusi yang memuaskan, karena solusi yang diberikan tidak stabil dan mempunyai kecenderungan monoton

jika durasi *follow-up* naik. Oleh karena itu, perlu dicari alternatif *sufficient follow-up* yang memberikan batas bawah ekspektasi proporsi subyek memperoleh kekebalan (*immune*) dalam ruang yang luas pada *cure models*.

## 2. PEMBAHASAN

### 2.1. Analisis Survival Penderita Kanker Payudara

Analisis survival adalah kumpulan beberapa prosedur uji statistik untuk menganalisis data dengan variabel *outcome* nya adalah waktu sampai suatu kejadian muncul (Murti, 1995). Dalam hal ini yang dimaksud dengan kejadian (*event*) adalah meninggal, sakit, sembuh, kembali bekerja, kembali mengulang pekerjaan yang sama atau kejadian apapun yang mungkin muncul dalam diri seseorang.

Dalam analisis survival variabel waktu, dapat berarti waktu survival (*survival time*), karena variabel ini menunjukkan waktu dari seseorang untuk bertahan dalam periode waktu tertentu (Kleinbaum, 1996). Waktu survival individu sering dapat diketahui tetapi waktu survival secara umum tidak dapat diketahui secara pasti. Hal ini dikenal dengan sebutan sensor, yaitu bila studi berakhir tetapi tidak muncul kejadian yang diinginkan, subjek yang diteliti mengundurkan diri dari penelitian, atau subjek hilang dari pengamatan.

Distribusi waktu survival digambarkan atau dicirikan dengan 3 (tiga) fungsi (Lee, 1980), yaitu: *probability density function*, *survivorship function*, dan *hazard function*. Ketiga fungsi ini secara matematis ekuivalen, jika salah satu diketahui maka dua yang lain dapat dicari. Secara praktis, ketiga fungsi survival tersebut dapat digunakan untuk menggambarkan aspek-aspek yang berbeda dari data.

Tolok ukur keberhasilan penyembuhan kanker lazim digambarkan dengan angka ketahanan hidup (*year survival rate*) (Pratt, 1994). Pada setiap kasus, ketahanan hidup lebih tinggi pada

kanker yang masih terlokalisir, bila terjadi penyebaran, ketahanan hidup menjadi rendah. Penentuan ketahanan hidup tergantung pada tingkat keganasan serta probabilitas kematian pada penyakit kanker tersebut. Ketahanan hidup pada penyakit kanker dengan keganasan tinggi, seperti kanker hati dan paru-paru adalah *one year survival* dan *three year survival*, sedangkan untuk kanker payudara *five year survival*.

Ketahanan hidup penderita kanker payudara dimulai dari awal pengobatan penyakit kanker payudara sampai pengamatan 5 tahun. Setelah 5 tahun dilakukan penilaian terhadap status kehidupan penderita. Penderita dikatakan meninggal apabila telah disahkan oleh pihak rumah sakit. Bila informasi dari rekam medik tidak ada, maka kematian dinilai dari pernyataan keluarga terdekat yang telah dihubungi. Penderita dikatakan hidup bila pada akhir pengamatan 5 tahun terdapat informasi mengenai statusnya.

Waktu tahan hidup dinyatakan dalam satuan bulan. Waktu tahan hidup dimulai dari awal pengobatan penyakit kanker payudara (dapat dilihat dari rekam medik yaitu saat kunjungan pertama) sampai dengan kunjungan terakhir ke rumah sakit. Status penderita dinyatakan dengan 1 untuk *cure* dan 0 untuk *uncured*.

Dalam ilmu kedokteran, *cure* diartikan jika pasien memberikan respons positif (membaik) terhadap treatment yang diberikan, dan sebaliknya dikatakan *uncured*. Jadi jika pasien memburuk kesehatannya atau bahkan meninggal, atau hilang dari pengamatan (*missing*) dikatakan *uncured*. Hilang dari pengamatan yaitu tidak diketahui status kehidupannya pada akhir pengamatan.

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder (rekam medik). Sesuai dengan sifat data sekunder mempunyai keterbatasan yaitu tidak semua hal yang berhubungan dengan ketahanan hidup 5 tahun penderita kanker payudara dapat diperoleh. Salah satu keterbatasan yang muncul yaitu penelusuran status

kehidupan penderita akibat tidak lengkapnya alamat penderita atau telah pindah alamat yang tidak jelas, atau ketika datang berobat menggunakan alamat saudara/ tempat menginap yang tersedia dekat ruang Tulip di sekitar RSUP Dr. Sardjito-Yogyakarta. Status kehidupan penderita tidak diketahui juga dapat disebabkan karena penderita tidak datang lagi berobat karena bosan atau penyebab lain padahal pada kunjungan terakhir masih belum sembuh.

Penyebab yang lain dari tidak diketahuinya status kehidupan penderita adalah tidak tersedianya sarana komunikasi (keluarga penderita tidak memiliki sarana telepon yang bisa dihubungi), sementara terkendala komunikasi via pos karena ketidakjelasan alamat penderita. Akibatnya terjadi *missing data*.

## 2.2. Cure Models

*Cure rate models* merupakan model survival yang memuat *cured fraction* dan *uncured fraction*. Model ini dikembangkan untuk estimasi proporsi pasien yang sembuh (*cured*) dalam studi klinik. Model ini selain digunakan untuk mengestimasi proporsi pasien yang sembuh juga digunakan untuk mengestimasi probabilitas survival pasien yang tak sembuh sampai pada batas waktu yang diberikan. Oleh karena itu, model ini dinamakan model *mixture*.

Model tersebut dikembangkan oleh Boag (1949) dengan mengestimasi proporsi pasien yang sembuh pada *treatment* penderita kanker mulut dan kerongkongan, leher, kandungan dan payudara. Model ini dinamakan model *mixture* karena dapat mengestimasi proporsi pasien yang sembuh dan fungsi survival pasien tak sembuh.

Model *mixture* dikatakan model *cure mixture* parametrik jika menggunakan distribusi probabilitas standar seperti distribusi eksponensial, Weibull, Gompertz dan generalized F. Diskusi tentang model *mixture* parametrik dapat dilihat pada Boag (1949), Jones, *et.al* (1981), Farewell (1982,

1986), Cantor dan Shuster (1992), Ghitany, *et al* (1994) dan Zhang dan Liu (2006).

Problem yang terkait dengan model parametrik adalah kesulitan dalam memverifikasi distribusi yang digunakan dalam model. Secara umum, distribusi yang digunakan adalah generalized gamma (Yamaguchi,1992).

Model *mixture* tanpa menggunakan distribusi probabilitas standar dinamakan model *cure mixture* nonparametrik. Model *mixture* nonparametrik untuk estimasi *cure rate* diperkenalkan oleh Kuk dan Chen (1992) dengan mengaplikasikan asumsi *proportional hazard* (PH) ke distribusi *failure time* pasien yang tak sembuh. Diskusi tentang model *mixture* nonparametrik dapat dilihat pada Maller dan Zhou (1992)

Peluang untuk sembuh, yang biasanya dikenal dengan ***cure rate*** atau ***surviving fraction***, didefinisikan sebagai nilai asimtotik dari fungsi survival untuk  $t$  (waktu) menuju tak hingga, ditulis  $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t)$

Misal  $T$  menyatakan waktu survival terobservasi, maka inferensi statistika pada *cure rate* didasarkan pada sebarang fungsi survival  $S(t) = P(T \geq t)$  dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$S(t) = a + (1 - a) S_0(t) \quad (1)$$

dengan  $a = P(T = \infty)$  adalah peluang untuk sembuh, dan  $S_0(t) = P(T \geq t | X < \infty)$ .

Representasi pada (1) dinamakan model *mixture biner*,

Untuk mengestimasi parameter tak diketahui dalam model tersebut, Maller & Zhou menggunakan metode nonparametrik dan memperoleh estimator untuk  $a$  adalah:

$$\hat{a}_n = \hat{S}_n(t_n)$$

dengan  $\hat{S}_n(t_n)$  estimator Kaplan Meier (KME).

Estimator tersebut akan konsisten jika dan hanya jika

$$\tau G_0 = \tau C$$

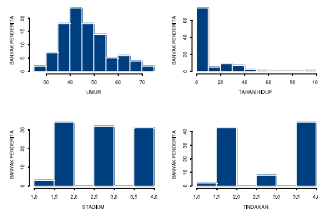
Dengan  $\tau G_0$  dan  $\tau C$  ekstrim kanan dari  $G_0(t) = 1 - S_0(t)$  dan  $C(t)$

Jika kondisi tersebut tidak benar maka terjadi kegagalan setelah maksimum periode follow up dan tidak mungkin

menemukan proporsi data terakhir tersensor yang dihasilkan dari subyek yang sembuh.

### 3. Analisis Cure rate Penderita Kanker Payudara

Data yang diperoleh dari rekam medik (tahun 2004 -2009) dan studi klinik penderita kanker payudara di RSUP Dr. Sardjito – Yogyakarta, dengan mengambil sampel PKPD sebanyak 100 dapat digambarkan dalam histogram berdasar umur, tahan hidup, stadium dan tindakan untuk penanganan PKPD tersebut, sebagaimana tersaji pada Gambar 3.1.



Gambar 5.1 Histogram PKPD di RSUP Dr. Sardjito-Yogyakarta Tahun 2004-2009

Berdasar data tersebut diperoleh gambaran tentang umur PKPD yang berobat di RSUP Dr. Sardjito-Yogyakarta periode tahun 2004-2009 sebagaimana tersaji pada Tabel 3.1.

Tabel 3.1. Ukuran Statistik Umur PKPD RSUP Dr. Sardjito-Yogyakarta Tahun 2004-2009

Ukuran Statistik	Value (tahun)
Mean	46,79
Standart Deviasi	9,83
Minimum	27
Maksimum	74

Faktor penting yang ikut menentukan insidens kanker payudara adalah umur. Berdasar data sampel, rata-rata umur PKPD yang berobat di RSUP Dr. Sardjito-Yogyakarta 46,79 tahun. Hal ini sesuai

hasil kajian sebelumnya bahwa di Indonesia, insidens kanker payudara tertinggi ditemukan pada umur wanita yang produktif ( 40-49 tahun) dengan modus umur 40 tahun ke atas (Ramli, 1995). Sebagai bahan perbandingan, rata-rata umur PKPD yang ditemukan di Jakarta adalah 46 tahun, sedangkan di Surabaya 47 tahun.

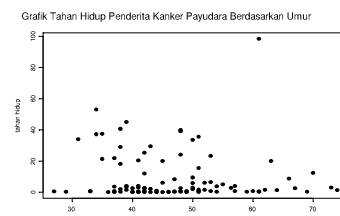
Ketahanan hidup PKPD yang berobat di RSUP Dr. Sardjito-Yogyakarta periode tahun 2004-2009 dapat dilihat pada Tabel 3.2.

Tabel 3.2. Waktu Tahan Hidup PKPD RSUP Dr. Sardjito Yogyakarta Tahun 2004-2009

Waktu Tahan Hidup	Value (bulan)
Mean	9,21
Standart Deviasi	15,63
Minimum	0,03
Maksimum	48,5

Berdasar Tabel 3.2 di atas terlihat bahwa rata-rata ketahanan hidup PKPD yang berobat di RSUP Dr. Sardjito-Yogyakarta periode tahun 2004-2009 adalah 9,21 bulan (kurang dari 1 tahun). Hal ini dipicu oleh faktor umur dan stadium PKPD pada saat berobat di RSUP Dr. Sardjito- Yogyakarta periode tahun 2004-2009.

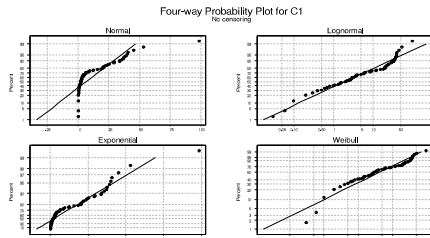
Untuk mengetahui gambaran tahan hidup PKPD berdasarkan umur dapat dilihat pada Gambar 3.2.



Gambar 3.2. Tahan Hidup Penderita Kanker Payudara Berdasarkan Umur

Berdasarkan Gambar 5.2, terlihat bahwa semakin bertambah umur PKPD, waktu tahan hidupnya semakin rendah.

Berikut ini (Gambar 3.3) diberikan plot distribusi probabilitas tahan hidup PKPD yang berobat di RSUP Dr. Sardjito – Yogyakarta tahun 2004-2009.



Gambar 3.3. Four-way Probability Plot Tahan Hidup PKPD

Berdasar Gambar 3.3, waktu tahan hidup PKPD berobat di RSUP Dr. Sardjito Yogyakarta tahun 2004-2009 diasumsikan berdistribusi Weibull dengan parameter  $\theta$  dan  $\beta$ .

Hubungan antar variabel umur, stadium, treatment dan *life-time* PKPD di RSUP Dr. Sardjito– Yogyakarta dinyatakan dengan pemodelan regresi PH Cox sebagai berikut.

$$h(t) = h_0(t) \exp(0,0065x_1 - 0,0719x_2 - 0,2666x_3)$$

dengan  $x_1$  : variabel umur

$x_2$  : variabel stadium

$x_3$  : variabel treatment

$h_0(t)$  : *baseline hazard*

Berdasarkan model regresi PH Cox di atas dapat dirumuskan fungsi *survival rate* sebagai berikut.

$$S(t) = S_o(t) \exp(0,0064848x_1 - 0,0719014x_2 - 0,2665868x_3)$$

Contoh:

Misalkan seseorang berumur 65 tahun, menderita kanker payudara pada stadium IV, diberi treatment kemoterapi (4). Akan dihitung *survival rate* dan *hazard rate* setelah menjalani pengobatan selama 12 bulan. Berdasarkan hasil perhitungan *baseline survival* dan *baseline hazard* (Lampiran 6), diperoleh *survival rate*

$$S_o(12) = 0,15410455 \text{ dan}$$

$$h_o(12) = 1,8298352$$

Dengan demikian:

$$\begin{aligned} S(12) &= 0,154104 \exp(0,0064848*65 - 0,0719014*4 - 0,2665868*4) \\ &= 0,478995 \end{aligned}$$

Jadi peluang PKPD tersebut untuk survive setelah bulan ke-12 adalah 47,89%.

*Hazard rate* dapat dihitung sebagai berikut.

$$\begin{aligned} h(12) &= 1,8298 \cdot \exp(0,0065 \cdot 65 - 0,0719 \cdot 4 \\ &\quad - 0,2666 \cdot 4) \\ &= 0,720208 \end{aligned}$$

Dengan demikian peluang PKPD tersebut mengalami kematian setelah bulan ke-12 adalah 72,02%.

#### 4. UJI SUFFICIENT FOLLOW UP

*Sufficient follow-up* merupakan problem yang secara alami akan menyertai dalam analisis *cure rate*. Inferensi statistik nonparametrik yang dikembangkan didasarkan pada model *mixture* biner. Statistik uji yang dikembangkan membantu praktisi menentukan apakah *periode* observasi cukup panjang atau tidak, untuk mendeteksi *cured (immune)* individual dalam studi populasi. Uji ini tak dapat diselesaikan berdasar estimasi probabilitas *cure* dengan estimator Kaplan-Meier pada titik observasi terakhir. Uji yang dikembangkan Maller & Zhou tidak memberikan solusi yang memuaskan, karena solusi yang diberikan tidak stabil dan mempunyai kecenderungan monoton jika durasi *follow-up* naik.

Untuk analisis *follow up* pada analisis *cure rate* penderita kanker payudara menggunakan fungsi *hazard rate*  $\lambda(t)$  untuk  $r(t)$  yaitu fungsi  $\varphi(u) = e^{-u}$

Parameter  $t_0$  dipilih pada interval  $[0, T/2]$ . Parameter ini dioptimalkan dengan memaksimalkan batas bawah dari

$$\hat{a}_n^* = \max \left\{ 1 - \frac{1 - \hat{S}_n(t)}{1 - \varphi(T\hat{R}_n(t_0))}, 0 \right\}$$

Memaksimalkan  $\hat{a}_n^*$  tidak mempengaruhi argumen probabilistik yang digunakan untuk mendapatkan batas bawah untuk  $\Delta(t)$  karena batas ini didasarkan statistik Kolmogorov yaitu jarak antara  $S(t)$  dan  $S_n(t)$ . Pilihan data memungkinkan untuk

meningkatkan *power* dari uji *suffocient follow-up* dan memberikan kontrol tingkat signifikansi.

## 5. KESIMPULAN

Berdasarkan kajian telah dikemukakan alternatif *sufficient follow-up* yang memberikan batas bawah ekspektasi proporsi subyek memperoleh kekebalan (*immune*) dalam ruang yang luas pada *cure models*. Hasil ini dapat membantu praktisi dalam menentukan apakah *periode* observasi cukup panjang atau tidak, untuk mendeteksi *cured (immune)* individual dalam studi populasi

## 5. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Boag, J.W. Maximum Likelihood Estimates of the Proportion of Patients Cured by Cancer Therapy. *Journal of the Royal Statistical Society* 11, 15-53. 1949.
- [2] Cantor, A.B. and Shuster, J.J. 1992. *Parametric Versus Nonparametric Methods for Cure Rates Based on Censored Survival Data*. *Statistics in Medicine*. Vol. 11: 931-937
- [3] Dwidayati, N. 2009. Aplikasi Model *Mixture* dengan *Missing Data* untuk Analisis Laju Perawatan (*Cure Rate*) Penderita Kanker. Laporan Penelitian DP2M Dkti (Dosen Muda). Tidak diterbitkan.
- [3] Dwidayati, N. 2012. Estimasi Parameter dalam Model *Mixture Weibull* untuk Analisis *Cure Rate* Penderita Kanker Payudara. Laporan Penelitian DP2M Dkti (Dosen Muda). Tidak diterbitkan
- [4] Farewell, V.T. 1982. The Use of *Mixture Models* for Analysis of Survival Data with Long-term Survivors. *Biometrics* 38, 1041-1046.
- [5] Farewell, V.T. 1986. *Mixture Models* in Survival Analysis. Are they Worth the Risk ? *The Canadian Journal of Statistics* 14, 257-262.
- [6] Ghitany, M.E., Maller, R.A., and Zhou, S. 1994. Exponential *Mixture Models* with Long-term Survivor and Covariates. *Journal of Multivariate Analysis* 49, 218-241.
- [7] Jones, D.R., Powles, R.L., Machin, D., and Sylvester, R.J. 1981. On Estimating the Proportion of Cured Patients in Clinical Studies. *Biometrie-Praximetrie* 21, 1-11.
- [8] Kuk, A.Y and Chen, C. 1992. A *Mixture Model* Combining Logistic Regression and Life Model. *Biometrika* 79, 531-541.
- [9] Lee, E.T. 1980. *Statistical Methods for Survival Data Analysis*. Department of Biostatistics and Epidemiology School of Public Health University of Oklahoma Lifetime Learning Publication Belmont. California
- [10] Maller, R.A. and Zhou, S. 1992. Estimating the Proportion of Immunes in a Censored Sample. *Biometrika* 79, 731-739.
- [11] Pratt, W.B. et al. 1994. *The Cancer Problem. The Anti Cancer Drugs*. Second Edition. Oxford University Press. New York
- [12] Yamaguchi, K. 1992. Accelerated Failure-Time Regression Models with a Regression Models of Surviving Fraction. An application to analysis of Permanent Employment in Japan. *Journal of American Statistical Association*. 37, 284-292
- [13] Zhang, L.J. and Liu, C. 2006. A Finite *Mixture of Two Weibull Distribution* for Modeling the Diameter Distribution of Rotated Sigmoid, Uneven-Age Stands. *Canadian Journal for Research* 31, 54-1659

## SOLUSI DARI MODEL DINAMIK INTERAKSI PERTUMBUHAN IKAN BANDENG DAN UDANG WINDU

Ririn Sulpiani<sup>1</sup>, Widowati<sup>2</sup>, Sapto P. Putro<sup>3</sup>, Sunarsih<sup>4</sup>

<sup>1,2,3,4</sup> Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Diponegoro

<sup>3</sup> Jurusan Biologi Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Diponegoro

Email :<sup>1</sup>ririnsulpiani@gmail.com

**Abstrak.** Pada paper ini akan dikembangkan model dinamik dari pertumbuhan ikan bandeng dan udang windu. Model dinamik pertumbuhan ikan bandeng dan udang windu dipengaruhi oleh model pertumbuhan massa. Model ini dikembangkan berdasarkan pada populasi dari masing-masing spesies. Model pertumbuhan ini merupakan populasi dua spesies pada sistem polikultur. Dari model pertumbuhan akan dicari solusi dengan menggunakan nilai eigen untuk mengetahui kestabilan sistem dan dianalisis untuk mengetahui sifat dari solusi kesetimbangan. Solusi dari sistem dinamik diperoleh berbentuk eksponensial.

**Keywords:** Model dinamik, ikan bandeng, udang windu, massa.

### 1. PENDAHULUAN

Indonesia merupakan negara kepulauan terbesar didunia dijuluki Negara maritim dengan luas 5,8 juta kilometer persegi (km) atau 2/3 luas wilayah Republik Indonesia (RI) dan panjang pantai sekitar 95.181 km. Berdasarkan data statistik perikanan budidaya tahun 2012, hanya sekitar 30 persen dari total produksi adalah komoditas ikan dan udang, sedangkan 70 persen lainnya adalah produksi rumput laut [1]. Dibutuhkan cara peningkatan komoditas ikan dan udang yang masih rendah maka sistem budidaya polikultur menjadi pilihan. Teknik budidaya telah berkembang, mulai dari budidaya sistem monokultur maupun sistem polikultur dengan sistem keramba jaring apung (KJA) dan keramba jaring apung bertingkat (KJAB), namun maraknya budidaya menyebabkan penurunan kualitas lingkungan [2].

Banyak peneliti telah membahas teknik budidaya pada KJA. penelitian mengenai prospek pengembangan usaha budidaya ikan mas dalam jaring apung sistem monokultur di Danau Toba Kabupaten Toba Samosir, Sumatera Utara mengenai analisis keuntungan usaha, kelayakan finansial dan Sensitivitas [3]; penelitian membuat desain investasi usaha

pembesaran ikan kolam jaring apung sistem monokultur dengan studi kasus pada KJA Batuhapur, Waduk Cirata, Kabupaten Cianjur, Jawa Barat [4]. Disamping itu penelitian mengenai model pemanenan logistik untuk pemanenan ikan dengan laju pemanenan proposional [5]; model persamaan logistik sederhana, model ini dikembangkan dengan memperhatikan parameter daya dukung (*carrying capacity*) yang bergantung pada waktu untuk menentukan fungsi panen yang proposional [6]; model dinamis dari pertumbuhan biomassa rumput laut, model dinamis dikembangkan dari model logistik sederhana dengan mempertimbangkan pengaruh penyerapan sumber daya ekosistem yang mendukung lingkungan [7]; Namun belum ada yang membahas model dinamik populasi dua spesies pada sistem polikultur, Bertolak dari pemikiran tersebut, maka pembahasan dalam penelitian ini dititik beratkan pada model dinamik ikan bandeng dan udang windu sehingga diharapkan dapat diperoleh tentang analisa kestabilan dan kesinambungan dan dapat ditentukan pola pertumbuhan sehingga dapat membantu masyarakat dalam menentukan produksi yang maksimal.

## 2. MODEL SISTEM DINAMIK

### 2.1 Model dinamik populasi dua spesies

Pandang ekosistem laut dengan dua spesies yang masing-masing populasinya  $N_1$  dan  $N_2$ . Diasumsikan bahwa perubahan laju pertumbuhan dari masing-masing spesies bukan dari faktor lingkungan. Model umum untuk interaksi dua spesies sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= g(N_1, N_2) \\ \frac{dN_2}{dt} &= f(N_1, N_2) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Diasumsikan tidak ada migrasi dari masing-masing spesies, sehingga

$$g(0, N_2) = 0 \text{ dan } f(N_1, 0) = 0.$$

Masalah nilai awal dapat ditentukan dari solusi persamaan (2.1) yang memenuhi nilai awal yang diberikan,  $N_1(t_0)$  dan  $N_2(t_0)$ .

$$\frac{dN_2}{dN_1} = \frac{f(N_1, N_2)}{g(N_1, N_2)} \quad (2.2)$$

Persamaan (2.2) merupakan persamaan bidang fase. Solusi dari persamaan (2.2) akan memberikan trayektori dari populasi. Selanjutnya, populasi kesetimbangan didefinisikan sebagai satu kemungkinan populasi dari kedua spesies sedemikian sehingga kedua populasi tidak akan berubah terhadap waktu. Kelahiran dan kematian dari spesies  $N_1$  harus setimbang, demikian juga dengan  $N_2$ .

Misalkan populasi kesetimbangan,

$$N_1 = N_{1e} \text{ dan } N_2 = N_{2e}$$

Sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} f(N_{1e}, N_{2e}) &= 0 \\ g(N_{1e}, N_{2e}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Merupakan dua persamaan dengan dua variabel.

Untuk suatu populasi kesetimbangan, kemiringan atau slope dari diagram bidang fase adalah tak terdefinisi

$$\frac{dN_2}{dN_1} = \frac{0}{0}$$

Yang disebut sebagai titik singular dari bidang fase. Titik singular dari persamaan bidang fase adalah ekuivalen dengan titik

kesetimbangan dari persamaan (2.1), selanjutnya akan dianalisis kestabilan linier.

### 2.2 Analisis Kestabilan dan solusi dari populasi kesetimbangan dua spesies

Akan dianalisis kestabilan dari populasi kesetimbangan. Perilaku populasi disekitar titik kesetimbangan secara umum dapat dideskripsikan oleh sistem persamaan differensial linier koefisien konstan berikut.

$$\frac{dN_1}{dt} = aN_1 + bN_2 \quad (2.4)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = cN_1 + dN_2 \quad (2.5)$$

Dengan  $a, b, c$  dan  $d$  adalah konstanta real, dan  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ . Sistem (2.4) dan (2.5) dikaji kestabilannya. Pada sistem ini  $N_1$  dan  $N_2$  merupakan *displacement* dari populasi kesetimbangan.

Kemudian titik kesetimbangan dari sistem persamaan differensial (2.4) dan (2.5) dapat dicari dengan mendapatkan solusi penyelesaian ( $N_1, N_2$ ) dari sistem berikut

$$\frac{dN_1}{dt} = aN_1 + bN_2 = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = cN_1 + dN_2 = 0 \quad (2.7)$$

Sehingga diperoleh penyelesaiannya adalah  $(0,0)$  yang merupakan titik kesetimbangan tunggal dari persamaan (2.4) dan (2.5) dan penyelesaian dari persamaan (2.4) dan (2.5) yaitu

$$N_1 = Ae^{\lambda t} \quad (2.8)$$

$$N_2 = Be^{\lambda t} \quad (2.9)$$

Untuk menentukan jenis ketabilan dari titik kesetimbangan, maka sistem persamaan differensial (2.4) dan (2.5) dibentuk persamaan karakteristik dan diperoleh akar-akar persamaan karakteristik. Dari sistem persamaan (2.5) diperoleh

$$N_1 = \frac{1}{c} \frac{dN_2}{dt} - \frac{d}{c} N_2 \quad (2.10)$$

Kemudian disubstitusikan pada  $\frac{dN_1}{dt} = aN_1 + bN_2$ , diperoleh

$$\frac{1}{c} \frac{d^2 N_2}{dt^2} - \frac{d}{c} N_2 = a \left( \frac{1}{c} \frac{dN_2}{dt} - \frac{d}{c} N_2 \right) + bN_2 \quad (2.11)$$

Atau dapat ditulis

$$\frac{d^2 N_2}{dt^2} - (a + d) \frac{dN_2}{dt} + (ad - bc)N_2 \quad (2.12)$$

Untuk memperoleh persamaan karakteristik dari PD (2.12) dimisalkan  $N_2 = e^{\lambda t}$ ,  $\lambda$  adalah konstanta yang dicari.

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda e^{\lambda t}, \frac{d^2 N_2}{dt^2} = \lambda^2 e^{\lambda t} \quad (2.13)$$

Substitusikan persamaan (2.13) ke (2.12) diperoleh persamaan karakteristik

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0 \quad (2.14)$$

Persamaan (3.4) bisa disebut sebagai persamaan polinomial karakteristik. Dengan mendefinisikan  $p = a + d$ ,  $q = ad - bc$  dan  $\Delta = p^2 - 4q$ , maka diperoleh akar-akar karakteristik sebagai berikut :

$$\lambda_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \quad (2.15)$$

Solusi Umum dari sistem persamaan differensial (2.4) dan (2.5) adalah

$$N_2 = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (2.16)$$

$$N_1 = C_1 \frac{\lambda_1 - d}{c} e^{\lambda_1 t} + C_2 \frac{\lambda_2 - d}{c} e^{\lambda_2 t} \quad (2.17)$$

dengan  $C_1$  dan  $C_2$  adalah suatu konstanta. Selanjutnya akan dicari akar karakteristik dari persamaan tersebut, akar karakteristik ini juga sering disebut dengan nilai eigen. Beberapa jenis akar-akar karaktereistik, yaitu

1. Akar-akar real dan berbeda untuk  $\Delta > 0$
2. Akar-akar real dan sama untuk  $\Delta = 0$
3. Akar-akar kompleks konjugat untuk  $\Delta < 0$

Jika semua bagian real dari nilai eigen  $\leq 0$ , maka sistem stabil, apabila terdapat bagian real dari nilai eigen  $> 0$  maka sistem tidak stabil.

### 3. HASIL SIMULASI

Penelitian pertumbuhan ikan bandeng dan udang windu dilakukan di perairan Teluk Avarang, Kabupaten Barru, Sulawesi Selatan . Ikan bandeng dan udang

windu dipelihara dalam KJA heksagonal bertingkat sistem polikultur . Ikan bandeng dipelihara selama periode 6 bulan dan tiap bulannya diamati pertambahan bobot tubuhnya. Sedangkan udang windu dipelihara selama periode 22 minggu dan diamati pertambahan bobot tubuhnya, pengukuran dilakukan setiap 2 mingguan [9]. Dari data berat maka diperoleh parameter-parameter dari model sistem dinamik.

Model umum untuk interaksi dua spesies, yang masing-masing populasinya  $N_1$  adalah ikan bandeng dan  $N_2$  adalah udang windu, model sebagai berikut [8]:

$$\frac{dN_1}{dt} = aN_1 + bN_2 \quad (3.1)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = cN_1 + dN_2 \quad (3.2)$$

Persamaan (3.1) dan (3.2) merupakan model dinamik dua spesies. Data yang digunakan berdasarkan [9], dengan menggunakan metode kuadrat terkecil diperoleh  $a = 0.0999$ ,  $b = 0.0015$ ,  $c = 0.0594$ , dan  $d = 0.6789$ .

Sehingga diperoleh model sistem sebagai berikut :

$$\frac{dN_1}{dt} = 0.0999N_1 + 0.0015N_2 \quad (3.3)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = 0.0594N_1 + 0.6789N_2 \quad (3.4)$$

Selanjutnya titik kesetimbangan dari sistem (3.3) dan (3.4) dapat dicari dengan mendapatkan solusi penyelesaian  $(N_1, N_2)$  dari sitem berikut :

$$\frac{dN_1}{dt} = 0.0999N_1 + 0.0015N_2 = 0 \quad (3.5)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = 0.0594N_1 + 0.6789N_2 = 0 \quad (3.6)$$

Kemudian dianalisis kestabilan dari populasi kesetimbangan. Perilaku populasi disekitar titik kesetimbangan secara umum dapat dideskripsikan oleh sistem persamaan differensial linier koefisien konstan.

Untuk menentukan jenis kestabilan dari titik kesetimbangan, maka sistem persamaan differensial (3.3) dan (3.4)

dibentuk persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \lambda^2 - (0.0999 + 0.6789)\lambda \\ + (0.0999 \times 0.6789 \\ - 0.0015 \times 0.0594) \\ = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Dari hasil perhitungan diperoleh nilai eigen dari sistem dua persamaan yaitu  $\lambda_1 = 0.0998$  dan  $\lambda_2 = 0.6791$  karena akar-akar karakteristik keduanya bernilai real, berbeda dan tanda (keduanya positif), maka titik kesetimbangan (0,0) merupakan titik simpul (*node*) dan titik simpul ini tidak stabil.

Selanjutnya solusi dari sistem (3.3) dan (3.4) dengan  $\lambda_1 = 0.0998$  dan  $\lambda_2 = 0.6791$  diperoleh,

$$N_2 = C_1 e^{0.0998t} + C_2 e^{0.6791t} \quad (3.8)$$

Dari persamaan (3.8) diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dN_2}{dt} = 0.0998C_1 e^{0.0998t} \\ + 0.6791C_2 e^{0.6791t} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Substitusikan persamaan (3.8) dan (3.9) ke persamaan dibawah ini

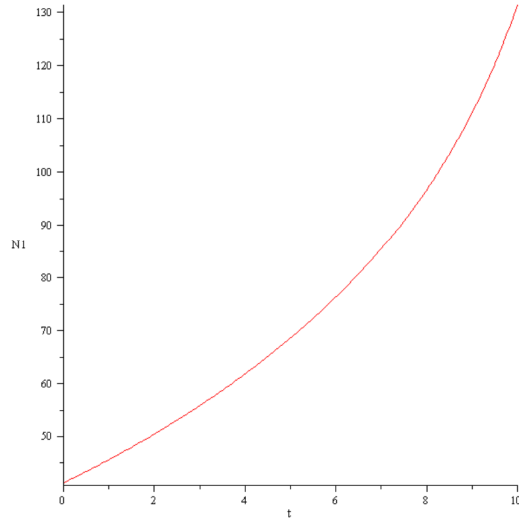
$$N_1 = C_1 \frac{\lambda_1 - d}{c} e^{\lambda_1 t} + C_2 \frac{\lambda_2 - d}{c} e^{\lambda_2 t}$$

Sehingga diperoleh

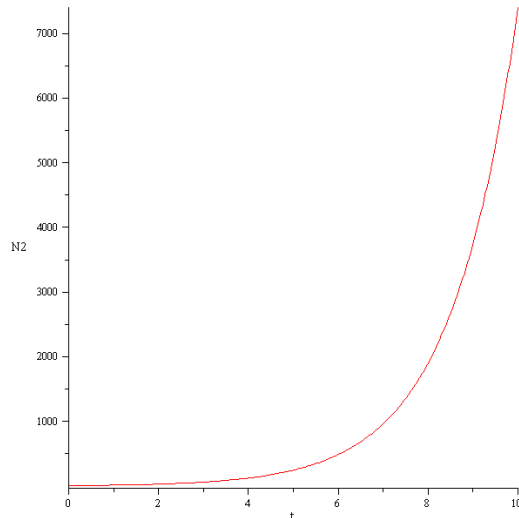
$$\begin{aligned} N_1 \\ = C_1 \frac{0.0998 - 0.6789}{0.0594} e^{0.0998t} \\ + C_2 \frac{0.6791 - 0.6789}{0.0594} e^{0.6791t} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Dengan  $C_1$  dan  $C_2$  adalah konstanta sebarang.

Dari solusi yang dihasilkan dapat digambarkan grafik yang menyatakan pertumbuhan ikan bandeng dan udang windu terhadap waktu seperti yang terlihat pada gambar dibawah ini,



Gambar 3.1 Plot solusi pertumbuhan ikan bandeng terhadap waktu



Gambar 3.2 Plot solusi pertumbuhan ikan bandeng terhadap waktu

#### 4. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan tentang model dinamik populasi dua spesies yaitu ikan bandeng dan udang windu dapat disimpulkan bahwa akar karakteristik keduanya bernilai real, berbeda dan tanda (keduanya positif), maka titik kesetimbangan (0,0) merupakan titik simpul (*node*) dan titik simpul ini tidak stabil. Dan diperoleh solusi dari sistem dinamik berbentuk eksponensial, hal ini juga dapat dilihat dari bentuk kurva pertumbuhan terhadap waktu.

## **5. DAFTAR PUSTAKA**

- [1] Direktorat Jenderal Perikanan Budidaya, Kementerian Kelautan dan Perikanan, 2013.
- [2] Putro, S. P., Widowati., and Suhartana. 2015. Assessment Level of Severity of Environmental Disturbance Caused by Aquaculture Activities Using Abundance-Biomass Curves of Macrobenthic Assemblages. *International Journal of Environmental Science and Development*, Vol. 6, No. 3, March 2015.
- [3] Gultom, 2002. Prospek Pengembangan Usaha Budidaya Ikan Mas Dalam Jaring Apung di Danau Toba, Desa Pasar Pangururan, Kabupaten Toba Samosir. Skripsi. Fakultas Perikanan dan Ilmu Kelautan. IPB (tidak dipublikasikan). Bogor.
- [4] Mulana, A. B. 2003. Analisis Kelayakan Usahatani Pembesaran dan Pemasaran Ikan Nila Gift Budidaya Keramba Jaring Apung, Desa Cikidang Bayabang, Kecamatan Mande, Kabupaten Cianjur, Jawa Barat. Skripsi. Fakultas Pertanian IPB (tidak dipublikasikan). Bogor.
- [5] Sigit Nova Riyanto dan Kartono. 2006. Model Pemanenan Logistik untuk Pemanenan Ikan dengan Laju Pemanenan Proposional. Jurusan Matematika FMIPA UNDIP Semarang
- [6] Fitria Rakhmawati dan Sutimin. 2006. Model Pemanenan Logistik dengan Daya dukung Bergantung Waktu pada Budidaya Rumput Laut. *Prosiding SPMIPA*; pp: 43-49; 2006.
- [7] Zullaikah dan sutimin .2008. Model Pertumbuhan Biomassa Rumput Laut *Gracillaria* dengan Carrying Capacity Bergantung Waktu . *Jurnal Matematika* Vol. 11, No.2, Agustus 2008: 78-86.
- [8] Widowati dan Sutimin. 2013. *Pemodelan Matematika Analisis dan Aplikasinya*. Semarang : UNDIP Press.
- [9] Sudaryono, A., Putro, S.P., Suminto, dan Asmi Citra Malina. 2014. Pengembangan Teknik Budidaya, Diversifikasi Produk, Dan Pengelolaan Lingkungan Sektor Perikanan Budidaya Untuk Mendukung Ketahanan Pangan Nasional. Laporan Akhir Tahun 2 Penelitian Prioritas Nasional Masterplan Percepatan Dan Perluasan Pembangunan Pembangunan Ekonomi Indonesia 2011 – 2025 (Penprinas MP3EI 2011-2025). Lembaga Penelitian dan Pengabdian kepada Masyarakat, Universitas Diponegoro, Semarang.
-

## Analisis Kestabilan Model Penghilangan Polutan Anorganik dengan Menggunakan Jamur

Lilin Amalia Soviana<sup>1</sup>, Widowati<sup>2</sup>, Sunarsih<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup>Jurusan Matematika, Universitas Diponegoro, lilinsoviana@gmail.com

**Abstrak.** Pada paper ini akan dianalisis model penghilangan polutan dengan menggunakan jamur. Hal ini diasumsikan bahwa polutan anorganik yang dibuang kedalam air dengan laju yang konstan dan akan habis karena faktor alam maupun oleh penyerapan jamur. Model ini dianalisis dengan menggunakan teori stabilitas persamaan diferensial dan simulasi. Analisis menunjukkan bahwa polutan anorganik dapat dihapus dari badan air dengan penyerapan jamur, tingkat pemindahan tergantung pada konsentrasi polutan anorganik, kepadatan penduduk jamur dan berbagai proses interaksi.

**Keywords:** analisis kestabilan, model matematika, polutan anorganik, jamur,.

### 1. Pendahuluan

Air merupakan hal yang sangat vital bagi kebutuhan makhluk hidup. Manusia sangat membutuhkan air bersih untuk dikonsumsi maupun digunakan untuk kebutuhan lainnya. Kualitas air akan sangat berpengaruh pada kesehatan orang yang mengkonsumsi atau menggunakannya.

Pencemaran air sudah menjadi masalah bagi beberapa orang, terutama bagi orang-orang yang tinggal dilingkungan industri. Zat-zat yang mencemari air atau biasanya disebut sebagai polutan dapat membuat kualitas air menurun sehingga menjadi tidak layak untuk dikonsumsi atau digunakan untuk kebutuhan lainnya. Polutan dapat berupa organik dan anorganik, biasanya jika polutan tersebut berasal dari limbah pabrik berupa polutan anorganik. Ada beberapa cara untuk mengurangi atau menghilangkan polutan anorganik dari dalam air. Salah satunya dengan bisorpsi atau penyerapan dengan menggunakan mikroorganisme. Salah satu mikroorganisme yang dapat digunakan dalam proses bisorpsi ini adalah jamur.

Beberapa penelitian mengenai penghilangan polutan anorganik dengan penyerapan oleh jamur telah banyak dilakukan, seperti Rosenzweig dan Pramer

[9] mempelajari pengaruh Kadmium, Zinc pada pertumbuhan dan aktivitas kolagenase dari nematode yang menjebak jamur. Selanjutnya Siegel dkk [8] meneliti tentang jamur berfilamen sebagai biosorbents logam. Veglio dan Beolchini [3] mengkaji tentang penghilangan kandungan logam dengan proses bisorpsi atau penyerapan. Zhou [6] mengkaji mengenai proses bisorpsi dengan menggunakan jamur *Rhizopus arrhizus* dan jamur lainnya. Lo dkk [10] melakukan penelitian tentang penyerapan timbal dengan jamur berfilamen. Sanghi dan Srivastava [7] melakukan penelitian mengenai penyerapan kromium menggunakan jamur. Boswell dan Davidson [4] juga melakukan penyelidikan pemodelan pada dinamika pertumbuhan dari jamur *mycellium* di lingkungan beracun pada tingkat jaringan hifa.

Dari beberapa penelitian-penelitian yang telah dilakukan belum ada yang mengkaji tentang pemodelan kuantitatif untuk proses penyerapan polutan oleh jamur.

Pada paper ini, dianalisis model matematika untuk menjelaskan fenomena penghilangan polutan anorganik dengan menggunakan populasi jamur. Model ini juga diselesaikan dengan menggunakan simulasi komputer.

## 2. Model Matematika dan Analisis Kestabilan

### 2.1 Model Penghilangan Polutan Anorganik dengan Jamur

Dalam proses pemodelan, kita menganggap bahwa populasi jamur digunakan untuk menghilangkan polutan anorganik berasal dari badan air. Misalkan  $T$  adalah konsentrasi polutan anorganik yang ada didalam badan air dengan tingkat  $Q$ . Misalkan  $T_1$  adalah konsentrasi polutan anorganik yang berkurang karena adanya jamur.  $M$  adalah kepadatan biomassa populasi jamur yang digunakan untuk menghilangkan polutan anorganik yang disertakan dengan tingkat  $q$ . Diasumsikan bahwa  $N$  adalah konsentrasi nutrisi yang disediakan dengan tingkat  $Q_1$ .  $C$  adalah konsentrasi oksigen terlarut yang dipasok dengan tingkat  $q_2$ . Selanjutnya, diasumsikan bahwa tingkat kepadatan biomassa populasi jamur yang dapat menyerap polutan diberikan oleh Michaelis-Menten,  $kMT/(k_{11} + k_{12}T)$ . Selanjutnya,  $k_0$  adalah tingkat konsentrasi dari racun yang merusak kepadatan biomassa populasi jamur. Ditemukan bahwa populasi jamur yang telah mati masih memiliki kemampuan untuk menyerap ion logam. Oleh karena itu, diasumsikan dalam proses pemodelan bahwa populasi jamur yang mati masih akan terus menyerap racun.  $k_1$  menunjukkan tingkat interaksi antara populasi jamur dan konsentrasi nutrisi untuk pertumbuhan populasi jamur. Selanjutnya, diperoleh model matematika penghilangan polutan anorganik dengan menggunakan jamur [1] yang berbentuk sistem dinamik seperti dibawah ini.

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= Q - \alpha_0(T - T_0) - \frac{kMT}{k_{11} + k_{12}T}, \\ \frac{dT_1}{dt} &= \frac{kMT}{(k_{11} + k_{12}T)} - \alpha_1 T_1, \\ \frac{dM}{dt} &= q - \alpha_2(M - M_0) + k_1 MN \\ &\quad - k_0 M T_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= q_1 - \beta N - k_1 MN, \\ \frac{dC}{dt} &= q_2 - \beta_1 C - \lambda_1 k_1 MN - \frac{\lambda kMT}{k_{11} + k_{12}T}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\text{dengan } T(0) = T_0 > 0, T_1(0) > 0, m(0) = m_0 > 0, n(0) > 0, C(0) > 0$$

### 2.2 Analisis Kestabilan

Dengan menyelesaikan persamaan (2.1) diperoleh 1 titik kesetimbangan  $E^*(T^*, T_1^*, M^*, N^*, C^*)$  yang mengikuti :

$$\begin{aligned} T_1^* &= \frac{kM^*T^*}{\alpha_1(k_{11} + k_{12}T^*)}, \\ N^* &= \frac{q_1}{\beta + k_1 M^*}, \\ C^* &= \left\{ q_2 - \lambda_1 k_1 M^* N^* - \frac{\lambda k M^* T^*}{k_{11} + k_{12} T^*} \right\} \beta_1, \\ q_2 &> \lambda_1 k_1 M^* N^* + \frac{\lambda k M^* T^*}{k_{11} + k_{12} T^*}. \end{aligned}$$

Untuk mencari kestabilannya akan digunakan teorema berikut :

Teorema 2.1[1]

Titik kesetimbangan  $E^*$  adalah stabil lokal.

Bukti :

Untuk membuktikan teorema ini,

kitamempertimbangkan matriks

Jacobian yang sesuai dengan model (2.1) disekitar  $E^*$

$$J(E^*) - vI = \begin{bmatrix} -A_1 - v & 0 & -A_2 & 0 & 0 \\ B_1 & B_2 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & -C_1 & -C_2 - v & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & -D_1 & -D_2 - v & 0 \\ -\lambda B_1 & 0 & -\lambda k A_2 - \lambda_1 k_1 n^* & -\lambda_1 k_1 m^* & \beta_1 - v \end{bmatrix}$$

Dari matriks Jacobian diatas,

nilai eigen diberikan oleh persamaan berikut :

$$(\beta_1 + v)\{v^4 + E_1 v^3 + E_2 v^2 + E_3 v + E_4\} = 0 \tag{2.2}$$

Dengan menggunakan teorema Routh-Hurwitz (2.2),

semua nilai eigen negatif dengan ketentuan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} E_1, E_2 &> E_3, \\ E_3(E_1 E_2 - E_3) - E_1^2 E_4 &> 0 \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa kondisi diatas terpenuhi, sehingga  $E^*$  stabil asimtotik lokal.

### 3. Simulasi Numerik

Dalam rangka memverifikasi kelayakan dari hasil analisis kami mengenai keberadaan  $E^*$  dan kondisi stabilitas yang sesuai, selanjutnya dilakukan beberapa perhitungan model secara numerik dengan memilih nilai parameter berikut. Untuk simulasi ini, diambil nilai parameter dari hasil penelitian [2,5,7].

**Tabel 2.1** nilai Parameter

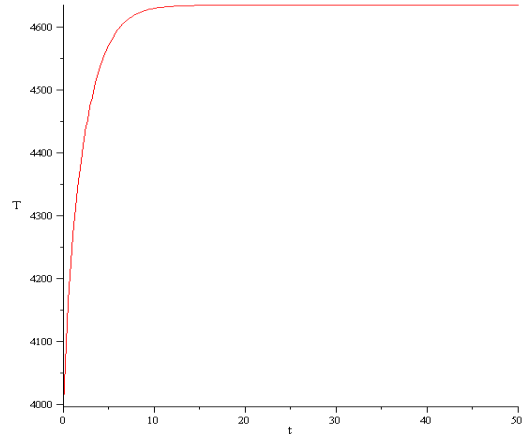
Parameter	Nilai Parameter
$Q$	$500 \text{ mg/L.h}$
$\alpha_0$	$0.5 \text{ h}^{-1}$
$k$	$1 \text{ L/mg h}$
$k_{11}$	$1$
$k_{12}$	$1 \text{ L/mg}$
$q$	$50 \text{ mg/L h}$
$\alpha_2$	$1 \text{ h}^{-1}$
$\alpha_1$	$0.01 \text{ h}^{-1}$
$T_0$	$4000 \text{ mg/L}$
$m_0$	$100 \text{ mg/L}$
$k_1$	$0.005 \text{ L/mg h}$
$q_1$	$50 \text{ mg/L}$
$\beta$	$0.5 \text{ h}^{-1}$
$q_2$	$20 \text{ mg/L h}$
$\beta_1$	$0.1 \text{ h}^{-1}$
$k_0$	$0.01 \text{ L/mg h}$
$\lambda$	$0.25$
$\lambda_1$	$0.1$

Nilai awal yang digunakan untuk simulasi adalah  $T(0) = 4000, T_1(0) = 0, m(0) = 100, n(0) = 200, C(0) = 1000$ . Dari nilai parameter di atas, diperoleh titik kesetimbangan  $E^*$  dengan nilai  $(T^*, T_1^*, M^*, N^*, C^*)$  sebagai berikut :

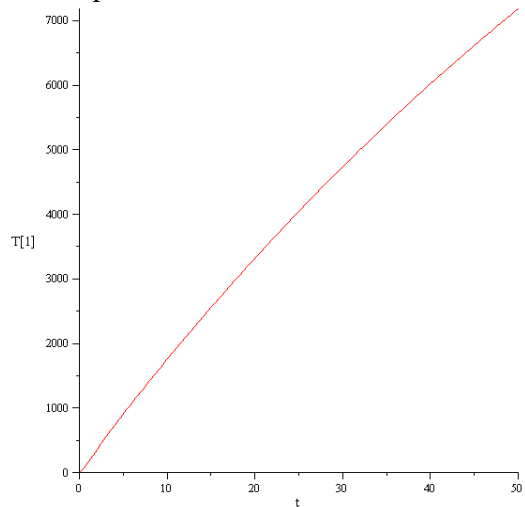
$$T^* = 990 \frac{\text{mg}}{\text{L}}, T_1^* = 300 \frac{\text{mg}}{\text{L}},$$

$$M^* = 7 \frac{\text{mg}}{\text{L}}, N^* = 92 \frac{\text{mg}}{\text{L}}, C^* = 185 \frac{\text{mg}}{\text{L}}.$$

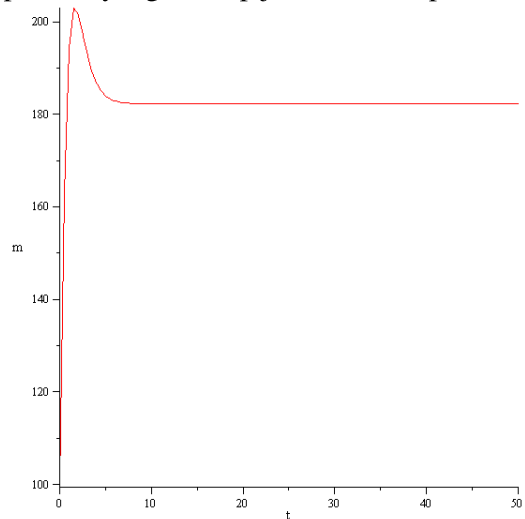
Grafik solusi dari sistem dinamik non linear (2.1) yang menyatakan perubahan konsentrasi polutan anorganik, tingkat konsentrasi polutan yang terserap oleh jamur, biomassa jamur, tingkat konsumsi nutrisi dan konsentrasi oksigen terlarut terhadap waktu diberikan pada gambar berikut :



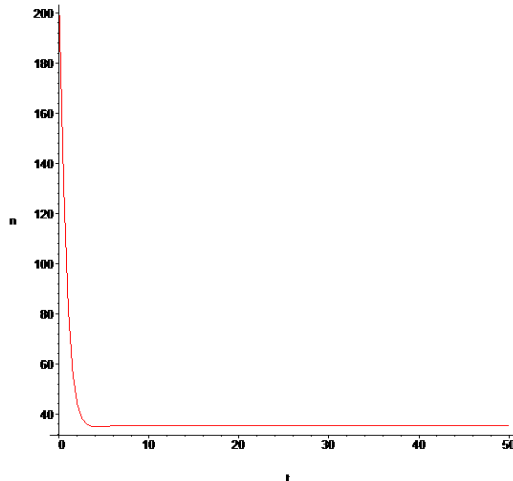
**Gambar 3.1** Perubahan konsentrasi polutan terhadap waktu



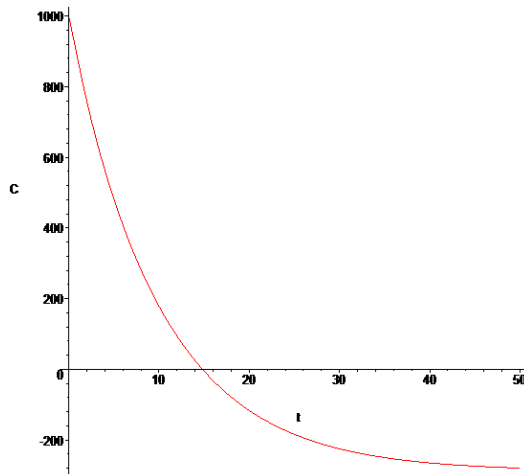
**Gambar 3.2** Perubahan konsentrasi polutan yang diserap jamur terhadap waktu



**Gambar 3.3** Perubahan biomassa jamur terhadap waktu



**Gambar 3.4** Perubahan konsentrasi nutrisi terhadap waktu



**Gambar 3.5** Perubahan konsentrasi oksigen terlarut terhadap waktu

Dari Gambar 3.1 terlihat konsentrasi polutan semakin lama semakin meningkat, kemudian berhenti bertambah pada saat  $t=10$ . Dari Gambar 3.2 dapat dilihat bahwa tingkat konsentrasi yang terserap oleh jamur semakin lama semakin bertambah. Hal itu menunjukkan bahwa semakin lama jumlah polutan di badan air semakin berkurang karena terserap oleh jamur. Dari Gambar 3.3 dapat dilihat bahwa biomassa jamur pada awalnya semakin bertambah kemudian pada saat  $t=3$  mulai mengalami penurunan, tapi pada saat  $t=10$  jumlahnya mulai stabil dan tidak mengalami penurunan maupun peningkatan lagi. Dari Gambar 3.4 dapat dilihat bahwa konsentrasi nutrisi yang dikonsumsi

mengalami penurunan sampai pada saat  $t=6$  mulai stabil dan tidak mengalami penurunan lagi. Dari Gambar 3.5 dapat dilihat bahwa tingkat konsentrasi oksigen terlarut semakin lama semakin mengalami penurunan.

#### 4. Kesimpulan

Analisis model menunjukkan bahwa polutan organik dapat dikeluarkan dari tubuh air dengan proses biosorpsi menggunakan populasi jamur. Simulasi numerik telah mengkonfirmasi hasil ini. Telah ditemukan bahwa hasil yang diperoleh secara kualitatif mirip dengan hasil eksperimen yang dipublikasikan dalam literatur. Sehingga dapat dikatakan bahwa proses biosorpsi memiliki potensi untuk membuat badan air bebas dari polutan organik dengan menggunakan populasi jamur berulang kali dan dapat mencakup teknik rekayasa genetika.

#### 5. Daftar Pustaka

- [1] A.Goyal, R.Sanghi, A.K.Misra, J.B.Shukla, A modeling study on the role of fungi in removing inorganic pollutants, *Mathematical Biosciences*. 244 (2013) 116-124.
- [2] A.K. Misra, J.B. Shukla, P. Chandra, Mathematical modeling and analysis of the depletion of dissolved oxygen in water bodies, *Nonlinear Anal.: RWA* 7 (2006) 980.
- [3] F. Veglio, F. Beolchini, Removal of metals by biosorption: a review, *Hydrometallurgy* 44 (1997) 301.
- [4] G.P. Boswell, F.A. Davidson, Modelling hyphal networks, *Fungal Biol. Rev.* 26 (1) (2012) 30.
- [5] J.B. Shukla, Rashmi Sanghi, Ashish Goyal, A.K. Misra, Modeling the desalination of saline water by using bacteria and marsh plants.

- Desalination 277 (1–3) (2011) 113–120.
- [6] J.L. Zhou, Zn biosorption by *Rhizopus arrhizus* and other fungi, *Applied Microbiol Biotechnol.* 51 (1999) 686.
- [7] R. Sanghi, A. Srivastava, Long term chromate reduction by immobilized fungus in continuous column, *Chemical Engineering. J.* 162 (1) (2010) 122.
- [8] S.M. Siegel, M. Galun, B.Z. Siegel, Filamentous fungi as metal biosorbents: a review, *Water Air Soil Poll.* 53 (1990) 335.
- [9] W.D. Rosenzweig, D. Pramer, Influence of cadmium, zinc and lead on growth, trap formation and collagenase activity of nematode-trapping fungi, *Applied Environmental Microbiology.* 40 (1980) 694.
- [10] W.H. Lo, H. Chua, K.H. Lam, S.P. Bi, A comparative investigation on the biosorption of lead by filamentous fungal biomass, *Chemosphere* 39 (1999) 2723.

## PEMODELAN PRODUK DOMESTIK REGIONAL BRUTO (PDRB) SEKTOR INDUSTRI DENGAN PENDEKATAN SPASIAL DATA PANEL

Abdul Karim<sup>1</sup>, Rochdi Wasono<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Statistika Universitas Muhammadiyah Semarang, abdulkarimcrb@gmail.com

<sup>2</sup>Statistika Universitas Muhammadiyah Semarang, didik2011@gmail.com

**Abstrak.** Sektor industri merupakan salah satu sektor yang mempunyai proporsi cukup besar dalam pembentukan PDRB serta dalam pembangunan perekonomian di Jawa Tengah. Model ekonometrika untuk PDRB dari sektor industri dipengaruhi oleh jumlah tenaga kerja di sektor industri dan upah. Selain dipengaruhi oleh kedua faktor tersebut PDRB sektor industri juga dipengaruhi oleh keberadaan efek region dari region lain serta efek waktu. Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder yang yang diperoleh dari Badan Pusat Statistik (BPS) untuk periode tahun 2011-2013. Tujuan makalah ini adalah untuk mengetahui faktor-faktor yang mempengaruhi PDRB sektor industri dengan adanya keberadaan efek region dan waktu, maka digunakan metode ekonometrika spasial panel. Dalam penelitian ini menggunakan bobot spasial queen contiguity, model spasial data panel yang dibangun dalam penelitian yaitu model spasial lag dan model spasial error dengan menerapkan fixed effect dan random effect. Berdasarkan uji Hausman didapatkan model random effect. Hasil model ini menghasilkan efek region (spasial) tidak mempengaruhi nilai PDRB sektor industri di Jawa Tengah menggunakan matriks bobot queen, selanjutnya upah berpengaruh signifikan pada alfa 5 persen terhadap PDRB Kabupaten dan Kota di Jawa Tengah.

**Kata kunci:** PDRB industri, sar, sem, spasial panel

### 1. PENDAHULUAN

PDRB industri, sar, sem, spasial panel Salah satu indikator keberhasilan pembangunan adalah laju pertumbuhan ekonomi. Laju pertumbuhan ekonomi diukur berdasarkan nilai tambah yang dikenal dengan istilah Produk Domestik Regional Bruto (PDRB). PDRB merupakan cerminan potensi perekonomian suatu wilayah. Nilai PDRB yaitu agregat nilai tambah yang dihasilkan oleh unit-unit produksi yang beroperasi di wilayah tersebut. Sektor industri sebagai salah satu sektor yang berperan dalam pertumbuhan ekonomi di Jawa Tengah, serta berperan sebagai penyedia lapangan kerja yang menampung tenaga kerja. Dengan tingkat pertumbuhan yang positif, sektor industri berperan dalam menjaga laju pertumbuhan ekonomi nasional. PDRB merupakan salah satu kajian ekonometrika, dalam upaya memahami fenomena ekonomi yang banyak dikembangkan dari teori-teori ekonomi untuk mendefinisikan hubungan antara berbagai variabel ekonomi dalam bentuk matematis. Hubungan matematis antara

variabel-variabel ekonomi yang ukuran-ukuran kuantitatifnya diperoleh dari dunia nyata sangat diperlukan sebagai pedoman dalam perumusan kebijakan ekonomi. Dalam pemodelan regresi spasial terdapat model spasial autoregresif (SAR) serta spasial eror model (SEM).

Penelitian ini dilakukan dengan pendekatan model regresi spasial berbasis data panel, sehingga data berbasis kewilayahan akan sangat sesuai jika menggunakan pendekatan spasial karena suatu wilayah yang memiliki karakteristik yang sama diduga saling berkaitan serta memperhatikan efek waktu.

Beberapa kajian yang berkaitan dengan pemodelan regresi spasial telah dilakukan oleh Karim *et al* [4], mengkaji pemodelan produksi kedelai di provinsi jawa tengah menggunakan dua proses spasial. Karim *et al* [5], mengkaji faktor-faktor yang mempengaruhi PDRB sektor industri menggunakan Spatial Durbin Error Model (SDEM). Selain itu, Karim *et al* [6], melakukan kajian efek spasial Bantuan Operasional Sekolah (BOS) menggunakan analisa spasial. Kemudian, Karim *et al* [7],

memodelkan kejadian gizi buruk di Provinsi Jawa Timur menggunakan spatial regression. Selanjutnya, Setiawan *et al* [9] memodelkan PDRB sektor industri menggunakan Spatial Durbin Model (SDM) dan Spatial Durbin Error Model (SDEM).

## 2. REGRESI PANEL

Greene [2] menyatakan, regresi panel digunakan untuk memodelkan dengan data panel dimana jumlah unit *cross sectional* dan beberapa unit waktu. Selain itu, perbedaan pengaruh dari unit cross sectional menjadi perhatian utama dalam regresi panel daripada perbedaan pengaruh dari unit waktu.

Baltagi [1] menyatakan, penggunaan data panel mempunyai beberapa keuntungan yaitu dapat mengontrol unobserved heterogeneity, memberikan data yang lebih informatif, mengurangi kolinearitas antar variabel, lebih baik dalam mempelajari perubahan dinamis karena berkaitan dengan observasi *cross section* yang berulang-ulang dan dengan membuat ketersediaan data dalam jumlah unit individu yang lebih banyak maka data panel bisa meminimalisasi bias yang terjadi jika kita mengagregatkan individu-individu ke dalam suatu agregat yang besar. Secara umum, model regresi panel adalah sebagai berikut :

$$y_{it} = \alpha_i + X_{it}\beta + \varepsilon_{it} \quad (1)$$

dimana  $Y_{it}$  merupakan variabel respon pada unit observasi ke- $i$  dan waktu ke- $t$ ,  $X_{it}$  adalah variabel prediktor pada unit observasi ke- $i$  dan waktu ke- $t$ ,  $\beta$  adalah koefisien *slope* ,  $\alpha$  adalah intersep model regresi,  $\varepsilon_{it}$  adalah komponen error pada unit observasi ke- $i$  dan waktu ke- $t$ .

## 3. REGRESI SPASIAL PANEL

Pemodelan regresi panel yang menambahkan aspek kewilayahan disebut dengan pemodelan regresi spasial panel. Menurut Elhorst [3], model regresi linear data panel yang terdapat interaksi di antara unit-unit spasialnya, akan memiliki

variabel spasial lag pada variabel respon atau variabel spasial proses pada error.

Bentuk model regresi panel spasial lag pada variabel respon dituliskan melalui persamaan sebagai berikut :

$$y_{it} = \rho \sum_{j=1}^N W_{ij} y_{it} + \alpha + X_{it}\beta + \varepsilon_{it} \quad (2)$$

dimana  $Y_{it}$  merupakan variabel respon pada unit observasi ke- $i$  dan waktu ke- $t$ ,  $\rho$  adalah koefisien spasial autoregresif dan  $W_{ij}$  adalah elemen matrik pembobot spasial,  $X_{it}$  adalah variabel prediktor pada unit observasi ke- $i$  dan waktu ke- $t$ ,  $\beta$  adalah koefisien *slope* ,  $\alpha$  adalah intersep model regresi,  $\varepsilon_{it}$  adalah komponen error pada unit observasi ke- $i$  dan waktu ke- $t$ .

Di sisi lain, model spasial error tidak melibatkan matriks pembobot spasial *lag* dari variabel respon. Bentuk model regresi panel spasial lag pada error dituliskan melalui persamaan sebagai berikut :

$$y_{it} = \alpha + X_{it}\beta + u_{it} \quad (3)$$

$$u_{it} = \lambda \sum_{j=1}^N W_{ij} u_{jt} + \varepsilon_{it} \quad (4)$$

dimana  $u_{it}$  menyatakan autokorelasi spasial error dan  $\lambda$  adalah koefisien spasial autokorelasi.

## 4. MATRIKS PEMBOBOT/ PENIMBANG SPASIAL (SPATIALWEIGHTING MATRIX)

Matriks pembobot spasial ( $W$ ) dapat diperoleh berdasarkan informasi jarak dari ketetanggaan (*neighborhood*), atau dengan kata lain dari jarak antara satu region dengan region yang lain. Beberapa metode untuk mendefinisikan hubungan persinggungan (*contiguity*) antar region menurut LeSage [8] antara lain sebagai berikut :

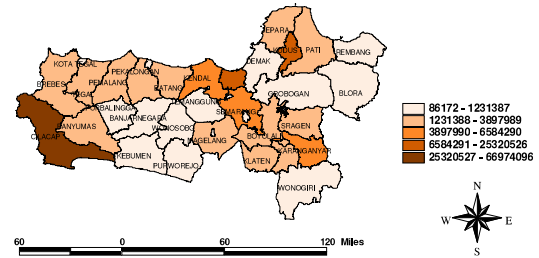
- a. *Linear contiguity* (persinggungan tepi). Persinggungan tepi mendefinisikan  $w_{ij} = 1$  untuk region yang berada di tepi (edge) kiri maupun kanan region yang menjadi perhatian,  $w_{ij} = 0$  untuk region lainnya.
- b. *Rook contiguity* (persinggungan sisi). Persinggungan sisi mendefinisikan  $w_{ij} = 1$  untuk region yang bersisian

- (common side) dengan region yang menjadi perhatian,  $wij = 1$  untuk region lainnya.
- c. *Bhisop contiguity* (persinggungan sudut). Persinggungan sudut mendefinisikan  $wij = 1$  untuk region yang titik sudutnya (common vertex) bertemu dengan sudut region yang menjadi perhatian,  $wij = 0$  untuk region lainnya.
  - d. *Double linear contiguity* (persinggungan dua tepi). Persinggungan dua tepi mendefinisikan  $wij = 1$  untuk dua entity yang berada di sisi (edge) kiri dan kanan region yang menjadi perhatian,  $wij = 0$  untuk region lainnya.
  - e. *Double rook contiguity* (persinggungan dua sisi). Persinggungan dua sisi mendefinisikan  $wij = 1$  untuk dua entity di kiri, kanan, utara dan selatan region yang menjadi perhatian,  $wij = 0$  untuk region lainnya.
  - f. *Queen contiguity* (persinggungan sisi-sudut). Persinggungan sisi-sudut mendefinisikan  $wij = 1$  untuk entity yang bersisian (common side) atau titik sudutnya (common vertex) bertemu dengan region yang menjadi perhatian,  $wij = 0$  untuk region lainnya.

Dalam penelitian ini bobot yang digunakan adalah bobot queen.

### 5. HASIL PENELITIAN

Gambar 5.1 menunjukkan nilai PDRB sektor industri di Provinsi Jawa Tengah, wilayah-wilayah yang memiliki nilai PDRB tinggi adalah Cilacap, Kota Semarang dan Kudus. Sedangkan Kota Magelang, Rembang dan Grobogan merupakan wilayah-wilayah yang memiliki nilai PDRB sektor industri rendah.



Sumber : Diolah dari data Kabupaten-Kota dalam Angka BPS Provinsi Jawa Tengah tahun 2013  
**Gambar 5.1** PDRB sektor industri berdasarkan kabupaten dan kota tahun 2013

Hasil estimasi dibagi menjadi dua bagian yakni estimasi parameter spasial lag dan spasial eror, masing-masing *fixed effect* dan *random effect*.

**Tabel 5.1** Estimasi Parameter Model SAR

<i>Spatial panel fixed effects lag model</i>		
Parameter	Koef	P-Value
Tenaga kerja	6.48	0.25
Upah	7.17	0.00
Rho	-0.12	0.36

Sumber : Hasil pengolahan

**Tabel 5.2** Estimasi Parameter Model SAR

<i>Spatial panel random effects lag model</i>		
Parameter	Koef	P-Value
Intersep	-1.91	0.36
Tenaga kerja	9.60	0.15
Upah	8.06	0.00
Rho	-0.25	0.00

Sumber : Hasil pengolahan

**Tabel 5.3** Estimasi Parameter Model SEM

<i>Spatial panel fixed effects lag model</i>		
Parameter	Koef	P-Value
Tenaga kerja	6.45	0.26
Upah	6.47	0.00
Lamda	-0.02	0.85

Sumber : Hasil pengolahan

**Tabel 5.4** Estimasi Parameter Model SEM

<i>Spatial panel random effects lag model</i>		
Parameter	Koef	P-Value
Intersep	-1.89	0.36
Tenaga kerja industry	9.18	0.16
Upah	6.53	0.00
Lamda	-0.24	0.16

Untuk memilih model fixed atau random effect menggunakan uji Hausman. Berdasarkan uji Hausman untuk model diatas adalah  $\chi^2 = 2.7881$ ,  $df = 2$ ,  $p\text{-value} = 0.2481$ . Artinya, terima  $H_0$  ( $P\text{-value} < 0,05$ ). Dengan demikian, model adalah model random effect dengan menggunakan *W queen contiguity*.

Berdasarkan analisis di atas, dapat disimpulkan bahwa  $Rho$  berperan penting pada pemodelan SAR *panel random effects*. Selain itu, variabel upah pada PDRB sektor industri berperan penting dengan taraf signifikan 5 persen. Artinya, PDRB sektor industri di suatu wilayah, dipengaruhi oleh nilai upah tenaga kerja sektor industri wilayah tersebut serta wilayah lain yang berdekatan.

## 6. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil pemodelan pada data PDRB sektor industri di Jawa Tengah dapat disimpulkan bahwa,  $Rho$  berperan penting pada pemodelan SAR *panel random effects*. Selain itu, variabel upah tenaga kerja sektor industri berperan penting pada taraf signifikan 5 persen. Artinya, PDRB sektor industri di suatu wilayah, dipengaruhi oleh nilai upah tenaga kerja sektor industri wilayah tersebut serta wilayah lain yang berdekatan.

## 7. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Baltagi B.H, *Econometrics Analysis of Panel Data*, 3rd edition, Chichester, England : John Wiley & Sons Ltd, 2005.
- [2] Greene W.H, *Econometrics analysis*, Third Edition, USA :Prentice Hall International, Inc, 2003
- [3] Elhorst J.P, *Spatial Panel Data Models*. In Fischer MM, Getis A (Eds) *Handbook of Applied Spatial Analysis*, Ch. C.2, Berlin Heidelberg New York : Springer, 2010.
- [4] Karim. A dan Wasono. R, *Pemodelan Produksi Kedelai di Provinsi Jawa Tengah menggunakan Dua Proses Spatial*, Makalah dipresentasikan di *Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika*, Universitas Ahmad Dahlan, Yogyakarta, 2014
- [5] Kari., A dan Setiawan, *Pemodelan PDRB Sektor Industri di SWP Gerbangkertasusila Dan Malang-Pasuruan dengan Pendekatan Spatial Durbin Error Model*, *Prosiding Seminar Nasional FMIPA*. Universitas Negeri Surabaya, 2012.
- [6] Karim, A dan Alfiyah, *Kajian Efek Spasial Bantuan Operasional Sekolah (BOS) Menggunakan Analisis Spasial*, *Jurnal Statistika Universitas Muhammadiyah Semarang*, 2, 1-2, 2014.
- [7] Karim, A dan Wasono, R, *Modelling Malnutrition Toddlers in East Java Province using Spatial Regression*. Research paper presented at *International Conference on Biomedical*, Universitas Gajah Mada, 2014.
- [8] LeSage. J.P, *The Theory and Practice of Spatial Econometrics*, Departement of Economics, University of Toledo, 1999.
- [9] Setiawan, Ahmad. I.S dan Karim. A, *Study of Spatial Weight Matrices of SDM and SDEM for Modelling GDP Main Sector in Jawa Timur Indonesia*, Research paper presented at *International Conference on Statistics and Mathematics* Institut Teknologi Sepuluh Nopember, 2015.

## Upah Minimum dan Tenaga Kerja Remaja: Pendekatan Spasial Panel dan non Spasial Panel

Ribut Nurul Tri Wahyuni<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Sekolah Tinggi Ilmu Statistik

**Abstract.** Penelitian ini akan menganalisis pengaruh upah minimum riil terhadap tenaga kerja remaja (tenaga kerja usia 16-19 tahun) di Indonesia selama periode 2007-2013. Model yang digunakan adalah pendekatan spasial panel dan non spasial panel. Pendekatan non spasial panel menghasilkan model *fixed effect*, sedangkan pendekatan spasial panel menghasilkan *Spatial Autoregressive (SAR) random effect*. Model yang paling tepat menjelaskan pengaruh upah minimum riil terhadap tenaga kerja remaja adalah model *fixed effect* (pendekatan non spasial panel). Hasil estimasi menunjukkan upah minimum riil tidak signifikan memengaruhi tenaga kerja remaja di Indonesia.

**Keywords:** *SAR random effect, fixed effect, tenaga kerja remaja*

### 1. Pendahuluan

Penelitian tentang upah minimum yang menggunakan model data panel biasanya mengabaikan fakta bahwa jumlah tenaga kerja dan variabel yang memengaruhinya antar wilayah saling terkait. Tenaga kerja di suatu wilayah kemungkinan akan berkorelasi dengan wilayah lainnya karena persamaan kondisi geografis, misalnya kemudahan akses dan sumber daya alam lainnya. Ketika observasi berkorelasi antar wilayah, maka teknik ekonometrika tradisional (pendekatan non spasial) akan mengabaikan *spatial dependence* sehingga bisa menghasilkan estimasi yang tidak benar (Kalenkoski dan Lacombe [8]).

Penelitian Neumark dan Wascher dalam Kalenkoski dan Lacombe [8] serta Brown et. al. dalam Zavodny [9] menyimpulkan bahwa upah minimum berpengaruh negatif terhadap tenaga kerja. Sedangkan penelitian Card [4] dan Zavodny [9] menemukan bahwa upah minimum tidak berpengaruh secara signifikan terhadap jumlah tenaga kerja remaja. Addison et. al. dalam Kalenkoski dan Lacombe [8] meneliti tentang pengaruh upah minimum terhadap tenaga kerja di subsektor perdagangan yang *low-wage*. Hasilnya adalah upah minimum berpengaruh positif terhadap tenaga kerja.

Penelitian-penelitian di atas belum memasukkan *spatial dependence* untuk mengestimasi tenaga kerja. Ketika

observasi antar wilayah saling berkorelasi, maka teknik ekonometrik tradisional, misalnya *Ordinary Least Square (OLS)*, dapat menghasilkan estimasi parameter yang bias, inkonsisten, atau tidak efisien (LeSage dan Pace dalam Kalenkoski dan Lacombe [8]).

Penelitian ini akan menganalisis pengaruh upah minimum riil terhadap tenaga kerja remaja (tenaga kerja usia 16-19 tahun) di Indonesia. Model yang digunakan adalah model pendekatan spasial panel dan non spasial panel. Variabel dalam persamaan merujuk pada model dari penelitian Zavodny [9] serta Ehrenberg dan Marcus dalam Brown et. al., [3]. Upah minimum riil dalam bentuk  $\ln(\ln upah_{riil}_{it})$ , sedangkan variabel tenaga kerja berupa rasio tenaga kerja remaja terhadap jumlah penduduk ( $tkremaja_{it}$ ). Data berupa data panel 33 provinsi di Indonesia periode 2007-2013 yang bersumber dari Badan Pusat Statistik (BPS).

### 2. Model Pendekatan non Spasial Panel

Data panel merupakan gabungan dari data *cross section* dan *time series* sehingga model umumnya memiliki 2 *subscript* pada variabelnya. Dengan pendekatan non spasial panel, estimasi parameter dapat dilakukan dengan 3 model, yaitu *Common Effect Model (CEM)*, *Fixed Effect Model (FEM)*, dan

*Random Effect Model (REM)*. Pada dasarnya perbedaan yang mendasari ketiga model tersebut adalah keberadaan efek individunya.

### 2.1 Common Effect Model (CEM)

Model ini mengasumsikan perilaku individu sama dalam berbagai kurun waktu dengan persamaan sebagai berikut:

$$Y_{it} = \alpha + X_{it}\beta + \varepsilon_{it} \quad (1)$$

dimana  $Y_{it}$  = variabel dependen individu ke- $i$  waktu ke- $t$ ,  $X_{it}$  = variabel independen individu ke- $i$  waktu ke- $t$ ,  $\varepsilon_{it}$  = error individu ke- $i$  waktu ke- $t$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  dan  $t = 1, 2, \dots, T$ .

Berdasarkan asumsi struktur matriks varians-kovarians errornya, ada 3 metode estimasi  $\beta$  yang dapat digunakan (Greene [6]), yaitu: *Ordinary Least Square (OLS)*, *Generalized Least Square (GLS)*, dan *Feasible Generalized Least Square (FGLS)/Seemingly Unrelated Correlation (SUR)*.

### 2.2 Fixed Effect Model (FEM)

*FEM* mengasumsikan bahwa perbedaan antar individu dapat diakomodasi melalui perbedaan *intersept*-nya ( $u_i$ ) (Gujarati [7]). Model persamaannya sebagai berikut:

$$Y_{it} = \alpha_i + X_{it}\beta + \varepsilon_{it} \quad (2)$$

dimana  $\alpha_i = c + u_i$ .

Sama dengan *CEM*, berdasarkan asumsi struktur matriks varians-kovarians errornya, terdapat 3 metode estimasi yang dapat digunakan pada *FEM*, yaitu: *OLS*, *GLS*, dan *FGLS/SUR*.

### 2.3 Random Effect Model (REM)

Perbedaan karakteristik antar individu merupakan komponen error sehingga perbedaan *intercept* ( $u_i$ ) untuk masing-masing individu merupakan variabel random/stokastik. Persamaan *REM* dapat ditulis sebagai berikut (Gujarati [7]):

$$y_{it} = \alpha + X_{it}\beta + w_{it} \quad (3)$$

$$y_{it} = \alpha + X_{it}\beta + (u_i + \varepsilon_{it}) \quad (4)$$

Pada *REM*, metode *OLS* tidak bisa digunakan untuk mendapatkan estimator yang efisien karena adanya korelasi antara  $w_{it}$  dan  $w_{is}$ .

$$\text{corr}(w_{it} w_{is}) = \frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + \sigma_\varepsilon^2} \quad (5)$$

Metode untuk mengestimasi parameter *REM* adalah *GLS*.

### 2.4 Model Terbaik dengan Pendekatan non Spasial Panel

Pemilihan model terbaik bisa dilakukan dengan 3 prosedur pengujian formal, yaitu uji Hausman untuk memilih model terbaik antara *FEM* dengan *REM*, uji Chow untuk memilih model terbaik antara *CEM* dengan *FEM*, dan uji *Breusch-Pagan Lagrange Multiplier (BP-LM)* untuk memilih model terbaik antara *CEM* dengan *REM* (Baltagi [2]).

Uji Hausman dilakukan terhadap asumsi ada tidaknya korelasi antara variabel independen dan efek individu. *REM* mengasumsikan tidak ada korelasi antara variabel independen dan efek individu [ $E(w_{it}|X_{it}) = 0$ ], sedangkan *FEM* mengasumsikan ada korelasi antara variabel independen dan efek individu [ $E(w_{it}|X_{it}) \neq 0$ ]. Hipotesis yang digunakan adalah sebagai berikut:

$$H_0: E(w_{it}|X_{it}) = 0$$

$$H_1: E(w_{it}|X_{it}) \neq 0$$

Jika  $[\hat{\beta} - \hat{\beta}_{GLS}] \hat{\Sigma}^{-1} [\hat{\beta} - \hat{\beta}_{GLS}] > \chi_k^2$ , maka dapat disimpulkan *FEM* lebih baik dari *REM* (Baltagi [2]).

Hipotesis uji Chow adalah:

$$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_i$$

$$H_1: \alpha_i \neq \alpha_j \text{ dimana } i \neq j$$

$$F_h = \frac{(RSS_{CEM} - RSS_{FEM}) / (n-1)}{RSS_{FEM} / (nT - n - k)} \quad (6)$$

Jika  $F_h > F_{(n-1), (nT-n-k)}$ , maka asumsi *intersept* sama tidak berlaku, sehingga *FEM* lebih baik dari *CEM* (Baltagi [2]).

Hipotesis uji BP-LM adalah sebagai berikut (Greene [6]):

$$H_0: \sigma_u^2 = 0 \text{ atau } \text{corr}(w_{it} w_{is}) = 0$$

$$H_0: \sigma_u^2 \neq 0 \text{ atau } \text{corr}(w_{it} w_{is}) \neq 0$$

$$LM = \frac{nT}{2(T-1)} \left[ \frac{\sum_{i=1}^n [\sum_{t=1}^T e_{it}]^2}{\sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T e_{it}^2} - 1 \right]^2 \quad (7)$$

$e_{it}$  = residual *CEM*

Jika  $LM > \chi_1^2$ , maka model estimasi yang tepat adalah *REM*.

### 2.5 Penentuan Struktur Matriks Varians-Kovarians Error

Uji *LM* digunakan untuk untuk menguji sifat heteroskedastis dari matriks varians-

kovarians error. Hipotesisnya adalah sebagai berikut (Greene [6]):

$H_0: \sigma^2_i = \sigma^2$  (struktur varian kovarian error homoskedastis)

$H_1: \sigma^2_i \neq \sigma^2$  (struktur varian kovarian error heteroskedastis)

$$LM = \frac{T}{2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\hat{\sigma}^2_i}{SSR} - 1 \right)^2 \quad (8)$$

dimana  $\hat{\sigma}^2_i$  = estimasi varians error individu ke- $i$  kondisi homoskedastis dan  $SSE = \text{sum square error FEM}$ .

Jika  $LM > \chi^2_{(\alpha, N-1)}$ , maka tolak  $H_0$ , artinya varians antarindividu tidak sama. Selanjutnya hubungan antarindividu (*cross-sectional correlation*) dapat diuji dengan menggunakan  $\lambda$  Lagrange Multiplier (Green [6]).

$$\lambda_{LM} = T \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} r^2_{ij} \quad (9)$$

dimana  $r^2_{ij}$  = korelasi error individu ke- $i$  dengan individu ke- $j$  dan  $i \neq j$ .

Formula ini berdistribusi *chi-square* dengan derajat bebas  $n(n-1)/2$ . Hipotesis nol ditolak jika  $\lambda_{LM} > \chi^2_{(\alpha, n(n-1)/2)}$ . Hipotesis awal yang digunakan adalah tidak terdapat hubungan antarindividu atau  $cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ .

### 3. Model Pendekatan Spasial Panel

Model pendekatan spasial panel adalah teknik untuk memodelkan dan menganalisis data panel dengan memperhitungkan efek kewilayahan (efek spasial). Model pendekatan spasial panel antara lain (Elhorst [5]):

1. *Spatial Autoregressive with Fixed Effect (SAR-FE)*

$$y_{it} = \lambda \sum_{j=1}^N w_{ij} y_{jt} + x_{it} \beta + \mu_i + \varepsilon_{it} \quad (10)$$

dimana  $\lambda$  = koefisien spasial lag,  $w_{ij}$  = matriks penimbang spasial, dan  $\mu_i$  = efek spesifik spasial.

2. *Spatial Autoregressive with Random Effect (SAR-RE)*

$$y_{it} = \lambda \sum_{j=1}^N w_{ij} y_{jt} + x_{it} \beta + \varepsilon_{it}$$

$$\varepsilon_{it} = \mu_i + v_{it} \quad (11)$$

dimana  $v_{it}$  = vektor error.

3. *Spatial Error Model with Fixed Effect (SEM-FE)*

$$y_{it} = x_{it} \beta + \mu_i + \varepsilon_{it}$$

$$\varepsilon_{it} = \rho \sum_{j=1}^N w_{ij} \varepsilon_{jt} + v_{it} \quad (12)$$

dimana  $\rho$  = koefisien spasial error.

4. *Spatial Error Model with Random Effect (SEM-RE)*

$$y_{it} = x_{it} \beta + \varepsilon_{it}$$

$$\varepsilon_{it} = \mu_i + \rho \sum_{j=1}^N w_{ij} \varepsilon_{jt} + v_{it} \quad (13)$$

5. *Spatial Lag and Error Model with Fixed Effect (SARMA-FE)*

$$y_{it} = \lambda \sum_{j=1}^N w_{ij} y_{jt} + x_{it} \beta + \mu_i + \varepsilon_{it}$$

$$\varepsilon_{it} = \rho \sum_{j=1}^N w_{ij} \varepsilon_{jt} + v_{it} \quad (14)$$

6. *Spatial Lag and Error Model with Random Effect (SARMA-RE)*

$$y_{it} = \lambda \sum_{j=1}^N w_{ij} y_{jt} + x_{it} \beta + \varepsilon_{it}$$

$$\varepsilon_{it} = \mu_i + \rho \sum_{j=1}^N w_{ij} \varepsilon_{jt} + v_{it} \quad (15)$$

### 3.1 Matriks Penimbang Spasial

Matriks penimbang yang digunakan dalam model dengan pendekatan spasial panel adalah *k-nearest neighbor*.  $k$  wilayah yang memiliki jarak terdekat dari suatu wilayah adalah tetangga bagi wilayah tersebut, sehingga nilai penimbangannya ( $w_{ij}$ ) = 1. Pengukuran jarak dilakukan dengan menarik garis lurus dari titik pusat wilayah satu ke titik pusat wilayah lain. Titik pusat yang dimaksud dapat berupa ibu kota wilayah atau tempat yang menjadi pusat kegiatan perekonomian dan pemerintahan. Titik pusat pengukuran suatu wilayah umumnya dinyatakan dalam bentuk koordinat kartesius. Titik pusat wilayah  $i$  adalah  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  dan titik pusat pengukuran wilayah  $j$  adalah  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ . Jarak antara wilayah  $i$  dan  $j$  dapat dirumuskan dalam formula jarak Eucledian, yaitu sebagai berikut:

$$d_{ij} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (16)$$

Penelitian BPS [1] menyatakan bahwa secara umum Indonesia memiliki 3 tetangga (berbatasan langsung dengan 3 wilayah). Matriks penimbang spasial ( $W$ ) dapat digambarkan sebagai berikut:

$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ w_{n1} & w_{n2} & \dots & w_{nn} \end{pmatrix} \quad (17)$$

dengan  $w_{ij}$  adalah penimbang wilayah  $i$  dengan wilayah  $j$ . Nilai  $w_{ij} = w_{ji}$  dan  $w_{ii} = 0$  untuk  $i = 1, 2, \dots, n$ .

### 3.2 Model Terbaik dengan Pendekatan Spasial Panel

#### 1. Model SAR dan Model SEM

Seperti yang sudah dijelaskan sebelumnya, ada beberapa model pendekatan spasial panel yang bisa digunakan. Oleh karena itu, perlu dilakukan pemilihan model terbaik yang akan digunakan untuk menggambarkan keterkaitan antarwilayah. Uji yang digunakan untuk kepentingan tersebut adalah uji *Lagrange Multiplier (LM)*.

Uji *LM* pada model *SAR* digunakan untuk memilih model yang lebih baik antara *CEM* dan *SAR*. Hipotesisnya adalah

$$H_0 : \lambda = 0 \text{ dan } \rho = 0$$

$$H_1 : \lambda \neq 0 \text{ dan } \rho = 0$$

Statistik uji yang digunakan adalah

$$LM_\lambda = \frac{\left(\frac{\hat{\varepsilon}'WY}{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}\right)^2}{J} \sim \chi_1^2 \quad (18)$$

dimana :

$$W = I_T \otimes W$$

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}}{nT}$$

$$\hat{\varepsilon} = Y - X\beta$$

$J$

$$= \frac{1}{\hat{\sigma}_\varepsilon^2} \left[ \left( (I_T \otimes W) X \hat{\beta} \right)' (I_{NT} - X(X'X)^{-1}X') (I_T \otimes W) X \hat{\beta} + TT_W \hat{\sigma}_\varepsilon^2 \right]$$

$$T_W = tr(WW + W'W)$$

Uji *LM* pada model *SEM* digunakan untuk memilih model yang lebih baik antara *CEM* dan *SEM*. Hipotesisnya adalah

$$H_0 : \lambda = 0 \text{ dan } \rho = 0$$

$$H_1 : \lambda = 0 \text{ dan } \rho \neq 0$$

Statistik uji yang digunakan adalah

$$LM_\rho = \frac{\left(\frac{\hat{\varepsilon}'W\hat{\varepsilon}}{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}\right)^2}{T \times T_W} \sim \chi_1^2 \quad (19)$$

dimana :

$$W = I_T \otimes W$$

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}}{nT}$$

$$\hat{\varepsilon} = Y - X\beta$$

$$T_W = tr(WW + W'W)$$

Jika kedua uji di atas memberi kesimpulan yang sama, bahwa model *SAR* dan model *SEM* adalah model yang lebih baik digunakan dibanding model *common effect*, maka perlu dilakukan uji lanjutan, yaitu uji *Lagrange Multiplier robust*. Uji ini memiliki kegunaan yang sama dengan uji sebelumnya, sehingga hipotesis yang digunakan juga tetap sama. Perbedaan uji *Lagrange Multiplier robust* dengan uji *Lagrange Multiplier* terletak pada statistik uji yang digunakan. Uji *Lagrange Multiplier robust* untuk model *SAR* adalah

$$RLM_\lambda = \frac{\left[ \left( \frac{\hat{\varepsilon}'WY}{\hat{\sigma}_\varepsilon^2} \right) - \left( \frac{\hat{\varepsilon}'W\hat{\varepsilon}}{\hat{\sigma}_\varepsilon^2} \right) \right]^2}{J - (T \times T_W)} \sim \chi_1^2 \quad (20)$$

Uji *Lagrange Multiplier robust* untuk model *SEM* adalah

$$RLM_\lambda = \frac{\left[ \left( \frac{\hat{\varepsilon}'W\hat{\varepsilon}}{\hat{\sigma}_\varepsilon^2} \right) - tJ^{-1} \left( \frac{\hat{\varepsilon}'WY}{\hat{\sigma}_\varepsilon^2} \right) \right]^2}{t - (t^2 \times J^{-1})} \sim \chi_1^2 \quad (21)$$

$$t = T \times T_W$$

Jika 2 uji di atas memberikan hasil yang sama, yaitu model *SAR* dan model *SEM* merupakan model yang lebih baik digunakan dibanding model *common effect*, maka peneliti dapat menggunakan model dengan *p-value* yang lebih kecil, menggunakan model gabungan, atau memilih salah satu di antara keduanya.

#### 2. Fixed Effect atau Random Effect

Dalam penelitian ini, model regresi spasial panel yang terpilih akan diperbandingkan apakah memiliki efek tetap atau efek random. Pemeriksaan tersebut dilakukan dengan uji Hausman.

$$H_0 : m = 0$$

$$H_1 : m \neq 0$$

Statistik uji yang digunakan adalah

$$m = \hat{q}' [Var(\hat{q})]^{-1} \hat{q} \quad (22)$$

$$\hat{q} = \hat{\beta}_{FE} - \hat{\beta}_{RE}$$

$Var(\hat{q}) = Var(\hat{\beta}_{FE}) - Var(\hat{\beta}_{RE})$   
 Statistik  $m$  mendekati distribusi  $\chi_k^2$ ,  
 dengan  $k$  adalah dimensi dari vektor  $\beta$ .

**4. Tahapan Pemilihan Model dengan Pendekatan non Spasial Panel**

Tahapan yang dilakukan untuk mendapatkan model terbaik dengan pendekatan non spasial panel adalah:

1. Melakukan uji Chow.

Effects Test	Statistic	d.f.	Prob.
Cross-section F	18.692695	(32,196)	0.0000
Cross-section Chi-square	323.210150	32	0.0000

Hasilnya tolak  $H_0$  sehingga dapat disimpulkan *FEM* lebih baik daripada *CEM*.

2. Karena hasil uji Chow tolak  $H_0$ , dilanjutkan uji Hausman.

Test Summary	Chi-Sq. Statistic	Chi-Sq. d.f.	Prob.
Cross-section random	17.785888	2	0.0001

Hasilnya tolak  $H_0$  sehingga dapat disimpulkan *FEM* lebih baik daripada *REM*.

3. Melakukan uji struktur matriks varians kovarians error.

$LM = \frac{T}{2} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\hat{\sigma}_i^2}{\hat{\sigma}^2} - 1 \right]^2 = 114,51$  dan  $\chi_{0,05,32}^2 = 20,072$  sehingga dapat disimpulkan struktur matriks varians-kovarians error adalah heteroskedastis. Selanjutnya dilakukan uji  $\lambda_{LM}$ . Hasilnya adalah  $\lambda_{LM} = T \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} r_{ij}^2 = 386,9996$ , sedangkan  $\chi_{(0,05; 528)}^2 = 124,342$ . Jadi dapat disimpulkan bahwa struktur matriks varians-kovarians error adalah heteroskedastis dan ada *cross sectional correlation*. Metode estimasi yang paling tepat adalah *SUR*. Karena  $T < n$ , maka metode *SUR* tidak bisa dilakukan. Oleh karena itu, metode *GLS* dipakai untuk mengestimasi  $\beta$  dengan *Panel Corrected Standard Error (PCSE)* agar estimasinya *robust*.

4. *Run* model terpilih dengan pendekatan non spasial panel, hasilnya adalah sebagai berikut:

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.071377	0.010573	6.751080	0.0000
LNMW?	0.001368	0.001578	0.867235	0.3869
SCH?	-0.006481	0.001790	-3.620344	0.0004

**5. Tahapan Pemilihan Model dengan Pendekatan Spasial Panel**

Tahapan yang dilakukan untuk mendapatkan model terbaik dengan pendekatan spasial panel adalah:

1. Melakukan uji *LM*.

```
Lagrange multiplier diagnostics for spatial dependence
data:
model: lm(formula = fm, data = indo)
weights: Mat_panel_listw
LMerr = 89.792, df = 1, p-value < 2.2e-16
```

```
Lagrange multiplier diagnostics for spatial dependence
data:
model: lm(formula = fm, data = indo)
weights: Mat_panel_listw
LMlag = 112.09, df = 1, p-value < 2.2e-16
```

Hasil uji *LM* menunjukkan *p-value* < 0,05. Artinya, model *SAR* atau *SEM* lebih baik digunakan dibanding *CEM*. Karena keputusannya tolak  $H_0$  pada dua model tersebut, maka selanjutnya dilakukan uji *LM robust*.

2. Melakukan uji *LM robust*, hasilnya adalah sebagai berikut:

```
Lagrange multiplier diagnostics for spatial dependence
data:
model: lm(formula = fm, data = indo)
weights: Mat_panel_listw
RLMerr = 0.45345, df = 1, p-value = 0.5007
```

```
Lagrange multiplier diagnostics for spatial dependence
data:
model: lm(formula = fm, data = indo)
weights: Mat_panel_listw
RLMlag = 22.75, df = 1, p-value = 1.845e-06
```

Hasil uji *LM robust* terhadap model *SAR* menunjukkan *p-value* < 0,05, sedangkan model *SEM* menunjukkan *p-value* > 0,05. Artinya, model *SAR* lebih baik dibanding model *SEM*.

3. Melakukan uji Hausman, hasilnya adalah:

```
Hausman test for spatial models
data:
chisq = 0.47721, df = 2, p-value = 0.7877
alternative hypothesis: one model is inconsistent
```

Hasil uji Hausman adalah terima Ho. Jadi model terpilih adalah *SAR-RE*.

4. Melakukan uji t pada setiap estimasi parameter.

Hasil uji t menunjukkan bahwa  $\lambda$  tidak signifikan. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa model dengan pendekatan spasial panel tidak bisa dipakai dalam menggambarkan hubungan upah minimum dan tenaga kerja remaja di Indonesia.

```
Spatial autoregressive coefficient:
      Estimate Std. Error t-value Pr(>|t|)
Lambda -0.037840  0.087735 -0.4313  0.6663

Coefficients:
      Estimate Std. Error t-value Pr(>|t|)
(Intercept)  0.0695169  0.0082378  8.4387 < 2.2e-16 ***
lnupahriil  0.0021127  0.0013637  1.5492  0.1213
school      -0.0067175  0.0012031 -5.5835  2.358e-08 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

## 6. Analisis Model Terbaik

Dari hasil di atas dapat dilihat bahwa model terbaik yang bisa menjelaskan hubungan upah minimum riil dan tenaga kerja remaja adalah model dengan pendekatan non spasial panel, yaitu *FEM* dengan metode estimasi *GLS*. Persamaannya adalah sebagai berikut:

$$tkremaja_{it} = 0,071 + u_i + 0,001 \ln upahriil_{it}^* - 0,006 school_{it}^* \quad (23)$$

keterangan: \*) signifikan pada  $\alpha = 5\%$   
Upah minimum riil tidak signifikan memengaruhi tenaga kerja remaja. Hasil tersebut sejalan dengan hasil penelitian Card [4] dan Zavodny [9]. Kemungkinan ini terjadi karena mayoritas tenaga kerja remaja di Indonesia merupakan tenaga kerja keluarga (tidak dibayar) atau upahnya di bawah upah minimum regional.

## 7. Kesimpulan

Model dengan pendekatan non spasial panel lebih baik dalam menjelaskan pengaruh upah minimum riil terhadap tenaga kerja remaja dibanding model dengan pendekatan spasial panel.

## 8. Daftar Pustaka

- [1] Badan Pusat Statistik, Analisis Dampak Spasial Pada Peramalan Perekonomian dan Ketenagakerjaan Provinsi, Jakarta: BPS, 2011.
- [2] Badi H. Baltagi, *Econometric Analysis of Panel Data Third Edition*, West Sussex: John Wiley & Sons, 2005.
- [3] Charles Brown, Curtis Gilroy dan Andrew Kohen, "The Effect of the Minimum Wage on Employment and Unemployment", *Journal of Economic Literature, Volume 20, Issue 2, pp. 487-528*, 1982.
- [4] David Card, "Using Regional Variation in Wages to Measure the Effects of the Federal Minimum Wage", *Industrial and Labor Relations Review, Volume 46, Issue 1, pp. 22-37*, 1992.
- [5] J. Paul Elhorst, *Spatial Panel Data Models in Fischer M.M. and A. Getis (Eds.) Handbook of Applied Spatial Analysis*, Berlin: Springer, 2010.
- [6] William H. Greene, *Econometric Analysis Fifth Edition*, New Jersey: Prentice Hall, 2003.
- [7] Damodar N. Gujarati, *Basic Econometrics Fourth Edition*, New York: McGraw-Hill, 2003.
- [8] Charlene M. Kalenkoski dan Donald J. Lacombe, "Minimum Wages and Teen Employment: A Spatial Panel Approach", *IZA DP No. 5933*, 2011.
- [9] Madeline Zavodny, "The Effect of the Minimum Wage on Employment and Hours", *Labour Economics 7, pp. 729-750*, 2000.

## PEMILIHAN PORTOFOLIO OPTIMAL UNTUK PERUSAHAAN ASURANSI DENGAN *LOSS AVERSION*

Kornelia Paskatria C, S. Si<sup>1</sup>, R Heru Tjahjana<sup>2</sup>, Farikhin<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Universitas Diponegoro, corneliacahayani@gmail.com

<sup>2</sup>Universitas Diponegoro, heru\_tjahjana@yahoo.com

<sup>3</sup>Universitas Diponegoro, farikhin.math.undip@gmail.com

**Abstrak.** Masalah investasi yang optimal untuk sebuah perusahaan asuransi lebih banyak menarik perhatian dalam beberapa tahun terakhir. Secara umum, pembuat keputusan investasi perusahaan asuransi diasumsikan rasional dan menghindari resiko. Namun pada kenyataannya ini tidak sepenuhnya rasional untuk cara pengambilan keputusan. Dalam tulisan ini, pengambil keputusan investasi diasumsikan *loss aversion*. Proses surplus perusahaan asuransi dimodelkan dengan proses Lévy. Perusahaan asuransi bertujuan untuk memaksimalkan keperluan yang diharapkan ketika kekayaannya melebihi tingkat aspirasinya. Dengan bantuan metode *martingale*, akan mengubah masalah maksimalisasi dinamis menjadi masalah optimasi statis yang ekuivalen. Dengan menyelesaikan masalah optimasi statis, akan didapatkan portofolio optimal dan proses optimal kekayaan.

**Kata Kunci:** pemilihan portofolio, perusahaan asuransi, *loss aversion*, metode *martingale*.

### 1. PENDAHULUAN

Portofolio adalah investasi dalam berbagai instrumen keuangan yang dapat diperdagangkan di Bursa Efek dan Pasar Uang dengan tujuan menyebarkan sumber perolehan *return* dan kemungkinan risiko. *Return* keuangan yang dimaksud meliputi saham, obligasi, valuta asing, deposito, indeks harga saham, dan produk *derivative* lainnya (Mohamad Samsul, 2006).

Tingkat pengembalian yang diharapkan (*expected return*) adalah *return* yang diharapkan yang akan diperoleh oleh investor di masa mendatang yang sifatnya belum terjadi. Dengan adanya ketidakpastian tersebut, maka investor perlu membentuk portofolio optimal. Tujuan membentuk portofolio optimal adalah memenuhi prinsip dalam berinvestasi yaitu memperoleh *return* pada tingkat yang dikehendaki dengan resiko yang paling minimum. Konsep dari resiko portofolio ini pertama kali diperkenalkan oleh Harry M. Markowitz.

Teori pemilihan portofolio pada umumnya berdasarkan model *expected utility maximization* (EUM). Pada

beberapa tahun terakhir, beberapa teori telah diusulkan untuk memperbaiki kelemahan dari teori EUM tersebut, salah satunya menurut Tversky et. al [1] yang paling terkenal adalah *Cumulative Prospect Theory* atau lebih dikenal dengan CPT. Dengan berkembangnya ilmu, beberapa peneliti seperti Berkelaar et. al [2] mempelajari masalah seleksi portofolio dinamis didalam CPT. Mereka membandingkan secara spesifik 2 bagian yaitu fungsi utilitas dan perolehan investasi yang optimal pada investor yang *loss averse*.

Asuransi adalah salah satu produk jasa keuangan yang berkembang di Indonesia seiring dengan tumbuhnya perekonomian nasional. Saat ini asuransi telah mulai banyak dirasakan manfaatnya baik secara individual, kelompok masyarakat maupun dunia usaha. Fungsi primer dari asuransi pada dasarnya memberikan perlindungan kepada nasabah atau pihak bertanggung terhadap resiko yang dihadapinya.

Secara umum bahwa resiko tersebut direspon sebagai suatu kejadian yang merugikan, karena itu dikelola untuk dihindari (*risk avoidance*) dikurangi (*risk*

reduction), ditahan atau ditekan (*risk retention*), dibagi (*risk sharing*) dan dialihkan atau ditransfer (*risk transfer*).

Sementara jalan keluar yang lazim ditempuh dalam mengatasi resiko, adalah dengan cara berasuransi yaitu mengalihkan atau mentransfer resiko kepada perusahaan asuransi.

Masalah investasi yang optimal untuk sebuah perusahaan asuransi lebih banyak menarik perhatian dalam beberapa tahun terakhir. Secara umum, pembuat keputusan investasi perusahaan asuransi diasumsikan rasional dan menghindari resiko. Namun pada kenyataannya ini tidak sepenuhnya rasional untuk cara pengambilan keputusan.

Berdasarkan penelitian sebelumnya, penulis akan menggabungkan *cumulative prospect theory* ke dalam masalah investasi yang optimal pada perusahaan asuransi. Dalam tulisan ini, pengambil keputusan investasi diasumsikan *loss aversion*. Proses surplus perusahaan asuransi dimodelkan dengan proses Lévy. Perusahaan asuransi bertujuan untuk memaksimalkan keperluan yang diharapkan ketika kekayaannya melebihi tingkat aspirasinya. Dengan bantuan metode *martingale*, penulis akan mengubah masalah maksimalisasi dinamis menjadi masalah optimasi statis yang ekuivalen.

## 2. HASIL PENELITIAN

### 2.1 Trading Strategies (Strategi Perdagangan)

Perusahaan asuransi menanamkan modal pada pasar saham dimana asset pada  $n + 1$  diperdagangkan secara berkelanjutan saat  $[0, T]$ . Rumus harga saham hari ini ( $S_0$ ) didefinisikan sebagai berikut

$$dS_0(t) = S_0(t) \cdot r(t) dt \quad (2.1)$$

Dimana  $S_0(0) = 1$  dan  $r(t)$  adalah suku bunga. Sedangkan asset dengan  $n$  resiko, rumus harga saham yang akan datang ( $S_i$ ) didefinisikan sebagai berikut

$$dS_i(t) = S_i(t) \left[ b_i(t) dt + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}(t) dB_j(t) \right] \quad (2.2)$$

### 2.2 Proses Cramér –Lundberg dan Teori Ruin

Teori *classical collective risk* dikenalkan oleh Filip Lundberg pada tahun 1903. Lundberg menyatakan bahwa proses penggabungan Poisson adalah dasar dari teori resiko aktuaria pada asuransi *non-life*. Kemudian pada tahun 1930 Harald Cramér mempelajari lebih mendalam mengenai penelitian Lundberg untuk memodelkan teori *classical collective risk* pada perusahaan asuransi. Sehingga proses pembelajaran pada teori resiko tersebut dikenal sebagai proses Cramér – Lundberg.

Proses Cramér – Lundberg ini dapat digunakan untuk mengetahui proses surplus pada perusahaan asuransi yaitu yang didefinisikan sebagai berikut [2]

$$U(t) = x + \int_0^t \alpha(s) ds - S(t) = x + \int_0^t \alpha(s) ds - \sum_{i=1}^{K(t)} Z_i \quad (2.3)$$

Dimana  $x > 0$  adalah saham awal pada perusahaan asuransi,  $\alpha(s) > 0$  adalah jumlah premi sampai dengan  $t$ , dan  $S(t)$  adalah jumlah klaim yang telah dibayarkan.

Proses stokastik pada (2.3) adalah  $S(t)$  dengan ruang probabilitas  $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\}$  yang dapat dideskripsikan sebagai berikut [2]

- (i)  $\mathbb{P}$  adalah sebuah filtrasi  $\sigma$  dan  $0 \leq \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \dots$  merupakan waktu pembayaran klaim. Misal  $\sigma_0 = 0$ , variabel random  $T_n = \sigma_n - \sigma_{n-1}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) non-negatif.
- (ii)  $K(t) = \sup\{n: \sigma_n \leq t\}$ ,  $t \geq 0$  adalah jumlah klaim sampai dengan waktu  $t$ . Hubungan antara waktu

$\{\sigma_0, \sigma_1, \dots\}$  dan proses penghitungan  $\{K(t), t \geq 0\}$  adalah sebagai berikut  $\{K(t) = n\} = \{\sigma_n \leq t < \sigma_{n+1}\}, n = 0, 1, \dots$

(iii) Barisan  $\{Z_n, n = 1, 2, \dots\}$  merupakan jumlah klaim yang telah dibayarkan oleh perusahaan asuransi. Misal barisan  $\{Z_n\}$  adalah independen, maka penghitungan jumlah klaim hingga  $t$  diberikan sebagai berikut

$$S(t) = \sum_{i=1}^{K(t)} Z_i, t \geq 0$$

**Teorema 2.1** Misal  $\eta \geq 0$  merupakan variabel random fungsi terukur- $\mathcal{F}$ , maka diberikan nilai kekayaan awal yaitu  $E[H(t)\eta] = x$ , dimana ada pada proses portofolio sedemikian sehingga  $\pi(t) \in \Pi, t \in [0, T]$ , dan  $X^\pi(T) = \eta$ .

**Teorema 2.2** Dengan menganggap masalah pemilihan portofolio optimal pada perusahaan asuransi dan pembuat keputusan investasi diasumsikan adalah loss averse, maka portofolio optimal  $\pi^*(t), t \in [0, T]$  diberikan pada

$$\pi^*(t) = \frac{1}{1 - \gamma_1} (x - \xi)[\sigma(t)\sigma(t)^T]^{-1}(b(t) - r(t)I_n)$$

### 3. KESIMPULAN

Penulisan ini dapat disimpulkan bahwa, nilai kekayaan yang optimal pada perusahaan asuransi adalah sebagai berikut.

$$E[U(X^*(T))] = \alpha \left( x - \xi e^{-\int_0^T r(t)dt} \right)^{\gamma_1} \exp \left\{ \gamma_1 \int_0^T r(t)dt + \frac{\gamma_1}{2(1 - \gamma_1)} \int_0^T \|\theta(t)\|^2 dt + \int_0^T \int_R \left[ -1 + \gamma_1 p(t, z) + (1 - \gamma_1) \left( 1 - (p(t, z))^{\frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1}} \right) \right] v(dz) dt \right\}$$

### 4. DAFTAR PUSTAKA

[1] A. Tversky and D. Kahneman, "Advances in Prospect-Theory - Cumulative Representation of Uncertainty," *J. Risk Uncertain.*, vol. 5, no. 4, pp. 297-323, 1992.

[2] A. B. Berkelaar, R. Kouwenberg, and T. Post, "Optimal Portfolio Choice under Loss Aversion," *Rev. Econ. Stat.*, vol. 86, no. 4, pp. 973-987, 2004.

[3] Dr. Mohamad Samsul, M.Si, Ak. 2006. "Pasar Modal dan Manajemen Portofolio". Erlangga. Jakarta.

[4] Wenjing Guo. Optimal portfolio choice for an insurer with loss aversion. *Insurance: Mathematics and Economics*. Vol: 58 (2014). Hal: 217-222.

[5] V. W. Mario, "From Ruin Theory to Solvency in Non-Life Insurance", vol. -, no. -(2013), pp. 1-11.

[6] L. D. Minkova, "Insurance Risk Theory," 2010.

## MODEL OPTIMASI *ECONOMIC ORDER QUANTITY* (EOQ) UNTUK BARANG YANG MENGALAMI PENYUSUTAN

Warno Yulistio<sup>1</sup>, Siti Khabibah<sup>2</sup>, H. Djuwandi, SU<sup>3</sup>  
<sup>1,2,3</sup>Jurusan Matematika FSM Universitas Diponegoro  
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Tembalang Semarang

**Abstrak.** Pada Tugas akhir ini dibahas suatu model persediaan untuk barang yang mengalami penyusutan. Dalam hal ini, penyusutan berarti mengacu pada barang yang membusuk, rusak, menguap atau kadaluarsa dan kehilangan kualitas atau keseluruhan nilai melalui waktu. Pada model optimasi *Economic Order Quantity* (EOQ) untuk barang yang mengalami penyusutan akan ditentukan kuantitas pemesanan yang optimal sehingga dapat memenuhi permintaan konsumen dengan biaya total persediaan yang minimum. Berdasarkan model dapat ditentukan solusi optimal dan dilakukan simulasi numerik di Toko Karona. Setelah dilakukan simulasi model pada Toko Karona, tingkat efisiensi biaya model optimasi *Economic Order Quantity* (EOQ) untuk barang yang mengalami penyusutan yaitu sebesar 31 %.

**Kata kunci :** Persediaan, *Economic Order Quantity* (EOQ), Penyusutan

### 1. PENDAHULUAN

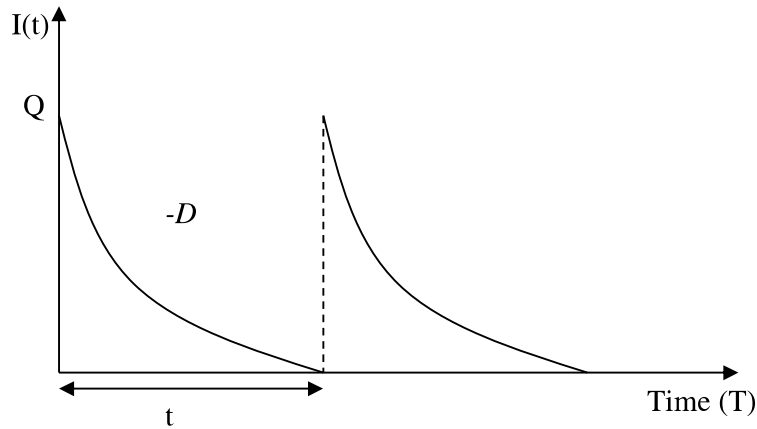
Persediaan barang merupakan salah satu unsur yang paling aktif dalam operasi perusahaan yang secara berlanjut diperoleh atau diproduksi maupun dijual. Perusahaan juga harus menjaga agar persediaan selalu cukup dan proses produksi bisa berjalan lancar. Selain itu, perusahaan menghendaki biaya total yang dikeluarkan perusahaan seminimal mungkin. Peminimalan biaya persediaan dapat dilakukan dengan metode *Economic Order Quantity* (EOQ), dimana model optimasi *Economic Order Quantity* (EOQ) dapat digunakan untuk membantu menentukan persediaan yang efisien, sehingga biaya total persediaan akan minimal [1]. Dalam proses persediaan barang, seringkali timbul masalah penyusutan barang. Ada beberapa kategori untuk barang yang mengalami penyusutan. Kategori pertama mengacu pada barang yang membusuk, rusak, menguap atau kadaluarsa melalui waktu, seperti daging, sayuran, buah, obat-obatan dan sebagainya. Kategori kedua mengacu pada kehilangan sebagian atau keseluruhan nilai melalui waktu, karena teknologi baru atau pengenalan alternatif lain, seperti chip komputer, ponsel, fashion dan barang

musiman. Penyusutan tersebut akan mengurangi kualitas barang. Semakin lama barang disimpan, maka akan semakin besar biaya penyimpanannya [2]. Goyal dan Giri dalam [2] pada tahun 1990, memberikan ulasan lengkap mengenai barang yang mengalami penyusutan. Pada model optimasi *Economic Order Quantity* untuk barang yang mengalami penyusutan ini dibuat berdasarkan literatur yang berjudul *Economic Order Quantity Model for Deteriorating Items with Planned Backorder level* oleh [15].

Dalam Tugas Akhir ini akan dikaji model optimasi *Economic Order Quantity* (EOQ) klasik dan model optimasi *Economic Order Quantity* (EOQ) untuk barang yang mengalami penyusutan dan setelah model di formulasikan dilakukan simulasi numerik.

### 2. HASIL PENELITIAN

Model persediaan untuk barang yang mengalami penyusutan dapat dilihat pada Gambar 2.1 berikut :



Gambar 2.1 Model persediaan yang mengalami penyusutan

Gambar 2.1 dapat diketahui bahwa tingkat persediaan barang  $I(T)$  akan berkurang seiring bertambahnya waktu  $T$ . Karena pada model persediaan ini permintaan diasumsikan diketahui dalam jumlah pasti dan konstan, sehingga laju perubahan persediaan  $I(T)$  berkurang berbanding lurus dengan tingkat permintaan  $D$  dan tingkat penyusutan barang  $\theta$  terhadap waktu  $T$  pada interval  $(0, t)$ . Sehingga perubahan tingkat persediaan  $I(T)$  terhadap waktu  $t$  adalah

$$\frac{dI}{dT} + \theta I_T = -D$$

Berikut macam-macam biaya yang digunakan pada model EOQ unuk barang yang mengalami penyusutan:

1. Biaya Pemesanan

Biaya pemesanan (*ordering cost*) adalah biaya yang dikeluarkan ketika sebuah pesanan diajukan dalam satu periode perencanaan, sehingga besarnya biaya pemesanan adalah

$$TOC(t) = \frac{A}{t}$$

2. Biaya Penyimpanan

Biaya penyimpanan adalah biaya yang dikeluarkan untuk pemeliharaan barang selama barang tersebut disimpan. Menghitung biaya total penyimpanan persediaan selama satu periode perencanaan adalah biaya penyimpanan per unit dikalikan dengan tingkat persediaan selama satu periode

perencanaan. Biaya penyimpanan selama satu periode perencanaan adalah:

$$THC(t) = h \times I^*$$

$$THC(t) = \frac{hD(e^{\theta t} - \theta t - 1)}{t\theta^2}$$

Dari biaya-biaya diatas dapat diketahui bahwa biaya total persediaan selama satu periode perencanaan adalah:

$$TC(t) = \frac{A}{t} + \frac{hD(e^{\theta t} - \theta t - 1)}{t\theta^2}$$

Selanjutnya dilakukan penyederhanaan model pada persamaan eksponensial dengan menggunakan deret taylor, sehingga biaya total persediaan selama satu periode perencanaan adalah:

$$TC(i, T) = \frac{A(D+\theta)}{Q_i} + \frac{hQ_i}{2}$$

Untuk meminimumkan biaya total persediaan untuk barang yang menyusut perlu ditentukan terlebih dahulu jumlah pemesanan optimal ( $Q^*$ ). Dalam menentukan jumlah pemesanan optimal akan digunakan selisih pada biaya total persediaan antara dua periode berturut-turut.

$$TC(n-1, t) - TC(n, t) \geq 0 \text{ dan } TC(n+1, t) - TC(n, t) \geq 0$$

Dengan menggunakan persamaan 2.6 kedalam persamaan 2.5 maka dapat diperoleh jumlah pemesanan optimal ( $Q^*$ ) sehingga diperoleh:

$$\left( \frac{A(D+\theta)}{Q_{n-1}} + \frac{h(Q_{n-1})}{2} - \frac{A(D+\theta)}{Q_n} - \frac{h(Q_n)}{2} \right) \geq 0$$

dan

$$\left( \frac{A(D+\theta)}{Q_{n+1}} + \frac{h(Q_{n+1})}{2} - \frac{A(D+\theta)}{Q_n} - \frac{h(Q_n)}{2} \right) \geq 0$$

(2.7)

Persamaan 2.7 disederhanakan, sehingga diperoleh:

$$Q_{n-1}Q_n \geq \frac{2A(D+\theta)}{h} \text{ dan } Q_{n+1}Q_n \leq \frac{2A(D+\theta)}{h}$$

Akan dibuktikan  $Q_{n-1} = Q_n = Q_{n+1}$  untuk memperoleh nilai  $Q^*$ . Jika pada siklus pemesanan  $t$ , banyaknya periode optimal ( $n$ ) mendekati tak hingga diperoleh:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_{n-1}}{Q_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n-1} = 1 \text{ dan } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_{n+1}}{Q_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Karena  $\frac{Q_{n-1}}{Q_n}$  dan  $\frac{Q_{n+1}}{Q_n}$  konvergen ke 1, maka dapat disimpulkan kuantitas pemesanan dapat ditulis sebagai  $Q_{n-1} = Q_n = Q_{n+1} = Q^*$ , sehingga jumlah pemesanan optimal adalah:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2A(D+\theta)}{h}}$$

Total biaya persediaan minimum dalam satu periode perencanaan dapat diperoleh dengan mensubstitusikan persamaan 2.10 ke dalam persamaan 2.5 sebagai berikut:

$$\overline{TC}(Q^*) = A \sqrt{h \frac{(D+\theta)}{2A}} + \sqrt{2Ah(D+\theta)}$$

(2.11)

### 3. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Aristasari. 2015. *Model Optimasi Economic Order Quantity dengan (EOQ) yang mempertimbangkan faktor Kerusakan Produk Dengan Permintaan Linier*. Skripsi, Jurusan Matematika Universitas Diponegoro. Semarang.
- [2] Goyal S.K. , Giri B.C. , *Recent trends in modeling of deteriorating inventory*, European Journal of Operational Research 134 (2001) 1–16.
- [3] Hamdy .A , Taha. (1997). *Riset Operasi*. Edisi Kelima. Jilid 2. Jakarta: Binarupa Aksara.
- [4] Widyadana, G.A., Cardenas-Barron, L.E., dan Hui, M.W, (2011). Economic Order Quantity Model for Deteriorating Items with Planned Backorder(2011). *Journal of Mathematical and Computer Modelling*,54 (2011), hal. 1569-1575.
- [5] Zipkin. P.H. 2000. *Foundations of Inventory Management*. New York : McGraw Hill.

## MODEL VECTOR ERROR CORRECTION PADA EMISI CO<sub>2</sub>

Anugerah Karta Monika<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Sekolah Tinggi Ilmu Statistik

**Abstrak.** Pembangunan ekonomi yang bertujuan meningkatkan kualitas hidup masyarakat seringkali diikuti penurunan kualitas lingkungan. Oleh karena itu, dibutuhkan konsep pembangunan berkelanjutan (*sustainable development*) yang berorientasi kepada lingkungan. Tulisan ini bertujuan untuk menerapkan Vector Error Correction Model (VECM) pada data emisi CO<sub>2</sub>. Hasilnya adalah model VECM yang terbentuk adalah VECM(3) dengan lag 2. Variabel yang berpengaruh signifikan terhadap CO<sub>2</sub> di jangka pendek yaitu Nilai tambah industri dan PDB variabel yang berpengaruh terhadap CO<sub>2</sub> di jangka panjang antara lain nilai tambah industri, ODA, PDB dan PPK. Sedangkan variabel yang berpengaruh signifikan terhadap CO<sub>2</sub> di jangka pendek yaitu Nilai tambah industri dan PDB

**Kata kunci:** Time Series, Vector Error Correction Model (VECM), emisi CO<sub>2</sub>

### 1. PENDAHULUAN

Masalah lingkungan merupakan isu yang penting untuk saat ini dan masa yang akan datang. Pembangunan ekonomi yang bertujuan meningkatkan kualitas hidup masyarakat seringkali diikuti penurunan kualitas lingkungan. Hal ini terjadi karena pembangunan ekonomi menggunakan sumber daya alam sebagai bahan baku produksinya yang menghasilkan produk sekaligus membawa polusi air, udara serta sampah baik yang terjadi di wilayah aliran sungai, perairan pantai, perairan lepas pantai, hutan, udara, dan lain-lain. Oleh karena itu, dibutuhkan konsep pembangunan berkelanjutan (*sustainable development*) yang berorientasi kepada lingkungan. Pembangunan berkelanjutan diartikan sebagai pembangunan yang memenuhi kebutuhan generasi sekarang tanpa membahayakan kemampuan generasi yang akan datang untuk memenuhi kebutuhannya.

Demi peningkatkan produksi, terkadang pelaku industri melakukan eksploitasi sumber daya alam secara besar-besaran. Eksploitasi sumber daya alam mengakibatkan terjadinya kerusakan ekosistem di Indonesia karena dalam memanfaatkan kekayaan alam para pelaku industri tidak memperhatikan kelestarian lingkungan. Selain itu, para pelaku industri tidak mengelola secara benar limbah industri yang dihasilkan selama proses

produksi, salah satunya adalah emisi CO<sub>2</sub>. Emisi CO<sub>2</sub> merupakan limbah yang berupa zat gas yang berdampak negatif bagi lingkungan dan masyarakat karena mendorong terjadinya pemanasan global yang justru akan merusak keseimbangan ekosistem secara global.

Emisi karbondioksida adalah gas-gas yang dikeluarkan dari hasil pembakaran senyawa yang mengandung karbon, seperti hasil pembakaran fosil dan pembuatan semen. Tidak seperti jenis karbon yang lain, karbon dioksida belum lama diketahui mempunyai pengaruh signifikan terhadap masalah lingkungan. Hal ini terjadi di akhir tahun 1990-an karena adanya Kyoto Protocol, atau di awal abad 21 saat dipublikasikannya Hasil Penilaian IPCC yang ketiga dan keempat (*IPCC's Third and Fourth Assessment Reports*). Upaya untuk mengurangi CO<sub>2</sub> masih sangat minim, karena terbentur konsekuensi sosial ekonomi. Akan membutuhkan waktu yang lama dan juga teknologi untuk memecahkan masalah tersebut. (Goklany, 2009)

Tabel berikut ini adalah data emisi per kapita di negara berkembang dan negara maju. Kecenderungan yang terjadi adalah semakin tinggi pendapatan per kapita di suatu negara, maka semakin tinggi pula emisi gas per orang. Hal ini berlaku baik di negara berkembang maupun di negara maju

**Tabel 1.1** Data Emisi Per Kapita Negara Berkembang dan Negara Maju

<b>Negara Berkembang</b>	<b>Pendapatan per/orang (US\$)</b>	<b>Emisi tahunan per/orang</b>
Senegal	1.792	0,4 ton
Honduras	3.430	1,1 ton
Bangladesh	2.053	0,3 ton
<b>Negara Maju</b>	<b>Pendapatan per/orang (US\$)</b>	<b>Emisi tahunan per/orang</b>
Amerika	41.890	20,6 ton
Inggris	33.328	9,8 ton
Irlandia	38.505	10,5 ton

Berdasarkan pemaparan tersebut, peneliti merasa perlu untuk meneliti faktor-faktor apa saja yang mempengaruhi emisi CO<sub>2</sub> tersebut.

#### Rumusan Masalah

1. Bagaimana model vektor error correction diterapkan pada data emisi CO<sub>2</sub> di Indonesia?
2. Faktor-faktor apa saja yang mempengaruhi perubahan emisi CO<sub>2</sub> di Indonesia?

#### Tujuan Penelitian

1. Membuat model error correction pada data emisi CO<sub>2</sub> di Indonesia.
2. Mencari faktor-faktor yang mempengaruhi emisi CO<sub>2</sub> di Indonesia.

## 2. VECTOR ERROR CORRECTION (VECM)

Enders (2004) menyatakan bahwa model Vector Autoregression (VAR) merupakan sebuah sistem persamaan dinamis dimana pendugaan suatu variabel pada periode tertentu tergantung pada pergerakan variabel tersebut dan variabel lainnya yang berada dalam sistem pada periode-periode sebelumnya. Model ini

menganggap semua variabel dalam model tersebut adalah endogen, kemudian diestimasi secara bersama-sama dan simultan (Gujarati,1995). Secara umum model VAR terbagi menjadi 3 model, yaitu unrestricted VAR, restricted VAR dan structural VAR. Unrestricted VAR digunakan pada data yang stasioner, sedangkan restricted VAR digunakan untuk data non stasioner, seringkali disebut juga dengan Vector Error Correction Model atau VECM. Sementara itu, structural VAR adalah VAR yang direstriksi berdasarkan hubungan teoritis yang kuat dan skema ordering hubungan terhadap peubah-peubah yang digunakan.

Metode analisis model empiris pada penelitian ini mempergunakan multivariat *Vector Autogression* (VAR) terestriksi atau yang dikenal dengan *Vector Error Correction Model*(VECM). VECM merupakan bentuk VAR yang terestriksi karena data yang tidak stasioner tetapi terkointegrasi. Yang dimaksud dengan terkointegrasi adalah residual dari model tersebut berdistribusi normal dengan rata-rata 0 dan varian konstan. Kointegrasi ini menunjukkan adanya hubungan keseimbangan jangka panjang antara variabel-variabel ekonomi seperti yang disyaratkan oleh teori ekonomi.

VECM sering disebut sebagai desain VAR untuk data yang nonstasioner dan memiliki hubungan kointegrasi. Spesifikasi VECM merestriksi hubungan jangka panjang variabel-variabel endogen agar konvergen ke dalam hubungan kointegrasinya, namun tetap menggunakan variabel dinamisasi jangka pendek.

Oleh karena itu, pada VECM, ada dua persamaan yang menggambarkan hubungan jangka panjang dan jangka pendek. Persamaan jangka panjang merupakan Regresi Linear Berganda yang diestimasi dengan metode OLS (*Ordinary Least Square*), sedangkan pada persamaan jangka pendek, variabelnya ditambah dengan variabel error pada periode sebelumnya dari persamaan jangka

panjangnya. Secara umum bentuk VECM adalah sebagai berikut :

$$Y_t = A_0 + A_1Y_{t-1} + A_2Y_{t-2} + \dots + A_pY_{t-p} + \lambda ECT_{t-1} + v_t$$

Dimana  $A_0$  adalah vektor berukuran  $M \times 1$  dan matriks  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) masing-masing berukuran  $M \times M$ . ECT adalah error dari persamaan jangka panjangnya.

Sebelum melakukan analisis VAR atau VECM ada beberapa prosedur estimasi yang akan digunakan dalam studi ini, yaitu terdiri dari: (1). Uji akar-akar unit (*unit root test*), (2). Penentuan Panjang Lag, dan (3). Uji Kointegrasi (Johansen Cointegration Test). 4. Estimasi model

Uji akar unit dilakukan untuk mengetahui apakah data yang digunakan stasioner atau tidak. Stasioneritas merupakan aspek yang penting pada model time series agar tidak terjadi spurious regression.

Penentuan lag merupakan hal penting lainnya dalam estimasi model VECM ( $p$ ) untuk mengetahui orde ( $p$ ) dari VECM. Lag optimal dapat ditentukan dengan menggunakan beberapa kriteria, yaitu LR, AIC, SC, LR, FPE dan HQ. Kriteria pemilihan lag optimal adalah pada LR yang terbesar, atau pada AIC, SC, FPE dan HQ bernilai terkecil. Agar semua kriteria dapat dibandingkan untuk berbagai lag, banyaknya observasi yg digunakan setiap model harus sama.

Untuk mengetahui banyaknya kemungkinan kointegrasi yang terjadi dapat digunakan Johansen Cointegration Test. Uji kointegrasi dari Johansen didasarkan atas model VAR( $p$ ) dari sekumpulan peubah yang tidak stasioner

Variabel yang akan digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Emisi Karbondioksida (CO<sub>2</sub>) yang diubah dalam bentuk logaritma natural
2. Populasi penduduk di kota yang diubah dalam bentuk logaritma natural
3. Pertumbuhan PDB perkapita

4. Pertumbuhan value added sektor industri
5. Pertumbuhan konsumsi akhir

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder dalam bentuk time series periode tahunan yang diperoleh dari data yang diterbitkan oleh World Bank. dari tahun 1960 sampai tahun 2010

### 3. HASIL PENELITIAN

#### 3.1. Uji Stasioneritas

Dari hasil uji stasioneritas dengan Augmented Dicky Fuller diperoleh hasil pada tabel berikut

**Tabel 3.1** Uji Stasioneritas semua variable

Variabel	Tingkat stasioner	t-statistik	t-alpha 5 %	Prob
CO <sub>2</sub>	1	-6.818.220	-2.923.780	0.0000
Konsumsi_RT	level	-5.188.778	-2.922.449	0.0001
Nilaitambah_industri	level	-5.062.241	-2.922.449	0.0001
ODA	level	-3.607.896	-2.922.449	0.0091
PDB_perkapita	level	-4.771.516	-2.922.449	0.0003
Populasi_kota	2	-4.654.844	-2.925.169	0.0004
Log CO <sub>2</sub>	1	-6.380.488	-2.923.780	0.0000
Log Populasi kota	2	-4.987.521	-2.925.169	0.0002
Pertumbuhan CO <sub>2</sub>	level	-6.568.793	-2.922.449	0.0000
Pertumbuhan Populasi Kota	1	-5.456.676	-2.923.780	0.0000

Pada uji stasioneritas terlihat bahwa variabel konsumsi RT, Nilai tambah industri, ODA, PDB perkapita, tingkat kematian anak log CO<sub>2</sub> , pertumbuhan CO<sub>2</sub> telah stasioner di level, dan CO<sub>2</sub>, log CO<sub>2</sub> dan pertumbuhan populasi kota stasioner pada different pertama sedangkan populasi kota dan log populasi kota stasioner pada difference kedua.

#### 3.2. Penentuan Lag Optimum

Lag optimum ditentukan dengan memperhatikan tanda bintang terbanyak pada output eviews. Terlihat bahwa lag kedua mengindikasikan lag yang optimal, sehingga VECM menggunakan lag ke 2. Output dapat dilihat pada lampiran

### 3.3. Penentuan Kointegrasi dengan menggunakan Johansen Cointegration

Pada penggunaan uji trace test terdapat 4 kointegrasi pada variabel sedangkan jika menggunakan max eigen value test terdapat 2 kointegrasi pada variabel. Data memiliki kointegrasi jika Trace dan Max-Eigen statistic > nilai titik kritik (lihat lampiran)

### 3.3 Estimasi parameter untuk persamaan jangka panjang dan jangka pendek VECM

Setelah memenuhi semua asumsi klasik model yang dipilih yaitu VECM(3) lag 2 dengan persamaan jangka pendeknya sebagai berikut :

$$\begin{aligned} D(PCO2) = & - 0.105802 - 0.368966 \\ D(PCO2(-1)) & - 0.077945 D(PCO2(-2)) + \\ & 0.000122 D(KRT(-1)) - 0.000229 \\ D(KRT(-2)) & + 0.017609 D(NTI(-1)) + \\ & 0.009616D(NTI(-2)) + 4.74E-12 \\ D(ODA(-1)) & + 3.06E-11D(ODA(-2)) - \\ & 0.027405 D(PDB(-1)) -0.017080D(PDB(- \\ & 2)) + 0.749668 D(PPK(-1)) + \\ & 6.871615D(PPK(-2)) + 0.155791 \\ D(TKA(-1)) & - 0.181758D(TKA(-1)) - \\ & 0.136771 ECT(-1) \end{aligned}$$

Variabel yang berpengaruh terhadap CO<sub>2</sub> di jangka panjang antara lain nilai tambah industri, ODA , PDB dan PPK sedangkan variabel yang berpengaruh signifikan terhadap CO<sub>2</sub> di jangka pendek yaitu Nilai tambah industri dan PDB. Sebesar 43% keragaman variabel dependen dapat dijelaskan oleh variabel independent sedangkan 57 % lainnya dijelaskan oleh variabel lain. Output dapat dilihat pada lampiran

## 4. KESIMPULAN

Berdasarkan uraian dari hasil dan pembahasan yang telah disampaikan sebelumnya, maka penulis dapat menarik kesimpulan antara lain :

1. Variabel yang berpengaruh signifikan terhadap CO<sub>2</sub> di jangka pendek yaitu Nilai tambah industri dan PDB variabel yang berpengaruh terhadap CO<sub>2</sub> di jangka panjang antara lain nilai tambah industri, ODA , PDB dan PPK
2. Variabel yang berpengaruh signifikan terhadap CO<sub>2</sub> di jangka pendek yaitu Nilai tambah industri dan PDB
3. Metode analisis model empiris terbaik penelitian ini mempergunakan Vector Error Correction Model(VECM)

## 5. Daftar Pustaka

- [1] Enders, Walter., Applied Econometric Time Series, Wiley, 2004
- [2] Hutabarat, Lamhot. “Pengaruh PDB Sektor Industri Terhadap Kualitas Lingkungan Ditinjau dari Emisi Sulfur dan CO<sub>2</sub> di Lima Negara Anggota ASEAN Periode 1980-2000”, 2010.
- [3] Gujarati, Damodar N., *Basic Econometrics. Fourth Edition*, McGraw-Hill, Inc. Singapore, 1995.
- [4] Gupito, Katrin Retno dan Johanna M. Kodoatie. Keterkaitan PDRB Perkapita dari Sektor Industri, Transportasi, Pertanian dan Kehutanan terhadap Kualitas Lingkungan Diukur dari Emisi CO<sub>2</sub> di Jawa Tengah”.
- [5] Kurniawan. “ *Perkembangan ODA Internasional dan Peluang Indonesia; Catatan Laporan Tahunan DAC – OECD*”, Jakarta, 2012.
- [6] Worldbank.org, *Country Table : Indonesia*, data diakses 6 Juli 2015

## LAMPIRAN

VAR Lag Order Selection Criteria

Endogenous variables: KRT NTI ODA PCO2

PDB PPK TKA

Exogenous variables: C

Date: 07/02/15 Time: 18:37

Sample: 1961 2010

Included observations: 46

Lag	LogL	LR	FPE	AIC	SC	HQ
0	-1439.572	NA	4.87e+18	62.89444	63.17271	62.99868
1	-1104.070	554.3076	1.94e+13	50.43783	52.66400*	51.27177
2	-1029.359	100.6980*	7.37e+12*	49.31994	53.49401	50.88357*
3	-985.4662	45.80082	1.40e+13	49.54201	55.66398	51.83534
4	-906.1037	58.65923	9.87e+12	48.22190*	56.29177	51.24492

\* indicates lag order selected by the criterion

LR: sequential modified LR test statistic (each test at 5% level)

FPE: Final prediction error

AIC: Akaike information criterion

SC: Schwarz information criterion

HQ: Hannan-Quinn information criterion

Date: 07/02/15 Time: 18:42

Sample (adjusted): 1964 2010

Included observations: 47 after adjustments

Trend assumption: Linear deterministic trend

Series: KRT NTI ODA PCO2 PDB PPK

TKA

Lags interval (in first differences): 1 to 2

Unrestricted Cointegration Rank Test (Trace)

Hypothesized No. of CE(s)	Eigenvalue	Trace Statistic	0.05 Critical Value	Prob.**
None *	0.710752	178.6843	125.6154	0.0000
At most 1 *	0.576477	120.3822	95.75366	0.0004
At most 2 *	0.478376	80.00225	69.81889	0.0062
At most 3 *	0.351960	49.41424	47.85613	0.0354
At most 4	0.264712	29.02549	29.79707	0.0612
At most 5	0.213118	14.57335	15.49471	0.0685
At most 6	0.067973	3.308507	3.841466	0.0689

Trace test indicates 4 cointegrating eqn(s) at the 0.05 level

\* denotes rejection of the hypothesis at the 0.05 level

\*\*MacKinnon-Haug-Michelis (1999) p-values

Unrestricted Cointegration Rank Test (Maximum Eigenvalue)

Hypothesized No. of CE(s)	Eigenvalue	Max-Eigen Statistic	0.05 Critical Value	Prob.**
None *	0.710752	58.30211	46.23142	0.0017
At most 1 *	0.576477	40.37993	40.07757	0.0462
At most 2	0.478376	30.58801	33.87687	0.1175
At most 3	0.351960	20.38875	27.58434	0.3149
At most 4	0.264712	14.45215	21.13162	0.3291
At most 5	0.213118	11.26484	14.26460	0.1414
At most 6	0.067973	3.308507	3.841466	0.0689

Max-eigenvalue test indicates 2 cointegrating eqn(s) at the 0.05 level

\* denotes rejection of the hypothesis at the 0.05 level

\*\*MacKinnon-Haug-Michelis (1999) p-values

Vector Error Correction Estimates

Date: 07/02/15 Time: 18:47

Sample (adjusted): 1964 2010

Included observations: 47 after adjustments

Standard errors in ( ) & t-statistics in [ ]

Cointegrating Eq:	CointEq1
PCO2(-1)	1.000000
KRT(-1)	0.006040 (0.00648) [ 0.93226]
NTI(-1)	0.136986 (0.01707) [ 8.02370]
ODA(-1)	-2.95E-10 (8.6E-11) [-3.41521]
PDB(-1)	-0.201260 (0.02768) [-7.27060]
PPK(-1)	15.39998 (6.96805) [ 2.21008]
TKA(-1)	-0.004506 (0.00493) [-0.91390]
C	0.315339

Error Correction:	D(PCO2)	D(KRT)	D(NTI)	D(ODA)	D(PDB)
CointEq1	-0.136771 (0.06916) [-1.97757]	-7.293633 (6.07872) [-1.19986]	-13.97469 (4.21385) [-3.31637]	8.78E+08 (4.0E+08) [ 2.17146]	-0.223510 (2.70170) [-0.08273]
D(PCO2(-1))	-0.368966 (0.22207) [-1.66147]	-4.280261 (19.5184) [-0.21929]	23.33758 (13.5304) [ 1.72483]	-2.08E+09 (1.3E+09) [-1.60004]	5.862804 (8.67497) [ 0.67583]
D(PCO2(-2))	-0.077945 (0.20642) [-0.37760]	-0.843710 (18.1431) [-0.04650]	4.081271 (12.5770) [ 0.32450]	-1.92E+08 (1.2E+09) [-0.15899]	-5.886373 (8.06372) [-0.72998]
D(KRT(-1))	0.000122 (0.00206) [ 0.05926]	-0.350991 (0.18085) [-1.94077]	-0.204797 (0.12537) [-1.63356]	1347855. (1.2E+07) [ 0.11207]	-0.019266 (0.08038) [-0.23969]
D(KRT(-2))	-0.000229 (0.00202) [-0.11315]	-0.311822 (0.17766) [-1.75520]	-0.099039 (0.12315) [-0.80419]	3967962. (1.2E+07) [ 0.33585]	-0.026516 (0.07896) [-0.33582]
D(NTI(-1))	0.017609 (0.00673) [ 2.61593]	1.020810 (0.59165) [ 1.72535]	0.678012 (0.41014) [ 1.65311]	-64226428 (3.9E+07) [-1.63229]	0.106743 (0.26296) [ 0.40593]
D(NTI(-2))	0.009616 (0.00461) [ 2.08390]	0.529852 (0.40556) [ 1.30647]	0.120489 (0.28114) [ 0.42857]	-35890894 (2.7E+07) [-1.33070]	-0.051221 (0.18025) [-0.28416]
D(ODA(-1))	4.74E-12 (2.6E-11) [ 0.18155]	3.59E-11 (2.3E-09) [ 0.01565]	2.02E-10 (1.6E-09) [ 0.12695]	-0.410397 (0.15259) [-2.68952]	1.34E-09 (1.0E-09) [ 1.31211]
D(ODA(-2))	3.06E-11 (2.4E-11) [ 1.28900]	-3.39E-10 (2.1E-09) [-0.16242]	1.74E-09 (1.4E-09) [ 1.20377]	-0.094055 (0.13897) [-0.67682]	1.04E-09 (9.3E-10) [ 1.12248]
D(PDB(-1))	-0.027405 (0.01246) [-2.19877]	-1.437529 (1.09549) [-1.31223]	-1.871693 (0.75941) [-2.46468]	64853619 (7.3E+07) [ 0.89018]	-0.642317 (0.48689) [-1.31922]
D(PDB(-2))	-0.017080 (0.00889) [-1.92098]	-0.533563 (0.78146) [-0.68277]	-0.472450 (0.54172) [-0.87213]	22496601 (5.2E+07) [ 0.43287]	-0.033347 (0.34732) [-0.09601]
D(PPK(-1))	0.749668 (6.32581) [ 0.11851]	1233.162 (555.990) [ 2.21796]	667.1631 (385.419) [ 1.73101]	6.73E+09 (3.7E+10) [ 0.18197]	283.0174 (247.110) [ 1.14531]

D(PPK(-2))	6.871615 (5.99213) [ 1.14677]	44.13276 (526.661) [ 0.08380]	433.1017 (365.088) [ 1.18629]	2.49E+10 (3.5E+10) [ 0.71192]	-162.8855 (234.075) [-0.69587]
D(TKA(-1))	0.155791 (0.15525) [ 1.00351]	-10.48613 (13.6450) [-0.76850]	-12.57109 (9.45888) [-1.32902]	-3.21E+09 (9.1E+08) [-3.53258]	-1.522790 (6.06453) [-0.25110]
D(TKA(-2))	-0.181758 (0.15691) [-1.15839]	9.289210 (13.7908) [ 0.67358]	10.28475 (9.55998) [ 1.07581]	3.24E+09 (9.2E+08) [ 3.53806]	1.482498 (6.12935) [ 0.24187]
C	-0.105802 (0.06505) [-1.62654]	-2.824651 (5.71717) [-0.49406]	-6.904915 (3.96321) [-1.74225]	4.78E+08 (3.8E+08) [ 1.25794]	0.194925 (2.54100) [ 0.07671]
R-squared	0.422640	0.449069	0.640738	0.543676	0.400484
Adj. R-squared	0.143272	0.182490	0.466901	0.322874	0.110396
Sum sq. resids	0.338486	2614.819	1256.536	1.16E+19	516.5236
S.E. equation	0.104494	9.184171	6.366587	6.11E+08	4.081918
F-statistic	1.512844	1.684563	3.685863	2.462281	1.380560
Log likelihood	49.24525	-161.1320	-143.9103	-1007.732	-123.0190
Akaike AIC	-1.414691	7.537531	6.804695	43.56308	5.915702
Schwarz SC	-0.784854	8.167368	7.434532	44.19292	6.545539
Mean dependent	-0.000701	0.234556	0.198600	14082553	0.200966
S.D. dependent	0.112893	10.15766	8.719726	7.42E+08	4.327787
Determinant resid covariance (dof adj.)		2.56E+12			
Determinant resid covariance		1.39E+11			
Log likelihood		-1069.820			
Akaike information criterion		50.58809			
Schwarz criterion		55.27251			

## PEMODELAN PASANG SURUT AIR LAUT DI KOTA SEMARANG DENGAN PENDEKATAN REGRESI NONPARAMETRIK POLINOMIAL LOKAL KERNEL

Tiani Wahyu Utami<sup>1</sup>, Indah Manfaati Nur<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universitas Muhammadiyah Semarang, email : tiani.utami88@gmail.com

<sup>2</sup>Universitas Muhammadiyah Semarang, email : indah.manfaati.nur@gmail.com

**Abstrak.** Wilayah pesisir sangat rentan terhadap tekanan baik yang berasal dari darat maupun dari laut. Salah satu tekanan yang mengancam keberlangsungan wilayah pesisir adalah adanya kenaikan muka air laut. Dampak dari kenaikan muka air laut adalah banjir pasang air laut atau lebih dikenal dengan banjir rob. Banjir rob merupakan fenomena yang selalu terjadi di Kota Semarang bagian utara, oleh karena itu pemodelan pasang surut air laut di Kota Semarang menjadi hal yang penting. Salah satu metode yang tepat untuk pemodelan pasang surut air laut adalah Regresi Nonparametrik dengan pendekatan Polinomial Lokal Kernel. Pemodelan menggunakan metode tersebut diharapkan mampu mengatasi data yang mengalami fluktuasi. Model terbaik sangat dipengaruhi oleh penentuan orde polinomial dan *bandwidth* optimal yang memiliki GCV minimum. Penerapan pada data dibuat program menggunakan *Software R*. Data yang digunakan adalah data tinggi gelombang pasang surut air laut di Kota Semarang dengan variabel prediktornya yaitu waktu pengamatan perbulan selama tahun 2011-2012. Berdasarkan hasil penerapan model tersebut diperoleh nilai *bandwidth* optimal sebesar 69.1 dan orde polinomial  $p=8$  pada saat GCV minimum sebesar 41.751 sehingga hasil estimasi model diperoleh MSE sebesar 22.954. Berdasarkan estimasi model diperoleh dugaan rata-rata tinggi gelombang pasang surut air laut di Kota Semarang mengalami kondisi pasang tinggi pada saat bulan Agustus 2011 sampai dengan Desember 2011, dan berulang kembali pada tahun 2012 yaitu bulan Juli hingga November. Sedangkan kondisi pasang tinggi terjadi pada saat bulan Februari 2012 sampai dengan Juni 2012

**Kata kunci:** Pasang Surut Air Laut, Regresi Nonparametrik, Estimator Polinomial Lokal Kernel, GCV

### 1. PENDAHULUAN

Analisis regresi dikembangkan untuk menyelidiki pola hubungan dan pengaruh variabel prediktor terhadap variabel respon, dengan mengestimasi kurva regresinya. Dalam analisis regresi terdapat dua pendekatan yaitu pendekatan parametrik dan pendekatan nonparametrik. Pendekatan parametrik mengasumsikan bentuk model sudah ditentukan sebelumnya. Pendekatan nonparametrik digunakan apabila tidak ada informasi apapun tentang bentuk fungsi, karena pendekatan tersebut tidak tergantung pada asumsi bentuk kurva tertentu, oleh karena itu analisis regresi nonparametrik memberikan fleksibilitas yang lebih besar [2]

Jika  $n$  pengamatan independen  $\{t_i, y_i\}_{i=1}^n$   $i=1,2,3,\dots,n$ . Hubungan antara  $t_i$  dan  $Y_i$  mengikuti model regresi nonparametrik. Bentuk kurva regresi tidak diketahui di asumsikan *smooth*.. Tujuan

utama dalam regresi nonparametrik adalah mendapatkan estimasi kurva regresi. Terdapat beberapa pendekatan untuk mengestimasi kurva regresi, salah satunya adalah dengan estimator Polinomial Lokal. Salah satu kelebihan estimator polinomial lokal kernel adalah dapat mengurangi asimtotik bias dan menghasilkan estimasi yang baik [4]. Estimator polinomial lokal kernel dapat diperoleh dengan optimasi WLS (*Weighted Least Square*). Sedangkan untuk mengestimasi parameter penghalus (*bandwidth*) menggunakan metode GCV (*Generalized Cross Validation*). Estimator kurva regresi diperoleh dengan mengestimasi parameternya.

Penelitian sebelumnya telah banyak dikembangkan diantaranya estimasi model regresi nonparametrik pada data longitudinal berdasarkan estimator polinomial lokal kernel GEE [6], pendekatan regresi semiparametrik untuk data longitudinal terhadap kadar trombosit demam berdarah dengue [7]

Pesisir merupakan daerah darat yang berada di tepi laut dan masih mendapat pengaruh laut seperti pasang surut, angin laut, dan perembesan air laut. Sedangkan daerah pantai merupakan area yang berada di tepi perairan dan dipengaruhi oleh air pasang tertinggi dan air surut terendah. Wilayah pesisir sangat rentan terhadap tekanan baik yang berasal dari darat maupun dari laut. Salah satu tekanan yang sering mengancam keberlangsungan wilayah pesisir adalah adanya kenaikan muka air laut. Kenaikan muka air laut yang terus bertambah dikhawatirkan akan mengancam daerah-daerah pesisir sehingga menimbulkan kerugian baik dalam finansial maupun ekonomi. Pasang surut adalah fluktuasi muka air laut sebagai fungsi waktu karena adanya gaya tarik benda-benda langit, terutama matahari dan bulan. Kedalaman air akibat banjir rob bisa mencapai 20-60 cm dengan luas genangan diperkirakan mencapai 32,6 km<sup>2</sup> [5].

Hasil penelitian lain menyatakan bahwa mulai 1991 hingga tahun 1997 muka air laut rata-rata tahunan di Semarang mengalami kenaikan berkisar 1,5 – 6,7 cm, akan tetapi pada tahun berikutnya sampai tahun 2000 permukaan laut justru mengalami penurunan sebesar 1,31 – 39,9 cm [1]. Penelitian kerentanan wilayah pesisir sangat diperlukan dalam rangka mengurangi dampak serta kemungkinan-kemungkinan respon terkait terhadap perubahan fenomena yang berlangsung. Hal ini mengakibatkan perlu adanya penelitian mengenai pemodelan pasang surut air laut di Kota Semarang. Metode statistika sangat berperan penting dalam menganalisa kasus tersebut. Salah satu metode statistika yang sesuai adalah regresi nonparametrik dengan menggunakan pendekatan polinomial lokal kernel. Oleh karena itu, dalam penelitian ini akan digunakan estimator polinomial lokal kernel untuk mengestimasi kurva regresi nonparametrik pada data pasang surut air laut di Kota Semarang.

## 2. TINJAUAN PUSTAKA

### 2.1 Regresi nonparametrik

Regresi nonparametrik adalah salah satu metode yang digunakan untuk mengestimasi pola hubungan antara variabel respon dan variabel prediktor, dimana bentuk kurva regresinya tidak diketahui. Diberikan data  $(t_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n$ ; dengan  $n$  menyatakan banyaknya subjek. Variabel  $y_i$  menyatakan variabel respon pada waktu  $t_i$ . Hubungan antara variabel-variabel tersebut dinyatakan dalam persamaan (1).

$$y_i = m(t_i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (1)$$

### 2.2 Estimator Polinomial Lokal untuk Data Longitudinal

Diberikan data observasi  $(y_i, t_i)$  yang memenuhi regresi nonparametrik, dengan  $y_i$  sebagai variabel respon dan  $t_i$  sebagai variabel prediktor.

Persamaan (1) dapat ditulis dalam bentuk matriks:

$$\mathbf{y} = \mathbf{m}(t) + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2)$$

Dengan

$$x = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix}, \quad m(t) = \begin{bmatrix} m(x_1) \\ \vdots \\ m(x_n) \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Fungsi  $m(x_i)$  tidak diketahui bentuk fungsinya yang disebut dengan fungsi regresi. Misalkan  $X$  adalah variabel prediktor dimana fungsi  $m(x_i)$  akan diestimasi dengan estimator polinomial lokal. Dengan deret Taylor,  $m(t_i)$  dapat didekati oleh polinomial berderajat  $p$  sebagai berikut :

$$m(t_i) = \beta_0(t) + (t_i - t)\beta_1(t) + \dots + (t_i - t)^p \beta_p(t) \quad (3)$$

Persamaan (2) dapat ditulis menjadi :

$$\mathbf{m} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$$

Dengan

$$X = \begin{bmatrix} x(h_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x(h_2) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & x(h_n) \end{bmatrix},$$

$$x(h_i) = \begin{bmatrix} 1 & (t_1 - t) & \dots & (t_1 - t)^p \\ 1 & (t_2 - t) & \dots & (t_2 - t)^p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (t_n - t) & \dots & (t_n - t)^p \end{bmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}, \beta_i = [\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p]^T$$

$\hat{\beta}$  dapat diperoleh dengan cara meminimumkan *Weighted Least Square* (WLS)

$$S(\beta) = (y - X\beta)^T K_h (y - X\beta) \quad (4)$$

Dengan  $y_i = [y_1, y_2, \dots, y_n]$   
 $X = [t_1^T, \dots, t_n^T]$

$$K_h = \text{diag}(K_{h1}, K_{h2}, \dots, K_{hn}),$$

$$K_{hi} = \text{diag}(K_{hi}(t_1 - t), K_{hi}(t_2 - t), \dots, K_{hi}(t_n - t))$$

Matriks  $K_h$  adalah matriks yang berisi pembobot, dengan  $K_h(\cdot) = \frac{1}{h} K\left(\frac{\cdot}{h}\right)$ .  $K(\bullet)$  adalah fungsi Kernel, dan  $h$  adalah *bandwidth*.

Nilai estimasi  $\beta$  yaitu  $\hat{\beta}$  yang bila disubstitusikan kedalam persamaan (4) akan meminimumkan  $S(\beta)$  diperoleh :

$$\hat{\beta} = (X^T K_h X)^{-1} X^T K_h y \quad (5)$$

Dengan demikian  $m$  dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\hat{m} = X\hat{\beta}$$

$$\hat{m} = X(X^T K_h X)^{-1} X^T K_h y$$

### 2.3 Fungsi Kernel

Secara umum fungsi Kernel  $K$  dengan *bandwidth* (parameter penghalus)  $h$  didefinisikan sebagai berikut:

$$K_h(x) = \frac{1}{h} K\left(\frac{x}{h}\right), \text{ untuk } -\infty < x < \infty \text{ dan } h > 0$$

serta memenuhi sifat :

- (i)  $K(x) \geq 0$  , untuk semua  $x$
- (ii)  $\int_{-\infty}^{\infty} K(x) dx = 1$

$$(iii) \int_{-\infty}^{\infty} xK(x) dx = 0$$

$$(iv) \int_{-\infty}^{\infty} x^2 K(x) dx = \sigma^2 > 0$$

maka estimator fungsi densitas Kernel adalah

$$f(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_h(x - x_i) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - x_i}{h}\right)$$

Beberapa jenis fungsi Kernel adalah [3]:

- (i) Kernel Uniform :  
 $K(x) = \frac{1}{2} I(|x| \leq 1)$
- (ii) Kernel Segitiga :  
 $K(x) = (1 - |x|) I(|x| \leq 1)$
- (iii) Kernel Eparichnikov :  
 $K(x) = \frac{3}{4} (1 - x^2) I(|x| \leq 1)$
- (iv) Kernel Kuadrat :  
 $K(x) = \frac{15}{16} (1 - x^2)^2 I(|x| \leq 1)$
- (v) Kernel Triweight :  
 $K(x) = \frac{35}{32} (1 - x^2)^3 I(|x| \leq 1)$
- (vi) Kernel Cosinus :  
 $K(x) = \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{2} x\right) I(|x| \leq 1)$
- (vii) Kernel Gaussian :  
 $K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} x^2\right),$   
 $-\infty < x < \infty$

dengan  $I$  adalah fungsi indikator

### 2.4 Metode Penelitian

#### 2.4.1 Sumber Data dan Variabel Penelitian

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder yang diperoleh dari Badan Meteorologi dan Geofisika Stasiun Meteorologi Maritim Semarang. Data tersebut mengenai rata-rata tinggi gelombang pasang surut air laut di Kota Semarang yang diamati perbulan selama tahun 2011-2012. Variabel yang digunakan dalam penelitian ini diantaranya variabel respon yaitu tinggi gelombang

pasang surut air laut di Kota Semarang, sedangkan variabel prediktor dalam penelitian ini adalah waktu pengamatan (perbulan)

### 2.4.2 Metode Analisis

Pemodelan pasang surut air laut di Kota Semarang menggunakan pendekatan regresi nonparametrik polinomial lokal kernel dengan langkah-langkah sebagai berikut :

- a. Diberikan data observasi  $(y_i, x_i)$ , yang memenuhi regresi nonparametrik.

$$y_i = m(t_i) + e_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Kemudian membuat plot data berpasangan

$$(y_i, t_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

- b. Menyatakan  $(y_i)$  dapat didekati oleh polinomial lokal berderajat  $p$

$$m(t_i) \approx m(t_i) + (t_i - t)m^{(1)} + \frac{(t_i - t)^2 m^{(2)}}{2!} + \dots + \frac{(t_i - t)^p m^{(p)}(t)}{p!}$$

- c. Menyatakan  $\hat{m} \approx \mathbf{X}\hat{\beta}$

Dengan  $\mathbf{X}$  adalah matrik berukuran  $1 \times (p+1)$  dan  $\hat{m}$  adalah vektor berukuran  $1 \times 1$

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}^T \mathbf{K}_h \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{K}_h \mathbf{y}$$

- d. Mendapatkan bentuk matrik  $\mathbf{A}(h)$  berukuran  $N \times N$  dengan cara menyelesaikan persamaan berikut :

$$\hat{m} = \mathbf{A}(h) \mathbf{y}^*$$

- e. Menentukan jenis pembobot dan fungsi Kernel Gaussian.
- f. Memilih orde polinomial  $p$  dan nilai *bandwidth* optimal yang meminimumkan

$$GCV = \frac{n^{-1} \sum_{i=1}^n [y_i - \hat{y}_i]^2}{(n^{-1} \text{tr} [I - \mathbf{A}(h)])^2}$$

- g. Memodelkan orde polinomial lokal  $p$  dan nilai *bandwidth* optimal dari langkah c secara simultan.

- h. Menghitung nilai MSE

$$MSE(h) = n^{-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)$$

- i. Mendapatkan model pasang surut air laut di Kota Semarang dengan pendekatan polinomial lokal kernel.

Penerapan pada data dibuat program menggunakan *Software R*

### 3. HASIL PENELITIAN

Diberikan data sebanyak  $n$  objek,  $(t_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  mengikuti model regresi nonparametrik yang dinyatakan sebagai berikut :

$$y_i = m(t_i) + e_i,$$

dengan  $m(t_i)$  adalah fungsi *smooth*.

Fungsi  $m(t_i)$  tidak diketahui bentuknya maka didekati menggunakan estimator polinomial lokal kernel sebagai berikut :

$$m(t_i) \approx m(t_i) + (t_i - t)m^{(1)} + \frac{(t_i - t)^2 m^{(2)}}{2!} + \dots + \frac{(t_i - x)^p m^{(p)}(t)}{p!}$$

$$\hat{m}(t_i) \approx \hat{\beta}_0 + (t_i - t)\hat{\beta}_1 + (t_i - t)^2 \hat{\beta}_2 + \dots + (t_i - t)^p \hat{\beta}_p \quad (6)$$

Model pada (6) dapat ditulis menjadi matrik sebagai berikut:

$$\hat{m}(t_i) \approx x_i^T \hat{\beta}_i; i = 1, 2, \dots, n$$

$$\hat{\beta}_i = (\mathbf{X}^T \mathbf{K}_h \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{K}_h \mathbf{y} \quad (7)$$

dengan notasi matriknya

$$x_i = [1, (t_i - t), (t_i - t)^2, \dots, (t_i - t)^p]^T;$$

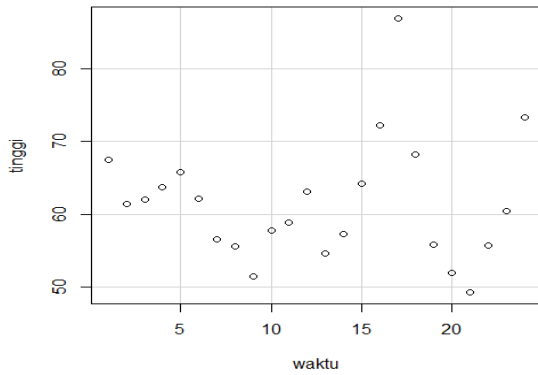
$$\hat{\beta}_i = [\hat{\beta}_{0i}, \hat{\beta}_{1i}, \hat{\beta}_{2i}, \dots, \hat{\beta}_{pi}]^T,$$

$$\hat{\beta}_{ri} = \hat{m}^{(r)}(t) / r!, r = 0, \dots, p.$$

Berdasarkan persamaan (7) maka model menjadi sebagai berikut :

$$\hat{m}(t_i) = x_i^T (\mathbf{X}^T \mathbf{K}_h \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{K}_h \mathbf{y}$$

Model regresi nonparametrik ini diterapkan pada data pasang surut air laut di Kota Semarang. Pada penelitian ini bertujuan untuk mengetahui hubungan antara waktu pengamatan dan tinggi gelombang pasang surut di Semarang. Sampel yang digunakan dalam penelitian ini adalah tinggi gelombang pasang surut di Semarang yang diamati sebanyak 24 pengamatan dimulai bulan Januari tahun 2011 sampai Desember 2012. Plot data hubungan antara waktu dan tinggi gelombang ditunjukkan pada Gambar 1.



Gambar 1. Scatter plot rata-rata tinggi gelombang air laut perbulan selama tahun 2011-2012

Berdasarkan Gambar 1 memperlihatkan hubungan antara variabel prediktor (waktu) terhadap variabel respon (tinggi gelombang) terlihat bahwa pada bulan pertama sampai bulan ke-24 mengindikasikan kurva tidak mempunyai pola tertentu dan plot data menunjukkan adanya perubahan perilaku kurva pada selang waktu tertentu. Oleh karena itu, hubungan variabel respon terhadap variabel prediktor diestimasi dengan pendekatan regresi nonparametrik polinomial lokal kernel yang menggunakan software R.

Langkah pertama sebelum mengestimasi model regresi tersebut adalah menentukan *bandwidth* optimal dan orde polinomial, yaitu *bandwidth* dan orde polinomial yang memiliki nilai GCV minimum. Kemudian jenis fungsi pembobot yang digunakan dalam estimasi model adalah Kernel Gaussian. Berikut ini disajikan pada tiap-tiap orde polinomial diperoleh *bandwidth* saat GCV(h) minimum yang ditunjukkan pada Tabel 1 sebagai berikut:

Tabel 1. Nilai GCV(h) Minimum untuk masing-masing Orde Polinomial ( $p$ )

Orde Polinomial ( $p$ )	<i>Bandwidth</i>	Min GCV <sup>(p)</sup>
5	69,9	54,53821
6	60,8	54,53312

7	69,3	55,28151
<b>8</b>	<b>69,1</b>	<b>41,75100</b>

Berdasarkan Tabel 1 dapat dilihat bahwa nilai minimum dari GCV minimum tiap-tiap orde polinomial (Min GCV<sup>(p)</sup>) adalah 41,75100 saat *bandwidth* optimal sebesar 69,1 dan orde polinomial  $p=8$ . Kemudian *bandwidth* optimal dan orde polinomial tersebut digunakan untuk estimasi fungsi penghalus  $m(t)$ . Berdasarkan estimasi fungsi tersebut diperoleh MSE sebesar 22,95449 dan koefisien parameter yang dihasilkan adalah sebagai berikut:

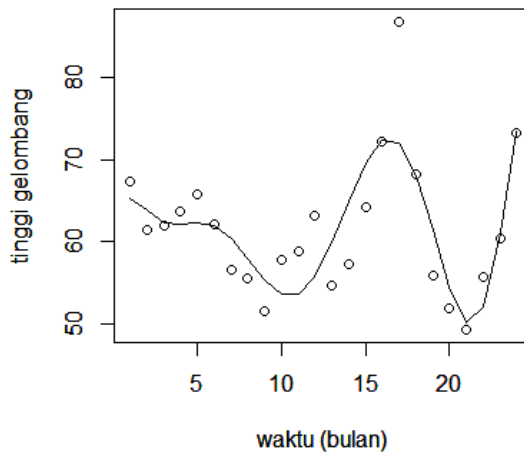
Tabel 2. Hasil estimasi parameter

Parameter	Koefisien parameter
$\hat{\beta}_0$	65,29861
$\hat{\beta}_1$	0,00826
$\hat{\beta}_2$	-2,71321
$\hat{\beta}_3$	1,57395
$\hat{\beta}_4$	-0,36958
$\hat{\beta}_5$	0,04244
$\hat{\beta}_6$	-0,00252
$\hat{\beta}_7$	$7,422863 \times 10^{-5}$
$\hat{\beta}_8$	$-8,588802 \times 10^{-7}$

Jadi hasil estimasi model regresi nonparametrik dengan pendekatan polinomial lokal kernel adalah sebagai berikut :

$$\hat{m}(t_i) \approx 65,299 + 0,0083(t_i - 1) - 2,713(t_i - 1)^2 + 1,574(t_i - 1)^3 - 0,369(t_i - 1)^4 + 0,042(t_i - 1)^5 - 0,0025(t_i - 1)^6 + 7,42 \times 10^{-5}(t_i - 1)^7 - 8,59 \times 10^{-7}(t_i - 1)^8$$

Plot hasil estimasi pada data tinggi gelombang pasang surut air laut menggunakan *bandwidth* optimal dan orde polinomial dapat dilihat pada Gambar 2 sebagai berikut



Gambar 2. Plot estimasi rata-rata tinggi gelombang pasang surut air laut

Berdasarkan Gambar 2 dapat diketahui dinamika perubahan rata-rata tinggi gelombang pasang surut air laut di Kota Semarang selama pengamatan yaitu pada pengamatan pertama (Januari 2011) sampai dengan pengamatan ke-24 (Desember 2012). Estimasi rata-rata tinggi gelombang air laut mengalami lembah gelombang pada saat pengamatan kedelapan (Agustus 2011) sampai dengan pengamatan kedua belas (Desember 2011), sehingga pada saat tersebut terjadi kondisi pasang rendah. Sedangkan kondisi pasang tinggi terjadi pada saat pengamatan keempat belas (Februari 2012) sampai dengan pengamatan ke-delapan belas (Juni 2012) karena pada saat tersebut estimasi tinggi gelombang pasang surut air laut mengalami puncak gelombang. Kondisi pasang rendah juga terjadi pada saat pengamatan ke-sembilan belas (Juli 2012) sampai dengan ke-dua puluh tiga (November 2012).

#### 4. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian, maka dapat disimpulkan bahwa :

1. Estimasi model regresi nonparametrik adalah sebagai berikut :

$$\mathbf{y} = \mathbf{m} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\text{dengan } \hat{\mathbf{m}} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{K}_h \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{K}_y \mathbf{y}$$

Dari hasil penerapan model regresi nonparametrik dengan menggunakan estimator polinomial lokal kernel pada data pasang surut air laut di Kota Semarang, diperoleh nilai *bandwidth* optimal sebesar 69,1 dengan orde polinomial  $p=8$ , MSE sebesar 22,94. Hasil estimasi model regresi nonparametrik dengan pendekatan polinomial lokal kernel adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \hat{m}(t_i) \approx & 65,299 + 0,0083(t_i - 1) - 2,713(t_i - 1)^2 + 1,574 \\ & (t_i - 1)^3 - 0,369(t_i - 1)^4 + 0,042(t_i - 1)^5 - 0,0025(t_i - 1)^6 + \\ & 7,42 \times 10^{-5}(t_i - 1)^7 - 8,59 \times 10^{-7}(t_i - 1)^8 \end{aligned}$$

2. Berdasarkan estimasi model diperoleh dugaan rata-rata tinggi gelombang pasang surut air laut di Kota Semarang mengalami kondisi pasang tinggi pada saat bulan Agustus 2011 sampai dengan Desember 2011, dan berulang kembali pada tahun 2012 yaitu bulan Juli hingga November. Sedangkan kondisi pasang tinggi terjadi pada saat bulan Februari 2012 sampai dengan Juni 2012.

#### 5. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Adhitya, F. W. 2003. Analisis Banjir Rob Di Kecamatan Semarang Utara dan Kecamatan Semarang Timur pada Saat Pasang Tertinggi. Skripsi Jurusan Ilmu Kelautan, FPIK UNDIP, Semarang.
- [2] Eubank, R.M., 1988. *Spline Smoothing and Nonparametric Regression*. Marcel Dekker. New York.
- [3] Hardle, W., 1990. *Applied Nonparametric Regression*. Cambridge University Press. New York.
- [4] Fan, J. and Gijbels, I. 1998. *Local Polynomial Modelling and its Applications*. Chapman and Hall. London.
- [5] Sarbidi, 2002. *Pengaruh Rob pada Pemukiman Pantai (kasus Semarang)*. Prosiding Kerugian pada Bangunan dan Kawasan Akibat Kenaikan Muka

- Air Laut pada Kota-kota Pantai di Indonesia, Jakarta.
- [6] Utami, T.W. 2010. *Estimasi Model Regresi Nonparametrik Pada Data Longitudinal Berdasarkan Estimator Polinomial Lokal Kernel Generalized Estimating Equation*. Skripsi. Surabaya. Departemen Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Airlangga.
- [7] Utami, T.W. 2013. *Pendekatan Regresi Semiparametrik Polinomial Lokal Untuk Data Longitudinal Terhadap Kadar Trombosit Demam Berdarah Dengue*. Tesis. Surabaya. Program Magister Jurusan Statistika FMIPA Institut Teknologi Sepuluh November
-

## ESTIMASI PENGELUARAN PER KAPITA DI KABUPATEN REMBANG DENGAN PENDEKATAN SAE-NONPARAMETRIK

Iswahyudi Joko Suprayitno<sup>1</sup>, Moh Yamin Darsyah<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Program Studi Pendidikan Matematika, UNIMUS

<sup>2</sup> Program Studi Statistika, UNIMUS

matematikawan.mr.joe@gmail.com

### *Abstrak*

*Small Area Estimation (SAE)* merupakan suatu teknik statistika untuk menduga parameter-parameter subpopulasi yang ukurannya kecil. Teknik pendugaan ini “*borrowing information*” memanfaatkan data dari domain besar (seperti data sensus data susenas) untuk menduga variabel yang menjadi perhatian pada domain yang lebih kecil yang selanjutnya dikenal pendugaan tidak langsung. Pendugaan langsung tidak mampu memberikan ketelitian yang cukup bila ukuran sampel dalam area kecil, sehingga statistik yang dihasilkan akan memiliki varian yang besar atau bahkan menghasilkan pendugaan yang bias. Penelitian *SAE* diaplikasikan untuk memetakan Pengeluaran Per kapita di Kabupaten Rembang dimana variabel kepadatan penduduk berperan signifikan dalam mempengaruhi pengeluaran per kapita daerah. Kecamatan Rembang merupakan kecamatan dengan pengeluaran per kapita tertinggi di Kabupaten Rembang sedangkan kecamatan yang memiliki pengeluaran perkapita terendah di Kecamatan Sumber.

**Kata kunci :** *Small Area Estimation, Nonparametrik, Pengeluaran Per kapita*

## 1. PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Pengeluaran perkapita menjadi salah satu ukuran terpenting untuk mengetahui tingkat kesejahteraan rumah tangga, sebagai suatu ukuran agregat yang digunakan untuk mengukur suatu tingkat kesejahteraan pada suatu wilayah. Pengeluaran perkapita menjadi salah satu tema pembangunan, keberhasilan dan kegagalan pembangunan acap kali diukur berdasarkan perubahan tingkat pengeluaran perkapita. Pengeluaran perkapita terjadi karena kemampuan masyarakat pelaku ekonomi tidak sama sehingga terdapat masyarakat yang tidak dapat ikut dalam proses pembangunan ataupun menikmati hasil-hasil pembangunan.

Teori lingkaran setan pengeluaran perkapita pertama kali dikemukakan oleh seorang ekonom swedia dan pernah menerima hadiah nobel ekonomi (Ragnar Nurske). Teori ini menjelaskan sebab-sebab pengeluaran perkapita di negara-negara yang sedang berkembang yang menyatakan bahwa suatu negara itu miskin karena rendahnya produktivitas maka penghasilan seseorang juga rendah yang hanya cukup untuk memenuhi kebutuhan hidupnya yang minim sehingga mereka tidak bisa menabung, padahal tabungan merupakan sumber utama pembentukan modal masyarakat. Untuk bisa membangun maka lingkaran setan harus

diputus. Pengeluaran perkapita merupakan permasalahan yang kompleks bagi setiap negara, terutama negara besar seperti Indonesia. Jumlah penduduk miskin di Indonesia tahun 2010 sebesar 31,02 juta orang (13,33 persen). Pengeluaran perkapita dapat dilihat dari sisi yaitu pengeluaran perkapita absolut dan pengeluaran perkapita relatif, kedua istilah itu mengacu pada kepemilikan materi yang dikaitkan dengan standart kelayakan hidup seseorang atau keluarga dan menunjuk perbedaan sosial yang berangkat dari distribusi pendapatan. Perbedaannya adalah kalau pengeluaran perkapita absolut ukurannya sudah terlebih dahulu ditentukan dengan angka-angka nyata (Garis Pengeluaran perkapita), sementara pada pengeluaran perkapita relatif ditentukan berdasarkan perbandingan relatif tingkat kesejahteraan antar penduduk.

Sementara itu jika dilihat dari penyebab pengeluaran perkapita ada tiga yaitu pengeluaran perkapita natural, pengeluaran perkapita kultural, dan pengeluaran perkapita struktural (Mubyarto, 2003). Pengeluaran perkapita natural adalah pengeluaran perkapita yang disebabkan oleh faktor-faktor alamiah seperti karena cacat, sakit ataupun lanjut usia yang telah kronis ataupun turun temurun, biasanya ini terjadi pada daerah yang sangat terbatas sumber daya alamnya atau daerah yang terisolir. Pengeluaran perkapita kultural merupakan suatu kondisi pengeluaran perkapita yang terjadi karena faktor malas, tidak disiplin, tidak mau kerja keras sebagai akibat mengacu pada sikap hidup seseorang atau kelompok, kebiasaan hidup dan budaya dimana mereka merasa hidup berkecukupan dan merasa tidak kekurangan, kelompok masyarakat seperti ini tidak mudah untuk diajak dalam partisipasi pembangunan, tidak mau berusaha untuk memperbaiki dan merubah tingkat kualitas hidupnya. Pengeluaran perkapita struktural adalah pengeluaran perkapita yang disebabkan oleh faktor-faktor buatan manusia seperti kebijakan ekonomi yang tidak adil, distribusi aset produksi yang tidak merata, korupsi dan kolusi yang membudaya. Adapun faktor yang menyebabkan pengeluaran perkapita menurut Remi dan Tjiptoherijanto (2002) adalah pendapatan yang rendah, jumlah tanggungan keluarga, pekerjaan, serta tingkat pendidikan yang menjadi karakteristik keluarga miskin di Indonesia.

Pendugaan area kecil (*small area estimation*) merupakan suatu teknik statistika untuk menduga parameter-parameter subpopulasi yang ukurannya kecil. Teknik pendugaan ini memanfaatkan data dari domain besar (seperti data sensus, data susenas) untuk menduga variabel yang menjadi perhatian pada domain yang lebih kecil. Pendugaan sederhana area kecil yang didasarkan pada penerapan model desain penarikan contoh (*design-based*) disebut sebagai pendugaan langsung (*direct-estimation*). Pendugaan langsung tidak mampu memberikan ketelitian yang cukup bila ukuran sampel dalam area kecil yang menjadi perhatian sedikit/ berukuran kecil, sehingga statistik yang dihasilkan akan memiliki varian yang besar atau bahkan pendugaan tidak dapat dilakukan karena tidak terwakili dalam survey (Darsyah, 2013).

## 1.2 Rumusan Masalah

Beberapa kebijakan bertumpu pada sumber data Survei Sosial Ekonomi Nasional (SUSENAS) yang tidak semua kecamatan diambil sebagai sampel atau sampel yang tersurveisangat sedikit, salah satu upaya yang dilakukan dengan menambah jumlah sampel akan tetapi biaya yang harus disediakan cukup mahal. Upaya lain adalah mengoptimalkan data yang tersedia dengan metode pendugaan area kecil (*Small area estimation*). Pendugaan area kecil (*small area estimation*) merupakan konsep penting dalam sampling terutama dalam estimasi parameter tidak langsung dimana ukuran sampel relatif kecil, metode ini dapat mengestimasi karakteristik dari subpopulasi.

Sampel yang sangat kecil pada data SUSENAS akan menyebabkan pendugaan bias jika digunakan untuk menduga pada area kecil. Penambahan jumlah sampel akan mengakibatkan pemborosan APBN/APBD, Sebagai alternatifnya menggunakan metode Small

Area Estimation yang bisa mengestimasi area kecil dengan hasil yang lebih presisi dan akurat serta menghemat Milyaran Rupiah karena tidak perlu menambah jumlah sampel/ responden. Selanjutnya aplikasi metode Small Area Estimation untuk menduga pengeluaran per kapitasi Kabupaten Rembang.

Parameter yang menjadi perhatian dalam penelitian ini adalah tingkat pengeluaran perkapita pada level kecamatan di Kabupaten Demak. Tingkat pengeluaran perkapita dihitung berdasarkan pengeluaran per kapita tiap kecamatan dan beberapa variabel yang digunakan sebagai informasi tambahan. Tingkat pengeluaran perkapita suatu area tidak saja diduga dari proporsi penduduk miskin di area tersebut tetapi juga bisa dengan dugaan rata-rata pengeluaran per kapita rumah tangga pada suatu area (Darsyah, 2013). Hal ini dilakukan untuk mendapatkan gambaran yang utuh mengenai tingkat pengeluaran perkapita di suatu area.

## 2. HASIL PENELITIAN

### 2.1 Tahap proses pelaksanaan penelitian yang telah dilakukan hingga pelaporan

Penelitian mengenai SAE untuk pemetaan kemiskinan di Kabupaten Rembang merupakan penelitian aplikasi model matematis SAE yang bertujuan menduga tingkat pengeluaran per kapita subpopulasi pada area kecil yaitu pada level kecamatan.

Tabel 5.1 Jadwal Pelaksanaan Penelitian dan Capaian Hasil

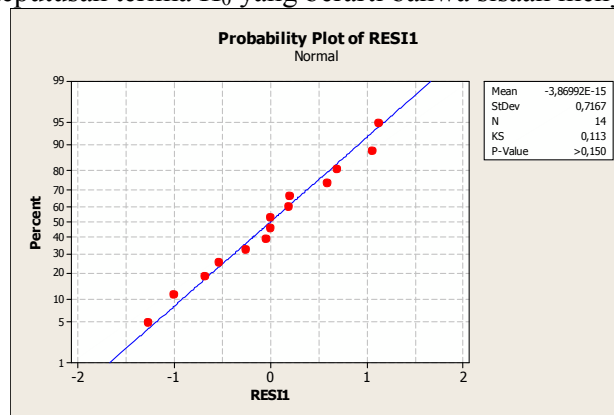
No.	Jenis Kegiatan	Waktu Kegiatan	Indikator capaian terukur
1.	Koordinasi awal tim penelitian untuk mendesain penelitian serta pembagian tugas pembuatan instrumen penelitian	Februari 2015	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Desain Metodologi</li> </ul>
2	Pembuatan Instrumen dan Model	Maret – April 2015	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pengumpulan data</li> <li>• Pengelompokan data</li> <li>• Pemilihan variabel</li> <li>•</li> </ul>
3	Koordinasi dengan BPS Demak	Mei 2015	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Koordinasi dengan BPS</li> <li>• Pendataan objek penelitian</li> </ul>
4	Validasi instrumen	Mei 2015	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Hasil pengujian</li> </ul>
5	Revisi Instrumen	Mei 2014	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Instrumen yang valid</li> </ul>
6	Pelaksanaan penelitian Aplikasi Metode SAE untuk estimasi pengeluaran per kapita	Mei – Juni 2015	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pemilihan variabel</li> <li>• Aplikasi Metode</li> <li>• Analisis Data</li> </ul>

## 2.2 Analisis Data

Analisis yang digunakan pada penelitian ini adalah menggunakan metode *Small Area Estimation* (SAE) yang akan diolah menggunakan software R. variabel respon yang digunakan pada penelitian ini adalah pengeluaran per kapita di tiap-tiap kecamatan di Kabupaten Rembang, sedangkan variabel prediktor yang digunakan pada penelitian ini adalah persentase jumlah keluarga nelayan ( $X_1$ ), persentase jumlah pengguna jemkesmas ( $X_2$ ), dan kepadatan penduduk ( $X_3$ ) di tiap-tiap kecamatan di Kabupaten Rembang.

### a. Pemeriksaan Asumsi Kenormalan

Pemeriksaan asumsi kenormalan sisaan menggunakan uji *Kolmogorof-Smirnov* (KS) menghasilkan nilai KS sebesar 0.113 dengan nilai-p ( $>0.15$ ) lebih besar dari taraf nyata 5%, sehingga diperoleh keputusan terima  $H_0$  yang berarti bahwa sisaan menyebar normal.



Gambar 5.1

### Diagram uji kenormalan *Kolmogorof-smirnov*

Pada Gambar 5.1 tersebut dapat dilihat bahwa plot sisaan analisis regresi menyebar mengikuti garis lurus yang menunjukkan sisaan menyebar normal.

### b. Uji Keragaman Spasial (Heterokedastisitas)

Pengujian keragaman spasial menggunakan uji *Breusch-Pagan* (BP) menghasilkan nilai BP sebesar 7,76 dengan nilai-p (0,059) yang kurang dari taraf nyata 10%, sehingga diperoleh keputusan tolak  $H_0$  yang berarti bahwa terdapat keragaman spasial pada data kemiskinan pada tiap kecamatan di Kabupaten Rembang tahun 2014. Adanya keragaman spasial pada kemiskinan tersebut menunjukkan bahwa setiap kecamatan di Kabupaten Rembang memiliki karakteristik tersendiri, sehingga diperlukan pendekatan lokal untuk memodelkan dan untuk mengatasi keragaman yang terjadi pada kemiskinan.

### c. Analisis Deskriptif.

Analisis deskriptif ini bertujuan untuk memberikan gambaran deskripsi secara umum kondisi Kabupaten Rembang. Letak dan Luas Wilayah Kabupaten Rembang terletak di sebelah utara bagian timur dari Propinsi Jawa Tengah dengan posisi lintang berada pada 111 2,00' – 111 2,30' BT dan 6 2,30' – 7 2,00' LS. Dengan topografi yang sangat lengkap yaitu daerah pantai, dataran rendah, dataran tinggi dan pegunungan, dengan jenis tanah terdiri atas kandungan Mediterial, Grumosal, Aluvial, Andosal dan Regasal.

Memiliki wilayah dengan luas 1014,08 km<sup>2</sup>, dan diapit oleh Laut Jawa di sebelah utara dan Pegunungan Kendeng Utara di sebelah selatan.

Batas Administrasi

Sebelah Utara : Laut Jawa

Sebelah Timur : Kabupaten Tuban, Provinsi Jawa Timur

Sebelah Barat : Kabupaten Pati

Sebelah Selatan : Kabupaten Blora

Kabupaten Rembang terbagi menjadi 14 kecamatan, 287 desa dan 7 kelurahan. Kecamatan yang memiliki luas wilayah terbesar adalah Kecamatan Sale (10.714 ha) disusul Kecamatan Bulu (10.240 ha). Data luas wilayah kecamatan di Kabupaten Rembang tersaji pada Tabel 5.2 sebagai berikut :

KECAMATAN <i>District</i>	LUAS <i>Area</i>	KETINGGIAN (m) <i>Altitude</i>
(1)	(2)	(3)
010. SUMBER	7.673	40
020. BULU	10.240	150
030. GUNEM	8.020	50
040. SALE	10.714	110
050. SARANG	9.133	3
060. SEDAN	7.964	40
070. PAMOTAN	8.156	30
080. SULANG	8.454	48
090. KALIORI	6.150	3
100. REMBANG	5.881	6
110. PANCUR	4.594	30
120. KRAGAN	6.166	3
130. SLUKE	3.759	7
140. LASEM	4.504	5
JUMLAH/ <i>Total</i>	101.408	XXXXX

Sumber/Source : Dinas Pertanian dan Kehutanan Kabupaten Rembang

Kebijakan pembangunan di bidang kependudukan dan catatan sipil diarahkan pada upaya memberikan pelayanan kepada masyarakat tentang kependudukan dan pencatatan sipil dengan cepat, murah dan transparan. Cakupan layanan administrasi kependudukan dapat dilihat pada tabel 5.3 berikut ini.

**Cakupan Pelayanan Administrasi Kependudukan Kabupaten Rembang Tahun 2010 – 2012**

No.	Uraian	Tingkat Perkembangan Tahunan		
		2010	2011	2012
1.	Pelayanan KTP/KK			
	KTP (lembar)	77.476	69.303	67.887
	KK (lembar)	60.117	50.662	60.311
2.	Penerbitan Akta Catatan Sipil	22.144	13.478	9.780

*Sumber:* Dinas Kependudukan dan Catatan Sipil Tahun 2012

Tabel 5.4 Jumlah Penduduk Kabupaten Rembang Tahun 1994 s/d 2013

TAHUN/ Year	Laki-laki Male	Perempuan Female	Jumlah Total	Rasio Jenis Kelamin Sex Ratio
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
1994	261.456	264.864	526.320	98,71
1995	263.809	267.026	530.835	98,80
1996	272.531	275.273	547.804	99,00
1997	273.415	275.992	549.407	99,07
1998	274.328	277.012	551.340	99,03
1999	277.118	279.581	556.699	99,12
2000	279.746	279.483	559.229	100,09
2001	281.235	281.181	562.416	100,02
2002	282.946	283.003	565.949	99,98
2003	284.668	284.894	569.562	99,92
2004	286.406	286.781	573.187	99,87
2005	288.119	288.684	576.803	99,80
2006	289.718	290.480	580.198	99,74
2007	291.106	292.128	583.234	99,65
2008	292.844	293.743	586.587	99,69
2009	294.380	295.439	589.819	99,64
2010	295.286	297.228	592.514	99,35
2011	298.188	300.030	598.218	99,39
2012	302.582	303.423	606.005	99,72
2013	304.768	306.727	611.495	99,36

Luas wilayah Kabupaten Rembang 101.408 Ha merupakan wilayah Kabupaten yang cukup luas dibandingkan dengan Kabupaten atau kota lainnya di Provinsi Jawa Tengah. Sebagian besar (46.39%) wilayah Kabupaten Rembang merupakan dataran rendah, yang terletak di bagian utara Kabupaten Rembang, sedangkan di bagian selatan relatif lebih tinggi. Wilayah di bagian selatan ini mempunyai ketinggian antara 100-500 meter dpl (30.42% dari total wilayah Kabupaten Rembang) dan sisanya berada pada ketinggian 0-25 m dan 500-1000 m. Wilayah Kabupaten Rembang seluas 45.205 ha (46.58%) mempunyai kelerengannya sebesar 0 – 2%, sedangkan 33.233 ha lainnya (43.18%) mempunyai kelerengannya sebesar 2 – 15%. Wilayah perbukitan dan pegunungan dengan kelerengannya sebesar 15 – 40% dan > 40% masing-masing seluas 14.38% dan 4.86% dari total wilayah Kabupaten Rembang.

Jika dilihat distribusi persentase PDRB adh berlaku menurut lapangan usaha dari tahun 2010 sampai dengan tahun 2012 secara umum didominasi oleh sektor pertanian dengan angka kontribusi 43,91 persen lebih kecil dibandingkan pada tahun sebelumnya. Penyumbang terbesar kedua adalah sektor perdagangan, hotel dan restoran yang semakin meningkat persentasenya yaitu sebesar 17,83 persen. Sektor jasa-jasa juga cukup andil memberikan kontribusi dengan 15,07 persen. Selain ketiga sektor tersebut distribusi sektor yang lain masih di bawah 10 persen bahkan untuk sektor Listrik, Gas dan Air Bersih hanya sekitar 0,46 persen dari total PDRB. Demikian juga distribusi PDRB menurut harga konstan cenderung hampir sama.

Kenaikan laju pertumbuhan ekonomi Kabupaten Rembang selama tiga tahun terakhir terlihat belum stabil. Terlihat dari laju pertumbuhan PDRB adh konstan, pada tahun 2010 pertumbuhannya sebesar 4,45 persen dibandingkan tahun 2009, dan pada tahun 2011 laju pertumbuhannya melambat menjadi 4,40 persen, namun pada tahun 2012 laju pertumbuhannya sedikit lebih cepat yaitu sebesar 4,88 persen. Kondisi ini salah satunya disebabkan karena produksi tahun 2012 pada sektor pertanian khususnya pertanian tanaman perkebunan pertumbuhannya cukup tinggi. Pada umumnya semua sektor lapangan usaha laju pertumbuhan PDRB menurut harga konstan cenderung lebih tinggi dibandingkan tahun sebelumnya kecuali sektor listrik, gas dan air bersih pertumbuhannya agak melambat.

Inflasi merupakan indikator ekonomi yang sering dicermati karena terkait langsung dengan kemampuan daya beli dari uang yang dimiliki oleh masyarakat, terutama mereka yang berpenghasilan tetap. Perubahan harga secara umum (inflasi/deflasi) untuk barang dan jasa yang dikonsumsi masyarakat diukur dengan perubahan Indeks Harga Konsumen (IHK). Kabupaten Rembang pada tahun 2012 mengalami inflasi sebesar 4,28 persen. Angka ini lebih tinggi dibanding inflasi Jawa Tengah sebesar 4,24 persen dan lebih rendah dibanding inflasi Kota Semarang sebesar 4,85 persen. Jika dibandingkan dengan inflasi nasional, angka inflasi Kabupaten Rembang sedikit lebih rendah karena angka inflasi nasional pada tahun 2012 sebesar 4,30 persen. Selama kurun waktu 2007-2012, inflasi tahun 2011 adalah yang terendah, baik untuk Jawa Tengah, Kota Semarang maupun Rembang. Sedikit berbeda dengan inflasi nasional, inflasi terendah terjadi pada tahun 2009 (2,76 persen).

Tabel 5.5 Koefisien Parameter

Variabel	Koefisien Parameter		
	Minimum	Median	Maksimum
Intersep	1,727	2,468	11,240
X <sub>1</sub>	-0,894	0,021	0,993
X <sub>2</sub>	-0,033	-0,027	0,409
X <sub>3</sub>	0,0006	0,003	0,004
SSE	43,976		
R <sup>2</sup>	70,79%		

Nilai R<sup>2</sup> yang diperoleh dari model sebesar 70,79%. Hal ini berarti keragaman pengeluaran per kapita disebabkan oleh persentase rumah tangga nelayan, persentase jumlah rumah tangga pengguna jamkesmas dan kepadatan penduduk sebesar 70,79%, sedangkan 20,21 % sisanya disebabkan oleh adanya faktor lainnya yang turut mempengaruhi besarnya pengeluaran perkapita.

#### d. Pengujian Model

*Goodness of fit* atau pengujian kesesuaian untuk model dilakukan untuk mengetahui faktor lokasi yang berpengaruh terhadap tingkat kemiskinan di Kabupaten Demak.

Tabel 5.6 Uji Kesesuaian Model

	SSE	Df	F <sub>hitung</sub>	P <sub>value</sub>
Model	43,977	9,023	2,775	0,032

Berdasarkan tabel 4.3 di atas didapatkan nilai p<sub>value</sub> (0,042) yang berarti nilai p<sub>value</sub> kurang dari taraf nyata 5% (0,032 < 0,05). Hal ini berarti tolak H<sub>0</sub> karena nilai p<sub>value</sub> lebih kecil dari taraf nyata 5%, yang artinya ada faktor pengaruh geografis pada model.

Tabel 5.7 Parameter yang signifikan pada model per Kecamatan

No	Kecamatan	Variabel
1	Bulu	X <sub>2,3</sub>
2	Gunem	-
3	Kaliori	X <sub>1,2,3</sub>
4	Kragan	X <sub>1,2,3</sub>
5	Lasem	X <sub>1,2,3</sub>
6	Pamotan	X <sub>2,3</sub>
7	Pancur	X <sub>2,3</sub>
8	Rembang	X <sub>1,2,3</sub>
9	Sale	X <sub>3</sub>
10	Sarang	X <sub>1,3</sub>
11	Sedan	-
12	Sluke	-
13	Sulang	X <sub>2,3</sub>
14	Sumber	-

Berdasarkan tabel 5.7 diperoleh hasil bahwa ada 10 kecamatan yang dipengaruhi oleh variabel kepadatan penduduk (X<sub>3</sub>), dan ada 4 kecamatan yang tidak berpengaruh pada ketiga variabel yang digunakan dalam penelitian ini. Hal ini diduga karena ada variabel lain yang lebih signifikan yang mempengaruhi pengeluaran per kapita di Kabupaten Rembang.

## REFERENSI

- [BPS]. Badan Pusat Statistik. 2014.<http://www.bps.go.id/glossary/2014>.
- Darsyah, M.Y, Rumiati, A.T, Otok, B.W. (2012). *Small Area Estimation terhadap Pengeluaran Per Kapita di Kabupaten Sumenep dengan pendekatan Kernel-Bootstrap*. Prosiding Seminar Nasional MIPA UNESA, Surabaya.
- Darsyah, M.Y dan Wasono, R (2013). *Pendugaan Tingkat Kemiskinan di Kabupaten Sumenep dengan pendekatan SAE*. Prosiding Seminar Nasional Statistika UII, Yogyakarta.
- Darsyah, M.Y dan Wasono, R (2013). *Pendugaan IPM pada Area Kecil di Kota Semarang dengan Pendekatan Nonparametrik*. Prosiding Seminar Nasional Statistika UNDIP, Semarang.
- Demir, S. dan Toktamis, O. (2010). On The Adaptive Nadaraya-Watson Kernel Regression Estimators. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*.
- Eubank, R. L. (1988). *Spline Smoothing and Nonparametric Regression*. New York: Marcel Dekker.

## Pengaruh *Human Capital* terhadap Pertumbuhan Ekonomi Indonesia

Andi Kurniawan, S.ST, M.Si<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Sekolah Tinggi Ilmu Statistik Jakarta, andikurnia@stis.ac.id

### Abstrak.

Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis dan membuktikan pengaruh *Human Capital* terhadap pertumbuhan ekonomi Indonesia. *Human Capital* diwujudkan dengan rata-rata lamanya sekolah. Selain rata-rata lamanya, variabel lain juga dimasukkan sebagai variabel yang mempengaruhi pertumbuhan ekonomi yaitu penambahan modal tetap bruto dan jumlah tenaga kerja

Metode yang digunakan adalah model fixed effect dengan data panel seluruh provinsi di Indonesia pada periode tahun 2010-2013.

Hasil penelitian menunjukkan bahwa *human capital* memberikan pengaruh paling besar diantara variabel lain artinya peningkatan kualitas pendidikan di suatu wilayah akan sangat berdampak dalam peningkatan perekonomian wilayah tersebut artinya berbagai kebijakan harus dilakukan untuk meningkatkan kualitas pendidikan masyarakat tanpa agar pertumbuhan ekonomi lebih cepat.

**Keywords:** *Human Capital, Pertumbuhan Ekonomi, model fixed effect*

### 1. PENDAHULUAN

Salah satu tujuan pembangunan ekonomi adalah peningkatan kesejahteraan yang dapat dirasakan manfaatnya oleh masyarakat. Indikator penting untuk mengetahui kondisi ekonomi suatu wilayah atau daerah dalam suatu periode tertentu ditunjukkan oleh data Produk Domestik Regional Bruto (PDRB). Pertumbuhan PDRB atau pertumbuhan ekonomi menunjukkan sejauh mana aktivitas perekonomian akan menghasilkan tambahan pendapatan masyarakat pada suatu periode tertentu. Menurut data Badan Pusat Statistik (BPS) ekonomi

Indonesia tahun 2014 tumbuh sebesar 5,02 persen atau mengalami perlambatan dibanding tahun 2013 sebesar 5,90. Ketika memperhatikan pembangunan lima tahunan, kinerja ekonomi mengalami perkembangan yang cukup berarti. Perekonomian tumbuh rata-rata 4,36 persen pada periode 2001-2005, kemudian mencapai rata-rata 5,50 persen per tahun pada periode 2005-2010 dan tumbuh rata-rata 6,18 persen pertahun pada periode berikutnya.

Kinerja perekonomian yang meningkat tidak terlepas dari berbagai faktor produksi yang terlibat dalam aktifitas ekonomi. Peningkatan berbagai faktor produksi baik dari sisi kuantitas maupun kualitas akan menjadi pendorong pertumbuhan ekonomi. Faktor produksi yang penting sangat penting adalah modal dan tenaga kerja. Berkaitan dengan faktor produksi tenaga kerja, tenaga kerja yang berkualitas merupakan salah satu pendorong agar kinerja perekonomian mampu berkerja lebih cepat. Tenaga Kerja berkualitas mampu bekerja lebih produktif dan lebih efisien. Untuk mendapatkan tenaga yang berkualitas dibutuhkan pembentukan modal manusia (*human capital*). Pembentukan modal manusia ini merupakan suatu cara untuk memperoleh sejumlah manusia yang memiliki keahlian dan pengetahuan yang dapat mempercepat pembangunan. Modal manusia (*human capital*) adalah istilah yang sering digunakan oleh para ekonom untuk pendidikan, kesehatan, dan kapasitas manusia yang lain yang dapat meningkatkan produktivitas jika hal-hal tersebut ditingkatkan. Produktivitas yang tinggi akan memacu laju pertumbuhan output secara agregat lebih tinggi.[3]

Dalam penelitian ini diharapkan dapat memberikan gambaran mengenai pengaruh Human capital terhadap pertumbuhan ekonomi di Indonesia. Human Capital yang digunakan dalam penelitian ini adalah tingkat pendidikan masyarakat. Variable yang dipilih untuk melihat kualitas human capital adalah rata-rata lamanya sekolah. Selain variable human capital, dalam penelitian ini juga dimasukkan variable lain yang ikut serta dalam peningkatan pertumbuhan ekonomi yaitu investasi dan jumlah tenaga kerja. Variabel yang dipilih untuk menggambarkan tingkat investasi adalah penambahan modal tetap bruto.

Beberapa penelitian telah dilakukan berkaitan dengan pengaruh kualitas sumber daya manusia terhadap perekonomian. Gemmel (1996) dengan metode regresi data panel melakukan pengamatan di Negara OECD, menemukan bahwa terdapat kontribusi modal manusia melalui tingkat rata-rata pendidikan tahunan baik primer, skunder, maupun tersier terhadap pertumbuhan ekonomi. Hasil temuan menunjukkan kenaikan 1 persen pada stok manusia akan meningkatkan pertumbuhan ekonomi sebesar 1,1 persen.[4]

Sjafii (2009), melakukan penelitian dengan Metode *General Least Square*, hasil penelitian menunjukkan bahwa investasi sumber daya manusia melalui pengeluaran belanja

pemerintah untuk pendidikan dan kesehatan mempengaruhi pertumbuhan ekonomi di Jawa Timur.[4]

Setyopurwanto (2013), melakukan penelitian dengan judul pengaruh investasi sumber daya manusia dan investasi modal terhadap pendapatan perkapita masyarakat. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah *Two Stage Least Squares* (2SLS) dengan model persamaan simultan (*Simultaneous Equation Model*). Penelitian ini menggunakan data panel yang terdiri dari *cross section* 35 kabupaten/kota dan *time series* 5 tahun dari 2008 sampai 2012 di Jawa Tengah. Hasil penelitian menunjukkan bahwa beberapa *proxy* variabel pendidikan seperti rerata lama sekolah, tingkat pendidikan primer, serta pertumbuhan ekonomi berpengaruh secara positif dan signifikan terhadap pembangunan modal manusia. Akan tetapi, tingkat pendidikan tersier tidak berpengaruh secara signifikan dan negatif terhadap pembangunan modal manusia [4].

## 2. HASIL PENELITIAN

### 2.1 Persamaan Regresi Panel *Fixed Effect Model*

Setelah melakukan uji chow model yang paling baik untuk penelitian ini adalah Fixed effect model. Fixed effect model dengan least square dummy variable pada model regresi data panel merupakan metode yang menggunakan variable dummy untuk mengetahui besarnya perbedaan koefisien intersep tiap masing-masing efek wilayah provinsi. Hasil pengolahan dengan evIEWS 6 diperoleh hasil Regresi panel ***Fixed Effect Model (FEM)*** sebagai berikut :

$$Y = 7.77 + 0.0001 X_1 + 0.015 X_2 + 0.228 X_3 + 0,61 D_1 + 0,09 D_2 - 0,04 D_3 + 0,07 D_4 + 0,18 D_5 + 0,40 D_6 - 0,35 D_7 - 1,32 D_8 + 0,45 D_9 + 0,27 D_{10} + 0,07 D_{11} - 0,23 D_{12} + 0,25 D_{13} + 0,60 D_{14} + 0,04 D_{15} - 1,41 D_{16} + 0,23 D_{17} + 0,58 D_{18} + 0,10 D_{19} - 0,29 D_{20} + 0,21 D_{21} + 0,24 D_{22} + 0,5 D_{23} - 1,02 D_{24} - 0,33 D_{25} + 0,59 D_{26} + 0,14 D_{27} - 0,18 D_{28} + 0,12 D_{29} + 0,18 D_{30} + 0,47 D_{31} - 0,43 D_{32} - 0,76 D_{33}$$

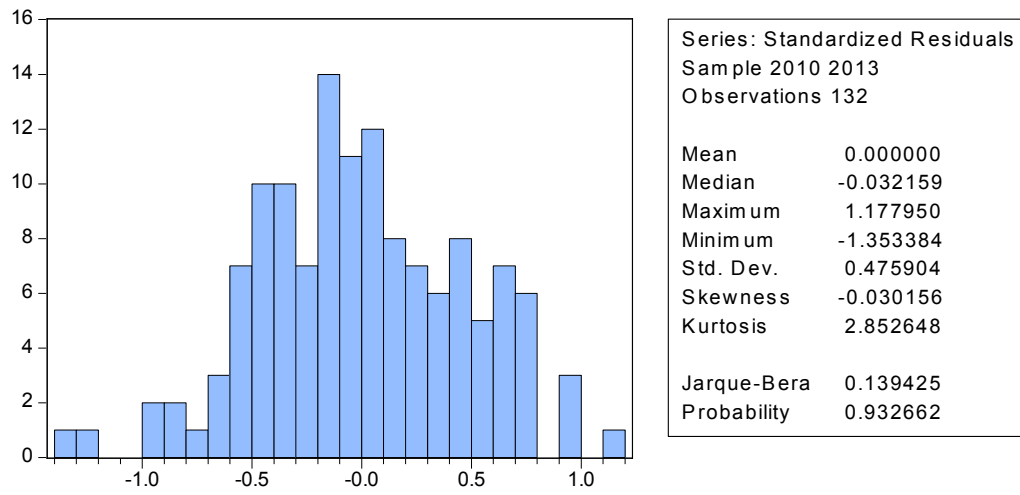
### 2.2. Uji Spesifikasi Model

#### 2.2.1. Uji Asumsi Klasik

Asumsi dasar yang harus dilakukan pengujian adalah Normalitas,, autokorelasi dan multikolinieritas

##### a. Asumsi Normalitas

Uji distribusi normal adalah uji untuk mengukur apakah data memiliki distribusi normal sehingga dalam statistic parametric (statistic inferensial). Dengan pengolahan evIEWS 6 diperoleh hasil sebagai berikut :



Hasil output terlihat bahwa nilai Jarque-Berra (JB) sebesar 0,1349, karena nilai  $JB < 77,93$  selain itu tingkat probability sebesar 0,932662 ( $p > 5\%$ ) maka dapat disimpulkan bahwa residual berdistribusi normal.

b. Asumsi Nonautokorelasi

Penaksiran model regresi linier mengandung asumsi bahwa tidak terdapat autokorelasi diantara *disturbance term*. Autokorelasi ini umumnya terjadi pada data time series. Konsekuensi dari adanya autokorelasi pada model adalah penaksir tidak efisien dan uji t serta uji F yang biasa tidak valid walaupun hasil estimasi tidak bias (Gujarati, 2003). Untuk menguji asumsi non autokorelasi adalah dengan menggunakan Durbin Watson. sehingga didapat :

Positif Autokorelas	Tidak tentu	Tidak ada autokorelasi	Tidak tentu	Negatif autokorelasi
	dL=1,60	dU= 1,62	4-dU=2,37	4-dL=2,39

Nilai Durbin Watson sebesar 2,4411, jika diuji berdasarkan table Durbin Watson dengan dL dan dU pada  $\alpha = 5\%$  dengan  $n = 132$  dan  $k = 3$  yaitu  $dL = 1,60$  dan  $DU = 1,62$  artinya terjadi pelanggaran autokorelasi.

c. Asumsi Non Multikolinieritas

Untuk menguji adanya multikolinieritas kita lakukan pendekatan korelasi parsial sebagai berikut:

1. Lakukan regresi model persamaan

$$Y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 \dots\dots\dots (R1)$$

2. Kemudian lakukan estimasi untuk variable independen

$$X_1 = b_0 + b_1 X_2 + b_2 X_3 \dots\dots\dots (R2)$$

$$X_2 = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_3 \dots\dots\dots (R3)$$

$$X_3 = b_0 + b_1 X_2 + b_2 X_1 \dots\dots\dots (R4)$$

Hasil pengolahan dengan evIEWS didapatkan bahwa:

$R_1 = 0,861 > R_2 = 0,695$  ;  $R_1 = 0,861 > R_3 = 0,645$  ;  $R_1 = 0,861 > R_4 = 0,571$ , dari hasil tersebut memberikan gambaran tidak terdapat multikolinieritas

## 2.2. Uji keseluruhan

Berdasarkan uji F dengan pengolahan evIEWS 6 menunjukkan bahwa probabilitas (F-statistik) sebesar  $0,00000 < \alpha = 0,05$  yang menunjukkan bahwa pertumbuhan PDRB berhubungan dengan variabel independennya yaitu jumlah tenaga kerja, penambahan modal tetap bruto dan rata-rata lamanya sekolah

## 2.3. Keragaman Yang dijelaskan oleh Model

Kecocokan ( *goodness of fit* ) model dapat diperoleh dengan menghitung nilai  $R^2$ . Nilai  $R^2$  akan memberikan gambaran seberapa besar variasi dari variabel bebas dapat menjelaskan variasi dari variabel tidak bebas. Berdasarkan` hasil output pengolahan dengan program evIEWS 6 diperoleh nilai  $R^2$  sebesar 0.86 artinya sekitar 86 % variasi pertumbuhan PDRB dapat dijelaskan oleh variabel independennya yaitu jumlah tenaga kerja, PMTB dan rata-rata lamanya sekolah.

Berdasarkan hasil regresi data panel dengan *Fixed Effect Model*, efek perbedaan wilayah berpengaruh terhadap tingkat pertumbuhan PDRB dimana efek perbedaan wilayah tersebut dapat dilihat dari variabel dummy yang menyatakan katagori wilayah adalah sebagai berikut:

$$Y = 7.77 + 0.0001 X_1 + 0.015 X_2 + 0.228 X_3 + 0,61 D_1 + 0,09 D_2 - 0,04 D_3 + 0,07 D_4 + 0,18 D_5 + 0,40 D_6 - 0,35 D_7 - 1,32 D_8 + 0,45 D_9 + 0,27 D_{10} + 0,07 D_{11} - 0,23 D_{12} + 0,25 D_{13} + 0,60 D_{14} + 0,04 D_{15} - 1,41 D_{16} + 0,23 D_{17} + 0,58 D_{18} + 0,10 D_{19} - 0,29 D_{20} + 0,21 D_{21} + 0,24 D_{22} + 0,5 D_{23} - 1,02 D_{24} - 0,33 D_{25} + 0,59 D_{26} + 0,14 D_{27} - 0,18 D_{28} + 0,12 D_{29} + 0,18 D_{30} + 0,47 D_{31} - 0,43 D_{32} - 0,76 D_{33}$$

Dimana:

$Y = \ln$  PDRB atas dasar harga konstan tahun 2010

$X_1$  = Penambahan Modal Tetap Bruto (PMTB) atas dasar Harga Konstan tahun 2010 (dalam milyar rupiah)

$X_2$  = Jumlah Tenaga Kerja (dalam ribuan orang)

$X_3$  = Rata-rata Lamanya Sekolah (dalam tahun)

Dari persamaan diatas memberikan gambaran bahwa kenaikan jumlah tenaga kerja sebanyak 1000 orang akan meningkatkan pertumbuhan ekonomi sebesar 0,0001 persen dengan menganggap variabel lainnya konstan. Kemudian apabila kita meningkatkan jumlah akumulasi capital sebesar 1 milyar rupiah akan menyebabkan pertumbuhan ekonomi sebesar 0,228 persen dengan menganggap variable lainnya konstan dan pertumbuhan ekonomi akan meningkat sebesar 0,228 persen jika kita meningkatkan rata-rata lamanya sekolah 1 tahun lebih tinggi.

Dari persamaan diatas terlihat bahwa variabel *human capital* memberikan pengaruh paling besar diantara variabel lain artinya peningkatan kualitas pendidikan di suatu wilayah akan sangat berdampak dalam meningkatkan perekonomian wilayah tersebut artinya berbagai kebijakan harus dilakukan untuk meningkatkan kualitas pendidikan masyarakat agar pertumbuhan ekonomi lebih cepat.

## REFERENSI

- [1] Juanda, B. and Junaidi, *Ekonometrika Deret Waktu* , IPB Press, 2012.
- [2] Gujarati, Damodar, *Basic Econometrics.Third Edition*. McGraw Hill International Edition, 1995.
- [3] Todaro , Michael.*Pembangunan Ekonomi di Dunia Ketiga*. Penerbit Erlangga Edisi Kedelapan, 2004
- [4] Setyopurwanto. 2013.*Pengaruh Investasi Sumber Daya Manusia dan Investasi Modal Terhadap Pendapatan Perkapita Masyarakat*. Jurnal Ilmiah <http://jimfeb.ub.ac.id/index.php/jimfeb/article/viewFile/554/497>,

## OPTIMISASI PORTOFOLIO *MEAN-VARIANCE* ASET- LIABILITAS DENGAN RATAAN DAN VOLATILITAS TAK KONSTAN

Sukono<sup>1</sup>, Sudradjat Supian<sup>2</sup>, Dwi Susanti<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Departemen Matematika FMIPA Unpad, Email: fsukono@yahoo.com

<sup>2</sup>Departemen Matematika FMIPA Unpad, Email: adjat03@yahoo.com

<sup>3</sup>Departemen Matematika FMIPA Unpad, Email: dwi\_susanti65@yahoo.com

**Abstrak.** Dalam paper ini dianalisis tentang optimisasi portofolio *Mean-Variance* aset-liabilitas-dengan volatilitas tak konstan. Diasumsikan bahwa *return* aset memiliki rata-rata dan volatilitas tak konstan. Rata-rata tak konstan diestimasi menggunakan model *autoregressive moving average* (ARMA), dan volatilitas tak konstan diestimasi menggunakan model *generally autoregressive conditional heteroscedastic* (GARCH). Sedangkan rata-rata dan variansi *return* liabilitas diestimasi menggunakan *return* obligasi. *Return* surplus diestimasi menggunakan model aset liabilitas. Nilai prediksi dari model rata-rata dan volatilitas tak konstan, selanjutnya digunakan untuk menentukan rata-rata dan variansi *return* surplus yang mengikuti model aset liabilitas. Berikutnya, nilai rata-rata dan variansi dari *return* surplus digunakan untuk proses optimisasi portofolio investasi. Optimisasi portofolio dari *return* surplus dilakukan menggunakan model *Mean-Variance* dari Markowitz. Sebagai ilustrasi numerik dianalisis beberapa aset yang diperdagangkan pada pasar modal di Indonesia. Optimisasi portofolio ini menghasilkan kombinasi bobot optimum, yang dapat dipergunakan sebagai bahan pertimbangan bagi investor dalam pengambilan keputusan berinvestasi pada aset-aset yang dianalisis.

**Keywords:** optimisasi, *mean-variance*, aset-liabilitas, ARMA, GARCH

### 1. PENDAHULUAN

Secara umum, investasi adalah sebagai strategi penanaman modal, baik langsung maupun tidak langsung, yang bertujuan untuk memperoleh keuntungan (manfaat) tertentu sebagai hasil penanaman modal [9]. Terdapat beberapa investor yang sanggup melakukan investasi pada aset finansial, namun di sisi lain investor tersebut juga memiliki kewajiban yang perlu dibayar dari hasil investasinya. Sehingga, keuntungan yang didapatkan oleh investor adalah merupakan selisih (surplus) antara *return* investasi dengan kewajiban (liabilitas) yang harus ditanggung [7], [12]. Setiap keputusan investasi, seorang investor akan diarahkan pada tingkat surplus tertinggi. Investor akan memilih investasi yang menjanjikan tingkat keuntungan (*return*) tertinggi agar dapat diperoleh tingkat surplus yang tinggi pula. Permasalahannya, bahwa investasi yang dilakukan adalah mengandung risiko, oleh karena itu investor harus memperhitungkan faktor risiko [4].

Berinvestasi dalam aset finansial, terdapat beberapa karakteristik *return* aset

finansial yang perlu diperhatikan, agar dapat dilakukan analisis secara tepat. Salah satu karakteristiknya, bahwa *return* aset finansial seringkali mengikuti pola deret waktu. Sehingga *return* aset finansial ini memiliki rata-rata dan volatilitas tak konstan, atau nilai-nilainya berubah seiring dengan perubahan waktu [8]. Untuk mengestimasi besarnya nilai rata-rata dan volatilitas tak konstan ini Gökbulut & Pekkaya [3], dan Jánský, & Rippel [4], melakukannya dengan menggunakan model *autoregressive moving average* (ARMA) dan *generally autoregressive conditional heteroscedastic* (GARCH). Selanjutnya, berdasarkan estimator rata-rata dan volatilitas tak konstan dari *return* aset dan *return* liabilitas ini, *return* surplus dapat ditentukan. Untuk menentukan *return* surplus ini, Wurtz, Chalabi, & Luksan [11] dan Zhao, Wei, & Wang [12], melakukannya dengan menggunakan model aset-liabilitas. Investor menhendaki *return* surplus yang maksimum dengan tingkat risiko tertentu, atau tingkat *return* surplus tertentu dengan tingkat risiko minimum. Menurut Kirby and Ostdiek [5],

strategi yang sering digunakan dalam menghadapi kondisi investasi berisiko adalah membentuk portofolio. Hakekat dari pembentukan portofolio adalah mengalokasikan dana pada beberapa kesempatan investasi, sehingga risiko investasi akan dapat dikurangi atau diminimumkan [1]. Model matematika yang dapat mengakomodir tujuan investor, yaitu memaksimalkan surplus dan meminimumkan risiko adalah berbentuk portofolio *Mean-Variance* [5].

Oleh karena itu, dalam paper ini dianalisis tentang optimisasi portofolio investasi *Mean-Variance* aset liabilitas, di mana baik *return* aset maupun *return* liabilitas mengikuti model deret waktu, yaitu memiliki rata-rata dan volatilitas tak konstan. Tujuannya adalah mendapatkan permukaan infisien, yaitu berbagai titik-titik pasangan rata-rata dan risiko portofolio yang layak untuk berinvestasi. Sebagai ilustrasi numerik dianalisis beberapa aset investasi yang diperdagangkan pada pasar modal di Indonesia, dan beberapa faktor liabilitas.

## 2. METODOLOGI

Dalam bagian ini dibahas tentang penentuan *return* aset, estimasi model rata-rata, estimasi model volatilitas, model aset liabilitas, dan optimisasi portofolio Markowitz, yang selanjutnya dijelaskan sebagai berikut.

### 2.1 Penentuan Return Aset

Misalkan  $P_t$  harga atau nilai suatu aset-liabilitas pada waktu  $t$  ( $t = 1, \dots, T$  dan  $T$  banyaknya data observasi), dan  $r_t$  return aset-liabilitas pada waktu  $t$ . Besarnya *return* aset-liabilitas dapat ditentukan dengan persamaan [8]:

$$r_t = \ln P_t - \ln P_{t-1} \quad (1)$$

Data return  $r_t$  selanjutnya digunakan pada estimasi model rata-rata sebagai berikut.

### 2.2 Estimasi Model Rataan

Misalkan  $r_t$  log *return* aset pada waktu  $t$ , secara umum model *autoregressive moving average*, ARMA( $p, q$ ), dapat dinyatakan dalam persamaan sebagai berikut [8], [2]:

$$r_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i r_{t-i} + \varepsilon_t - \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} \quad (2)$$

Di mana  $\{\varepsilon_t\}$  diasumsikan berdistribusi normal *white noise* dengan rata-rata nol dan variansi  $\sigma_\varepsilon^2$ . Bilangan bulat tak negatif  $p$  dan  $q$  adalah order ARMA. Model AR dan model MA adalah kasus khusus model ARMA( $p, q$ ). Menggunakan operator *back-shift*, model (2) dapat ditulis sebagai

$$(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p) r_t = \phi_0 + (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q) \varepsilon_t \quad (3)$$

Polinom  $1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$  dari model AR dan polinom  $1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$  dari model MA. Jika semua solusi persamaan karakteristik secara absolut lebih kecil 1, maka model ARMA stasioner lemah. Dalam kasus ini, rata-rata tak bersyarat dari model adalah  $E(r_t) = \phi_0 / (1 - \phi_1 - \dots - \phi_p)$  [10].

**Tahapan Pemodelan Rataan.** Secara garis besarnya, menurut Tsay [8], tahapan pemodelan rata-rata adalah sebagai berikut: (i) Identifikasi model, menentukan nilai orde  $p$  dan  $q$  dengan menggunakan plot ACF (*autocorrelation function*) dan PACF (*partial autocorrelation function*). (ii) Estimasi parameter, dapat dilakukan dengan metode kuadrat terkecil atau *maximum likelihood*. (iii) Uji diagnostik, dengan uji *white noise* dan ketidak korelasian secara serial terhadap residual  $\varepsilon_t$ . Dan (iv) Prediksi, jika model cocok maka dapat digunakan untuk perediksi dilakukan secara rekursif.

### 2.3 Estimasi Model Volatilitas

Estimasi model volatilitas dilakukan dengan menggunakan model-model GARCH. Model GARCH, diperkenalkan oleh Bollerslev pada tahun 1986 merupakan bentuk umum atau generalisasi dari model ARCH. Secara umum model GARCH ( $p, q$ ) dapat dituliskan sebagai berikut [8], [6]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \sigma_t u_t, \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 + u_t \end{aligned} \quad (4)$$

Berdasarkan persamaan (4), ekspektasi bersyarat dan variansi dari  $\varepsilon_t$  adalah :

$$E(\varepsilon_t | F_{t-1}) = 0 \quad (5)$$

$$Var(\varepsilon_t | F_{t-1}) = E(\varepsilon_t^2 | F_{t-1}) = \sigma_t^2 \quad (6)$$

Dibandingkan dengan ARCH, model GARCH dianggap dapat memberikan hasil yang lebih sederhana karena menggunakan lebih sedikit parameter [10].

**Tahapan Pemodelan Volatilitas.** Secara umum, menurut Tsay [8], tahapan pemodelan volatilitas adalah sebagai berikut: (i) Estimasi model rata-rata dengan model runtun waktu (misalnya: model ARMA). (ii) Gunakan residual dari model rata-rata untuk uji efek ARCH. (iii) Jika ada efek ARCH, lakukan estimasi model volatilitas, dan bentuk estimasi gabungan dari model rata-rata dan model volatilitas. (iv) Lakukan uji diagnostik untuk menguji kecocokan model. (v) Jika model cocok, gunakan untuk prediksi dilakukan secara rekursif.

#### 2.4 Estimasi Model Aset-Liabilitas

Pemodelan return surplus aset-liabilitas diuraikan secara singkat sebagai berikut. Misalkan  $A_t$  aset pada waktu  $t$ ,  $L_t$  liabilitas pada waktu  $t$ , dan  $S_t$  surplus pada waktu  $t$ . Pada waktu awal  $t=0$ , surplus awal diberikan oleh:

$$S_0 = A_0 - L_0.$$

Surplus yang diperoleh setelah satu periode adalah:

$$S_1 = A_1 - L_1 = A_0[1 + r_A] - L_0[1 + r_L].$$

Misalkan  $r_S$  return surplus yang dinyatakan sebagai [10], [9]:

$$\begin{aligned} r_S &= \frac{S_1 - S_0}{A_0} = \frac{A_0 r_A}{A_0} - \frac{L_0 r_L}{A_0} \\ &= r_A - \frac{1}{f_0} r_L \end{aligned} \quad (7)$$

dengan  $f_0 = \frac{L_0}{A_0}$ .

Berdasarkan persamaan (7) rata-rata dari return surplus dapat ditentukan dengan rumus :

$$\mu_S = E[r_S] = \mu_A - \frac{1}{f_0} \mu_L. \quad (8)$$

Di mana  $\mu_S$ ,  $\mu_A$  dan  $\mu_L$  berturut-turut adalah rata-rata dari return-return surplus, aset, dan liabilitas. Juga berdasarkan persamaan (7), variansi surplus dapat ditentukan dengan rumus:

$$\sigma_S^2 = \sigma_A^2 - \frac{2}{f_0} \sigma_{AL} + \frac{1}{f_0^2} \sigma_L^2. \quad (9)$$

Di mana  $\sigma_S^2$ ,  $\sigma_A^2$  dan  $\sigma_L^2$  berturut-turut variansi dari return-return surplus, aset, dan liabilitas. Sedangkan  $\sigma_{AL} = Cov(r_A, r_L)$  kovariansi antara return aset dan return liabilitas [9].

#### 2.5 Optimisasi Model Markowitz

Misalkan  $\mathbf{w}^T = (w_1, \dots, w_N)$  vektor bobot portofolio *return* surplus;  $\boldsymbol{\mu}^T = (\mu_{S1}, \dots, \mu_{SN})$  vektor rata-rata *return* surplus dengan  $\mu_{Si} = E[r_{Si}]$ ; dan  $\boldsymbol{\Sigma} = (\sigma_{ij})_{ij=1, \dots, N}$  matriks kovariansi *return* surplus dengan  $\sigma_{ij} = Cov(r_{Si}, r_{Sj})$ . Sehingga rata-rata portofolio *return* surplus dapat ditentukan dengan persamaan [9]:

$$\hat{\mu}_{Sp} = \boldsymbol{\mu}_S^T \mathbf{w}, \quad (10)$$

dan variansi portofolio *return* surplus ditentukan dengan persamaan:

$$\hat{\sigma}_{Sp}^2 = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}. \quad (11)$$

Selanjutnya, menurut Panjer et al. [9], dan Bjork, Murgoci, & Xun Yu Zhou [1], optimisasi *return* surplus adalah mengacu pada persamaan sebagai berikut:

$$\text{Maks}_{\mathbf{w} \in R^N} \{2\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{w} + 2\boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{w} - \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}\}, \quad (12)$$

$$\text{Kendala: } \mathbf{e}^T \mathbf{w} = 1.$$

Di mana  $\boldsymbol{\gamma}^T = (\gamma_1, \dots, \gamma_N)$  vektor kovariansi antara *return* aset dan *return* liabilitas, dengan  $\gamma_i = \frac{1}{f_0} Cov(r_{Ai}, r_L)$ ; dan

$\mathbf{e}^T = (1, 1, \dots, 1)$  vektor satuan.

Fungsi Lagrangian dari persamaan (12) diberikan oleh persamaan sebagai berikut:

$L(\mathbf{w}, \lambda) = 2\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{w} + 2\boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{w} - \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} + \lambda(\mathbf{e}^T \mathbf{w} - 1)$ .  
Berdasarkan teorema Kuhn-Tucker, syarat perlu dan cukup untuk kondisi optimalitas dicapai apabila:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}} = 2\boldsymbol{\eta} + 2\boldsymbol{\gamma} - 2\boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} + \lambda \mathbf{e} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \mathbf{e}^T \mathbf{w} - 1 = 0. \quad (14)$$

Menyelesaikan sistem persamaan (13) dan (14), diperoleh persamaan-persamaan sebagai berikut:

- Untuk  $\tau = 0$ , diperoleh pertama bentuk persamaan vektor bobot minimum sebagai:

$$\mathbf{w}^{Min} = \frac{1}{\mathbf{e}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{e}} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{e}, \quad (15)$$

dan bentuk kedua adalah:

$$\mathbf{z}^L = \left[ \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\gamma} - \frac{\mathbf{e}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\gamma}}{\mathbf{e}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{e}} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{e} \right], \quad (16)$$

dengan  $\sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i^L = 0$ .

Sehingga, portofolio efisien dengan variansi minimum di bawah liabilitas adalah:

$$\mathbf{w}^{Min.L} = \mathbf{w}^{Min} + \mathbf{z}^L. \quad (17)$$

- Untuk  $\tau > 0$ , diperoleh bentuk:

$$\mathbf{z}^* = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} - \frac{\mathbf{e}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}}{\mathbf{e}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{e}} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{e}, \quad (18)$$

dengan  $\sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i^* = 0$ .

Sehingga, portofolio efisien dengan variansi minimum di bawah liabilitas adalah:

$$\mathbf{w}^* = \mathbf{w}^{Min.L} + \boldsymbol{\tau} \mathbf{z}^*. \quad (19)$$

Oleh karena itu, untuk  $\tau \geq 0$ , portofolio efisien di bawah liabilitas dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\mathbf{w}^* = \mathbf{w}^{Min.L} + \mathbf{z}^L + \boldsymbol{\tau} \mathbf{z}^*; \quad \tau \geq 0. \quad (20)$$

Model-model matematika tersebut di atas, selanjutnya digunakan untuk analisis aset-liabilitas di bawah ini.

### 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Data aset yang dianalisis diakses melalui *website* <http://www.finance.go.id//>.

Data terdiri dari 5 (lima) aset yang dipilih, untuk selama periode tanggal 2 Januari 2011 sampai dengan tanggal 4 Juni 2014, yang meliputi saham-saham: INDF, DEWA, AALI, dan LSIP. Selanjutnya, secara berurutan disebut dengan  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $A_4$ , dan  $A_5$ . Selain data aset, di sini juga diperlukan data liabilitas. Data harga kelima aset tersebut, selanjutnya dihitung *return* masing-masing menggunakan pendekatan *log return*. Sedangkan data liabilitas di sini diasumsikan sama dengan obligasi yang berhubungan dengan masing-masing aset  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $A_4$ , dan  $A_5$ . Sebut saja liabilitas-liabilitas tersebut adalah  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$ ,  $L_4$ , dan  $L_5$ .

Tahapan analisis yang dilakukan beserta hasilnya adalah diuraikan secara singkat sebagai berikut ini.

#### 3.1 Estimasi Model Rataan dan Volatilitas Return Aset

Merujuk Johansson & Sowa [3], estimasi rataan dan volatilitas return aset dilakukan dengan menggunakan model ARMA-GARCH. *Pertama*, dilakukan uji stasioneritas terhadap data *return* aset  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $A_4$ , dan  $A_5$  menggunakan statistik *unit root test*. Uji stasioneritas dilakukan dengan bantuan *software Eviews 7*, dan hasilnya menunjukkan bahwa semua data *return* aset sudah stasioner. *Kedua*, masing-masing data *return* stasioner selanjutnya dilakukan estimasi model rataan. Estimasi tersebut dilakukan dengan menggunakan model-model ARMA merujuk pada persamaan (2). Estimasi dilakukan meliputi tahapan: identifikasi model rataan, estimasi parameter model, uji verifikasi parameter, dan uji diagnostik. Semua tahapan dilakukan dengan menggunakan bantuan *software Eviews 7*, dan hasil estimasi model rataan semua menunjukkan telah signifikan.

*Ketiga*, menggunakan residual dari masing-masing model rataan *return* aset  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $A_4$ , dan  $A_5$ , dilakukan estimasi model volatilitas tak konstan.

Volatilitas tak konstan diestimasi menggunakan model-model GARCH merujuk pada persamaan (4). Tahapan estimasi model volatilitas tak konstan meliputi: uji unsur ARCH, indentifikasi model, estimasi parameter model, uji verifikasi parameter, dan uji diagnostik. Semua tahapan dilakukan dengan bantuan *software Eviews 7*, dan hasil estimasi menunjukkan bahwa semua model volatilitas tak konstan telah signifikan. Hasil estimasi model rata-rata dan volatilitas tak konstan secara garis besarnya diberikan dalam Tabel-1 dalam kolom Model. Estimator model rata-rata dan volatilitas tak konstan, selanjutnya digunakan untuk prediksi satu periode ke depan, yakni  $\hat{r}_{A_i}(1)$  dan  $\hat{\sigma}_{A_i}^2(1)$ , dan hasilnya secara ringkas diberikan dalam Tabel-1.

Tabel-1: Model Deret Waktu dan Estimator Nilai Parameter

As et $A_i$	Model	Rataa n $\hat{r}_{A_i}(1)$	Varia nsi $\hat{\sigma}_{A_i}^2(1)$
$A_1$	ARMA(1, 0)- GARCH(1,1)	0,0153 99	0,0026 43
$A_2$	ARMA(2, 2)- ARCH(1)-M	0,0390 07	0,0027 97
$A_3$	ARMA(0, 1)- GARCH(3,3)	0,0033 15	0,0013 31
$A_4$	ARMA(1, 1)- GARCH(1,1)	0,0086 72	0,0019 21
$A_5$	ARMA(0, 1)- GARCH(1,1)	- 0,0002 62	0,0018 73

Selanjutnya, diasumsikan bahwa *return* liabilitas  $L_1, L_2, L_3, L_4$ , dan  $L_5$ , masing-masing memiliki rata-rata dan variansi seperti diberikan dalam Tabel-2.

Tabel-2 Rataan dan Variansi *Retusn* Liabilitas

Liabilita s $L_i$	Rataan $\hat{\mu}_{L_i}$	Variansi $\hat{\sigma}_{L_i}^2$
-------------------------	-----------------------------	------------------------------------

$L_1$	0,000121	0,000102
$L_2$	0,002805	0,000125
$L_3$	0,000213	0,000031
$L_4$	0,000642	0,000005
$L_5$	0,000011	0,000075

Serta memiliki kovariansi antara masing-masing aset dan liabilitasnya secara berturut-turut diberikan sebagai vektor sebagai berikut:

$$\gamma^T = (0,000021; 0,000073; 0,000015; 0,000022; -0,000026)$$

Berikutnya, nilai-nilai yang disajikan dalam Tabel-1, Tabel-2, dan vektor kovariansi tersebut digunakan untuk menghitung estimasi rata-rata dan variansi *return* surplus.

### 3.2 Estimasi Rataan dan Variansi *Return* Surplus

Dalam bagian ini dilakukan estimasi nilai rata-rata dan variansi *return* surplus. Untuk mengestimasi nilai rata-rata dan variansi *return* surplus di sini diasumsikan bahwa rasio antara aset dan liabilitas awal  $f_0 = 1$ . Menggunakan nilai-nilai yang disajikan dalam Tabel-1, Tabel-2, dan vektor kovariansi antara aset dan liabilitas masing-masing, untuk estimasi nilai-nilai rata-rata *return* surplus dilakukan merujuk persamaan (8), sedangkan untuk estimasi nilai-nilai variansi *return* surplus dilakukan dengan persamaan (9). Hasil-hasil estimasi tersebut diberikan dalam Tabel-3.

Tabel-3 Rataan dan Variansi *Return* Surplus

Surplus $S_i$	Rataan $\hat{\mu}_{S_i}$	Variansi $\hat{\sigma}_{S_i}^2$
$S_1$	0,015278	0,002703
$S_2$	0,036202	0,002776
$S_3$	0,003102	0,001332
$S_4$	0,008030	0,001882
$S_5$	-0,000273	0,002000

Estimator nilai-nilai rata-rata dan variansi *return* surplus dalam Tabel-3 ini selanjutnya, digunakan untuk membentuk vektor rata-rata dan matriks kovariansi *return* surplus.

### 3.3 Membentuk Vektor Rataan dan Matriks Kovariansi *Return* Surplus

Dalam bagian ini dilakukan pembentukan vektor rataan dan matriks kovariansi *return* surplus. Menggunakan estimator nilai rataan dalam Tabel-1 dibentuk vektor rataan *return* surplus sebagai:

$$\mu_S^T = (0,015278; 0,036202; 0,003102; 0,008030; -0,00273)$$

Karena kovariansi antar *return* surplus adalah sangat kecil, sehingga diasumsikan sama dengan nol. Selanjutnya dengan menggunakan estimator variansi *return* surplus dalam Tabel-3, dibentuk matriks kovariansi *return* surplus sebagai berikut:

$$\Sigma_S = \begin{pmatrix} 0,002703 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,002776 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,001332 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,001882 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,00200 \end{pmatrix}$$

Matriks invers dari  $\Sigma_S$  adalah sebagai berikut:

$$\Sigma_S^{-1} = \begin{pmatrix} 369,9593 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 360,2305 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 750,7508 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 531,3496 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 500,0000 \end{pmatrix}$$

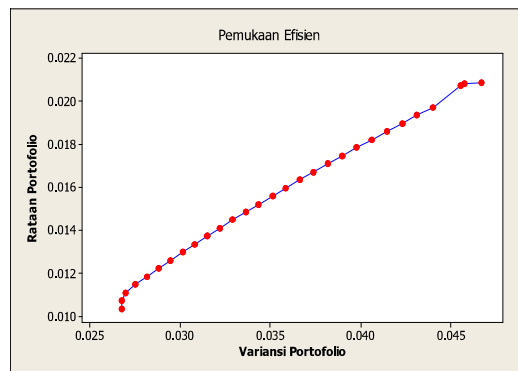
Matriks invers  $\Sigma_S^{-1}$  selanjutnya digunakan untuk proses optimisasi portofolio *return* surplus berikut ini.

### 3.4 Optimisasi Portofolio

Dalam bagian ini dilakukan optimisasi portofolio dari *return* surplus investasi. Optimisasi portofolio dari *return* surplus investasi dilakukan berdasarkan model *Mean-Variance* Markowitz. Karena lima saham yang digunakan untuk pembentukan portofolio, maka ditentukan bahwa vektor  $e^T = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)$ . Berdasarkan nilai-nilai vektor rataan *return* surplus, vektor satuan, dan Matriks invers  $\Sigma^{-1}$ , proses optimisasi dilakukan dengan merujuk persamaan (12). Dalam proses optimisasi di sini, nilai-nilai toleransi risiko ditentukan secara simulasi dan coba-coba untuk beberapa nilai. Dimulai dengan toleransi risiko  $\tau = 0 ; 0,001; 0,002; 0,003;$

dan seterusnya, yakni dengan nilai penambahan sebesar 0,001. Selanjutnya, digunakan untuk menentukan vektor bobot  $w^*$  yang dihitung dengan menggunakan persamaan (20).

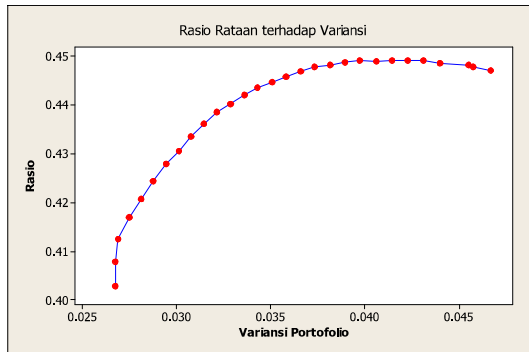
Vektor komposisi bobot yang diperoleh, kemudian digunakan untuk menentukan estimator nilai rataan *return* surplus portofolio dengan menggunakan persamaan (10), dan untuk menentukan estimator risiko surplus portofolio dengan menggunakan persamaan (11). Kumpulan titik-titik pasangan estimator nilai rataan *return* surplus portofolio dan estimator nilai risiko surplus portofolio, digunakan untuk membentuk grafik permukaan efisien, seperti diberikan dalam Gambar-1.



Gambar-1. Grafik Permukaan Efisien

Jika diasumsikan bahwa *short sales* tidak diperkenankan, maka grafik permukaan efisien terbentuk di sepanjang interval toleransi risiko  $0 \leq \tau < 0,029$ . Karena untuk toleransi risiko  $\tau \geq 0,029$  menghasilkan unsur dalam vektor bobot yang nilainya negatif, yang berarti tidak layak, atau bertentangan dengan asumsi *short sales* tidak diperkenankan.

Rasio perbandingan antara estimator nilai-nilai rataan *return* surplus portofolio terhadap estimator nilai-nilai risiko surplus portofolio (variansi), dapat digambarkan sebagai grafik seperti yang diberikan dalam Gambar-2.



Gambar-2. Grafik Rasio Rataan vs Risiko

Untuk toleransi risiko  $\tau = 0$  diperoleh vektor bobot minimum portofolio  $\mathbf{w}^{*T} = (0,1485 \ 0,1634 \ 0,2969 \ 0,2139 \ 0,1773)$ , dan bila disubstitusikan ke dalam persamaan (10) diperoleh rataan *return* surplus portofolio sebesar 0,010339. Bila disubstitusikan ke dalam persamaan (11) diperoleh nilai variansi sebesar 0,025662. Serta rasio sebesar 0,402888 adalah yang terkecil.

Selanjutnya, untuk nilai toleransi risiko sebesar  $\tau = 0,023$  diperoleh vektor bobot optimum sebagai berikut:

$$\mathbf{w}^{*T} = (0,1975 \ 0,3844 \ 0,1861 \ 0,1956 \ 0,0364),$$

dan rataan *return* surplus portofolio sebesar 0,018982; serta nilai variansi sebesar 0,042264. Serta rasio sebesar 0,449129 adalah yang terbesar, berarti merupakan portofolio optimum. Sedangkan untuk nilai toleransi risiko  $\tau = 0,028$  diperoleh vektor bobot

$$\mathbf{w}^{*T} = (0,2082 \ 0,4325 \ 0,1620 \ 0,1917 \ 0,0057),$$

dan rataan *return* surplus portofolio sebesar 0,020865, serta nilai variansi sebesar 0,046674. Adalah merupakan portofolio yang menghasilkan rataan *return* surplus portofolio terbesar, tetapi bukan merupakan portofolio yang optimum. Sedangkan untuk toleransi risiko  $\tau = 0,029$  diperoleh vektor bobot sebagai:

$$\mathbf{w}^{*T} = (0,2103 \ 0,4421 \ 0,1571 \ 0,1909 \ -0,0004),$$

bobot ini adalah tidak layak, karena terdapat bobot yang nilainya negatif. Peningkatan toleransi risiko  $\tau = 0$  menjadi  $\tau = 0,001$ ;  $\tau = 0,002$  dan seterusnya,

telah membawa konsekuensi perubahan komposisi vektor bobot dan peningkatan nilai rataan *return* surplus portofolio serta peningkatan nilai risiko (variansi).

#### 4. KESIMPULAN

Paper ini telah membahas tentang optimisasi portofolio *Mean-Variance* aset-liabilitas dengan volatilitas tak konstan. Sebagai ilustrasi numerik, dianalisis *return* asset  $A_1, A_2, A_3, A_4,$  dan  $A_5$ . Berdasarkan analisis diperoleh bahwa *return* kelima aset tersebut secara berturut-turut mengikuti model ARMA(1,0)-GARCH(1,1); ARMA(2,2)-ARCH(1)-M; ARMA(0,1)-GARCH(3,3); ARMA(1,1)-GARCH(1,1); dan ARMA(0,1)-GARCH(1,1). Hasil prediksi satu periode ke depan dari *return* kelima aset tersebut, beserta estimator rataan dan variansi *return* liabilitasnya masing-masing aset, digunakan untuk menghitung rataan dan variansi *return* surplus. Berdasarkan rataan dan variansi *return* surplus ini dilakukan optimisasi portofolio, guna menentukan komposisi bobot optimum untuk beberapa nilai toleransi risiko. Dari hasil optimisasi diperoleh bahwa portofolio optimum terjadi pada nilai toleransi risiko sebesar  $\tau = 0,023$ , dengan vektor komposisi bobot  $\mathbf{w}^{*T} = (0,1975 \ 0,3844 \ 0,1861 \ 0,1956 \ 0,0364)$ . Portofolio optimum ini memberikan estimator rataan *return* surplus portofolio sebesar 0,018982 dengan nilai risiko (variansi) sebesar 0,042264; serta rasio antara rataan *return* surplus portofolio terhadap variansinya, sebesar 0,449129; adalah yang terbesar dibandingkan rasio-rasio lainnya.

#### Ucapan Terima Kasih

Pernyataan terima kasih disampaikan kepada Lembaga Penelitian dan Pengabdian Masyarakat Universitas Padjadjaran, yang telah memberi fasilitas untuk melakukan penelitian ini.

#### 5. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Bjork, T., Murgoci, A. and Xun Yu Zhou. (2005). Mean-Variance Portfolio Optimization with State Dependent Risk Aversion, *Working Paper*, Department of Finance, Stockholm School of Economics, Box 6501, SE-113 83 Stockholm, SWEDEN. E-mail: tomas.bjork@hhs.se.
- [2] Chen, M.Y. (2013). *Time Series Analysis: Conditional Volatility Models*. Department of Finance, National Chung Hsing University. Feb, 25, 2013.
- [3] Gökbulut, R.I. & Pekkaya, M. (2014). Estimating and Forecasting Volatility of Financial Markets Using Asymmetric GARCH Models: An Application on Turkish Financial Markets. *International Journal of Economics and Finance*; Vol. 6, No. 4; 2014. ISSN 1916-971X E-ISSN 1916-9728. Published by Canadian Center of Science and Education.
- [4] Jánský, I. Rippel, M. (2011). Value at Risk Forecasting with the ARMA-GARCH Family of Models in Times of Increased Volatility. *IES Working Paper 27/2011*. Institute of Economic Studies, Faculty of Social Sciences, Charles University in Prague.
- [5] Kirby, C. and Ostdiek, B., Optimizing the Performance of Sample Mean-Variance Efficient Portfolios, *Working Paper*, Belk College of Business, University of North Carolina at Charlotte, July 23, 2012.
- [6] Johansson, A. & Sowa, V., A Comparison of GARCH Models for VaR Estimation in Three Different Markets. Department of Statistics, Uppsala University, 2013-06-07, [internet], 2013. [updated 2014 Jan 25; cited 2015 Apr 10]. Available from: [www.diva-portal.org/smash/.../FULLTEXT01.pdf](http://www.diva-portal.org/smash/.../FULLTEXT01.pdf).
- [7] Platanakis, E. & Sutcliffe, C. (2014). Asset Liability Modelling and Pension Schemes: The Application of Robust Optimization to USS. *Discussion Paper*. ICMA Centre, Henley Business School, University of Reading. April 2014.
- [8] Tsay, R.S. (2005). *Analysis of Financial Time Series*, Second Edition, USA: John Wiley & Sons, Inc., 2005.
- [9] Panjer, H.H., Boyle, D.D., Cox, S.H., Dufresne, D., Gerber, H.U., Mueller, H.H., Pedersen, H.W., & Pliska, S.R., (1998), *Financial Economics*, With Applications to Investments, Insurance and Pensions, the Actuarial Foundation, Schaumburg, Illinois.
- [10] Wane, A.D. (2011). Asset Liability Management for pension funds: Assessment of common practices. *Master thesis in Actuarial Science*. Universite de Lausanne. August 2011.
- [11] Wurtz, D., Chalabi, Y., & Luksan, L. (2006). Parameter Estimation of ARMA Models with GARCH/APARCH Errors An R and SPlus Software Implementation. *Journal of Statistical Software* (Draft). <http://www.jstatsoft.org>
- [12] Zhao, Q., Wei, J., and Wang, R., (2012) Mean-Variance Asset-Liability Management with State-Dependent Risk Aversion, *Working Paper*, School of Finance and Statistics, East China Normal University, Shanghai, 200241, China; Department of Applied Finance and Actuarial Studies, Faculty of Business and Economics, Macquarie University, Sydney, NSW 2109, Australia. E-mail: [qzhao31@gmail.com](mailto:qzhao31@gmail.com)
-

## STRATEGI PEMBELAJARAN UNTUK MENGEMBANGKAN DISPOSISI MATEMATIS PADA PEMBELAJARAN MATEMATIKA

Nia Rachmawati, Sugeng Sutiarmo<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universitas Lampung

**Abstrak.** Pembelajaran matematika tidak hanya dapat meningkatkan kemampuan kognitif tetapi juga kemampuan afektif. Salah satu kemampuan afektif adalah disposisi. Disposisi matematis adalah kemampuan untuk melihat sejauh mana ketertarikan dan apresiasi siswa untuk berpikir dan bertindak dengan positif, meningkatkan kepercayaan diri, keingintahuan, ketekunan, gigih menghadapi permasalahan, fleksibel, serta reflektif dalam kegiatan matematika. Disposisi matematis juga dapat mengubah pandangan dan sikap siswa terhadap matematika ketika mereka belajar matematika, sehingga mereka termotivasi dan kemampuan kognitifnya akan meningkat. Dengan mengamati dan menggunakan skala disposisi, dapat diketahui level disposisi matematis siswa. Bagi siswa yang memiliki level disposisi rendah, kemampuan disposisi ini dapat dikembangkan melalui strategi pembelajaran yang tepat.

**Kata Kunci:** Strategi Pembelajaran, Disposisi Matematis, Siswa

### 1. PENDAHULUAN

Pendidikan sangatlah penting bagi bangsa dan merupakan suatu proses yang tidak semata-mata hanya mementingkan kecerdasan. Masih banyak potensi anak bangsa dan subyek belajar lainnya yang masih memerlukan perhatian khusus agar dapat berkembang secara optimal. Selain itu juga aspek-aspek serta keterampilan fisik yang juga perlu diberikan kesempatan yang sama untuk berkembang dalam pembelajaran. Pembelajaran juga merupakan suatu proses interaksi yang dilakukan oleh pendidik untuk mengembangkan potensi serta keterampilan anak bangsa. Seperti yang telah diketahui salah satu tujuan dalam pembelajaran adalah dapat membentuk sikap siswa, oleh karena itu perlu adanya perhatian khusus terhadap sikap siswa dalam proses pembelajaran khususnya pembelajaran matematika. Jika siswa memiliki sikap positif terhadap matematika maka akan mempengaruhi pada prestasi belajarnya. Menurut Sumarmo [1], pembelajaran matematika diarahkan untuk mengembangkan (1) kemampuan berfikir matematis yang meliputi; pemahaman pemecahan masalah, penalaran, komunikasi, dan koneksi matematis; (2) kemampuan berfikir kritis, serta sikap yang terbuka dan obyektif, serta; (3)

disposisi matematis atau kebiasaan, dan sikap belajar berkualitas yang tinggi.

Kurikulum Tingkat Satuan Pendidikan (KTSP) pada Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 22 tahun 2006 [2] tentang Standar Isi, menyatakan mata pelajaran matematika untuk semua jenjang pendidikan dasar dan menengah bertujuan agar siswa mampu:

1. Memahami konsep, menjelaskan keterkaitan dan mengaplikasikan konsep dalam pemecahan masalah,
2. Menggunakan penalaran melakukan manipulasi, menjelaskan gagasan dan pernyataan matematika,
3. Memecahkan masalah
4. Mengkomunikasikan gagasan
5. Memiliki sikap menghargai kegunaan matematika dalam kehidupan

Pada umumnya tujuan dalam pembelajaran meliputi tiga aspek yaitu kemampuan kognitif, kemampuan afektif dan kemampuan psikomotor. Kemampuan kognitif dan psikomotor sebagian besar telah dilaksanakan oleh para pendidik, sedangkan untuk kemampuan afektif masih belum memperoleh perhatian seperti dua kemampuan lainnya. Kemampuan afektif merupakan hal penting dalam pembelajaran, namun pada kenyataannya implementasi pada kemampuan afektif masih kurang

karena dalam merancang kemampuan afektif tidak semudah seperti merancang kemampuan kognitif maupun psikomotor. Menurut Popham 1995 dalam Djemari Merdapi [3] kemampuan afektif menentukan keberhasilan seseorang. Mengapa demikian, karena pada dasarnya kemampuan afektif mempengaruhi hasil belajar pada kemampuan kognitif dan psikomotor. Semakin tinggi kemampuan afektif maka akan semakin tinggi pula hasil dari kemampuan kognitif dan psikomotor.

Salah satu pengembangan kemampuan afektif dalam pembelajaran matematika yaitu perlu adanya kebiasaan dan sikap belajar siswa yang berkualitas tinggi. Kita ketahui bahwa kemampuan afektif banyak sekali, tetapi pada artikel ini kemampuan afektif difokuskan pada disposisi matematis. Siswa yang memiliki kemampuan disposisi matematis yang tinggi akan mempengaruhi prestasi belajar yang mereka dapatkan, sedangkan jika siswa memiliki kemampuan disposisi matematis yang rendah kita akan mencoba meningkatkan melalui strategi pembelajaran yang tepat.

## 2. DISPOSISI MATEMATIS

Terdapat hubungan antara disposisi matematis yang dimiliki oleh siswa dengan pembelajaran matematika dimana disposisi matematis menjadi salah satu kemampuan afektif yang wajib dimiliki oleh siswa. Siswa memerlukan disposisi matematis untuk dapat menghadapi masalah dalam matematika, dapat bertanggung jawab dalam belajar serta mengembangkan kebiasaan kerja yang baik dalam matematika. Oleh karena itu sebagai fasilitator seorang guru haruslah mengembangkan kemampuan disposisi matematis siswa. Katz [4], disposisi matematis (*mathematical disposition*) berkaitan dengan bagaimana siswa menyelesaikan masalah matematis; apakah percaya diri, tekun, berminat, dan berpikir fleksibel untuk mengeksplorasi berbagai alternatif penyelesaian masalah. Menurut *Pearson Education* [5], disposisi matematis mencakup minat yang sungguh-

sungguh (*genuine interest*) dalam belajar matematika, kegigihan untuk menemukan solusi masalah, kemauan untuk menemukan solusi atau strategi alternatif, dan apresiasi terhadap matematika dan aplikasinya pada berbagai bidang. Dalam 10 standar NCTM [6] dikemukakan bahwa disposisi matematis menunjukkan rasa percaya diri, ekspektasi dan metakognisi, perhatian serius dalam belajar matematika, kegigihan dalam menghadapi dan menyelesaikan masalah, rasa ingin tahu yang tinggi serta kemampuan berbagi pendapat dengan orang lain. Sehingga dapat disimpulkan bahwa disposisi matematis adalah apresiasi atau keinginan siswa terhadap matematika, serta kepercayaan diri siswa dalam matematika, sehingga disposisi matematis sangatlah penting bagi siswa untuk mengembangkan kemampuan mereka, dan meningkatkan kepercayaan diri pada pembelajaran matematika. Demikian dapat disimpulkan bahwa disposisi matematis adalah kepercayaan diri seorang siswa dalam matematika, bagaimana siswa dapat memecahkan masalah matematika, siswa dapat berfikir fleksibel, dan dapat menemukan ide dalam memecahkan masalah serta dapat mengapresiasi pembelajaran matematika itu sendiri.

Dalam proses pembelajaran matematika kemampuan disposisi matematis sangat dibutuhkan siswa dalam menumbuhkan kembangkan ketertarikan, kepercayaan diri serta apresiasi mereka dalam matematika. Disposisi matematika juga merupakan salah satu faktor yang ikut serta dalam meningkatkan keberhasilan belajar siswa. Dimana kemampuan disposisi siswa dapat terlihat ketika mereka menyelesaikan atau memecahkan masalah matematika, bagaimana kepercayaan diri dalam menyelesaikan masalah, dan melakukan refleksi terhadap cara berpikir yang telah mereka lakukan. Menurut Maxwell [7], disposisi terdiri dari (1) *inclination* (kecenderungan) dimana bagaimana sikap siswa terhadap tugas; (2) *sensitivity* (kepekaan), dimana bagaimana siswa siap dalam menghadapi tugas; (3) *ability* (kemampuan), dimana ba-

gaimana siswa fokus untuk menyelesaikan tugas secara lengkap; dan (4) *enjoyment* (kesenangan), dimana bagaimana tingkah laku siswa dalam menyelesaikan tugas.

Sejalan dengan hal itu NCTM [8] juga menyatakan bahwa “*The assessment of students’ mathematical dis-positition should seek information about their*”:

1. *confidence in using mathematical to solve problems, to communicate ideas, an to reasons;*
2. *flexsibility in exploring mathematical ideas and trying alternative methods in solving problems;*
3. *willingness to persevere in mathematical tasks;*
4. *interest, curiosity, and inventiveness in doing mathematics;*
5. *inclination to monitor and reflect on their own thinking and performance;*
6. *valuing of the application of mathematics to situations arising in other disciplines and everyday experiences;*
7. *appreciation of the role of mathematics in our culture and its value as a tool and as laguange.*

Sedangkan menurut Wardani [9] indikator - indikator yang diukur pada disposisi matematis adalah;

1. Kemampuan Diri  
Siswa harus mempunyai rasa percaya diri atau keyakinan.
2. Keingintahuan  
Siswa dapat mengajukan pertanyaan, melakukan penyelidikan, antusias atau semangat dalam belajar serta banyak membaca atau mencari dari sumber lain.
3. Ketekunan  
Siswa meiliki rasa gigh, tekun atau ke-sungguhan dalam belajar.
4. Fleksibel  
Siswa mempunyai rasa kerjasama dan berbagi informasi, menghargai pendapat yang berbeda, dan berusaha mencari solusi dan strategi lain.
5. Reflektif  
Siswa harus memiliki rasa suka dan senang terhadap matematika.

Menurut kurikulum 2006, indikator-indikator pada disposisi matematis sudah tercantum di dalam tujuan pendidikan matematika di sekolah yaitu “Memiliki sikap menghargai kegunaan matematika dalam kehidupan, yaitu rasa memiliki rasa ingin tahu, perhatian, dan minat dalam mempelajari matematika, serta sikap ulet dan percaya diri dalam pemecahan masalah.

Sehingga berdasarkan indikator-indikator pada disposisi matematis yang dikemukakan diatas, dapat disimpulkan bahwa indikator disposisi matematis yaitu; (1) kepercayaan diri siswa dalam menyelesaikan atau memecahkan masalah matematika, dan dapat menyampaikan ide-ide yang mereka miliki; (2) siswa akan lebih fleksibel dalam mengeksplorasi ide-ide yang mereka miliki serta dapat mencoba berbagai metode untuk memecahkan masalah; (3) mempunyai tekad atau kemauan dalam mengerjakan semua tugas-tugas dalam pembelajaran matematika; (4) memiliki ketertarikan serta keingintahuan dalam menemukan sesuatu yang baru dalam mengerjakan matematika; (5) memiliki kecenderungan untuk memonitor dan menilai aplikasi matematika; (6) dapat memberikan penghargaan atau apresiasi pada matematika.

### 3. MENGUKUR DISPOSISI MATEMATIS

Kemampuan disposisi matematis dapat diukur melalui suatu cara dengan membuat skala disposisi matematis dimana skala tersebut memuat pernyataan- pernyataan tentang indikator dalam disposisi matematis. Pernyataan - pernyataan ini berbentuk pernyataan positif dan pernyataan negatif. Hasil dari pernyataan tersebut akan menunjukkan di level mana siswa memiliki kemampuan disposisi matematis (tinggi, sedang atau rendah).

Dibawah ini contoh pernyataan yang berbentuk positif dan negatif.

(1) Pernyataan positif yaitu:

- a. Saya senang mengerjakan soal – soal Statistika

- b. Saya merasa tertantang jika belum menemukan hasil dalam mengerjakan soal-soal Statistika
- (2) Pernyataan negatif yaitu:
- a. Jika saya menemukan soal Statistika sulit maka saya cenderung tidak akan mengerjakannya.
  - b. Ketika saya sedang mengerjakan soal matematika, tetapi pada saat hamper selesai saya menemukan kendala, saya merasa kehilangan ide sehingga saya meninggalkan soal itu begitu saja.

Setelah itu pernyataan-pernyataan tersebut diinterpretasikan melalui hasil pengukuran pada skala disposisi matematis siswa dan dapat dikelompokkan ke dalam klasifikasi (tinggi, sedang dan rendah). Berdasarkan modifikasi yang telah dilakukan oleh Ratnaningsih [10] persentase skor rerata dari skor ideal disposisi matematis adalah sebagai berikut:

**Tabel 3.1** Skala Disposisi Matematis

$DM \geq 80\%$	disposisi matematis siswa tinggi
$65\% \leq DM < 80\%$	disposisi matematis siswa sedang
$DM < 65\%$	disposisi matematis siswa rendah

Selanjutnya Costa [11] menjelaskan tentang sikap siswa yang merupakan indikator yang dapat terlihat ketika siswa memiliki disposisi matematis yang tinggi.

1. Bertahan atau pantang menyerah
2. Mengatur kata hati
3. Mendengar pendapat orang lain dengan rasa empati
4. Berfikir luwes
5. Berfikir metakognisi
6. Bekerja secara teliti dan tepat
7. Bertanya dan mengajukan masalah secara efektif
8. Memanfaatkan pengetahuan lama untuk membangun pengetahuan baru
9. Berfikir dan berkomunikasi secara jelas dan tepat
10. Memanfaatkan indera dalam menyampaikan dan mengolah data
11. Mencipta, berkhayal dan berinovasi

12. Bersemangat dalam merespon
13. Berani bertanggung jawab dan menghadapi masalah yang telah diselesaikan
14. Humoris
15. Berfikir saling bergantung satu sama lain
16. Belajar yang berkelanjutan

#### 4. STRATEGI PEMBELAJARAN UNTUK MENGEMBANGKAN DISPOSISI MATEMATIS

Pembelajaran matematika merupakan sesuatu yang dilakukan oleh siswa bukan apa yang harus dilakukan terhadap siswa. Oleh karena itu, terdapat hubungan disposisi matematis dengan pembelajaran matematika itu sendiri, dimana disposisi matematis merupakan salah satu faktor dalam pembelajaran matematika yang penting dimiliki oleh siswa. Mengapa penting, karena kemampuan disposisi matematis dapat menumbuhkan kepercayaan diri siswa dalam menghadapi masalah matematika.

Permasalahan yang dihadapi siswa dalam pembelajaran matematika adalah bahwa mereka menganggap matematika merupakan suatu hal yang “menakutkan”. Oleh karena itu peran guru sangat penting sebagai fasilitator yang dapat membantu siswa dalam menemukan sesuatu hal yang baru. Adapun tugas seorang guru adalah membantu siswa untuk mengumpulkan informasi yang berhubungan dengan kemampuan awal siswa serta menciptakan rasa nyaman dalam lingkungan belajar sehingga akan terjadi keseimbangan antara kemampuan awal siswa dan pengetahuan baru yang didapat.

Ada beberapa hasil penelitian yang telah dilakukan yang mengungkapkan bahwa disposisi matematis sangat berhubungan erat dengan pembelajaran matematika. Hasil penelitian yang dilakukan oleh Yuanari [11] menunjukkan bahwa banyak siswa mengalami peningkatan kemampuan pemecahan masalah. Adapun mengenai disposisi matematik siswa, penelitian menunjukkan bahwa pada siklus I disposisi

matematik siswa masih perlu ditingkatkan, dan pada siklus II baru terlihat bahwa disposisi meningkat setelah belajar dengan strategi TTW. Sedangkan menurut Syaban [12] menunjukkan bahwa daya matematik dan sisposisi siswa yang mendapat pembelajaran investigasi jauh lebih baik dari siswa SMA yang mendapat pembelajaran konvensional. Dari hasil penelitian yang telah dilakukan maka dapat disimpulkan bahwa dibutuhkan strategi pembelajaran yang tepat untuk meningkatkan disposisi matematis siswa.

Strategi pembelajaran yang tepat untuk meningkatkan kemampuan disposisi matematis siswa yang rendah haruslah sesuai dengan indikator-indikator disposisi matematis tersebut, sehingga dapat dengan mudah prestasi siswa yang memiliki kemampuan disposisi matematis rendah menjadi tinggi. Banyak strategi pembelajaran yang dapat meningkatkan disposisi matematis siswa diantaranya adalah strategi pembelajaran TTW (*Think -Talk-Write*), RME (*Realistic Mathematical Education*), dan SSCS (*Search, Solve, Create and Share*). Namun dalam artikel ini hanya memfokuskan pada strategi SSCS (*Search, Solve, Create and Share*).

## 5. KETERKAITAN STRATEGI SSCS UNTUK MENINGKATKAN DISPOSISI MATEMATIS

Seperti yang telah dijelaskan diatas pada artikel ini strategi pembelajaran hanya difokuskan pada strategi pembelajaran SSCS (*Search, Solve, Create and Share*) dimana ada kaitannya langkah-langkah dalam strategi tersebut yang dengan disposisi matematis siswa. Pada Strategi SSCS (*Search, Solve, Create and Share*) langkah-langiknya adalah sebagai berikut:

- 1) Siswa diminta untuk mencari dan menu liskan informasi apa yang diketahui dari masalah atau situasi yang diberikan
- 2) Siswa menganalisa informasi yang telah ditemukan dan menyimpulkan masalah atau situasi yang dihadapi

- 3) Siswa mencari dan memilih informasi yang berkaitan dengan pertanyaan dalam masalah atau situasi yang diberikan
- 4) Menyelesaikan masalah atau situasi yang diberikan
- 5) Siswa diminta untuk membuat produk yang berkaitan dengan masalah atau situasi yang diberikan dalam LKS.
- 6) Siswa membuat laporan proses penyelesaian tersebut dengan sekreatif mungkin
- 7) Siswa mempresentasikan proses penyelesaian masalah secara individual atau kelompok di depan kelas.
- 8) Individu atau kelompok lain diberi kesempatan untuk bertanya atau memberikan pendapat terhadap hasil diskusi kelompok tersebut.
- 9) Memeriksa kembali solusi setelah menerima umpan balik dari guru dan teman yang lain.

Dari langkah-langkah dalam strategi pembelajaran SSCS (*Search, Solve, Create and Share*), terdapat indikator - indikator disposisi matematis didalamnya. Pada langkah 1, 2 dan 3 kita dapat meningkatkan disposisi matematis siswa dengan mengacu kepada indikator disposisi matematis pada point ke 2. Pada langkah ke 4 mengacu kepada indikator disposisi matematis pada point 1, pada langkah ke 5 dan 6 mengacu pada indikator point ke 3, selanjutnya langkah ke 7 dan 8 mengacu pada indikator disposisi matematis pada point ke 5 dan langkah 9 mengacu pada indikator disposisi matematis pada point ke 6. Selanjutnya kita dapat meningkatkan kemampuan disposisi matematis siswa yang rendah dengan langkah-langkah yang ada dalam strategi pembelajaran SSCS (*Search, Solve, Create and Share*).

## 6. KESIMPULAN

Disposisi matematis merupakan kemampuan afektif yang sedang banyak dikembangkan oleh para peneliti. Mengapa demikian, karena disposisi matematis dapat mengubah pandangan dan sikap siswa

terhadap matematika ketika mereka belajar matematika, sehingga mereka termotivasi dan kemampuan kognitifnya akan meningkat. Pada disposisi matematis, siswa memiliki klasifikasi tingkat disposisi yang berbeda. Dimana jika siswa memiliki disposisi yang tinggi, maka siswa akan cenderung memiliki prestasi yang meningkat. Sebaliknya jika siswa memiliki disposisi matematis yang rendah, maka kemampuan disposisi ini dapat dikembangkan melalui strategi pembelajaran yang tepat. Banyak strategi pembelajaran yang dapat membantu meningkatkan kemampuan disposisi matematis siswa yang rendah diantaranya adalah strategi pembelajaran TTW (*Think-Talk-Share*) dan RME (*Realistic Mathematical Education*) dan SSCS (*Search, Solve, Create and Share*) dimana artikel ini hanya memfokuskan pada strategi pembelajaran SSCS (*Search, Solve, Create and Share*) dimana pada langkah-langkah pada strategi pembelajaran SSCS dapat mewakili tiap point pada indikator-indikator disposisi matematis. Sehingga siswa yang memiliki kemampuan disposisi matematis yang rendah dapat kita kembangkan salah satunya dengan menggunakan strategi pembelajaran SSCS. Selain itu sesuai dengan hasil penelitian yang telah ada bahwa disposisi matematis dapat meningkatkan prestasi siswa, sehingga siswa dapat memiliki kepercayaan diri, memiliki ide-ide dan menuangkannya, memiliki ketertarikan dalam matematika, serta dapat mengapresiasi pembelajaran matematika

## 7. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Sumarmo, U. 2005. Pengembangan Berfikir Matematik Tingkat Tinggi Siswa SLTP dan SMU serta Mahasiswa Strata Satu Melalui Berbagai Pendekatan Pembelajaran. Laporan Hibah Penelitian Tim Pasca Sarjana HTPT Tahun ke-tiga.
- [2] Depdiknas. 2006. *Permendiknas Nomor 22 Tahun Tentang Standar Isi Sekolah Menengah Atas*. Jakarta.
- [3] Djemari, Mardapi. 2004. *Penyusunan Tes Hasil Belajar*. Yogyakarta: Program Pascasarjana Universitas Negeri Yogyakarta.
- [4] Katz, L. G. 2009. *Dispositions as Educational Goals*. [Online]. Tersedia: <http://www.edpsycinteractve.org/files/edooutcomes.html>. [16 juni 2015].
- [5] Pearson Education. 2000. *Mathematical Disposition*. [Online] Tersedia: <http://www.teachervision.fen.com/math/teacer-training/55328.html?forprinting=1>. [20 juni 2015].
- [6] NCTM (*National Council of Teacher of Mathematics*). 2000. *Principles and Standars for School Mathematics*. Reston, Virginia: NCTM.
- [7] Maxwell, K. 2001. *Positive Learning Dispositions in Mathematics*. [online]. Available: [http://www.education.auckland.ac.nz/uao/fms/default/education/docs/word/research/foed/paper/issue11/ACE\\_Paper\\_3\\_Issue11.doc](http://www.education.auckland.ac.nz/uao/fms/default/education/docs/word/research/foed/paper/issue11/ACE_Paper_3_Issue11.doc) [ 20 juni 2015].
- [8] NCTM. (1989). *Curriculum and Evaluation Standarts for School Mathematics*. Reston, VA: Authur.
- [9] Wardani, S. 2008. Pembelajaran Inkuiri Model Silver Untuk Mengembangkan Kreativitas dan Kemampuan Pemecahan Masalah Matematik Siswa Sekolah Menengah Atas. Disertasi Doktor pada PPS UPI: Tidak dipublikasikan.
- [10] Ratnaningsih. 2007. Pengaruh Pembelajaran Kontekstual Terhadap Kemampuan Berfikir Kritis dan Kreatif Matematik Serta Kemandirian Belajar Siswa Sekolah Menengah Atas. Disertasi Doktor PSS-UPI: Tidak Dipublikasikan.
- [11] Arthur L.Costa dan Bena Kallick, *Describing 16 Habits of Mind*, 2012, (<http://www.ccsnh.edu/documents/CCSNH%20MLC%20HABITS%20OF%20MIND%20COSTAKALICK%20DESCRIPTION%201-8-10.pdf>)

- [12] Yuanari, Novita. 2011. Penerapan StrategiTTW(*Think-Talk-Write*) Sebagai Upaya Meningkatkan Kemampuan Pemecahan Masalah dan Disposisi Matematis Siswa Kelas VIII SMPN 5 Wates Kulon Progo. Universitas Negeri Yogyakarta: Tidak dipublikasikan.
- [13] Syaban, Mumun. 2009. Menumbuhkan-kembangkan Daya dan Dispoisi Matemati Siswa Sekolah Menengah Atas Melalui Pembelajaran Investigasi. *Jurnal Pendidikan* Vol III. No. 2.
- [14] Martinis Yamin dan Bansu I. Antasari. 2008. "*Teknik Pengembangan Kemampuan Individual Siswa*". Gaung Persad Press: Jakarta.
- [15] Fajri, Syamsul. 2011. Penggunaan Model Pembelajaran RME (*Realistic Mathem-atical Education*) dalam Meningkatkan Hasil Belajar Siswa Pokok Bahasan Penjumlahan dan Pengurangan Pada Bilangan Bulat Siswa Kelas VII MTs Nurul Falah Kec. Lombok Tengah Tahun Pelajaran 2010/2011. [Online]. Tersedia:<http://www.syamsulfajri.blogspot.com/2011/12/penggunaan-model-pembelajaran-realistic.html> [1 Agustus 2015].
-

**UPAYA MENINGKATKAN HASIL BELAJAR MATEMATIKA MATERI  
PECAHAN SEDERHANA MELALUI MEDIA KARTU PECAHAN  
DI KELAS III SD NEGERI 1 KARANGBOYO**

Anita Dewi Utami

IKIP PGRI Bojonegoro, [anitadewiutami55@gmail.com](mailto:anitadewiutami55@gmail.com)

**Abstrak.** Penelitian ini bertujuan untuk meningkatkan hasil belajar matematika siswa kelas III SD Negeri 1 Karangboyo materi pecahan sederhana dengan menggunakan media kartu pecahan melalui sebuah permainan. Jenis penelitian ini adalah penelitian tindakan kelas dengan subjek 24 siswa, terdiri dari 14 siswa laki-laki dan 10 siswa perempuan. Teknik yang digunakan untuk pengumpulan data adalah teknik observasi dan tes tertulis. Instrumen penelitian menggunakan lembar observasi guru, observasi siswa dan tes tertulis, serta teknik analisis data dengan deskriptif kuantitatif dan deskriptif kualitatif. Berdasarkan hasil yang diperoleh dapat disimpulkan bahwa hasil belajar matematika dengan menggunakan media kartu pecahan siswa kelas III SD Negeri 1 Karangboyo mengalami peningkatan pada materi pecahan sederhana. Peningkatan pada siklus I sebesar 23,2% dengan ketuntasan belajar mencapai 56,5%. Sedangkan pada siklus II mengalami peningkatan sebesar 39,3% dengan ketuntasan belajar mencapai 95,8%.

**Kata Kunci:** Hasil belajar matematika, pembelajaran matematika, dan media kartu pecahan.

## 1. Pendahuluan

Pendidikan adalah modal bagi berkembangnya suatu Negara, dengan pendidikan yang baik maka akan dihasilkan pula sumber daya manusia yang baik dan berkualitas untuk pembangunan Negara. Hal itu dapat diperoleh dari keberhasilan kegiatan belajar mengajar di kelas yang diantaranya adalah pembelajaran matematika. Menurut Aris Suherman dan Ondi Saondi (2010: 3) pembelajaran pada hakekatnya adalah kegiatan guru dalam membelajarkan siswa, ini berarti bahwa proses pembelajaran adalah membuat atau menjadikan siswa dalam kondisi belajar.

Matematika adalah salah satu mata pelajaran yang menduduki peran penting dalam pendidikan karena dilihat dari manfaatnya, matematika sangat diperlukan untuk mengembangkan pola pikir seseorang. Oleh karena itu semua peserta didik perlu mempelajari matematika mulai dari sekolah dasar untuk membekali peserta didik dengan kemampuan berpikir logis, analitis, sintesis, kritis dan kreatif.

Objek matematika bersifat abstrak dan tidak dapat diamati oleh pancaindra. Hal ini menjadikan matematika dianggap sulit oleh kebanyakan siswa. Salah satu cara untuk mengatasi masalah tersebut

adalah dengan mempelajari suatu konsep atau prinsip matematika dengan menggunakan pengalaman melalui benda-benda nyata yaitu menggunakan media berupa alat peraga yang dapat menjembatani siswa untuk berpikir abstrak. Alat peraga merupakan bagian dari media pembelajaran yang dapat diartikan sebagai semua benda yang menjadi perantara terjadinya proses belajar, dapat berwujud perangkat lunak, maupun perangkat keras. (Pujiati, 2004: 17). Seperti halnya penelitian yang dilakukan oleh Esti Afyanti (2012) menunjukkan bahwa penggunaan alat peraga dapat meningkatkan kemampuan menyelesaikan soal cerita pecahan pada siswa kelas IV MI Muhammadiyah Badakarya.

Inovasi pembelajaran sangat diperlukan dalam meningkatkan prestasi belajar siswa, terutama untuk menjadikan pembelajaran memiliki kesan pembelajaran lebih lama diingat oleh siswa. (Bain, dkk, 2005). Penelitian yang dilakukan oleh Irwahyuni (2013) menunjukkan bahwa dengan inovasi pembelajaran menggunakan model TPS (*Think*

*Pair Share*) dan alat peraga di kelas IV MI Ma'arif Ngliseng dapat meningkatkan hasil belajar siswa.

Inovasi dalam pendidikan sering dihubungkan dengan pembaruan yang berasal dari hasil pemikiran kreatif, temuan dan modifikasi yang memuat ide dan metode yang dipergunakan untuk mengatasi suatu permasalahan pendidikan melalui suatu rencana atau pola yang dapat dipergunakan untuk membangun, mendesain bahan instruksional dan sebagai pengarah terhadap kegiatan pembelajaran di dalam kelas atau di luar kelas (Joice dan Weil, 1980). Agar inovasi pembelajaran berhasil optimum sesuai dengan tujuan yang diinginkan maka beberapa hal perlu dipertimbangkan dalam inovasi seperti rasional teoritis, landasan pemikiran pembelajaran dan lingkungan belajar.

Berdasarkan hasil pengamatan pada tanggal 01 November 2014 di SD N 1 Karangboyo, media pembelajaran yang digunakan di sekolah tersebut jumlahnya masih sangat sedikit. Selain itu, media hanya diletakkan di

belakang kelas dan hanya digunakan bermain oleh siswa pada saat istirahat. Berdasarkan hasil wawancara dengan guru kelas III SD Negeri 1 Karangboyo pada 03 November 2014 dalam pembelajaran guru masih banyak menggunakan metode ceramah sehingga siswa kurang aktif dan merasa jenuh dalam mengikuti pembelajaran. Selain itu, daftar nilai siswa kelas III tahun ajaran 2014/2015 semester 2 menunjukkan bahwa nilai rata-rata matematika pada materi pecahan sederhana masih rendah.

Upaya untuk meningkatkan hasil belajar siswa kelas III SD N 1 Karangboyo pada materi pecahan sederhana, maka diperlukan media pembelajaran yang sesuai. Salah satu alternatif media pembelajaran yang dapat digunakan oleh guru adalah kartu pecahan. Kartu pecahan termasuk media pembelajaran yang efektif untuk pembelajaran matematika pada kompetensi dasar membandingkan pecahan sederhana. Hal tersebut dikarenakan media kartu pecahan memenuhi kriteria media pembelajaran yang baik yaitu: sederhana, mudah digunakan, mudah

disimpan, dapat memperlancar pembelajaran, tahan lama, sesuai dengan topik yang diajarkan, tidak menimbulkan salah tafsir dan mengarah pada satu pengertian.

Dari uraian di atas, mendorong peneliti untuk melakukan penelitian tindakan kelas dengan tujuan meningkatkan hasil belajar matematika siswa kelas III SD Negeri 1 Karangboyo dengan pemanfaatan media pembelajaran. Oleh karena itu penelitian yang dilakukan berjudul “Upaya Meningkatkan Hasil Belajar Matematika Materi Pecahan Sederhana Melalui Media Kartu Pecahan di Kelas III SD Negeri 1 Karangboyo.

## **2. Metode Penelitian**

Penelitian ini merupakan Penelitian Tindakan Kelas yang dilaksanakan di kelas III SD N 1 Karangboyo dengan subjek 24 siswa. Pengumpulan data melalui observasi dan tes yang dilakukan di akhir pembelajaran. Data-data yang diperoleh dianalisis secara deskriptif. Data yang dikumpulkan dalam penelitian ini adalah keterlaksanaan belajar dan hasil belajar siswa berupa

nilai siswa. Kemudian data dianalisis untuk mengetahui ketuntasan hasil belajar siswa. Indikator pencapaian sesuai dengan KKM yang ditetapkan yaitu 65. Selain itu juga diharapkan persentase ketuntasan secara klasikal yaitu 70% dari jumlah siswa di dalam kelas.

### **3. Analisis Hasil Penelitian dan Pembahasan**

Hasil analisis data siklus I dan siklus II, diketahui bahwa terdapat peningkatan prosentase ketuntasan belajar siswa. Secara ringkas peningkatan prosentase ketuntasan belajar pada siklus I dan siklus II pada tabel 1.

Tabel 1. Jumlah Rerata dan Persentase Hasil Belajar Siswa

Hasil Belajar	Siklus I	Siklus II	Keterangan
Nilai rata-rata	68,3	82,9	Meningkat
Ketuntasan Klasikal (%)	56,5%	95,8%	Meningkat

Berdasarkan tabel di atas, nilai rata-rata siswa sudah mencapai target yaitu  $>65$ , akan tetapi tindakan masih dilanjutkan pada siklus II, hal ini dikarenakan ketuntasan belajar

siswa masih jauh dari target yang ditetapkan peneliti yaitu 70%. Sedangkan pada siklus I baru mencapai 56,5%. Kegiatan pembelajaran pada siklus I sudah cukup baik, guru fokus menjelaskan aturan permainan kartu pecahan dan memberi contoh cara bermain kartu pecahan untuk memecahkan soal yang diberikan. Selama kegiatan permainan kartu pecahan, guru tampak mendampingi siswa dan merespon aktivitas yang dilakukan oleh siswa. Siswapun nampak antusias dalam melakukan permainan kartu pecahan. Kegiatan pembelajaran lebih aktif dan kondusif dalam melakukan permainan kartu pecahan. Nilai rata-rata siswa sudah melampaui KKM, akan tetapi persentase ketuntasan belajar masih belum mencapai target. Hal ini disebabkan oleh beberapa hal diantaranya: beberapa siswa masih kurang paham dalam melakukan permainan kartu pecahan dan masih bingung dengan penjelasan yang diberikan oleh guru serta kesulitan dalam mengerjakan soal evaluasi. Nilai rata-rata meningkat 21,3% dari siklus I ke siklus II. Pada siklus II

nilai rata-rata mencapai 82,9 serta persentase ketuntasan mencapai 95,8% dan sudah melebihi target yang ingin dicapai.

Berdasarkan hasil penelitian yang dilaksanakan di kelas III SD N 1 Karangboyo, terlihat bahwa pembelajaran matematika materi pecahan mampu meningkatkan hasil belajar siswa. Siswa lebih mudah memahami materi membandingkan pecahan sederhana melalui permainan menggunakan media kartu pecahan. Pembelajaran menjadi lebih menarik dan menyenangkan karena siswa dapat belajar sambil bermain. Selain itu dalam pembelajaran ini melatih siswa untuk memiliki keterampilan berpikir maupun keterampilan sosial seperti keterampilan membandingkan pecahan sederhana secara cepat, bekerja sama, dan mampu memberikan apresiasi kepada siswa yang lain.

Hal di atas sesuai dengan teori yang dikemukakan oleh Gatot Muhsetyo (2007:256) bahwa pembelajaran matematika merupakan suatu proses untuk menciptakan lingkungan belajar bagi siswa agar

terkondisikan dalam belajar matematika. Pembelajaran matematika juga menggunakan suatu desain yang mengoptimalkan siswa dalam belajar matematika sehingga terciptalah pembelajaran matematika yang optimal dan dapat memberikan hasil belajar yang optimal pula. Desain pembelajaran untuk mengoptimalkan hasil belajar siswa dalam penelitian ini menggunakan media berupa kartu pecahan. Hal ini sesuai dengan pendapat Sudjana dan Rivai (dalam Azhar Arsyad, 2011: 24) mengenai manfaat media pembelajaran. Manfaat tersebut diantaranya adalah bahan pembelajaran lebih bermakna dan dapat mencapai tujuan pembelajaran yang akan dicapai.

#### **4. Kesimpulan**

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan maka dapat disimpulkan bahwa pembelajaran matematika pada materi pecahan dengan menggunakan media kartu pecahan dapat meningkatkan hasil belajar siswa kelas III SDN 1 Karangboyo. Hasil belajar siswa dari prasiklus atau tes awal prestasi masih rendah dengan nilai rata-rata kelas

59,8 yang masih dibawah KKM serta ketuntasan belajar baru mencapai 33,3%. Setelah diterapkan pembelajaran matematika dengan menggunakan media kartu pecahan pada siklus 1 terjadi peningkatan hasil belajar dengan ditunjukkan nilai rata-rata kelas mencapai 68,3 yang sudah mencapai KKM namun masih dalam kriteria sedang dan ketuntasan belajar baru mencapai 56,5%. Terjadi peningkatan ketuntasan belajar siswa sebesar 23,2% dari pra siklus ke siklus I. Akan tetapi karena target ketuntasan belajar adalah 70% sedangkan pada siklus 1 baru di tingkat 56,5%, maka dilanjutkan pada siklus II. Pada siklus II nilai rata-rata kelas sudah termasuk dalam kriteria baik yaitu mencapai nilai 82,9. Ketuntasan belajar siswa mengalami peningkatan 39,3% dari siklus I ke siklus II yaitu mencapai prosentase ketuntasan 95,8% yang sudah melebihi ketuntasan minimum 70%.

## **5. Daftar Pustaka**

Aris Suherman dan Ondi Saondi. *Etika Profesi Keguruan*. Bandung: PT Refika Aditama, 2010.

Azhar Arsyad. *Media Pembelajaran*. Jakarta: PT Rajagrafindo Persada, 2011.

Bain, B.J. *Current Concept: Diagnosis from the Blood Smear, N Engl J Med*. Vol 353. pp: 49-52, 2005.

Esti Afiyani. *Upaya Meningkatkan Kemampuan Menyelesaikan Soal Cerita dalam Pembelajaran Matematika Materi Pecahan Sederhana dengan Menggunakan Alat Peraga pada Siswa Kelas IV MI Muhammadiyah Badakarya Kecamatan Punggelan Banjarnegara*. Skripsi: Universitas Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta, 2012.

Gatot Muhsetyo. *Pembelajaran Matematika SD*. Jakarta: Universitas Terbuka, 2007.

Irwahyuni. *Upaya Peningkatan Aktivitas dan Hasil Belajar Matematika Melalui Model Pembelajaran Kooperatif Tipe Think Pair Share (TPS) dan Alat Peraga pada Siswa Kelas IV MI Ma'arif Ngliseng Tahun Pelajaran 2012/2013*. Skripsi: Universitas Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta, 2013.

Joyce dan Weil. *Model of Teaching*. Englewood Cliffs. New Jersey: Prentice-Hall, Inc, 1980.

Pujiati. *Penggunaan Alat Peraga dalam Pembelajaran Matematika SMP*. Yogyakarta: Diklat Instruktur/Pengembang Matematika SMP Jenjang Dasar PPPG Matematika, 2004.

## **PENGUNAAN SCAFFOLDING DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA**

Novio Dinisa Putri<sup>1</sup>, Sugeng Sutiarto<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Universitas Lampung

**Abstrak.** Pendidikan bertujuan menjadikan siswa yang tidak tahu menjadi tahu. Matematika sebagai salah satu mata pelajaran yang diajarkan dari jenjang dasar hingga tinggi, merupakan pelajaran yang memiliki ciri “abstrak”. Ciri abstrak pada matematika ini dapat menjadi sumber penyebab siswa tidak mampu menguasai matematika. Sementara itu, kebanyakan guru matematika yang merupakan agen pentransfer ilmu kepada siswa, menganggap ketidakmampuan siswa dalam matematika dapat diatasi dengan penggunaan model pembelajaran yang tepat. Padahal, jika model pembelajaran yang digunakan dikolaborasi dengan teknik yang tepat sesuai kebutuhan siswa maka akan memberikan hasil yang lebih baik terhadap kemampuan matematika siswa. Salah satu teknik yang dapat digunakan adalah scaffolding. Di dalam artikel ini akan dibahas pengertian, klasifikasi, dan cara menggunakan scaffolding dalam pembelajaran matematika.

**Kata kunci:** Matematika, Pembelajaran, Pembelajaran Matematika, Scaffolding.

### **1. PENDAHULUAN**

Pendidikan merupakan kegiatan yang berfungsi membantu siswa dalam pengembangan dirinya, yaitu pengembangan semua potensi, kecakapan, serta karakteristik pribadinya ke arah yang positif, baik bagi dirinya sendiri maupun lingkungannya (Sukmadinata, dkk, [1]). Dari pernyataan tersebut dapat dikatakan bahwa pendidikan berfungsi untuk mengembangkan diri dan mempersiapkan siswa hidup di lingkungannya.

Salah satu mata pelajaran yang dapat mempersiapkan siswa hidup di lingkungannya adalah matematika. Hal ini dikarenakan matematika merupakan ilmu yang erat hubungannya dengan kemampuan berpikir. Kemudian, kemampuan berpikir ini nantinya dapat memfasilitasi peserta didik ketika berhadapan dengan masalah dalam kehidupan sehari-harinya.

Manfaat matematika yang dijelaskan pada pernyataan sebelumnya, ternyata belum dapat dirasakan oleh semua siswa. Siswa cenderung menganggap matematika sebagai mata pelajaran yang sulit dan tidak begitu jelas manfaatnya dalam kehidupan nyata [3]. Kecenderungan siswa tidak menyukai matematika dapat disebabkan oleh

banyak hal. Beberapa diantaranya adalah objek kajian pada matematika yang bersifat abstrak dan tantangan dalam pendidikan matematika itu sendiri.

Amiripour, et al [4] berpendapat bahwa salah satu tantangan di pendidikan matematika adalah lemahnya hubungan antara guru dan siswanya dalam pembelajaran matematika. Vygotsky dan Bruner (Hunter, [5]) percaya bahwa pembelajaran yang terjadi merupakan hasil dari interaksi sosial antara individu yang lebih tahu dengan individu yang belum tahu. Dalam hal ini guru disebut sebagai individu yang lebih tahu dibandingkan siswanya. Vygotsky (Kiong, et al [6]) menambahkan interaksi sosial antara guru dan siswa dapat mempengaruhi perkembangan kognitif siswa. Dengan kata lain, interaksi sosial yang berbentuk dialog atau isyarat atau gerakan, memainkan peran penting dalam pembentukan konsep dalam diri siswa.

Lebih lanjut, Vygotsky (Kiong, et al [6]) juga mengatakan bahwa bentuk tugas yang sering dihadapi siswa dapat mempengaruhi pembentukan konsep dalam dirinya. Jika tugas yang diberikan kepada siswa berhubungan dengan pengalaman sehari-hari siswa, maka siswa akan merasa memiliki sesuatu yang siswa kenal se-

hingga tertarik untuk menyelesaikannya. Pada saat yang sama, tugas ini tentunya yang dapat memperluas pemikiran siswa.

Pernyataan Vygotsky di atas, kemudian memunculkan masalah baru. Jika tugas yang diberikan kepada siswa terlalu sulit, maka apakah siswa mampu menyelesaikannya?. Untuk menjawab pertanyaan ini, Berk [7] mengatakan siswa mungkin tidak akan mampu menyelesaikan tugas tersebut secara mandiri, tetapi siswa akan mampu jika dibantu dan dibimbing oleh orang lain yang lebih ahli. Konsep bantuan dan bimbingan ini kemudian dikenal dengan istilah scaffolding.

Artikel dalam Spectrum Newsletter [8] mengatakan bahwa salah satu manfaat utama scaffolding adalah dapat memberikan dukungan bagi lingkungan pembelajaran. Siswa akan bebas mengajukan pertanyaan, memberikan umpan balik, dan mendukung teman sebayanya dalam mempelajari materi baru. Hal ini jelas memberikan kesempatan kepada siswa untuk aktif berperan dalam pembelajaran siswa sendiri.

Sudah menjadi tugas seorang guru untuk mengetahui apa penyebab siswa kesulitan mempelajari sesuatu, seperti halnya dalam mempelajari materi matematika. Beberapa studi internasional seperti *Trends in International Mathematics and Science Study* (TIMSS) dan *Program for International Student Assessment* (PISA) sejak tahun 1999 hingga saat ini menunjukkan bahwa hasil capaian kemampuan siswa-siswa Indonesia dalam matematika belum maksimal [9]. Ada banyak faktor yang dapat mempengaruhi hasil capaian matematika siswa-siswa Indonesia yang belum baik ini, di antaranya adalah penggunaan metode pembelajaran yang kurang tepat. Akan tetapi, metode pembelajaran saja dirasakan kurang cukup jika tidak dikolaborasikan dengan teknik atau strategi mengajar yang baik. Misalnya menggunakan metode pembelajaran kooperatif dengan teknik scaffolding dalam pembelajaran matematika (Nuntrakune, et al [10]).

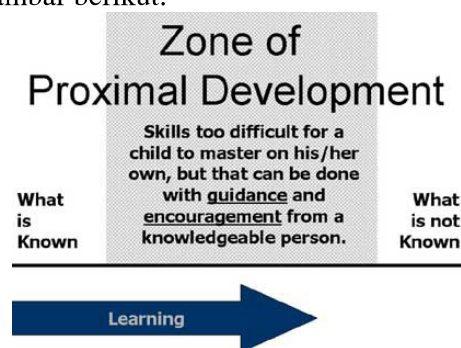
Untuk menggunakan scaffolding dalam pembelajaran matematika, terlebih dahulu perlu diketahui pengertian, karakteristik, dan cara menggunakan scaffolding.

## 2. PENGGUNAAN SCAFFOLDING DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA

Dalam kamus oxford (Sutiarso [11]), istilah “scaffolding” berasal dari kata “scaffold” yang berarti tangga atau perancah yang biasa digunakan oleh pekerja bangunan; yang merupakan struktur sementara yang mendukung pekerja untuk menyelesaikan pekerjaan yang mereka tidak dapat lakukan. Woolfolk, et al [12] menyebut scaffolding sebagai panduan atau bantuan dari orang tua atau guru kepada anak dalam mempelajari tugasnya. Scaffolding adalah proses siswa dalam memanfaatkan semua yang diketahuinya untuk menyelesaikan sesuatu yang belum ia ketahui. Dalam scaffolding, terlebih dahulu guru atau setiap orang harus memiliki tanggung jawab dalam proses pembelajaran. Kemudian, ketika proses pembelajaran yang berlangsung ini menyenangkan bagi siswa, maka siswa akan memiliki tanggung jawab dalam proses pembelajaran tersebut.

Dalam implementasi pembelajaran, Stone [13] menyebut scaffolding dengan *instructional scaffolding*. Ia mengatakan bahwa “*Instructional scaffolding is a mechanism for observing the process by which the learner is helped to affect his or her potential learning*”. Pernyataan Stone menyebutkan bahwa scaffolding dapat membantu siswa untuk mencapai pembelajaran potensialnya. Pernyataan Stone ini ternyata mengarah pada teori *Zone of Proximal Development* (ZPD) yang dikembangkan oleh Vygotsky. *Zone of proximal development* (ZPD) didefinisikan oleh Vygotsky (McLeod, [14]) sebagai “*the distance between the actual development level as determined by independent problem solving and the level of potential development as determined through problem solving under adult guidance, or in collaboration with more*

capable peers". Berk [7] juga menambahkan bahwa ZPD adalah serangkaian tugas yang terlalu sulit untuk diselesaikan oleh anak secara mandiri, tetapi mungkin jika dibantu dengan pertolongan dari orang dewasa atau teman sebaya yang lebih paham. McLeod [14] mengilustrasikan ZPD pada gambar berikut.



Gambar 2.1 Ilustrasi Zone of Proximal Development

Kata “*guidance and encouragement*” pada ilustrasi gambar di atas yang disebut dengan scaffolding.

Dalam penerapannya, beberapa ahli menyebutkan bahwa Scaffolding memiliki karakteristik. Greenfield (Puntambekar, et al [15]) menyebutkan bahwa ada lima karakteristik dari scaffolding dalam konstruksi bangunan, yaitu: (1) *it provides a support* (menyediakan dukungan), (2) *it functions as a tool* (berfungsi sebagai alat), (3) *it extends the range of the worker* (melejitkan jangkauan kemampuan pekerja), (4) *it allows a worker to accomplish a task not otherwise possible* (memungkinkan pekerja untuk menyelesaikan tugas), dan (5) *it is used to selectively aid the worker where needed* (digunakan untuk menyeleksi bantuan yang dibutuhkan oleh pekerja). Puntambekar, et al [15] juga menambahkan bahwa dari analogi Greenfield kemudian memunculkan dua elemen penting pada scaffolding. Pertama, scaffolding memungkinkan anak untuk memecahkan masalah, menyelesaikan tugas atau mencapai suatu tujuan dan kedua, menggambarkan dukungan yang dapat dihilangkan ketika sudah tidak dibutuhkan lagi.

Sementara itu, McKenzie [16] menjelaskan bahwa sedikitnya ada delapan ka-

rakteristik scaffolding dalam pembelajaran, yaitu:

1. *Scaffolding provides clear directions.*  
Langkah-langkah scaffolding yang diberikan kepada siswa harus memberikan tujuan yang jelas.
2. *Scaffolding clarifies purpose.*  
Scaffolding yang digunakan harus tetap sesuai dengan tujuan. Siswa tidak boleh melakukan serangkaian kegiatan yang justru membuat anak menjadi semakin bingung dan akibatnya tujuan tersebut tidak tercapai. Siswa harus dibuat peduli atau tertarik terhadap masalah yang diberikan. Ketika siswa sudah tertarik, maka siswa akan tetap terarah pada tujuan yang akan dicapai.
3. *Scaffolding keeps students on task.*  
Scaffolding dapat memandu siswa untuk terus berada pada tugas yang diberikan melalui penyediaan berbagai jenis bantuan yang dapat siswa ikuti untuk menyelesaikan tugas tersebut.
4. *Scaffolding offers assessment to clarify expectations.*  
Scaffolding menyediakan contoh kualitas pekerjaan yang diselesaikan oleh orang lain. Dari awal, siswa harus ditunjukkan standar dan kriteria mengenai kualitas pekerjaan tersebut. Tanpa kriteria yang jelas, maka siswa sulit untuk mengetahui apakah pekerjaan yang akan mereka lakukan bermanfaat untuk dirinya atau tidak.
5. *Scaffolding points students to worthy sources.*  
Scaffolding adalah poin awal bagi siswa untuk mengakses sumber lain dari informasi yang berguna bagi penyelesaian suatu masalah.
6. *Scaffolding reduce uncertainty, surprise and disappointment.*  
Tujuan scaffolding adalah untuk memaksimalkan pembelajaran dengan memberikan wawasan yang baru bagi siswa sehingga dapat menghilangkan rasa frustrasi yang dapat mengganggu siswa ketika belajar.
7. *Scaffolding delivers efficiency.*

Scaffolding menghasilkan produk yang efisien karena fokus dan ada kejelasan tugas dan waktu.

8. *Scaffolding creates momentum.*

Scaffolding menciptakan suatu momentum melalui proses mencari, bertanya, merenung, mengingat, dan mempertimbangkan setiap bantuan yang siswa peroleh.

Selain karakteristik, Puntambekar, et al [15] mengatakan bahwa dalam scaffolding terdapat fitur utama, yaitu *a single more knowledgeable person* (orang yang berpengetahuan luas). Orang yang berpengetahuan luas ini dapat diperankan oleh orang dewasa, seperti orang tua dan guru, bahkan teman sebaya. Menurut Vygotsky (Cherry [17]) teman sebaya justru merupakan bagian penting dalam pembelajaran anak. Lebih lanjut, pentingnya keberadaan orang berpengetahuan luas ini dikatakan oleh Vygotsky (Cherry [17]) bahwa “*while a child might not yet be capable of doing something on their own, they are able to perform the task with the assistance of a skilled instructor*”. “*Skilled instructor*” pada pernyataan Vygotsky tersebut adalah orang yang berpengetahuan luas ini yang kemudian akan berinteraksi dengan anak yang belum mampu menyelesaikan masalah melalui scaffolding.

Wood et al (Anghileri [18]) mengidentifikasi bahwa ada enam elemen kunci yang dapat dilakukan oleh orang dewasa dalam menerapkan scaffolding. Keenam elemen kunci tersebut, yaitu:

1. *Recruitment*, yaitu mendaftar ketertarikan dan kepatuhan anak terhadap syarat atau apa yang diminta pada tugas.
2. *Reduction in degrees of freedom* – menyederhanakan tugas sehingga umpan balik diatur sesuai dengan level yang dapat digunakan sebagai perbaikan.
3. *Direction maintenance* – (khusus proder verbal dan korektor) menjaga anak tetap dalam proses mencapai suatu tujuan tertentu.

4. *Marking critical features* – (mengkonfirmasi dan mengecek) menonjolkan dan menafsirkan beberapa perbedaan.

5. *Frustration control* – merespon keadaan emosional anak.

6. *Demonstration* – atau memodelkan solusi untuk tugas.

Dalam artikel yang dimuat pada Spectrum Newsletter [8] dikatakan bahwa penggunaan scaffolding dalam suatu pembelajaran dapat mendukung lingkungan pembelajaran. Siswa bebas mengajukan pertanyaan, mengadakan umpan balik, dan mendukung teman sebayanya dalam mempelajari materi baru. Pendapat lain muncul dari latar belakang penelitian yang dilakukan oleh Nuntrakune, et al [10] mengenai penggunaan teknik scaffolding dalam pembelajaran kooperatif. Penelitian yang dilakukan di Thailand ini mengatakan bahwa ada tiga alasan mengapa pembelajaran kooperatif di sistem pendidikan Thailand diaplikasikan bersama scaffolding. Ketiga alasan tersebut, yaitu: (1) scaffolding dipahami sebagai penyesuaian dan pengambilan ide untuk diri siswa sendiri; (2) scaffolding membantu dan meningkatkan pemahaman siswa terhadap masalah, dan (3) scaffolding kognitif menganjurkan pembelajaran berpusat pada siswa di ruang kelas Thailand karena scaffolding meminta guru untuk melayani siswa dalam rangka memperluas pengetahuan dan kemampuan mereka.

Salah satu mata pelajaran yang dapat diterapkan dengan scaffolding adalah matematika. Hasil penelitian Kiong, et al [6] mengatakan bahwa scaffolding yang digunakan sebagai strategi mengajar dapat meningkatkan pembelajaran matematika dan membantu mengimplementasikan konstruktivisme di ruang kelas. Penelitian yang dilakukan oleh Amiripour, et al [4] juga mengatakan bahwa scaffolding adalah metode yang efektif untuk diterapkan dalam pembelajaran matematika. Dari hasil penelitian Amiripour, et al ini dikemukakan beberapa alasan mengapa scaffolding efektif untuk diterapkan dalam pem-

belajaran matematika, yaitu: (1) proses scaffolding ini dapat memotivasi siswa untuk melakukan prosedur pemecahan masalah; (2) metode scaffolding akan mengembangkan kapasitas level dan hubungan sosial siswa sebelumnya; (3) proses scaffolding akan meningkatkan kepercayaan diri siswa dalam pemecahan masalah matematika yang sulit; dan (4) metode pendidikan ini dapat menunjukkan kesalahan dan miskonsepsi siswa pada prosedur pemecahan masalah. Dengan demikian, scaffolding menjadi suatu teknik mengajar yang perlu diterapkan dalam pembelajaran matematika dalam rangka meningkatkan kemampuan matematika siswa.

Briars, et al (Amiripour, et al [4]) mengatakan “guru matematika memiliki tanggung jawab untuk mengarahkan dan membentuk kesempatan pembelajaran bagi siswanya. Faktanya adalah sekarang muncul kurikulum dan praktek mengajar yang konsisten dengan upaya menuju reformasi pendidikan yang menjanjikan peningkatan pembelajaran kemampuan matematika siswa dengan pemahaman konseptual yang mendalam”. Vygotsky (Hunter, [5]) menambahkan, penalaran konseptual yang dikembangkan pada ruang kelas matematika adalah sebuah hasil interaksi antara konsep sehari-hari secara spontan dan konsep ilmiah. Konsep ilmiah ini meliputi kemampuan berpikir tingkat tinggi, yang digunakan oleh siswa ketika terlibat dalam ‘*doing and talking*’ matematika. Lebih lanjut, Kiong, et al [6] berpendapat bahwa dalam mata pelajaran matematika dimana scaffolding digunakan sebagai sebuah strategi mengajar, asumsi konvensional mengenai apa artinya mengetahui matematika ditantang. Hal ini menjadi jelas bahwa guru yang mengajar tidak hanya mengajarkan tentang apa yang secara konvensional disebut konten, tetapi juga memfasilitasi konstruksi matematika siswa. Dengan demikian, peran guru matematika ketika menerapkan scaffolding dalam pembelajarannya berubah dari satu-satunya sumber pengetahuan matematika menjadi fasilita-

tor dalam perkembangan konstruksi matematika siswa.

Dalam penggunaan scaffolding pada pembelajaran matematika, Anghileri [18] mengusulkan tiga level hierarki pada penerapan scaffolding. Ketiga level tersebut, yaitu:

Level 1:

*Environmental provisions (classroom organization, artifacts such as blocks)*

Sebelum berinteraksi dengan siswa, guru mempelajari lingkungan siswa yang kemudian diciptakan dalam kelas. Penampilan dinding, bahkan pengaturan tempat duduk dapat mempengaruhi lingkungan belajar siswa dan hal ini dapat mendukung pembelajaran.

Level 2:

*Explaining, reviewing, and restructuring*

*Explaining* (menjelaskan) dapat memfokuskan siswa untuk belajar, sementara *reviewing* (meninjau) dan *restructuring* (membangun kembali) membantu siswa membangun pemahaman matematika siswa sendiri. Ketika siswa terlibat dalam tugas, siswa tidak selalu mampu mengidentifikasi aspek ide atau masalah matematika yang paling berkaitan. Pada *reviewing*, guru dapat memfokuskan kembali perhatian siswa dan menolongnya mencapai pemahamannya sendiri. Ada lima macam interaksi *reviewing*, yaitu: (1) meminta siswa untuk melihat, menyentuh dan memverbalkan apa yang mereka lihat dan pikirkan; (2) meminta siswa untuk menjelaskan dan memberikan alasan; (3) menginterpretasikan tindakan dan komentar siswa; (4) mendorong siswa dan memintanya menggali pertanyaan; dan (5) pemodelan paralel, dimana guru menciptakan dan menyelesaikan tugas yang memberikan beberapa karakteristik masalah siswa. Sementara pada *restructuring*, guru membantu siswa untuk membuat ide pemahaman yang lebih mudah diakses. Beberapa contoh *restructuring* meliputi: (1) menyediakan konteks yang bermakna ke situasi yang abstrak; (2) menyederhanakan masalah; (3) membentuk kembali komentar siswa, dan (4) menegosiasikan makna.

Level 3:

*Developing conceptual thinking*

Pada matematika, ketika siswa mampu menyelesaikan masalah yang asing, seharusnya siswa dapat mengembangkan konsep melalui generalisasi, ekstrapolasi dan abstraksi. Pada level tertinggi praktek scaffolding yang dapat dilakukan berupa: (1) mengembangkan alat yang representasi (alat peraga); (2) membuat koneksi; dan (3) menghasilkan wacana konseptual.

Dalam penerapan scaffolding dalam pembelajaran matematika, ada banyak jenis scaffolding yang dapat digunakan. Alibali dalam Spectrum Newsletter [8] mengatakan untuk mendukung kemajuan siswa melalui tugas, kemampuan menggunakan berbagai jenis scaffolding dapat mengakomodasi perbedaan level pengetahuan setiap siswa. Konten yang lebih kompleks mungkin memerlukan sejumlah scaffolding untuk diberikan pada waktu yang berbeda dalam rangka membantu siswa menguasai konten. Tabel 1 berikut menyajikan berbagai macam scaffolding dan cara menggunakannya pada suatu pengaturan instruksional.

<b>Jenis Scaffolding</b>	<b>Cara-Cara Menggunakan Scaffolding Dalam Seting Instruksional</b>
<i>Advance Organizer</i> (Organisator Tingkat Tinggi)	<i>Menggunakan alat-alat untuk mengenalkan konten dan tugas baru untuk membantu siswa mempelajari topik tersebut: contoh diagram Venn untuk menggabungkan dan membandingkan informasi.</i>
Kartu Petunjuk	<i>Menyiapkan kartu-kartu yang kemudian diberikan kepada individu atau kelompok siswa untuk membantu diskusi mereka tentang sebuah topik atau</i>

	<i>daerah konten khusus: contoh konsep untuk mendefinisikan.</i>
Peta Konsep dan Peta Pikiran ( <i>Mind Mapping</i> )	<i>Peta yang menunjukkan hubungan: contoh menyiapkan peta melengkapi (nantinya siswa diminta untuk melengkapinya) atau meminta siswa untuk membuat peta pikiran mereka sendiri berdasarkan pengetahuan tugas atau konsep yang sedang dipelajari.</i>
Contoh	<i>Contoh, spesimen, ilustrasi, masalah: contoh objek nyata.</i>
Anjuran	<i>Informasi yang lebih detail untuk membawa siswa berada pada tugas atau dalam pemikirannya mengenai sebuah konsep: contoh penjelasan verbal tentang bagaimana sebuah proses kerja.</i>
Handout	<i>Menyiapkan handout yang berisi tugas dan konten yang berhubungan dengan informasi, tetapi dengan detail dan ruang yang kosong untuk siswa gunakan sebagai tempat menulis catatan.</i>
Petunjuk	<i>Saran-saran dan petunjuk-petunjuk yang membuat siswa memahami: contoh “cari subjek dari kata kerja.”</i>

Penjelasan	<p><i>Sebuah petunjuk fisik atau verbal untuk mengingatkan–membantu dalam memunculkan pengetahuan sebelumnya atau dugaan.</i></p> <p>Contoh fisik: pergerakan tubuh seperti menunjukkan tanda dengan jari.</p> <p>Contoh verbal: kata-kata, pernyataan dan pertanyaan seperti “berhenti.”</p>
Kartu Pertanyaan	<p><i>Menyiapkan kartu-kartu dengan konten dan tugas pertanyaan spesifik yang diberikan kepada individu atau kelompok siswa untuk saling mengajukan pertanyaan yang berhubungan dengan topik atau konten khusus.</i></p>
Akar Pertanyaan	<p><i>Kalimat tidak lengkap yang harus siswa lengkapi: Mendukung pemikiran mendalam dengan menggunakan pertanyaan tingkat tinggi “bagaimana seandainya.”</i></p>
Cerita	<p><i>Cerita-cerita yang menghubungkan materi-materi kompleks dan abstrak menjadi situasi yang lebih dikenal siswa. Ceritakan cerita-cerita yang menginspirasi dan memotivasi siswa.</i></p>

Scaffolding Visual	<p>Menggerakkan jari tangan (panggil untuk memperhatikan sebuah objek); gerakan representasional, diagram seperti diagram batang dan grafik; metode penyorotan informasi visual.</p>
--------------------	--

Sebelum menggunakan scaffolding, Rosenshine, et al [19] menyarankan untuk terlebih dahulu menentukan apakah siswa memiliki kemampuan latar belakang yang cukup untuk mempelajari sebuah strategi kognitif baru. Coffey [20] juga menambahkan ketika menggunakan scaffolding sebagai suatu teknik instruksional, guru harus menyediakan tugas yang memungkinkan siswa untuk membangun pengetahuan awal dan internalisasi konsep baru. Kemudian, Coffey [20] mengatakan untuk menghubungkan informasi lama atau situasi yang familiar dengan pengetahuan yang baru, guru harus membimbing siswa melalui komunikasi verbal dan nonverbal dan memodelkan perilaku. Sementara itu, hasil penelitian Palinscar, et al (Rosenshine, et al [19]) mengingatkan bahwa scaffolding hanya berguna dalam *zone of proximal development* siswa.

Scaffolding merupakan suatu teknik mengajar yang praktis dan fleksibel untuk diterapkan. Vygotsky (Cherry, [17]) mengatakan ketika siswa sudah menguasai tugas (yang berarti sudah berada pada ZPD-nya) melalui manfaat scaffolding, maka scaffolding dapat dihilangkan dan siswa akan mampu menyelesaikan tugas lainnya secara mandiri. Pernyataan ini juga diperkuat oleh pendapat Sutiarmo [11] yang mengatakan “ketika siswa dipandang telah mampu melakukan tanggung jawabnya dalam tugas-tugas maka ketika itu guru mulai dengan proses ‘fading’, atau melenyapkan bantuan, agar siswa dapat bekerja secara mandiri”.

Penggunaan scaffolding dalam berbagai jenis pembelajaran (termasuk matematika) dapat memberikan manfaat dan tantangan. Dalam artikel Spectrum Newsletter [8] dituliskan manfaat penggunaan scaffolding dalam pembelajaran adalah sebagai berikut.

1. Menantang siswa melalui pembelajaran dan penemuan yang mendalam.
2. Melibatkan siswa dalam diskusi yang berarti dan dinamis pada kelas kecil dan besar.
3. Memotivasi siswa menjadi siswa yang lebih baik (belajar bagaimana belajar).
4. Meningkatkan kemungkinan bagi siswa menerima objek instruksional.
5. Memberikan instruksi secara individual (khususnya pada ruang kelas yang lebih kecil).
6. Memberikan kesempatan bagi pembelajaran dan pengajaran teman sebaya.
7. Scaffolding dapat 'dihilangkan' pada situasi pembelajaran yang lain.
8. Memberikan lingkungan pembelajaran yang ramah dan peduli.

Lebih lanjut, dalam artikel Spectrum Newsletter [8] juga dituliskan tantangan-tantangan yang muncul ketika akan menggunakan scaffolding dalam pembelajaran dan harus guru perhatikan. Tantangan-tantangan tersebut, yaitu:

1. Perencanaan dan penerapan scaffolding membutuhkan banyak waktu.
2. Penyeleksian scaffolding yang tepat yang sesuai dengan berbagai jenis pembelajaran dan gaya komunikasi siswa.
3. Pengetahuan ketika menghilangkan scaffolding sehingga siswa tidak bergantung pada dukungan.
4. Perlu mengenal siswa dengan cukup baik (kemampuan kognitif dan afektif siswa) sehingga scaffolding yang diberikan tidak tepat.

### 3. KESIMPULAN

Scaffolding adalah bagian dari teori *Zone of Proximal Development* yang dikemukakan oleh Vygotsky. Scaffolding dapat diartikan sebagai panduan atau bantuan dari orang tua atau guru kepada anak

dalam mempelajari tugasnya. Scaffolding berfungsi memberi bantuan kepada siswa ketika siswa menemukan masalah atau tugas yang dirasa tidak mampu menyelesaikannya secara mandiri. Ketika siswa telah mampu menyelesaikan masalah atau tugas tersebut, maka guru dapat menghilangkan scaffolding tersebut.

Scaffolding memiliki delapan karakteristik utama, yaitu (1) *scaffolding provides clear directions*; (2) *scaffolding clarifies purpose*, (3) *scaffolding keeps students on task*, (4) *scaffolding offers assessment to clarify expectations*; (5) *scaffolding points students to worthy sources*; (6) *scaffolding reduce uncertainty, surprise and disappointment*; (7) *scaffolding delivers efficiency*; dan (8) *scaffolding creates momentum*. Selain itu, scaffolding juga memiliki fitur utama yang disebut dengan *a single more knowledgeable person* (orang yang berpengetahuan luas) yang dapat diperankan oleh orang dewasa (orang tua atau guru) dan teman sebaya.

Dalam penerapannya dalam pembelajaran matematika, ada tiga level hierarki, yaitu (1) *environmental provisions*; (2) *explaining, reviewing, and restructuring*; dan (3) *developing conceptual thinking*. Ketiga level hierarki tersebut harus diperhatikan. Dalam penerapannya juga, berbagai jenis scaffolding juga perlu diketahui agar sesuai dengan kebutuhan siswa. Terdapat 12 jenis scaffolding, yaitu *advance organizer* (organisator tingkat tinggi), kartu petunjuk, peta konsep dan peta pikiran, contoh, anjuran, petunjuk, handout, penjelasan, kartu pertanyaan, akar pertanyaan, cerita, dan scaffolding visual.

Dengan memperhatikan karakteristik, cara menerapkan, jenis dan apa yang perlu diperhatikan sebelum menerapkan, dan manfaat serta tantangan apa yang akan dihadapi guru matematika ketika menggunakan scaffolding dalam pembelajarannya, maka guru akan menjadi seorang scaffolder yang handal yang dapat meningkatkan pembelajaran matematika. Pe-

mahaman guru matematika terhadap karakteristik, dan jenis-jenis scaffolding akan membantu guru untuk membuat dan memilih scaffolding yang tepat untuk siswanya. Setelah itu, guru akan dapat menerapkannya dengan memperhatikan apa saja yang harus dilakukan guru sebelum menerapkan scaffolding dalam pembelajarannya. Selain itu, guru juga harus memperhatikan tantangan-tantangan yang akan dihadapi guru ketika akan menggunakan scaffolding dalam pembelajarannya. Hasil akhir yang diperoleh guru melalui pemahaman yang baik mengenai scaffolding adalah tercapainya pembelajaran matematika yang lebih baik.

#### 4. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Sukmadinata, N.S., dan Syaodih, E. 2012. *Kurikulum dan Pembelajaran Kompetensi*. Bandung: Refika Aditama.
- [2] *Undang-Undang Republik Indonesia Nomor 20 Tahun 2003 tentang Sistem Pendidikan Nasional*. 2003. [Online]. Tersedia: <http://kemenag.go.id/file/dokumen/UU2003.pdf>. [16 Juni 2015].
- [3] Murdaningsih, Dwi. 2015. Matematika Ternyata Bisa Jadi Solusi Masalah Lingkungan *Republika Online*, 8 September 2015.
- [4] Amiripour, Parvaneh, Somayeh Amir-Mofidi dan Ahmad Shahvarani. 2012. Scaffolding as Effective Method for Mathematical Learning *Indian Journal of Science and Technology*, Vol. 5 No. 9 (Sep. 2012): 3328-3331.
- [5] Hunter, Roberta. 2010. *Coming to 'know' Mathematics through being scaffolded to 'talk and do' Mathematics*. [Online]. Tersedia: <http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/hunter2.pdf>. [27 Agustus 2015].
- [6] Kiong, Paul Lau Ngee dan Hwa Tee Yong. 2003. *Scaffolding as A Teaching Strategy to Enhance Mathematics Learning in The Classrooms*. [Online]. Tersedia: [http://www.ipbl.edu.my/portal/penyelidikan/2001/2001\\_8\\_paul.pdf](http://www.ipbl.edu.my/portal/penyelidikan/2001/2001_8_paul.pdf). [27 Agustus 2015].
- [7] Berk, Laura. E. 2006. *Child Development 7<sup>th</sup> Edition*. USA: Pearson Education, Inc.
- [8] Spectrum Newsletter. 24 November, 2008. *Instructional Scaffolding to Improve Learning*. [Online]. Tersedia: <http://www.niu.edu/spectrum/2008/fall/scaffolding.shtml>. [26 Agustus 2015].
- [9] *Peraturan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Nomor 68 Tahun 2013 tentang Kerangka Dasar dan Struktur Kurikulum Sekolah Menengah Pertama/Madrasah Tsanawiyah*. 2015. [Online]. Tersedia: <http://direktori.madrasah.kemenag.go.id/media/files/Permendikbud68TH2013.pdf>. [28 Agustus 2015].
- [10] Nuntrakune, Tippawan dan Ji Yong Park. 2013. Scaffolding Techniques: A teacher training for cooperative learning in Thailand primary education *The International Journal of Pedagogy and Curriculum*, Volume 19, Issue 2: 103-114.
- [11] Sutiarto, Sugeng. 2009. *Scaffolding dalam Pembelajaran Matematika*. Makalah disajikan dalam Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan dan Penerapan MIPA, Universitas Negeri Yogyakarta, Yogyakarta, 16 Mei 2009.
- [12] Woolfolk, Anita dan Kay Margetts. 2012. *Educational Psychology 3<sup>rd</sup> Edition*. [Online]. Tersedia: <https://books.google.co.id/books?id=whziBAAAQBAJ&printsec=frontcover&hl=id#v=onepage&q&f=false>. [24 Agustus 2015].
- [13] Stone, C. Addison. 1993. What Is Missing in the Metaphor of Scaffolding. Dalam Ellice A. Forman, Norris Minick, & C. Addison Stone (Eds.), *Contexts for Learning Sociocultural Dynamics in*

- Children's Development*. New York: Oxford University Press.
- [14] McLeod, Saul. 2010. *Zone of Proximal Development*. [Online]. Tersedia: <http://www.simplypsychology.org/Zone-of-Proximal-Development.html>. [24 Agustus 2015].
- [15] Puntambekar, Sadhana dan Roland Hubscher. 2002. *Scaffolding in Complex Learning Environments: What we have gained and what we have missed*. [Online]. Tersedia: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.23.7454&rep=rep1&type=p>. [25 Agustus 2015].
- [16] McKenzie, Jamie. 1999. Scaffolding for Success *The Educational Technology Journal*, Vol. 9, No. 4, Desember 1999.
- [17] Cherry, Kendra. 2015. *What Is the Zone of Proximal Development?*. [Online]. Tersedia: <http://psychology.about.com/od/zindex/g/zone-proximal.htm>. [25 Agustus 2015].
- [18] Anghileri, Julia. 2006. Scaffolding Practices that Enhance Mathematics Learning *Journal of Mathematics Teacher Education*, Volume 9, Issue 1: 33-52.
- [19] Rosenshine, Barak dan Carla Meister. 1992. *The Use of Scaffolds for Teaching Higher-Level Cognitive Strategies*. [Online]. Tersedia: [http://www.ascd.org/ASCD/pdf/journals/ed\\_lead/el\\_199204\\_rosenshine.pdf](http://www.ascd.org/ASCD/pdf/journals/ed_lead/el_199204_rosenshine.pdf). [25 Agustus 2015].
- [20] Coffey, Heather. 2009. *Scaffolding*. [Online]. Tersedia: <http://www.learnnc.org/lp/pages/5074>. [26 Agustus 2015]
-

## PENGEMBANGAN BAHAN AJAR BERBASIS *WOLFRAM MATHEMATICA* PADA MATA KULIAH ALJABAR LINIER

Aryo Andri Nugroho<sup>1</sup>, Lukman Harun<sup>2</sup>, Noviana Dini Rahmawati<sup>3</sup>  
Pendidikan Matematika Universitas PGRI Semarang

[1ndrie024mp@gmail.com](mailto:andrie024mp@gmail.com)

[2luck\\_1909@yahoo.com](mailto:luck_1909@yahoo.com)

[3fadinis.iz@gmail.com](mailto:fadinis.iz@gmail.com)

**Abstrak.** Tujuan penelitian ini yaitu menyusun dan mengembangkan bahan ajar berbasis *wolfram mathematica* pada mata kuliah aljabar linear untuk meningkatkan prestasi belajar mahasiswa. Luaran yang dihasilkan adalah sebuah produk berupa bahan ajar berbasis *wolfram mathematica* pada mata kuliah aljabar linear. Penelitian pengembangan bahan ajar berbasis *wolfram mathematica* ini mengacu pada teori Borg and Gall yang meliputi 10 langkah, yaitu (1) *Research & Information Collecting*, (2) *Planning*, (3) *Developing Preliminary Form of Product*, (4) *Preliminary Field Testing*, (5) *Main Product Revision*, (6) *Main Field Testing*, (7) *Operational Product Revision*, (8) *Operational Field Testing*, (9) *Final Product Revision*, dan (10) *Dissemination*. Proses pengembangan bahan ajar ini dibatasi sampai *Developing Preliminary Form of Product* atau validasi ahli. Pengembangan bahan ajar berbasis *wolfram mathematica* pada mata kuliah aljabar linear yang dikembangkan teruji valid secara isi dengan hasil penilaian untuk rata-rata sebesar 3,84 dari skala tertinggi 5. Hasil tersebut berdasarkan penilaian validator memberikan nilai baik dan dapat digunakan dengan sedikit revisi.

**Kata kunci:** pengembangan, *wolfram mathematica*, Aljabar linear, bahan ajar

### 1. PENDAHULUAN

Pembelajaran Aljabar Linier di Universitas PGRI Semarang yang berjalan saat ini sudah cukup baik namun masih kurang efektif dalam menerapkan teknologi pembelajaran. Bahan ajar yang digunakan belum memanfaatkan teknologi secara maksimal. Secara umum bahan ajarnya masih bersifat umum dan belum mengarah dengan apa yang dibutuhkan mahasiswa. Dalam pembelajaran menggunakan bahan ajar yang tersedia sekarang dapat meningkatkan prestasi belajar mahasiswa tetapi belum efektif karena belum dapat meningkatkan kreativitas mahasiswa secara maksimal. Pembelajaran akan menjadi efektif apabila menggunakan bahan ajar yang inovatif. Pada saat ini para pengajar sudah menggunakan berbagai macam bahan ajar guna meningkatkan efektivitas pembelajaran serta meningkatkan kreativitas mahasiswa.

Komputer merupakan salah satu produk teknologi yang sering dimanfaatkan dalam berbagai bidang salah satunya dalam pembelajaran dengan memanfaatkan *software* yang dibutuhkan. Salah satu *software* yang dapat diterapkan

untuk membuat bahan ajar yaitu *Wolfram Mathematica*. *Wolfram Mathematica* merupakan suatu sistem aljabar komputer (CAS, *Computer Algebra System*) yang mengintegrasikan kemampuan komputasi (Simbolik, numerik), visualisasi (grafik), bahasa pemrograman, dan pengolahan kata (*word processing*) ke dalam suatu lingkungan yang mudah digunakan. Konsep bahan ajar yang akan disusun menggunakan *software Wolfram Mathematica* serta dikemas dalam bentuk buku. Dalam penelitian ini akan memanfaatkan dan mengadaptasi pembelajaran dengan menggunakan bahan ajar berbasis *Wolfram Mathematica*.

Pembelajaran dengan menggunakan bahan ajar berbasis *Wolfram Mathematica* diharapkan dapat meningkatkan kreativitas mahasiswa sehingga akan menghasilkan prestasi belajar yang baik. Penelitian ini bertujuan menghasilkan produk berupa bahan ajar berbasis *Wolfram Mathematica* dan mengimplementasikan bahan ajar berbasis *Wolfram Mathematica* dalam pembelajaran sehingga pembelajaran menjadi lebih efektif. Oleh karena itu pada penelitian ini akan mengembangkan bahan ajar berbasis *Wolfram Mathematica*

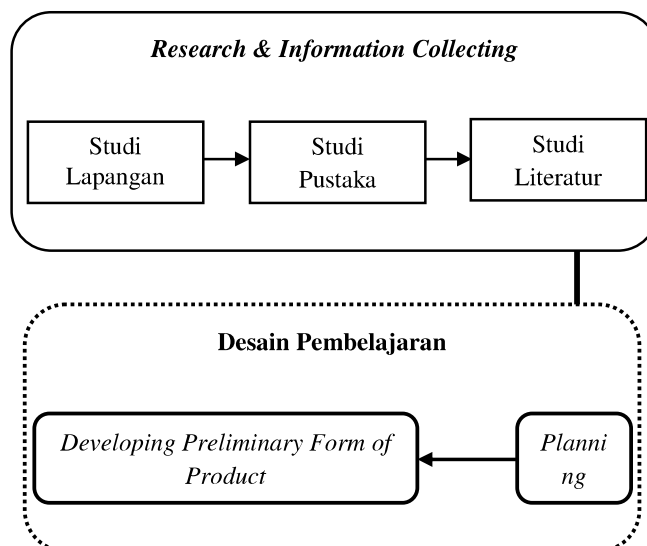
dengan mengadopsi teori *research & development* (R & D) Borg and Gall.

## 2. METODE PENELITIAN

### 2.1 Pendekatan Penelitian

Penelitian ini merupakan *research & development* (R & D). Dalam hal ini, langkah-langkah yang digunakan mengacu kepada model yang dikembangkan oleh Borg dan Gall (Samsudi, 2009) yang meliputi 10 langkah, yaitu: (1) *Research & Information Collecting*, (2) *Planning*, (3) *Developing Preliminary Form of Product*, (4) *Preliminary Field Testing*, (5) *Main Product Revision*, (6) *Main Field Testing*, (7) *Operational Product Revision*, (8) *Operational Field Testing*, (9) *Final Product Revision*, dan (10) *Dissemination*. Pada penelitian ini dibatasi sampai *Developing Preliminary Form of Product* atau validasi ahli sehingga mendapatkan *draft 1*.

Proses pengembangan dilakukan mulai tahap *Research & Information Collecting* meliputi studi lapangan, studi literatur, dan studi pustaka. Dalam studi lapangan, peneliti melakukan identifikasi masalah dan mengumpulkan data untuk deskripsi desain bahan ajar berbasis *wolfram mathematica*. Studi pustaka artinya peneliti mengkaji beberapa hasil penelitian terdahulu yang relevan untuk dijadikan sebagai rujukan pencarian solusi sementara. Sedangkan studi literatur maksudnya mengkaji teori-teori dan konsep-konsep terkait dengan permasalahan penelitian. *Planning* meliputi penetapan tujuan penelitian, tujuan setiap tahap penelitian, dan analisis keahlian yang diperlukan untuk memecahkan masalah penelitian. *Developing Preliminary Form of Product* meliputi kegiatan mendesain bahan ajar awal berbasis *wolfram mathematica* (*Draft 1*), validasi *draft 1*, dan revisi *draft 1*. Skema langkah – langkah penelitian pengembangan dapat dilihat pada gambar 1 dibawah ini.



**Gambar 2.1** Skema Langkah-langkah Pengembangan bahan ajar berbasis *wolfram mathematica*

### 2.2 Metode atau Prosedur Pengumpulan Data

Data yang akan dikumpulkan pada penelitian ini adalah data validasi ahli terhadap desain bahan ajar berbasis *wolfram mathematica*. Data validasi desain bahan ajar berbasis *wolfram mathematica* diambil dengan metode *expert judgement* dan *focus group discussion* (FGD). Instrumen yang digunakan untuk mengambil data validasi desain bahan ajar berbasis *wolfram mathematica* adalah lembar validasi dan lembar catatan diskusi.

## 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

### 3.1 Hasil Pengembangan

Dari penelitian yang telah dilaksanakan, baik dari persiapan, pembuatan bahan ajar, instrumen, validasi, maka diperoleh hasil sebagai berikut.

#### a. Proses Pengembangan Hingga Mencapai Valid.

Pada bagian ini akan dipaparkan tahapan-tahapan pada pengembangan bahan ajar berbasis *wolfram mathematica* pada mata kuliah aljabar linear dengan menggunakan model yang dikembangkan oleh Borg dan Gall.

**1) Tahap Research & Information Collecting**

Pada tahap ini meliputi studi lapangan, studi literatur, dan studi pustaka. Dalam studi lapangan, peneliti melakukan identifikasi masalah dan mengumpulkan data untuk deskripsi desain bahan ajar berbasis *wolfram mathematica*. Studi pustaka artinya peneliti mengkaji beberapa hasil penelitian terdahulu yang relevan untuk dijadikan sebagai rujukan pencarian solusi sementara. Sedangkan studi literatur maksudnya mengkaji teori-teori dan konsep-konsep terkait dengan permasalahan penelitian.

**2) Tahap Planning**

Pada tahap ini dilakukan penetapan tujuan penelitian, tujuan setiap tahap penelitian, dan analisis keahlian yang diperlukan untuk memecahkan masalah penelitian.

**3) Tahap Research & Information Collecting**

Pada tahap ini meliputi kegiatan mendesain bahan ajar berbasis *wolfram mathematica* pada mata kuliah aljabar linear (*draf 1*), validasi *draft 1*, dan revisi *draft 1* menjadi *draft 2*.

**b. Hasil Validasi**

Berdasarkan hasil validasi ahli terhadap bahan ajar berbasis *wolfram mathematica* pada mata kuliah aljabar linear diperoleh hasil validasi yang baik. Dengan demikian dihasilkan bahan ajar berbasis *wolfram mathematica* pada mata kuliah aljabar linear yang sesuai dengan kriteria yang ditentukan/valid. Rata-rata nilai dari validator dapat dilihat dari Tabel berikut.

**1) Validator Pertama**

Validator pertama (Dr. Rasiman, M.Pd) menyatakan bahan ajar berbasis *wolfram mathematica*

pada mata kuliah aljabar linear baik dan dapat digunakan dengan revisi. Dalam penelitian ini rata-rata penilaian validator = 3,58 (dari penilaian rata-rata tertinggi 5). Berdasarkan hasil validasi ahli, beberapa revisi yang dilakukan terhadap bahan ajar berbasis *wolfram mathematica* pada mata kuliah aljabar linear dapat dilihat pada Tabel 1.

**Tabel 2.1** Revisi Bahan Ajar Berdasarkan Masukan dari Validator

Bahan Ajar Sebelum Revisi	Bahan Ajar Sesudah Revisi
a) Ada istilah yang tidak konsisten	a) Istilah sudah konsisten
b) Ada kesalahan ketik dan kesalahan perhitungan manual	b) Kesalahan ketik sudah diperbaiki dan perhitungan manual

**2) Validator Kedua**

Validator pertama (Febrian MD, M.Kom) menyatakan bahan ajar berbasis *wolfram mathematica* pada mata kuliah aljabar linear sangat baik dan dapat digunakan dengan revisi. Dalam penelitian ini rata-rata penilaian validator = 4,1 (dari penilaian rata-rata tertinggi 5). Berdasarkan hasil validasi ahli, beberapa revisi yang dilakukan terhadap bahan ajar berbasis *wolfram mathematica* pada mata kuliah aljabar linear dapat dilihat pada Tabel 2.2.

**Tabel 2.2** Revisi Bahan Ajar Berdasarkan Masukan dari Validator

Bahan Ajar Sebelum Revisi	Bahan Ajar Sesudah Revisi
a) Perataan naskah	a) Naskah sudah diratakan
b) Konsistensi simbol equation	b) Simbol equation sudah konsisten
c) Langkah detail dalam operasional sebaiknya seperti tutorial	c) Langkah sudah sesuai tutorial

### 3.2 Pembahasan

Proses pengembangan bahan ajar berbasis *wolfram mathematica* dimulai dengan menyusun draft awal (*draft 1*) yang sebelumnya melalui studi lapangan, studi literatur, dan studi pustaka. *Draft 1* selanjutnya divalidasi oleh orang yang berkompeten dan juga FGD untuk menilai kelayakan bahan ajar berbasis *wolfram mathematica* dan dilakukan revisi sesuai dengan masukan validator sehingga diperoleh Draft II yang valid, yaitu dengan rata-rata penilaian validator dan juga FGD menunjukkan bahan ajar tersebut sudah baik dengan revisi (revisi diperlukan untuk perbaikan agar bahan ajar menjadi lebih baik). Draft II tersebut selanjutnya diuji cobakan tetapi dalam penelitian ini sampai revisi *draft 1* menjadi *draft 2*.

Penilaian umum validator dan revisi terhadap *draft 1* bahan ajar berbasis *wolfram mathematica* lebih ditekankan pada konsistensi penulisan dan simbol serta langkah penggunaan *wolfram mathematica*.

Pada penelitian ini bahan ajar yang disusun menekankan pada *software wolfram mathematica*. Jadi penjabaran kegiatan pembelajaran yang tertuang dalam bahan ajar melalui tahapan yang ada. Dalam hal ini revisi utama yang dilakukan dalam pengembangan bahan ajar berbasis *wolfram mathematica* diarahkan untuk memperbaiki penulisan

yang konsisten terutama pada simbol dan langkah-langkah penggunaan *wolfram mathematica*.

## 4. KESIMPULAN DAN SARAN

### 4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian yang telah diuraikan maka diperoleh kesimpulan bahwa pengembangan bahan ajar berbasis *wolfram mathematica* pada mata kuliah aljabar linear telah mencapai indikator valid. Berdasarkan hasil validasi ahli rata-rata baik dengan revisi yaitu 3,58 dari validator pertama dan 4,1 dari validator kedua dari rata-rata tertinggi 5, sehingga dengan perolehan rata-rata baik bahan ajar berbasis *wolfram mathematica* pada mata kuliah aljabar linear valid.

### 4.2 Saran

Berdasarkan simpulan yang dikemukakan di atas, maka peneliti mengharapkan penggunaan bahan ajar perlu diperhatikan arah pencapaian indikator dan tujuan pembelajaran. Pada pelaksanaan pembelajaran harus mengacu pada bahan ajar yang tepat, agar pelaksanaan pembelajaran bisa terlaksana dengan baik.

## 5. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Ali Shodiqin. 2012. *Inovasi Pembelajaran Matematika dengan Wolfram Mathematica*. Prosiding Seminar Nasional Inovasi Pembelajaran : 292-300.
- [2] Agung, dkk. 2012. *Efektivitas Pembelajaran Strategi TRUE (Try Remember Understand Exercises) Berbantuan CD Interaktif Pada Materi Sudut Kelas VII*. Penelitian tidak dipublikasikan
- [3] Andi Prastowo. 2012. *Bahan Ajar Inovatif*. Yogyakarta : diva press
- [4] Arnold Knopfmacher and Michael Mays. 2006. *Ordered and Unordered Factorizations of Integers*. *The Mathematica Journal* 10:1

- [5] Besemer, S. P. 2005. Be Creative Using Creative Product Analysis in Gifted Education. *Creative Learning Today*, 13(4): 1 - 4.
- [6] Electronic Proceedings of the Seventh International Mathematica Symposium, Perth.
- [7] Frank J. Kampas dan János D. Pintér. *Configuration Analysis and Design by Using Optimization Tools in Mathematica. The Mathematica Journal 10:1*
- [8] Oliver Rübenkönig and Jan G. Korvink. 2007. *Interactive Learning. The Mathematica Journal 10:3*
- [9] Western Australia (P. Abbott and S. McCarthy, eds.), Champaign: Wolfram Media, Inc., 2005 ISBN 1-57955-050-9
- [10] Munandar. 2009. Pengembangan Kreativitas Anak Berbakat. Jakarta: Rineka Cipta.
- [11] Rasiman, dkk. 2012. *Efektivitas Pembelajaran Dengan Memanfaatkan Video Yang Dikemas Dalam Bentuk CD Interaktif Pada Mata Kuliah Inovasi Pembelajaran Matematika*. Jurnal Aksioma
- [12] Razali Muhammad, 2008, *Cara mudah menyelesaikan Matematika dengan Mathematica*, Yogyakarta.C.V Andi Offest.
- [13] Yufan Hu. 2006. *Efficient, High-Quality Force-Directed Graph Drawing. The Mathematica Journal 10:1*
-

## PEMBELAJARAN *CREATIVE PROBLEM SOLVING* (CPS) TERHADAP KEMAMPUAN BERPIKIR KRITIS DAN DISPOSISI MATEMATIS SISWA

Dian Novitasari<sup>1</sup>, Ratu Sarah Fauziah Iskandar<sup>2</sup>

<sup>1</sup>I Universitas Muhammadiyah Tangerang, [d\\_novietasari@yahoo.com](mailto:d_novietasari@yahoo.com)

<sup>2</sup> Universitas Muhammadiyah Tangerang, [sarfauziah@yahoo.com](mailto:sarfauziah@yahoo.com)

**Abstrak.** Penelitian ini untuk mengetahui apakah peningkatan kemampuan berpikir kritis matematis antara siswa yang memperoleh pembelajaran *Creative Problem Solving* (CPS) lebih baik daripada siswa yang memperoleh pembelajaran konvensional ditinjau dari a) keseluruhan b) kemampuan awal matematis siswa (tinggi, sedang, dan rendah). Penelitian ini juga untuk mengetahui apakah peningkatan disposisi matematis antara siswa yang memperoleh pembelajaran *Creative Problem Solving* (CPS) lebih baik daripada siswa yang memperoleh pembelajaran konvensional, serta mengetahui apakah terdapat korelasi antara berpikir kritis matematis dengan disposisi matematis siswa yang memperoleh pembelajaran *Creative Problem Solving*. Penelitian dilakukan dalam bentuk kuasi eksperimen dan pengambilan sampel penelitian dilakukan dengan teknik *purposive sampling*. Desain penelitian menggunakan *Nonequivalent Control Group Design*, dengan subjek sampel 65 siswa kelas VIII pada MTs Negeri 32 Jakarta Selatan. Hal yang diperoleh adalah: (a) peningkatan kemampuan berpikir kritis matematis siswa dengan pendekatan *Creative Problem Solving* lebih baik daripada siswa yang mendapat pembelajaran konvensional, (b) terdapat perbedaan peningkatan kemampuan berpikir kritis matematis siswa dengan pendekatan *Creative Problem Solving* dan siswa yang memperoleh pembelajaran konvensional berdasarkan kategori kemampuan awal matematis (tinggi, sedang, dan rendah), (c) peningkatan disposisi matematis siswa dengan pendekatan *Creative Problem Solving* lebih baik daripada peningkatan disposisi matematis siswa yang memperoleh pembelajaran konvensional, dan (d) terdapat korelasi positif antara kemampuan berpikir kritis dan disposisi matematis pembelajaran menggunakan pendekatan *Creative Problem Solving*.

**Kata Kunci:** *Creative Problem Solving*; Disposisi Matematis; Kemampuan Berpikir Kritis Matematis.

### 1. PENDAHULUAN

Matematika sebagai bagian dari kurikulum pendidikan dasar, memainkan peranan strategis dalam peningkatan kualitas sumber daya manusia Indonesia. Kemampuan berpikir matematis khususnya berpikir matematis tingkat tinggi sangat diperlukan siswa, terkait dengan kebutuhan siswa untuk memecahkan masalah yang dihadapinya dalam kehidupan sehari-hari. Beberapa keterampilan berpikir yang dapat meningkatkan kecerdasan memproses adalah keterampilan berpikir kritis, keterampilan berpikir kreatif, keterampilan mengorganisir otak, dan kemampuan analisis.

Keterampilan berpikir kritis perlu dikembangkan dalam pembelajaran matematika, sesuai dengan tujuan pendidikan matematika sekolah yang memberi penekanan pada penataan nalar anak serta pembentukan pribadi anak [1].

Materi matematika dan keterampilan berpikir kritis merupakan dua hal yang tidak dapat dipisahkan, karena materi matematika dipahami melalui berpikir kritis, dan berpikir kritis dilatih melalui belajar matematika. Namun kenyataannya, pelaksanaan pembelajaran matematika di sekolah cenderung kurang memperhatikan keterampilan berpikir kritis.

Pembelajaran matematika tidak hanya dimaksudkan untuk mengembangkan aspek kognitif, melainkan juga aspek afektif, seperti disposisi matematis. Sesuai dengan tujuan pembelajaran matematika di SMP berdasarkan Kurikulum 2006, yaitu “peserta didik memiliki sikap menghargai kegunaan matematika dalam kehidupan, yaitu memiliki rasa ingin tahu, perhatian dan minat dalam mempelajari matematika, serta sikap ulet dan percaya diri dalam pemecahan masalah” [2]. Dalam konteks matematika, disposisi matematis berkaitan

dengan bagaimana siswa memandang dan menyelesaikan masalah; apakah percaya diri, tekun, berminat, dan berpikir terbuka untuk mengeksplorasi berbagai alternatif strategi penyelesaian masalah. Disposisi juga berkaitan dengan kecenderungan siswa untuk merefleksikan pemikiran mereka sendiri [3]

Seorang siswa mungkin saja menunjukkan disposisi matematis tinggi, tetapi tidak memiliki cukup pengetahuan atau kemampuan terkait substansi materi. Meski demikian, bila ada dua siswa yang mempunyai potensi kemampuan sama, tetapi memiliki disposisi berbeda, diyakini akan menunjukkan kemampuan yang berbeda. Siswa yang memiliki disposisi tinggi akan lebih gigih, tekun, dan berminat untuk mengeksplorasi hal-hal baru. Hal ini memungkinkan siswa tersebut memiliki pengetahuan lebih dibandingkan siswa yang tidak menunjukkan perilaku demikian. Pengetahuan inilah yang menyebabkan siswa memiliki kemampuan-kemampuan tertentu. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa disposisi matematis menunjang kemampuan matematis.

Upaya untuk mengembangkan kemampuan berpikir kritis dan disposisi matematis, menuntut penulis untuk menggunakan pembelajaran yang melibatkan seluruh aktivitas mental, sikap dan keterampilan siswa. Salah satu model yang digunakan dalam pembelajaran matematika adalah pendekatan pembelajaran *Creative Problem Solving (CPS)*. *Creative Problem Solving* merupakan pembelajaran yang berpusat pada pengajaran dan keterampilan kreatif pemecahan masalah, yang diikuti dengan penguatan keterampilan [4].

Pembelajaran dengan pendekatan *Creative Problem Solving* berusaha mengaitkan konten mata pelajaran dengan situasi dunia nyata dan memotivasi siswa menghubungkan pengetahuan yang dimiliki dengan kehidupan sehari-hari mereka dan diperkuat dengan peningkatan kreativitas. Ketika dihadapkan dengan situasi masalah, siswa dapat melakukan

keterampilan pemecahan masalah untuk memilih dan mengembangkan tanggapannya. Tidak hanya dengan cara menghafal tanpa dipikirkan, keterampilan memecahkan masalah memperluas proses berpikir. Untuk mewujudkan pembelajaran yang memiliki karakteristik seperti di atas, proses pembelajaran harus menekankan pada: *making meaningful, connection, constructivism, inquiry, critical and creative thinking, learning community*, dan *using authentic assessment*.

Pada umumnya kemampuan siswa di sekolah terbagi atas tiga kelompok, siswa kelompok atas, siswa kelompok sedang, dan siswa kelompok rendah. Galton [5] mengatakan bahwa dari sekelompok siswa yang dipilih secara acak akan selalu dijumpai siswa yang memiliki kemampuan tinggi, sedang, dan rendah, hal ini disebabkan kemampuan siswa menyebar secara distribusi normal. Perbedaan kemampuan siswa ini bukan semata-mata bawaan sejak lahir, tetapi juga dipengaruhi oleh lingkungan [5]. Terbaginya kemampuan siswa berakibat pula pada prestasi yang dicapai. Pada umumnya prestasi yang dicapai akan sesuai dengan peringkat pada kelompok masing-masing. Namun kenyataan di lapangan dapat saja terjadi berbeda. Siswa kelompok rendah bisa saja memiliki prestasi lebih baik dari siswa kelompok tinggi dikarenakan pembelajaran yang diterapkan di sekolah cocok dengan siswa kelompok rendah. Dengan demikian, pemilihan pendekatan pembelajaran harus diarahkan agar dapat mengakomodasi kemampuan siswa yang pada umumnya heterogen.

## 2. KAJIAN TEORI

### 2.1 Berpikir Kritis Matematis

Berpikir kritis adalah menjelaskan apa yang dipikirkan [6]. Belajar untuk berpikir kritis berarti: belajar bagaimana bertanya, kapan bertanya, apa pertanyaannya, bagaimana nalarnya, kapan menggunakan penalaran, dan metode penalaran apa yang dipakai. Seorang siswa dapat dikatakan berpikir kritis bila siswa tersebut mampu

menguji pengalamannya, mengevaluasi pengetahuan, ide-ide, dan mempertimbangkan argument sebelum mendapatkan justifikasi. Agar siswa menjadi pemikir kritis maka harus dikembangkan sikap-sikap keinginan untuk bernalar, ditantang, dan mencari kebenaran.

Berpikir kritis merupakan bagian dari keterampilan atau kemampuan berpikir tingkat tinggi, karena meliputi proses analisis, sintesis dan evaluasi. Keterampilan berpikir merupakan proses mental yang terjadi ketika berpikir. Adapun keterampilan-keterampilan berpikir kritis tak lain adalah merupakan kemampuan-kemampuan pemecahan masalah yang menghasilkan pengetahuan yang dapat dipercayanya.

Ennis [7] menyatakan bahwa ada enam elemen dasar dalam berpikir kritis yang dikenal dengan FRISCO (*Focus, Reason, Inference, Situation, Clarity, Overview*) yaitu:

a. *Focus* (Fokus)

Indikator *focus* yang dimaksudkan adalah siswa mampu menentukan konsep yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan.

b. *Reason* (Alasan)

Indikator *reason* yang dimaksudkan adalah siswa mampu memberikan alasan tentang jawaban yang dikemukakan.

c. *Inference* (menarik kesimpulan)

Indikator *inference* yang dimaksudkan adalah siswa mampu membuat kesimpulan dari informasi yang tersedia dengan cara membuat langkah-langkah dalam penyelesaian.

d. *Situation* (Situasi)

Indikator *situation* yang dimaksudkan adalah siswa mampu menjawab soal sesuai konteks permasalahan, dapat mengungkapkan situasi atau permasalahan dengan menggunakan bahasa matematika dan mampu menjawab soal-soal matematika aplikasi.

e. *Clarity* (Kejelasan)

Indikator *clarity* yang dimaksudkan adalah siswa mampu memberikan

kejelasan lebih lanjut baik definisi atau keterkaitan konsep.

f. *Overview* (Peninjauan)

*Overview* ini dilakukan sebagai bagian dari pengecekan secara keseluruhan. Indikator *overview* yang dimaksudkan adalah siswa mampu mengecek apa yang telah ditemukan, diputuskan, dipertimbangkan, dipelajari dan disimpulkan.

## 2.2 Disposisi Matematis

Disposisi matematis adalah keterkaitan dan apresiasi terhadap matematika yaitu suatu kecenderungan untuk berpikir dan bertindak dengan cara yang positif [8]. Disposisi siswa terhadap matematika terwujud melalui sikap dan tindakan dalam memilih model menyelesaikan tugas. Apakah dilakukan dengan percaya diri, keingintahuan mencari alternatif, tekun, dan tertantang serta kecenderungan siswa merefleksi cara berpikir yang dilakukannya. Refleksi adalah cara berpikir tentang apa yang baru dipelajari atau berpikir ke belakang tentang apa-apa yang sudah dilakukan di masa lalu. Refleksi merupakan respon terhadap kejadian, aktivitas, atau pengetahuan yang baru diterima [9]. Refleksi siswa akan terlihat pada saat siswa berdiskusi, pernyataan langsung tentang materi pelajaran yang diperolehnya pada hari ini, catatan, dan hasil kerjanya.

Disposisi matematis adalah keinginan, kesadaran, dan dedikasi yang kuat pada diri siswa untuk belajar matematika dan melaksanakan berbagai kegiatan matematika [10]. Terdapat hubungan yang kuat antara disposisi matematis dan pembelajaran. Pembelajaran matematika selain untuk meningkatkan kemampuan berpikir matematis atau aspek kognitif siswa, haruslah pula memperhatikan aspek afektif siswa, yaitu disposisi matematis. Pembelajaran matematika di kelas harus dirancang khusus sehingga selain dapat meningkatkan prestasi belajar siswa juga dapat meningkatkan disposisi matematis. Selanjutnya, NCTM [11] menyatakan

bahwa sikap siswa dalam menghadapi matematika dan keyakinannya dapat mempengaruhi prestasi mereka dalam matematika.

Disposisi matematis siswa dikatakan baik jika siswa tersebut menyukai masalah yang merupakan tantangan serta melibatkan dirinya secara langsung dalam menemukan/menyelesaikan masalah. Selain itu siswa merasakan dirinya mengalami proses belajar saat menyelesaikan tantangan tersebut. Dalam prosesnya siswa merasakan munculnya kepercayaan diri, pengharapan dan kesadaran untuk melihat kembali hasil berpikirnya.

Indikator disposisi matematis dalam penelitian ini adalah (1) kepercayaan diri dengan indikator percaya diri terhadap kemampuan/keyakinan; (2) keingintahuan yang meliputi; sering mengajukan pertanyaan, melakukan penyelidikan, antusias/semangat dalam belajar, dan banyak membaca/mencari sumber lain; (3) ketekunan dengan indikator gigih/tekun/perhatian/kesungguhan; (4) fleksibilitas, yang meliputi: kerjasama/berbagi pengetahuan, menghargai pendapat yang berbeda, dan berusaha mencari solusi/strategi lain; (5) reflektif dan rasa senang, yang meliputi: bertindak dan berhubungan dengan matematika dan menyukai /rasa senang terhadap matematika.

### 2.3 Pendekatan *Creative Problem Solving*

*Creative Problem Solving* (CPS) merupakan salah satu pengembangan dari pendekatan pembelajaran *Problem Solving*. CPS adalah suatu pendekatan pembelajaran yang melakukan pemusatan pada pengajaran dan keterampilan pemecahan masalah, yang diikuti dengan penguatan kreativitas. Ketika dihadapkan dengan suatu pertanyaan, siswa dapat melakukan keterampilan memecahkan masalah untuk memilih dan mengembangkan tanggapannya, tidak

hanya dengan cara menghafal tanpa dipikir.

Dalam pembelajaran *Creative Problem Solving* siswa dibimbing agar mampu menentukan kebutuhannya, menganalisis informasi yang diterima, menyeleksi, dan memberi arti pada informasi baru. Berdasarkan klasifikasi Guilford [12] dalam ranah operasi terdapat produksi berpikir divergen, dan dari komponen inilah kreativitas dikembangkan. Proses pemecahan masalah dimulai adanya input yang datang dari lingkungan atau dalam diri pribadi, dan yang mendapatkan perhatian hanyalah yang ada kesesuaian dengan cadangan memori dalam otak. Lalu masuk dalam kognisi baik yang terkait dengan masalah maupun kognisi secara umum. Produksi divergen berusaha mencari beberapa alternatif pemecahan. Setelah menentukan pilihan maka masuklah dalam produksi konvergen yang merupakan output.

Adapun langkah-langkah dalam *Creative Problem Solving*, menurut Kowalik [13] adalah sebagai berikut:

#### a. *Mess-finding*

Tahap pertama merupakan suatu usaha untuk mengidentifikasi suatu situasi.

#### b. *Fact-finding*

Tahap kedua dilakukan dengan mendaftar semua fakta yang diketahui dan berhubungan dengan situasi tersebut untuk menemukan informasi yang tidak diketahui tetapi esensial pada situasi yang sedang diidentifikasi dan dicari.

#### c. *Problem-finding*

Pada tahap menemukan masalah, diupayakan siswa dapat mengidentifikasi semua kemungkinan pernyataan masalah dan kemudian memilih apa yang paling penting atau yang mendasari masalah.

#### d. *Idea-finding*

Pada tahap ini, diupayakan untuk menemukan sejumlah idea dan gagasan yang mungkin dapat digunakan untuk memecahkan masalah.

#### e. *Solution-finding*

Pada tahap penemuan solusi, idea dan gagasan yang telah diperoleh pada tahap idea-finding diseleksi untuk menemukan idea yang paling tepat dalam memecahkan masalah.

f. *Acceptance-finding*

Berusaha untuk memperoleh penerimaan atas solusi masalah, menyusun rencana tindakan, dan mengimplementasikan solusi tersebut.

**3. METODE PENELITIAN**

Penelitian yang dilakukan ini merupakan penelitian kuasi-eksperimen dengan desain penelitian menggunakan desain kelompok kontrol non-ekuivalen dan diambil dua kelas sebagai sampel, yaitu kelas eksperimen dan kelas kontrol. Kelas eksperimen akan menggunakan pendekatan *Creative Problem Solving* dalam proses pembelajarannya, kelas kontrol akan menggunakan pembelajaran konvensional. Populasi dalam penelitian ini adalah seluruh siswa kelas VIII di MTs Negeri 32 Jakarta selatan. Sampel penelitian ditentukan berdasarkan *purposive sampling* yaitu teknik pengambilan sampel berdasarkan pertimbangan tertentu. Sehingga yang menjadi subjek sampelnya adalah dua kelas yang dipilih dari kelas yang telah ada di MTs Negeri 32 Jakarta Selatan.

Instrumen dalam penelitian ini terbagi menjadi dua, yaitu tes dan non tes. Instrumen tes yang digunakan dalam penelitian ini berupa tes berpikir kritis matematis. Sementara itu, instrumen non tes dalam penelitian ini adalah skala disposisi matematis. Tes yang digunakan untuk mengukur kemampuan berpikir kritis matematis siswa berbentuk soal uraian.

Data dalam penelitian ini ada dua jenis, yaitu data kuantitatif dan data kualitatif. Data kuantitatif diperoleh melalui skor berpikir kritis matematis siswa. Skor berpikir kritis matematis dalam bentuk interval, maka dapat langsung dihitung gain ternormalisasinya, uji prasyarat hipotesis dan uji hipotesis.

Sedangkan, data kualitatif yang diperoleh dari hasil skala disposisi matematis siswa dari masing-masing kelas merupakan data ordinal, maka data ordinal dalam penelitian ini perlu dirubah dalam bentuk interval dengan menggunakan *Method of Successive Interval* (MSI). Perhitungan tersebut menggunakan bantuan software *STAT 97* dengan software utama *Microsoft Office Excel 2007*.

Sebelum diberikan pretes, siswa dikelompokkan berdasarkan kategori kemampuan awal matematika (KAM). Pengelompokkan dilakukan bertujuan untuk mengetahui pengetahuan siswa sebelum pembelajaran dilakukan dan digunakan sebagai penempatan siswa berdasarkan kemampuan awal matematisnya. KAM siswa dikelompokkan menjadi tiga kategori yaitu KAM kategori tinggi, sedang dan rendah. Kriteria pengelompokan KAM siswa berdasarkan skor rerata ( $\bar{x}$ ) dan simpangan baku (SB) sebagai berikut.

**Tabel 3.1** Kriteria Pengelompokan Kemampuan Awal Matematika (KAM) [14]

Nilai KAM	Kategori KAM
$KAM \geq \bar{x} + SB$	Tinggi
$\bar{x} - SB \leq KAM < \bar{x} + SB$	Sedang
$KAM < \bar{x} - SB$	Rendah

Selanjutnya setelah diperoleh skor pretes dan postes, untuk mengetahui besar peningkatan kemampuan berpikir kritis matematis dan disposisi matematis siswa setelah mendapat pembelajaran menggunakan *creative problem solving* pada siswa kelas eksperimen dan pembelajaran konvensional pada siswa kelas kontrol dihitung dengan menggunakan rumus gain ternormalisasi yang dikemukakan oleh Meltzer [15], sebagai berikut:

$$Gain\ ternormalisasi\ (g) = \frac{skor\ postes - skor\ pretes}{skor\ maksimal\ ideal - skor\ pretes}$$

Kriteria interpretasi menurut Hake [16] adalah:

**Tabel 3.2** Kriteria Skor *Gain* Ternormalisasi

Skor <i>Gain</i>	Interpretasi
$g > 0,70$	Tinggi
$0,30 < g \leq 0,70$	Sedang
$g \leq 0,3$	Rendah

Setelah data hasil tes berpikir kritis matematis dan disposisi matematis baik pretes maupun postes terkumpul maka akan dilakukan analisis menggunakan bantuan software *SPSS 18 for windows*. Pengolahan data diawali dengan menguji prasyarat statistik yang diperlukan sebagai dasar pengujian hipotesis, yaitu uji normalitas sebaran data dan uji homogenitas variansi untuk tiap kelas. Kemudian ditentukan jenis pengujian hipotesis sesuai dengan permasalahan.

#### 4. HASIL PEMBAHASAN

Pada penelitian ini diketahui bahwa perbedaan rata-rata kemampuan berpikir kritis matematis siswa antara kelas eksperimen dan kelas kontrol menunjukkan bahwa pembelajaran matematika dengan model pembelajaran *Creative Problem Solving (CPS)* lebih baik dari pada pembelajaran dengan metode konvensional yang diterapkan di sekolah tersebut. Setelah dilakukan pembelajaran sebanyak delapan kali pertemuan pada kedua kelompok dengan pendekatan yang berbeda, selanjutnya diberikan postes untuk mengetahui kemampuan berpikir kritis siswa. Kemudian dilakukan analisis terhadap data postes dan data *gain* kedua kelas (kelas eksperimen dan kelas kontrol). Skor postes kemampuan berpikir kritis matematis siswa kelas eksperimen diperoleh rata-rata 26,09 dengan simpangan baku 4,67. Pada kelas kontrol diperoleh skor rata-rata kemampuan berpikir kritis matematis siswa 22,78 dengan simpangan baku 4,22. Dari hasil pengujian rata-rata skor postes kemampuan berpikir kritis matematis siswa kedua kelas (kelas eksperimen dan kelas kontrol) pada taraf signifikan 0,05 dapat disimpulkan bahwa terdapat perbedaan yang signifikan.

Rerata *gain* ternormalisasi disposisi matematis siswa yang pembelajarannya menggunakan model pembelajaran *creative problem solving* lebih tinggi dari rerata *gain* ternormalisasi disposisi matematis siswa yang pembelajarannya menggunakan model pembelajaran konvensional. Hal ini berarti bahwa peningkatan disposisi matematis siswa yang pembelajarannya menggunakan model pembelajaran *creative problem solving* lebih baik daripada peningkatan disposisi matematis siswa yang pembelajarannya menggunakan model pembelajaran konvensional. Walaupun demikian, peningkatan pada masing-masing kelas, masuk kategori peningkatan yang rendah.

Untuk mengetahui adanya hubungan antara kemampuan berpikir kritis matematis dan disposisi matematis siswa yang menggunakan pembelajaran *creative problem solving* dilakukan uji korelasi antara *gain* ternormalisasi kemampuan berpikir kritis dan skala disposisi matematis. Dengan kriteria pengujian, jika nilai probabilitas ( $\text{sig.} > \alpha = 0,01$ ) maka  $H_0$  diterima, sedangkan jika sebaliknya maka  $H_1$  ditolak. Hasil perhitungan uji korelasi *gain* ternormalisasi terlihat bahwa nilai  $\text{sig.} = 0,000 < 0,01$ , sehingga  $H_0$  ditolak dengan kata lain  $H_0$  diterima, sehingga dapat disimpulkan bahwa terdapat hubungan yang signifikan antara kemampuan berpikir kritis dengan disposisi matematis. Besarnya koefisien korelasi antara kemampuan berpikir kritis dengan disposisi matematis 0,639 termasuk dalam kategori korelasi cukup.

Berdasarkan analisis data hasil penelitian yang telah disajikan, berikut ini akan diuraikan pembahasan hasil penelitian disertai beberapa temuan selama melaksanakan penelitian. Hasil pengamatan sebelum dilakukan pembelajaran dengan model pembelajaran *Creative Problem Solving (CPS)*, kegiatan pembelajaran berpusat pada guru (*teacher centered*). Siswa hanya datang, duduk, dengar, catat dan hafal di kelas sehingga

mereka kurang diberi kesempatan untuk mengembangkan ide-ide dalam pikiran mereka guna menyelesaikan soal yang ada, akibatnya proses berpikir kritis matematis mereka rendah. Sebagai bukti ketika siswa diberi soal yang berbeda dari soal-soal yang pernah diberikan oleh guru, mereka mengalami kesulitan untuk menyelesaikannya. Hal ini dikarenakan mereka tidak memahami soal akan tetapi mereka hanya terbiasa menghafal soal saja. Selain itu, ketika siswa diminta membuat model matematika dari soal cerita kebanyakan dari mereka tidak mengerti dan ketika diminta menjelaskan hasil pekerjaannya banyak siswa yang masih kebingungan. Sehingga pada akhirnya hasil belajar mereka rendah. Selain itu, pembelajarannya juga monoton dan tidak mengaktifkan siswa. Peneliti menemukan ada siswa yang tidak bersemangat mengerjakan latihan soal yang diberikan oleh guru. Hal ini disebabkan karena siswa tidak mengerti materi yang disampaikan oleh guru. Bukti lain dari ketidaksemangatan dan ketidakmengertian siswa adalah ketika siswa mengalami kesulitan, mereka lebih memilih untuk ngobrol dengan temannya dari pada bertanya kepada guru.

Model pembelajaran *Creative Problem Solving (CPS)* dalam penelitian ini terdiri dari lima tahapan pembelajaran yang diadaptasi dari pendapat para ahli, yaitu: menemukan fakta, menemukan masalah, menemukan gagasan, menemukan jawaban, dan menemukan penerimaan. Pada proses pembelajarannya siswa diberikan Lembar Kerja Siswa (LKS) yang berisi tahapan-tahapan tersebut. Tahapan pertama dalam pembelajaran model CPS yaitu menemukan fakta. Siswa diberikan suatu ilustrasi atau masalah diawal, kemudian siswa diminta untuk menuliskan informasi apa saja yang terdapat dalam ilustrasi tersebut. Tahapan ini melatih siswa untuk dapat mengungkapkan situasi atau permasalahan yang terdapat dalam ilustrasi sehingga dapat menyelesaikan masalah tersebut sesuai dengan konteks

permasalahan. Dalam tahapan ini indikator berpikir kritis yang dikembangkan yaitu *situation*.

Tahapan yang kedua yaitu menemukan masalah. Pada tahapan ini siswa dilatih untuk dapat fokus terhadap permasalahan apa yang terdapat dalam ilustrasi sehingga siswa dapat menentukan konsep apa yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan. Pada tahapan ini indikator berpikir kritis yang dikembangkan yaitu *focus*. Tahapan ketiga yaitu menemukan gagasan. Tahapan ini memungkinkan siswa membangun pengetahuannya sendiri dengan memunculkan ide-ide penyelesaian masalah yang terkait dengan konsep-konsep lingkaran. Pada tahapan ini siswa juga dilatih untuk membuat langkah-langkah penyelesaian masalah beserta alasan-alasan yang mendukung, untuk akhirnya ditarik sebuah kesimpulan. Indikator kemampuan berpikir kritis yang dikembangkan dalam tahapan ini yaitu *reason, clarity, dan inference*. Tahapan keempat yaitu menemukan jawaban. Pada tahapan ini diharapkan siswa dapat menemukan solusi terbaik dalam penyelesaian permasalahan. Mempertimbangkan solusi-solusi yang ada, lalu memutuskan solusi mana yang paling efektif. Tahapan terakhir yaitu menemukan penerimaan. Pada tahapan ini siswa diminta melakukan pengecekan terhadap solusi-solusi yang telah dilakukan, kemudian kembali memberikan sebuah kesimpulan. Pada tahapan ini indikator berpikir kritis yang dikembangkan yaitu *overview dan inference*.

Pada awal kegiatan belajar, banyak siswa yang tidak dapat menjawab LKS yang diberikan. Mereka masih kesulitan bagaimana untuk mengisi LKS dan mengikuti instruksi yang ada pada LKS tersebut, hanya beberapa orang siswa yang bisa menjawab. Pada akhirnya setelah dianalisis lebih lanjut bahwa siswa yang bisa mengikuti instruksi pada LKS adalah siswa-siswa yang memiliki kemampuan

lebih baik dari rata-rata teman sekelasnya. Untuk siswa pada level sedang, mereka harus melihat terlebih dahulu bagaimana temannya menjawab baru mereka mengikuti. Sementara untuk siswa level rendah terdapat kesulitan dalam mengikuti apa yang dibuat oleh temannya. Namun pada pertemuan selanjutnya, setiap siswa sudah saling bekerjasama dan berani mengemukakan ide/pendapatnya di dalam kelompoknya, serta setiap kelompok dapat menyajikan hasil pekerjaannya di depan kelas, sehingga proses pembelajaran berjalan dengan efektif. Hal ini sesuai dengan pendapat Lie [17] yang menyatakan bahwa kelompok belajar heterogen memberikan kesempatan untuk saling mengajar (*peer tutoring*) dan saling mendukung,, sehingga diharapkan prestasi siswa pada kelompok bawah dapat meningkat.

Dalam pembelajaran *creative problem solving*, kegiatan diskusi kelompok memungkinkan siswa untuk saling berinteraksi untuk menyampaikan, menanggapi, serta merespon terhadap pendapat maupun pertanyaan yang diajukan temannya dalam kelompok. Hal ini didukung oleh pendapat Sumarmo [18] menyatakan bahwa pembelajaran matematika untuk mendorong kemampuan berpikir tingkat tinggi dapat dilakukan melalui belajar dengan kelompok kecil, menyajikan tugas non rutin dan tugas yang memuat strategi kognitif dan metakognitif peserta didik. Hasil temuan lain selama proses pembelajaran *creative problem solving* adalah siswa mempunyai daya analisis yang tinggi, kritis, dan kreatif dalam menyelesaikan soal-soal yang diberikan. Hal ini terlihat dari banyaknya variasi analisis proses jawaban siswa, serta siswa tidak cepat menyerah setiap menyelesaikan soal-soal yang diberikan, karena adanya saling membantu antar anggota kelompok.

Hasil penelitian ini sejalan dengan penelitian Noortsani [19] yang menemukan bahwa dengan menerapkan pembelajaran *creative problem solving* dengan menyajikan masalah dalam kehidupan

sehari-hari, dapat melatih siswa untuk menggunakan berbagai kemampuan matematis dalam menyelesaikan masalah. Penelitian ini juga menyimpulkan bahwa kemampuan pemecahan masalah dan pemahaman matematis siswa yang memperoleh pembelajaran dengan pendekatan *creative problem solving* lebih baik dibandingkan dengan siswa yang memperoleh pembelajaran konvensional.

Hasil analisis data terhadap disposisi matematis siswa diperoleh kesimpulan bahwa tingkat disposisi matematis siswa yang memperoleh pembelajaran *creative problem solving* lebih baik daripada siswa yang memperoleh pembelajaran dengan cara konvensional. Hal ini sejalan dengan hasil penelitian Mahmudi [20] yang menyatakan bahwa disposisi matematis serta persepsi terhadap kreativitas menyatakan bahwa pada sekolah kategori sedang dan secara keseluruhan siswa yang mengikuti pembelajaran dengan atrategi MHM berbasis masalah memiliki disposisi matematis yang secara signifikan lebih baik daripada siswa yang mengikuti pembelajaran secara konvensional.

Dari hasil analisis data juga diketahui bahwa terdapat kaitan antara kualitas kemampuan berpikir kritis matematis dengan disposisi matematis siswa, walaupun kaitannya termasuk kategori cukup. Hal ini berbeda dengan hasil penelitian yang dilakukan oleh Mahmudi [20] yang menyatakan bahwa tidak terdapat korelasi antara tingkat pemecahan masalah dan disposisi matematis. Pernyataan di atas menunjukkan bahwa: (1) siswa yang kemampuan berpikir kritis matematisnya baik, disposisi matematisnya baik pula; (2) siswa yang kemampuan berpikir kritis matematisnya sedang, disposisi matematisnya sedang pula; (3) siswa yang kemampuan berpikir kritis matematisnya kurang, disposisi matematisnya kurang pula.

## 5. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil analisis, temuan, dan pembahasan yang telah disajikan pada

bab sebelumnya, diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

- 1) Peningkatan kemampuan berpikir kritis siswa yang mendapat pembelajaran dengan pendekatan *creative problem solving* lebih baik daripada siswa yang mendapat pembelajaran konvensional. Kategori peningkatan kemampuan berpikir kritis matematis siswa yang pembelajarannya menggunakan *creative problem solving* dan siswa yang menggunakan pembelajaran konvensional tergolong sedang.
- 2) Terdapat perbedaan peningkatan kemampuan berpikir kritis siswa yang memperoleh pembelajaran dengan pendekatan *creative problem solving* dan siswa yang memperoleh pembelajaran konvensional berdasarkan kategori kemampuan awal matematis (tinggi dan sedang).
- 3) Peningkatan disposisi matematis siswa yang pembelajarannya dengan pendekatan *creative problem solving* lebih baik daripada peningkatan disposisi matematis siswa yang memperoleh pembelajaran konvensional. Kategori peningkatan disposisi matematis siswa yang pembelajarannya menggunakan *creative problem solving* dan siswa yang menggunakan pembelajaran konvensional masih tergolong rendah.
- 4) Terdapat korelasi positif antara kemampuan berpikir kritis dan disposisi matematis pembelajaran menggunakan pendekatan *creative problem solving*. Hal ini berarti, untuk kemampuan berpikir matematis siswa terjelaskan dengan melihat disposisi matematis siswa, begitu pula sebaliknya.

## 6. Daftar Pustaka

- [1] Soedjadi R, "Pendidikan, Penalaran, Konstruktivisme, Kreativitas sajian dalam Pembelajaran Matematika," no. Makalah Tidak Diterbitkan, 1995.
- [2] Depdiknas, "Kurikulum Tingkat

Satuan Pendidikan; Standar Kompetensi Matematika SMP/MTs," Depdiknas, Jakarta, 2006.

- [3] NCTM. (1991) Evaluation of Teaching: Standard 6: Promoting Mathematical Disposition. [Online]. <http://www.nctm.org/focalpoints>
- [4] Pepkin. (2000) Creative Problem Solving in Math. [Online]. <http://m2s-conf.uh.edu/honors/honors-and-the-schools/houston-teachers-institute/curriculum-units/pdfs/2000/articulating-the-creative-experience/pepkin-00-creativity.pdf>
- [5] E. T Ruseffendi, *Dasar-dasar Penelitian Pendidikan dan Bidang Non-Eksakta Lainnya*. Bandung: Tarsito, 2005.
- [6] A Fisher, *Critical Thinking An Introduction*. New York: Cambridge University Press, 1995.
- [7] R. H Ennis, *Critical Thinking*. United States of America: Prentice-Hall Inc, 1996.
- [8] NCTM, *Curriculum and Evaluation Standard for School Mathematics*. Virginia: The NCTM Inc, 1989.
- [9] Trianto, *Model-Model Pembelajaran Inovatif Berorientasi Konstruktivisme*. Jakarta: Prestasi Pustaka, 2007.
- [10] U Sumarmo, "Berpikir dan Disposisi Matematik: Apa, Mengapa, dan Bagaimana Dikembangkan Pada Peserta Didik," FMIPA UPI, Bandung, 2010.
- [11] NCTM, *Principles and Standards for School Mathematics*. Virginia: The NCTM inc, 2000.
- [12] B Suryosubroto, *Proses Belajar Mengajar di Sekolah*. Jakarta: PT. Rineka Cipta, 2009.
- [13] W. E, dan Thomas F Kowalik Mitchel, *Creative Problem Solving*.: Genigraphics Inc, 1999.
- [14] Somakim, "Peningkatan Kemampuan Berpikir Kritis dan Self-Efficacy

- Matematik Siswa Sekolah Menengah Pertama dengan Penggunaan Pendekatan Matematika Realistik," UPI, 2010.
- [15] D. E Meltzer. (2002) Addendum to : "The Relationship between Mathematics Preparation and Conceptual Learning Gain in Physics: A Possible "Hidden Variable" in Diagnostics Pretest Score". [Online]. [http://www.physics.iastate.edued\\_gain](http://www.physics.iastate.edued_gain)
- [16] R Hake. (1999) Analizing Change/Gain Scores. [Online]. <http://www.physics.indiana.edu>
- [17] A Lie, *Cooperative Learning, Mempraktekkan Cooperative Learning di Ruang-ruang Kelas*. Jakarta: Gramedia, 2002.
- [18] U Sumarmo, "Berpikir Matematik Tingkat Tinggi," 2006.
- [19] I Noortsani, "Peningkatan Kemampuan Pemahaman dan Pemecahan Masalah Matematis Siswa SMA di Kabupaten Cianjur Melalui Pendekatan Creative Problem Solving." UPI, 2013.
- [20] A. Mahmudi, "Pengaruh Pembelajaran dengan Strategi MHM Berbasis Masalah terhadap Kemampuan Berpikir Kreatif, Kemampuan Pemecahan Masalah, dan Disposisi Matematis, serta Persepsi Terhadap Kreativitas," UPI, 2010.
-

## PENGEMBANGAN BAHAN AJAR SEGIEMPAT BERBASIS PENDEKATAN SAINTIFIK PADA MATAKULIAH KAPITA SELEKTA MATEMATIKA SMP

Usep Kosasih<sup>1</sup>, Asep Darodjat<sup>2</sup>, Sidiq Aulia Rahman<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Uniaversitas Islam Nusantara, uscos\_pradana@yahoo.com

<sup>2</sup>Universitas Islam Nusantara, darodjatasep@yahoo.com

<sup>3</sup>Universitas Islam Nusantara, diqaulia@gmail.com

**Abstrak.** Kapita Selekt Matematika SMP membekali mahasiswa baik dari segi konten maupun pedagogisnya. Pengetahuan konten membekali mahaiswa sebagai pendidik professional yang ahli dalam matematika. Sedangkan pengetahuan pedagogis membekali mahasiswa menjadi pendidik yang mahir mengelola pembelajaran. Pola pembelajaran yang terus berkembang menuntut kemampuan kritis dan kreatif mahasiswa, tertama dalam mengelola pembelajaran. Pembelajaran saintifik merupakan salah satu pegetahuan yang harus dikuasi oleh mahasiswa. Sedangkan matakuliah kapita selekta matematika SMP merupakan salah satu wahana yang tepat untuk membekali sekaligus menguji kemampuan mereka dalam pengelolaan pembelajaran. Meskipun demikian kebutuhan memenuhi hal tersebut masih menemui berbagai kendala. Salah satunya adalah tidak tersedianya bahan ajar yang mampu mengaping mahasiswa untuk memiliki kemampuan sebagai pengajar matematika dengan pembelajaran saintifik. Tulisan ini merupakan ikhtisar proses pengembangan bahan ajar kapita selekta matematika SMP berbasis saintifk. Pengembangan bahan ajar didasarkan pada beberapa referensi termasuk hasil penelitian relevan dan pengamatan kelas. Pengamatan dilakukan terhadap praktik pembelajaran selama dua tahun. Informasi yang diperoleh diolah secara kualitiatif melalui teknik analisis coding dan constant-comparative, serta melibatkan validasi pakar. Penelitian menyimpulkan tahapan bahan ajar dengan melibatkan aspek berikut: 1) keterkaitan kompetensi dengan konten yang dipelajari; 2) apersepsi, untuk memastikan kecukupan prasyarat kognitif; 3) aktivitas belajar saintifik; 4) uji kompetensi; 5) refleksi; dan 6) tugas proyek.

**Kata Kunci:** Kapita Selekt Matematika SMP, Pendekatan Saintifik

### 1. PENDAHULUAN

Salah satu standar luaran sarjana di Indonesia adalah kemampuan sebagai analis. Lulusan sarjana harus bisa bekerja sebagai analis pada bidang proferionalnya. Khusus sarjana pendidikan matematika, lulusan harus mampu menganalisis proses pembelajaran yang dikelolanya. Indonesia menekankan pembelajaran melalui proses saintifik yang harus dapat dokelola dengan baik oleh guru-guru lulusan pendidikan matematika. Akibatnya guru harus memiliki kesiapan dalam mengimplementasikan kebijakan pemerintah berkaitan dengan pembelajaran saintifik tersebut. Kemampuan analisis yang baik akan

sangat membantu dalam persiapan pembelajaran berbasis saintifik.

Pada sisi lain program studi pendidikan sebagai lembaga penghasil guru harus mampu membekali lulusan sesuai dengan kebutuhan sekolah dalam pengelolaan pembelajaran. Lulusan harus memiliki kemampuan yang melebihi ekspektasi yang dibutuhkan sekolah. Pengelolaan pembelajaran berbasis saintifik harus sudah benar-benar dimiliki oleh lulusan. Oleh karena itu, pegelolaan pembelajaran yang baik harus menjadi *learning outcame* program studi. Demikian pula dalam pengelolaan pembelajaran berbasis saintifik.

Desain learning outcome sinergi dengan desain kurikulum suatu program studi. Kurikulum menjadi landasan formal arah pengelolaan pembelajaran. Munthe (2011) memrikan gambaran bahwa desain pembelajaran harus sesuai dengan tujuan institusi. Berkaitan dengan kebutuhan *learning outcome* dalam pengelolaan pembelajaran, maka kurikulum perlu memfasilitasi belajar mahasiswa dalam mengimplementasikan pola pembelajaran termasuk saintifik.

Sementara itu, implementasi kurikulum membutuhkan perangkat yang mendukung ketercapaian kompetensi lulusan. Bahan ajar merupakan salah satu perangkat kurikulum yang membantu mengejawantahkan konsep ke dalam praktik pembelajaran. Oleh karena itu, bahan ajar perlu didesain sebaik mungkin agar pesan kurikulum dapat discerna dengan baik oleh mahasiswa sebagai pemakai.

Kapita selekta matematika merupakan matakuliah yang membekali mahasiswa dalam pengelolaan pembelajaran baik dari segi konten maupun pedagoginya. Melalui matakuliah ini, pesan pengelolaan pembelajaran pada desain kurikulum dapat disampaikan. Berbagai pesan pola pengelolaan pembelajaran seharusnya dapat disampaikan dengan baik melalui matakuliah ini. Pendekatan, model, metode pembelajaran seharusnya dapat diintegrasikan pada matakuliah ini.

Hasil kajian penelitian yang dilakukan oleh Paul Swam (2007) mengungkapkan bahwa menggunakan teknik tertentu pada waktu yang tepat merupakan langkah yang tepat untuk memperbaiki pembelajaran. Suatu metode yang

baik dapat diterapkan dengan dukungan kesiapan mahasiswa dan pendukung yang baik seperti bahan ajar yang sesuai. Terdapat empat aspek penting dalam mendesain pembelajaran, yakni desain materi, desain kompetensi, desain strategi, dan desain evaluasi (Munthe, 2011)

Sayangnya bahan ajar yang ada saat ini dipandang belum memberikan pembekalan yang cukup pada mahasiswa dalam mengimplementasikan pembelajaran berbasis saintifik. Oleh karena itu, dibutuhkan kajian yang mendalam tentang pola bahan ajar yang mampu membekali mahasiswa dalam mengimplementasikan pembelajaran saintifik. Apabila ini terpenuhi, maka mahasiswa, guru, dan praktisi lainnya dapat menggunakannya sebagai referensi baik sebagai bahan perkuliahan maupun sebagai sumber belajar.

Tulisan ini merupakan bagian dari pengembangan bahan ajar yang sesuai dengan pola pembelajaran saintifik. Karena cakupan penelitian yang luas, tulisan ini hanya menyajikan bagian dari hasil penelitian. Pada tulisan ini yang disajikan adalah pengembangan bahan ajar segiempat berbasis saintifik dari keseluruhan materi kapita selekta matematika SMP.

## **2. RUMUSAN MASALAH**

Fokus masalah yang dikaji dalam tulisan ini adalah “Bagaimana pola bahan ajar segiempat berbasis pendekatan saintifik pada matakuliah kapita selekta matematika SMP?”

## **3. METODE**

Penelitian ini dilakukan dengan pendekatan kualitatif. Bahan ajar dikembangkan dengan metode-metode pada pendekatan kualitatif.

Tujuannya adalah memperoleh bahan ajar segiempat berbasis saintifik yang komprehensif dan akurat.

Penelitian melibatkan grup pengembang yang terdiri dari tiga orang. Peneliti merancang bahan ajar kemudian dianalisis oleh masing-masing pengembang secara terpisah. Setelah melakukan analisis secara terpisah, tim pengembang melakukan diskusi bersama dengan tujuan membandingkan hasil analisis masing-masing. Kemudian bahan ajar direvisi berdasarkan hasil pembahasan tim pengembang. Bahan ajar yang telah direvisi dianalisis oleh masing-masing pengembang seperti bahan ajar sebelumnya. Tim pengembang kembali membandingkan hasil analisisnya pada diskusi bersama dengan peneliti. Bahan ajar kembali dirancang sesuai dengan hasil temuan diskusi terakhir. Bahan ajar selanjutnya disepakati menjadi rancangan bahan ajar untuk diajukan pada percobaan lapangan.

Tim pengembang bekerja masing-masing bertujuan untuk menjaga objektivitas. Dengan cara ini diharapkan muncul temuan yang beragam dari tim pengembang. Tim pengembang bekerja dengan membandingkan bahan ajar yang telah dirancang dengan karakteristik pendekatan saintifik. Analisis perbandingan antara bahan ajar dengan karakteristik pendekatan saintifik ini dilakukan dengan berkali-kali dan oleh beberapa orang sekaligus. Cara demikian biasanya disebut dengan *constant-comparative analysis*, atau analisis perbandingan kosntan. Analisis berhenti sampai tim pengembang tidak lagi menemukan hal yang urgen untuk diperbaiki. Biasanya cara ini disebut dengan kejenuhan, atau analisis

berhenti jika kejenuhan telah terjadi. Artinya sudah tidak adalagi urgensi perubahan yang perlu dilakukan.

#### 4. PEMBAHASAN

##### *Learning trajectory*

Bagian dasar yang penting ditanamkan pada mahasiswa salah satunya adalah prinsip belajar sepanjang hayat. Mahasiswa sebagai individu yang mandiri harus memiliki kesadaran bahwa belajar tidak akan pernah berakhir. Belajar tidak dibatasi oleh masa perkuliahan saja. Belajar akan terus berlangsung sepanjang potensi dirinya memungkinkan. Oleh karena itu, belajar harus menjadi pola hidup mahasiswa.

Sebagai bekal pola hidup, sebaiknya belajar memiliki pola yang sesuai dengan karakteristik mahasiswa. Artinya belajar memerlukan desain praktis. Desain ini mendukung keakuratan pemahaman konten yang dipelajari. Akan sangat baik jika mahasiswa memiliki pola sendiri dalam belajarnya. Oleh karena itu pola belajar akan sangat beragam tergantung pada kondisi mahasiswa. *“learners and teachers do not always stress or discern the same details”* (Mason & Wilder, 2005: 16) Meskipun demikian akan sangat baik pula jika dosen memiliki desain yang baik untuk diajukan pada mahasiswa. Setidaknya bagi mahasiswa yang belum memiliki pola belajar, pola yang diajukan dosen dapat menjadi acuan belajarnya.

Khusus pada konten tertentu, pola belajar perlu diperhatikan pula karakteristik terkait konten tersebut. Beberapa hal yang perlu diperhatikan antara lain: keterkaitan dengan kurikulum, keterkaitan dengan

institusi, dan keterkaitan dengan muatan konten itu sendiri. Demikian pula dengan kesiapan mahasiswa. Kondisi mahasiswa dalam belajar matematika berbeda dengan siswa pada tingkatan sekolah sebelumnya. Seperti yang diungkapkan Appleby dan Cox (2002) bahwa Mahasiswa dianggap memiliki kesiapan yang lebih baik dari segi mental maupun kemampuan.

Alur lintasan belajar mahasiswa tingkat sarjana dilandasi oleh standar kompetensi yang ditetapkan Kurikulum Berbasis Kompetensi (KBK) berdasarkan Kerangka Kualifikasi Nasional Indonesia (KKNI). Berdasarkan KBK-KKNI, lulusan sarjana memiliki kualifikasi kerja sebagai analis. Oleh karena itu, pembelajaran yang mengeksplorasi kegiatan analisis akan sangat membantu pencapaian kualifikasi tersebut. Kemampuan mahasiswa sebagai analis akan berkembang seiring penyelesaian tugas akhir mereka. Akan tetapi, pembelajaran membekali kemampuan operasional mahasiswa dalam melakukan analisis.

Landasan lain dalam merancang *learning trajectory* adalah metode belajar yang digunakan. Pada tingkat universitas, mahasiswa seharusnya memiliki pola belajar sendiri. Akan tetapi dosen dapat memberi bimbingan pola belajar melalui pembelajaran. Pola atau metode belajar ini diharapkan salah satu hasil belajar yang menjadi prinsip dalam hidupnya. Metode belajar ini perlu diuraikan menjadi bentuk yang lebih operasional. Penjelasan langkah demi langkah sampai menggambarkan bagian materi yang dikuasai oleh mahasiswa. Langkah-langkah ini dimaksudkan sebagai *learning trajectory*.

Beberapa hal yang perlu diperhatikan dalam merancang *learning trajectory* berkenaan dengan prinsip pembelajaran pada tingkat universitas antara lain:

1. Menanamkan prinsip belajar sepanjang hayat (terus-menerus)
2. Pembelajaran harus memiliki pola atau metode. Mahasiswa harus memiliki pola belajar yang sesuai dengan dirinya sendiri. Jika tidak, mahasiswa dapat mengadopsi pola belajar yang diberikan dosen;
3. Pembelajaran harus interaktif multi arah dan berbasis pada banyak referensi yang relevan;
4. Mahasiswa harus belajar dari percobaan dan praktik;
5. Mendukung ketercapaian kompetensi;
6. Mahasiswa harus belajar secara *over time* periode;
7. Pembelajaran pada tingkat universitas mengeksplorasi kemampuan berpikir tingkat tinggi.

Selain tujuh poin tersebut, khusus dalam pembelajaran pembelajaran segiempat, perlu memperhatikan lima tahapan pemahaman geometri dari Vann Hiele. Akan tetapi untuk mahasiswa yang belajar pada pendidikan matematika, dapat dianggap sudah mencapai tingkatan paling akhir (lima). Ini berarti pembelajaran tidak lagi mengandalkan konteks-konteks yang kongkrit, melainkan diupayakan melakukan eksplorasi secara abstrak. Ini merupakan salah satu tujuan pembelajaran geometri (French, 2004)

Asumsi bahwa tingkatan mahasiswa harus sudah memiliki kelima tingkatan pemahaman pada geometri menurut Van Hiele, maka pembelajaran geometri pada tingkat

universitas tidak harus dimulai pada tingkatan awal. Bahkan memungkinkan implementasi pembelajaran langsung pada tingkatan paling tinggi. Hal ini dapat dilakukan dengan tujuan untuk mengkonfirmasi apakah tingkatan tersebut sudah mampu dikuasai atau belum. Jika sudah dikuasai, maka pembelajaran tidak harus kembali ke tingkatan di bawahnya. Sedangkan jika pada kenyataannya mahasiswa belum mencapai tingkatan tersebut, maka pembelajaran dapat menelusuri tingkatan dibawahnya sebagai konfirmasi tingkatan yang sudah dikuasai.

Mengawali pembelajaran dari bagian yang konkrit dapat menjadi menunduran berpikir matematis mahasiswa. Dari segi usia, mahasiswa dianggap sudah mampu berpikir secara abstrak. Seharusnya mereka sudah siap untuk mengikuti proses pembelajaran yang mendukung kemampuan penalarannya secara abstrak. Wahyudin (2008: 14) “proses-proses penalaran matematis adalah pusat yang diharapkan secara universal”.

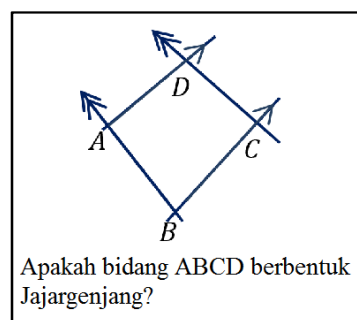
*Hasil observasi/ analisis learning trajectory*

Lintasan belajar permulaan dituangkan pada bahan ajar dengan menekankan strategi deduktif. Mahasiswa diminta menjelaskan konsep segiempat secara teoritik, kemudian membahasnya seiring dengan urutan jenis segiempat seperti pada bahan ajar umumnya. Selanjutnya mahasiswa mempelajari karakteristik masing-masing jenis segiempat, keliling, dan luas daerah.

Meskipun tingkat pemahaman geometri mahasiswa seharusnya sudah mencapai tingkat 5 berdasarkan Van Hiele. Pada

kenyataannya, hanya sedikit mahasiswa yang mampu mencapai tingkatan tersebut. Kebanyakan mahasiswa belum bisa menjawab secara tepat hubungan antar konsep pada segiempat. Hal ini terlihat dari masih banyak mahasiswa yang salah dalam menjawab diagram venn segiempat.

Beberapa catatan penting yang ditemukan diantaranya: 1) banyak mahasiswa yang salah menggambarkan hubungan jenis-jenis segiempat menggunakan diagram Venn; 2) terdapat mahasiswa yang tidak dapat menjawab konsep luas segiempat yang melibatkan luas segitiga; dan 3) terdapat mahasiswa yang tidak memahami hubungan antara simbol-simbol dengan konsep segiempat.



**Gambar 4.1** Contoh soal

Banyak mahasiswa yang kesulitan dalam menjawab soal pilihan seperti “Adakah layang-layang yang berbentuk persegi panjang?” Seluruh mahasiswa yang menjawab memberukan jawaban “tidak” sisanya terlihat ragu. Ketika ditanya alasan jawabannya, kebanyakan menjawab tidak mungkin ada layang-layang yang berbentuk persegi panjang. Ini berarti mahasiswa belum memahami konsep segiempat secara holistik (menyeluruh).

Kedua kasus di atas menunjukkan bahwa pembelajaran baru membekali pengetahuan jenis-jenis segiempat secara parsial. Sedangkan hubungan antara jenis segiempatnya belum dipahami oleh mahasiswa. Hal ini menjadi bagian dari diskusi dalam penelitian ini. Alur belajar yang dituangkan pada bahan ajar sebelumnya harus dievaluasi. Terlihat bahwa mahasiswa tidak memiliki pengetahuan yang kuat dalam merepresentasikan geometri. Padahal representasi merupakan salah satu indikator pemahaman konsep. "*Representation of geometrical objects is a central problem in geometry*" (Mesquita, 1998: 184)

Kendala lain adalah pemahaman mahasiswa tentang luas daerah yang terlihat mekanistik. Untuk jenis soal yang biasa (tidak melibatkan konsep lain), hampir semua mahasiswa berhasil menjawabnya. Akan tetapi, banyak mahasiswa yang tidak bisa menyelesaikan soal luas daerah yang melibatkan aturan sudut pada segitiga. Ini menimbulkan dugaan bahwa mahasiswa masih berpikir mekanistik. Mereka belajar prosedur yang diajarkan pada bahan ajar.

Peneliti membuat desain bahan ajar segiempat berdasarkan temuan hasil observasi.

Peneliti membangun rancangan bahan ajar yang kemudian dianalisis bersama-sama tim pengembang secara berulang sampai memenuhi kriteria yang diharapkan. Rancangan bahan ajar didasarkan pula pada hasil kajian tentang desain bahan ajar saintifik. Sebelumnya, peneliti telah melakukan kajian dan menetapkan desain bahan ajar yang sesuai dengan pembelajaran saintifik.

Bahan ajar dengan pendekatan saintifik yang telah dikembangkan

oleh peneliti sebelumnya memiliki desain sebagai berikut: 1) memberikan informasi kompetensi yang akan dicapai; 2) memberikan apersepsi; 3) memberikan aktivitas belajar berdasarkan metode saintifik; 4) memberikan uji kompetensi; 5) memberikan kegiatan refleksi; dan 6) memberikan tugas proyek.

Lintasan belajar pada pokok bahasan segiempat untuk matakuliah kapita selekta matematika SMP dijelaskan sebagai berikut:

- a. Kompetensi yang akan dicapai  
Matakuliah kapita selekta matematika SMP diberikan untuk membekali mahasiswa dalam mengajarkan konsep-konsep terpilih. Segiempat merupakan salah satu pokok bahasan pada matakuliah ini. Penyajian pokok bahasan ini untuk membekali pemahaman mahasiswa terhadap segiempat dan ukuran-ukurannya. Selain itu, mahasiswa juga perlu memahami topik-topik lain yang terkait dengan segiempat.
- b. Apersepsi  
Pada bagian ini disajikan bahan diskusi tentang hubungan antar jenis segiempat dalam bentuk diagram venn. Pemberian bahan ini dimaksudkan agar mahasiswa memiliki kesadaran tentang pemahaman yang tepat terhadap pengertian segiempat. Kasus-kasus yang berkembang akan menggiring mahasiswa pada topik pengertian segiempat.
- c. Aktivitas belajar berdasarkan pendekatan saintifik  
Pembelajaran saintifik yang diintegrasikan pada pokok bahasan ini berbentuk 5M. Konsep 5 M ini diajukan oleh pengembang kurikulum 2013 sebagai intisari dari pendekatan saintifik. Lima M yang dimaksud

adalah Mengamati, Mencoba, Menalar, Mengomunikasikan, dan Membangun jejaring. Tidak ada keharusan untuk terurut atau bergantian pada kelima istih tersebut.

Alur pembelajaran meliputi memahami pengertian segiempat, memahami karakteristik segiempat, memahami cara mengukur segiempat, dan memahami keterkaitan antar jenis segiempat. Urutan ini merupakan dianggap paling efektif dalam membangun pemahaman konsep segiempat bagi mahasiswa.

d. Uji kompetensi

Uji kompetensi melibatkan berbagai kemampuan berpikir tingkat tinggi mahasiswa. Kemampuan berpikir kreatif, kemampuan berpikir kritis dan lainnya diuji pada pokok bahasan ini. Uji kompetensi yang penting pada pokok bahasan ini adalah harus mencakup semua konten pada segiempat.

e. Refleksi

Refleksi dilakukan bersama melibatkan teman dalam kelas dan dosen. Tujuannya memperoleh informasi kekurangan dan kesalahan dari proses pembelajaran yang telah diselenggarakan. Bagian ini menjadi sangat baik dilakukan untuk mereduksi kesalahan mekanis yang umum terjadi. Willis (2010) menyetujui bahwa sering terdapat kesalahan yang berasal dari pola pembelajaran sehingga pengetahuan tidak sampai kepada siswa secara baik.

f. Tugas proyek

Dalam pembelajaran saintifik, masalah merupakan media belajar. Proses penyelesaian masalah memandu kegiatan belajar sehingga

mencapai tujuan yang ditetapkan. Harapan dari penyelesaian masalah yang disajikan adalah tumbuhnya kemampuan belajar. Kemampuan itu dapat berupa: 1) pola belajar yang ilmiah; 2) penguasaan konsep (konten); dan 3) kemampuan komunikasi yang baik. Apabila kemampuan ini tertanam dengan baik, maka akan menjadi salah satu skil kehidupan sehari-hari mereka. Oleh karena itu, masalah dapat berperan penting dalam pembelajaran.

Dalam pembelajaran segiempat, masalah dapat disajikan dengan berbagai cara. Penyajian masalah ini harus menjamin aktivitas belajar siswa/mahasiswa. Penyajian masalah yang terlalu kompleks dapat mengalihkan kegiatan pembelajaran, atau memperlambat proses pemahaman. Beberapa hal penting menyajikan masalah pada pembelajaran segiempat antara lain: 1) tidak terlalu jauh dari konten segiempat; 2) tidak mengubah makna abstrak segiempat; dan 3) menjamin ketercapaian tujuan pembelajaran.

Banyak kasus penyajian masalah dalam pembelajaran yang tidak mendukung proses belajar matematis siswa. beberapa diantaranya berupa: 1) memaksakan konteks yang kurang tepat menjadi konten pembelajaran; 2) mengabaikan prasyarat metematisasi; 3) tidak proporsional antara penyelesaian masalah dengan skil matematis; dan 4) penyelesaian masalah membutuhkan waktu yang lama. Poin-poin tersebut dapat menjadi penghambat pembelajaran.

Penyajian masalah atau desain masalah yang tidak efektif dapat berakibat terhadap efisiensi proses kerja berpikir siswa/mahasiswa. Masalah yang kurang baik dapat menjemukan, tidak menarik, atau

tidak matematis. Potensi yang mungkin terjadi karena kesalahan desain masalah dapat berupa: 1) siswa/mahasiswa merasa letih; 2) matematika sulit dikerjakan; 3) konten matematis hilang; dan 4) mekanistik jika dikerjakan dalam satu pola.

Untuk meminimalisir kekurangan dari ketidakakuratan desain masalah, dalam mendesain bahan ajar segiempat pertimbangan aspek berikut: 1) masalah merupakan konten segiempat; 2) proses penyelesaian dengan panduan yang fleksibel; 3) memfasilitasi interaksi multi arah; 4) melibatkan tes berpikir tingkat tinggi; dan 5) melibatkan refleksi, repersonalisasi, tugas proyek.

## 5. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Appleby, J. and Cox, W. (2005). *Effective Learning & Teaching In Mathematics & Its Applications: The transition to higher education*. London: Kogan Page. Edited by Peter Kahn & Joseph Kyle
- [2] French, D. (2004). *Teaching and Learning Geometry*. New York: Continuum
- [3] Mesquita, A. (1998). On Conceptual Obstacles Linked with External Representation in Geometry. *Journal of Mathematical Behavior*, 183-195.
- [4] Munthe, B. (2011). *Desain Pembelajaran*. Yogyakarta: Insan Madani
- [5] Swam, P. (2007). *I Hate Mathematics*. Edith Cowan University. Tersedia di: <http://www.mav.vic.edu.au/files/conferences/2004/Swan.pdf> di unduh 12 Agustus 2014.
- [6] Wahyudin. (2008). *Pembelajaran dan Model-Model Pembelajaran (Pelengkap untuk Meningkatkan Kompetensi Pedagogis Para Guru dan Calon-guru Profesional)*. Bandung: tidak diterbitkan.
- [7] Wilder, S.J., Mason, J. (2005). *Developing Thinking in Geometry*. London: Sage Publication
- [8] Willis, J.M.D. (2010). *Learning to Love Math Teaching Strategy That Change Student Attitudes and Get Result*. Virginia: ASCD Publication.
-

## EKSPERIMENTASI MODEL PEMBELAJARAN *INQUIRY LEARNING* DAN *DISCOVERY LEARNING* TERHADAP KEMAMPUAN KOMUNIKASI MATEMATIS PADA MATERI BANGUN RUANG SISI DATAR DITINJAU DARI KECERDASAN SPASIAL SISWA SMP NEGERI SE-KOTA SURAKARTA TAHUN PELAJARAN 2014 / 2015

Abdul Aziz<sup>1</sup>, Budiyo<sup>2</sup>, Sri Subanti<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup> Prodi Magister Pendidikan Matematika, FKIP Universitas Sebelas Maret Surakarta

**Abstract.** The purpose of this research was to know the effect of the learning models on the mathematics communication ability viewed from the spatial quotient. The learning models compared were Inquiry learning, Discovery learning and Classical model. The type of this study was a quasi-experimental study with a 3 x 3 factorial design. The study population was all grade VIII students of Junior High School in Solo city. Sample was collected by stratified cluster random sampling and consisted of 260 students. The instruments of the research include mathematics communication ability test and spatial intelligence test. The results of this research could be concluded as follows , (1) Inquiry Learning and Discovery Learning have better mathematics communication ability aspects than the Classical learning, besides that, Inquiry Learning and Discovery Learning have the same mathematics communication ability; (2) The students with high spatial intelligence have the same mathematics communication ability as middle spatial intelligence. In addition, students who have high and middle spatial intelligence have better mathematics communication ability than students who have low spatial intelligence.; (3) In each learning model, the students with high and middle spatial intelligence have better mathematics communication ability than students who have low spatial intelligence, and the students with high and middle spatial intelligence have the same mathematics communication ability; (4) In each of the spatial intelligence, the cooperative learning model of Inquiry Learning and Discovery Learning give a better mathematics communication ability than the Classical model, and the cooperative learning model of Inquiry Learning and Discovery Learning give the same mathematics communication ability.

**Keywords:** Inquiry Learning, Discovery Learning, Spatial Quotient, Mathematics Communication Ability.

### 1. PENDAHULUAN

PISA (*Program for International Student Assessment*) yang dirilis pada awal Desember 2013 menunjukkan kemampuan matematika siswa-siswi di Indonesia menduduki peringkat 63 dari 65 negara. TIMSS (*Third In International Mathematics Science and Studies*) pada tahun 2011 menyatakan peringkat anak-anak Indonesia berada di posisi 38 dari 42 negara. Berdasarkan data Badan Standar Nasional Pendidikan (PAMER 2014), penguasaan materi soal UN Matematika tingkat SMP/MTS Tahun Pelajaran 2013/2014 untuk Propinsi Jawa Tengah rata-rata masih di bawah 60%.

Pembelajaran matematika tidak terlepas dengan kemampuan komunikasi matematis. Kemampuan komunikasi matematis peserta didik memiliki peran yang cukup penting dalam memahami apa

yang telah mereka ketahui dan pelajari yang dapat ditunjukkan melalui lisan dan tulisan. Indikator kemampuan komunikasi matematis yang dipakai dalam penelitian penulis yaitu menyajikan informasi dalam simbol, gambar dan bahasa matematika, memunculkan ide-ide, membuat konjektur, menyusun argumen, merumuskan definisi dan generalisasi serta menguraikan permasalahan secara terstruktur.

Harmony dan Theis (2012) dalam penelitiannya menyimpulkan terdapat interaksi antara kecerdasan spasial terhadap hasil belajar matematika siswa kelas VII. Siti Marliah Tambunan (2006) menyatakan bahwa terdapat hubungan antara kecerdasan spasial total, topologi dan euclidis dengan prestasi belajar matematika, tetapi tidak terdapat hubungan antara kecerdasan spasial proyektif dengan prestasi belajar matematika. Hoong dan

Khoh (2012) menjelaskan bahwa tingkat kecerdasan spasial memberikan efek yang signifikan terhadap prestasi belajar matematika.

## 2. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Tahapan berikutnya disajikan rangkuman uji komparasi ganda antar baris dengan metode Scheffe' pada variabel terikat. Variabel terikat: komunikasi matematika

**Table 2.1**

$H_0$	$F_{obs}$	$(a-1)F_\alpha$	Keputusan Uji
$\mu_{21} = \mu_{22}$	2,048	6,064	$H_0$ diterima
$\mu_{21} = \mu_{23}$	14,837	6,064	$H_0$ ditolak
$\mu_{22} = \mu_{23}$	27,998	6,064	$H_0$ ditolak

Berdasarkan Tabel 2.1 diperoleh kesimpulan sebagai berikut, peserta didik yang dikenai model pembelajaran *inquiry learning* dan *discovery learning* memperoleh kemampuan komunikasi matematis yang lebih baik daripada peserta didik yang dikenai model pembelajaran klasikal dan peserta didik yang dikenai model *inquiry learning* dan *discovery learning* memperoleh kemampuan komunikasi matematis yang sama.

Untuk uji komparasi ganda antar kolom pada setiap variabel terikat dengan metode Scheffe'.

**Table 2.2** Variabel Terikat: Komunikasi Matematika

$H_0$	$F_{obs}$	$(b-1)F_\alpha$	Keputusan Uji
$\mu_{2.1} = \mu_{2.2}$	3,91	6,064	$H_0$ diterima
$\mu_{2.1} = \mu_{2.3}$	27,25	6,064	$H_0$ ditolak
$\mu_{2.2} = \mu_{2.3}$	14,45	6,064	$H_0$ ditolak

Berdasarkan Tabel 2.2 menjelaskan kemampuan komunikasi matematis peserta didik dengan kecerdasan spasial tinggi dan sedang lebih baik daripada peserta didik dengan kecerdasan spasial rendah, dan kemampuan komunikasi matematis peserta

didik dengan kecerdasan spasial tinggi dan sedang sama.

Pengajaran berdasarkan inkuiri berpusat pada peserta didik di mana mereka memiliki tugas untuk masuk ke dalam suatu isu ataupun mencari jawaban-jawaban terhadap isi pertanyaan melalui suatu prosedur yang digariskan secara jelas dan dapat bekerja secara kelompok dengan baik (Kourilsky dalam Oemar, 2001). Pembelajaran penemuan merupakan model pembelajaran yang digunakan dalam pendekatan konstruktivis yang bertujuan untuk membimbing peserta didik lebih berperan aktif dalam proses pembelajaran. Cranton (Devi, 2014) menjelaskan bahwa dalam pembelajaran aktif, peserta didik tenggelam dalam pengalaman di mana mereka terlibat dalam pembuatan, penyelidikan, tindakan, imajinasi, penemuan, interaksi, hipotesa dan refleksi pribadi.

## 3. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Devi, A. S. 2014. *Active Learning Models for Effective Teaching*. India: Jawaharlal Nehru Technological University Hyderabad.
- [2] Harmony, J. & Theis, R. 2012. Pengaruh Kemampuan Spasial Terhadap Hasil Belajar Matematika Siswa Kelas Vii Smp Negeri 9 Kota Jambi. *Edumatica. Volume 02 Nomor 01, April 2012 ISSN: 2088-2157*.
- [3] Hoong, L.Y. & Khoh, L.S, 2012. *Effects of Geometer's Sketchpad on Spatial Ability and Achievement in Transformation Geometry among Secondary Two Students in Singapore*. National Institute of Education, Nanyang Technological University, Singapore.
- [4] Oemar Hamalik. 2001. *Proses Belajar Mengajar*. Bandung : Bumi Aksara.
- [5] Siti Marliah Tambunan. 2006."Hubungan Antara Kemampuan Spasial dengan Prestasi Belajar Matematika". *Makara, Sosial Humaniora*, 9(1),27-32.

## **SELF ESTEEM, KREATIVITAS, DAN PENDIDIKAN MATEMATIKA REALISTIK**

Julianti Mustika<sup>1</sup>, Sri Hastuti Noer<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universitas Lampung

<sup>2</sup>Universitas Lampung

**Abstrak.** Kemampuan berkompetisi merupakan keniscayaan bagi generasi muda bangsa dalam menghadapi tantangan era globalisasi. Percaya terhadap kemampuan diri dapat dijadikan sebagai landasan dasar dalam proses menumbuhkembangkan kemampuan berkompetisi. Faktor yang berpengaruh pada kepercayaan diri adalah faktor internal dan eksternal. Faktor internal merupakan gambaran mental tentang diri seseorang yang salah satunya mengenai kemampuan diri seseorang dalam mengerjakan sesuatu hal atas kemampuannya sendiri tanpa bantuan orang lain dan juga kesadaran akan harga diri seseorang (*self esteem*). Mental yang percaya terhadap kemampuan diri akan menciptakan pribadi kreatif yang juga merupakan prasyarat dalam kesuksesan berkompetisi. Pembentukan pribadi kreatif diawali dari proses berpikir kreatif. Berpikir kreatif diasosiasikan dengan proses dalam kreativitas. Proses kreatif merujuk pada usaha individu untuk menghasilkan solusi atau produk kreatif. PMR dengan tahapan (a) pemahaman masalah kontekstual, (b) mendeskripsikan dan menyelesaikan masalah kontekstual, (c) membandingkan dan mendiskusikan jawaban, dan (d) penarikan kesimpulan dinyatakan sebagai sebuah strategi yang berpotensi untuk meningkatkan kepercayaan diri dan menumbuhkembangkan kreativitas peserta didik. Uraian berikut akan mengkaji tentang, *self esteem*, kreativitas, dan PMR.

**Kata kunci:** *Self Esteem, kreativitas, dan PMR.*

### **1. PENDAHULUAN**

Saat ini, Indonesia telah tercatat sebagai salah satu dari 144 negara partisipan pada program pengukuran daya saing global oleh *World Economy Forum* yang menerbitkan laporan pemeringkatan Negara dengan menggunakan indeks daya saing global atau *Global Competitiveness Index* (GCI). Pengukuran pada tahun 2014-2015 menunjukkan bahwa Indonesia berada pada peringkat ke 34. Dari dua belas pilar penilaian GCI, pilar pendidikan dasar dan kesehatan menempati posisi ke 77 yang terkatagorikan sebagai salah satu pilar terendah. Fakta ini mengindikasikan bahwa perlu adanya optimalisasi perbaikan dan pengembangan kualitas aspek pendidikan Indonesia. Salah satu usaha yang dapat dilakukan pada pengembangan kualitas pendidikan adalah dengan melakukan inovasi pendekatan pembelajaran yang dapat membangun kepercayaan diri dan mengembangkan kreativitas peserta didik sehingga pada akhirnya terbentuklah pribadi yang siap bermain pada kancah kompetisi global.

Percaya terhadap kemampuan diri dapat dijadikan sebagai landasan dasar dalam proses menumbuh kembangkan

kemampuan berkompetisi. Faktor yang berpengaruh pada kepercayaan diri adalah faktor internal dan eksternal. Faktor internal merupakan gambaran mental tentang diri seseorang yang salah satunya mengenai kemampuan diri seseorang dalam mengerjakan sesuatu hal atas kemampuannya sendiri tanpa bantuan orang lain dan juga kesadaran akan harga diri seseorang (*self esteem*). Sejalan dengan hal ini, sebuah kajian yang dilakukan oleh Jack Martin dalam jurnalnya yang berjudul *A Case against Heightened Self-Esteem as an Educational Aim* menyatakan bahwa “Seseorang yang berpikir positif terhadap dirinya sendiri akan menjadi pribadi yang lebih sehat, lebih bahagia dan lebih produktif...”.

Sementara itu, telah banyak studi baik lokal maupun internasional yang mengkaji mengenai peranan *self esteem* terhadap prestasi belajar siswa, pengaruh *self esteem* terhadap optimisme. Diantaranya adalah penelitian yang dilakukan oleh Neny Irawati & Nurahma Hajat berjudul “Hubungan antara Harga Diri (*Self Esteem*) dengan Prestasi belajar pada Siswa SMKN 48 di Jakarta Timur” menunjukkan bahwa 34,89% prestasi belajar siswa SMKN 48 ditentukan oleh

self esteem. Sementara itu, sebuah penelitian pendidikan internasional yang dilakukan oleh Ernest Afari berjudul “Global Self-Esteem and Self-Efficacy Correlates: Relation of Academic Achievement and Self-Esteem among Emirati Students” menemukan bahwa Self Esteem yang positif dapat mengantarkan siswa pada pencapaian prestasi akademik yang tinggi. Sejalan dengan temuan ini, S. Jamshidi, B. Akbari, B. Mehregandam penelitiannya yang berjudul “Investigation of the Relationship Between Creativity and Self Esteem and the Relationship Between Creativity and Academic Achievement” mendapatkan temuan yang mengindikasikan bahwa terdapat korelasi antara *Self Esteem* terhadap kreativitas. Pada penelitian ini juga ditemukan bahwa terdapat korelasi antara kreativitas dan pencapaian akademik.

Berdasarkan temuan pada penelitian-penelitian yang telah ada, maka adalah suatu keharusan bagi guru untuk mampu menciptakan proses pembelajaran yang dapat memfasilitasi perkembangan kepercayaan diri yang pada akhirnya akan melejitkan kreativitas peserta didik. Berkaitan dengan hal ini, matematika sebagai bagian dari kurikulum sekolah tentunya memiliki potensi untuk berperan dalam memfasilitasi perkembangan kepercayaan diri dan kreativitas peserta didik. Hal ini sesuai dengan tujuan umum pembelajaran matematika yang dirumuskan *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) yaitu: (1) belajar untuk berkomunikasi (*mathematical communication*), (2) belajar untuk bernalar (*mathematical reasoning*), (3) belajar untuk memecahkan masalah (*mathematical problem solving*), (4) belajar untuk mengaitkan ide (*mathematical connections*), dan (5) pembentukan sikap positif terhadap matematika (*positive attitudes toward mathematics*). Senada dengan itu tujuan pendidikan matematika diberikan di sekolah menurut Depdiknas yaitu: (1) melatih cara berpikir dan bernalar dalam menarik kesimpulan, (2)

mengembangkan aktivitas kreatif, (3) mengembangkan kemampuan pemecahan masalah, dan (4) mengembangkan kemampuan menyampaikan informasi atau mengkomunikasikan gagasan.

Berdasarkan tujuan dari pembelajaran matematika ini, maka dapat terlihat bahwa aktivitas pembelajaran pada matematika sangat berpotensi untuk mengembangkan berbagai kemampuan bagi peserta didik. Salah satu kemampuan tersebut adalah kemampuan untuk berkreativitas. Berpikir kreatif diasosiasikan dengan proses dalam kreativitas. Proses kreatif merujuk pada usaha individu untuk menghasilkan solusi atau produk kreatif. Di lain pihak, kemampuan peserta didik untuk berkreativitas dapat diawali dengan kemampuan peserta didik untuk memiliki kepercayaan diri atau keyakinan akan kemampuannya dalam belajar matematika. Oleh karena besarnya potensi matematika dalam mengembangkan kemampuan berkreativitas peserta didik, maka adalah suatu keharusan bagi guru untuk dapat mengoptimalkan peran dan fungsi matematika bagi peserta didik dengan melakukan berbagai inovasi pembelajaran. PMR dengan tahapan (a) pemahaman masalah kontekstual, (b) mendeskripsikan dan menyelesaikan masalah kontekstual, (c) membandingkan dan mendiskusikan jawaban, dan (d) penarikan kesimpulan dinyatakan sebagai sebuah strategi yang berpotensi untuk meningkatkan kepercayaan diri dan menumbuhkembangkan kreativitas peserta didik.

## 2. SELF ESTEEM

Berbagai penelitian yang dilakukan oleh para ahli mengindikasikan bahwa *self esteem* memiliki peranan penting dalam menentukan kepercayaan diri seseorang terhadap kemampuan yang ia miliki sehingga berdampak pada kemampuan diri seseorang dalam memperoleh prestasi hasil belajar. Hal ini berarti ada relevansi dengan pemaparan Rumini dkk

(Martyanti,2013) yang menyatakan bahwa proses dan hasil belajar matematika dipengaruhi oleh berbagai faktor. Faktor-faktor tersebut dapat dikelompokkan menjadi dua yaitu: faktor eksternal dan faktor internal. Faktor eksternal merupakan faktor yang berasal dari luar diri siswa, seperti : sarana dan pra sarana, lingkungan, guru, kurikulum, dan metode mengajar. Sedangkan faktor internal merupakan faktor yang berasal dari dalam diri siswa sendiri, seperti : motivasi, kecerdasan emosional, kecerdasan matematis-logis, rasa percaya diri, kemandirian, sikap, keyakinan, dan lain-lain. Artinya, bahwa dalam hal ini *Self esteem* yang secara global dikategorikan sebagai rasa kepercayaan diri atau pun keyakinan merupakan bagian dari salah faktor internal yang juga menentukan keberhasilan siswa dalam belajar matematika.

A Baron menyatakan bahwa secara umum *self esteem* telah dikonseptualisasikan dalam psikologi sosial sebagai keseluruhan sikap seseorang terhadap dirinya sendiri. Menurut Minchinton (Adilia,2013) *self esteem* adalah penilaian terhadap diri sendiri. Merupakan tolak ukur harga diri kita sebagai seorang manusia, berdasarkan pada kemampuan penerimaan diri dan perilaku sendiri atau tidak. Dapat juga dideskripsikan sebagai penghormatan terhadap diri sendiri atau perasaan mengenai diri yang berdasarkan pada keyakinan mengenai apa dan siapa diri kita sebenarnya. Menurut Branden (Adilia,2013) *self esteem* merupakan kepercayaan diri pada kemampuan kita dalam menghadapi tantangan hidup, keyakinan akan diri kita memiliki hak untuk bahagia, perasaan berharga, berjasa, berhak untuk menyatakan kebutuhan dan keinginan kita, dan menikmati buah dari usaha kita.

Menurut Gecas 1982; Rosenberg 1990; Rosenberg et.al 1995, (dalam Cast &Burke, 2002) *self esteem* secara keseluruhan menunjuk kepada evaluasi diri

yang positif. Terdiri atas dua dimensi yaitu kemampuan dan keberhargaan (Gecas 1982;Gecas & Schwalbe 1983). Dimensi kemampuan ( bermakna berdasar pada *selfesteem*) menunjuk pada tingkat dimana seseorang melihat dirinya sendiri sebagai seseorang yang memiliki kemampuan dan bermakna. Dimensi keberhargaandiri (berharga berdasar pada *self esteem*) menunjuk pada tingkat dimana individu merasa diri mereka sebagai seseorang yang bernilai.

Berdasarkan beberapa definisi dari para ahli tersebut, maka dapat dikatakan bahwa *self esteem* merupakan kapasitas seseorang untuk mampu menghadirkan rasa penghormatan terhadap diri sendiri sebagai orang yang memiliki kemampuan, keberartian, berharga, dan berkompetensi.

Frey&Carlock(Gandaputra,2009) menyebutkan bahwa perkembangan *self esteem* seseorang telah dimulai pada saat individu tersebut dilahirkan ke dunia ini. Perkembangan ini terjadi secara perlahan-lahan, yaitu melalui interaksi dengan orang tua, orang lain yang bermakna bagi individu tersebut dan teman-teman sebayanya. Lebih lanjut Klass dan Hodge (Adilia,2010) mengemukakan bahwa *Self Esteem* adalah hasil evaluasi yang dibuat dan dipertahankan oleh individu, yang diperoleh dari hasil interaksi individu dengan lingkungan, serta penerimaan, penghargaan, dan perlakuan orang lain terhadap individu tersebut.

## 2.1 Faktor-faktor yang Mempengaruhi *Self Esteem*

Ghufron (2010) menyatakan harga diri (*Self esteem*) dalam perkembangannya terbentuk dari hasil interaksi individu dengan lingkungan dan atas sejumlah penghargaan, penerimaan, dan pengertian orang lain terhadap dirinya. Faktor-faktor yang mempengaruhi harga diri dapat dibedakan menjadi dua kelompok, yaitu faktor internal seperti jenis kelamin, intelegensi, kondisi fisik individu dan faktor eksternal seperti lingkungan sosial, sekolah, dan keluarga. Terkait dengan

lingkungan sosial, Klass dan Hodge (Adilia,2010) berpendapat bahwa pembentukan harga diri dimulai dari seseorang yang menyadari dirinya berharga atau tidak. Hal ini merupakan hasil dari proses lingkungan, penghargaan, penerimaan, dan perlakuan orang lain kepadanya.

## **2.2 Karakteristik Individu Berdasarkan *Self Esteem* yang dimiliki**

Minchinton (Adilia,2010) menjelaskan bahwa terdapat dua karakteristik individu ditinjau dari tinggi rendahnya *self esteem* yang dimiliki yaitu individu dengan *self esteem* tinggi dan individu dengan *self esteem* rendah.

Seseorang yang memiliki *self esteem* yang tinggi, ia akan memiliki ciri-ciri seperti: dapat menerima dan mengapresiasi dirinya sendiri dalam kondisi apapun, merasa nyaman dengan keadaan dirinya, berprasangka baik terhadap dirinya sendiri serta memiliki kontrol emosi yang baik dan terbebas dari perasaan yang tidak menyenangkan, kemarahan, ketakutan, kesedihan dan rasa bersalah. Tingginya *self esteem* dapat terlihat dari bagaimana cara seseorang dalam bentuk rasa penghormatan, toleransi, kerja sama dan saling memiliki antara satu dengan yang lain. Seseorang dengan *self esteem* yang tinggi dapat merancang, merencanakan, dan merealisasikan segala sesuatu yang diharapkan atau menjadi tujuan hidupnya secara optimal.

Sementara itu, seseorang dengan *self esteem* yang rendah meyakini bahwa dirinya memiliki kemampuan instrinsik yang kecil, meragukan kemampuan dirinya, selalu takut untuk mencoba segala sesuatu dan memiliki kontrol emosi yang buruk, merasa tidak bahagia, tertekan serta merasa bahwa dirinya tidak berarti atau sia-sia. Seseorang dengan *self esteem* yang rendah merasa bahwa kehidupan ini berada di luar kontrol dan tanggung jawab dirinya dan berjalan begitu saja, terkadang merasa lemah dan merasa di bawah control atau kendali orang lain. Selain itu, seseorang

yang memiliki *self esteem* yang rendah tidak dapat merasakan arti pentingnya hubungan interpersonal, bersikap tidak toleran, kurang dapat bekerja sama, dan kurang rasa memiliki antara satu sama lainnya.

## **3. KREATIVITAS**

Pada saat ini, pentingnya kreativitas pada berbagai aktivitas bukan lah merupakan hal yang diragukan lagi. Dalam setiap profesi, seseorang akan memiliki keunggulan kompetitif jika dapat mengembangkan kemampuannya untuk menghadirkan ide-ide baru. Dalam kehidupan pribadi, berpikir kreatif dapat menuntun seseorang pada aktivitas kreatif. Pembentukan pribadi kreatif diawali dari proses berpikir kreatif. Berpikir kreatif diasosiasikan dengan proses dalam kreativitas. Proses kreatif merujuk pada usaha individu untuk menghasilkan solusi atau produk kreatif.

Johnson (2014) mengemukakan bahwa berpikir kreatif adalah sebuah kebiasaan dengan pikiran yang dilatih dengan memperhatikan instuisi, menghidupkan imajinasi, mengungkapkan kemungkinan-kemungkinan baru, membuka sudut pandang yang menakjubkan, dan membangkitkan ide-ide yang tidak terduga. *The Town Planning Network* (Higgins,2006) mendefinisikan kreativitas sebagai kemampuan untuk repackaging atau menggabungkan ide-ide dalam cara-cara baru yang dapat digunakan dengan praktis dan memiliki nilai. Mouly (Reeves,2006) menyatakan bahwa Kreativitas dibangun pada ekspresi diri dan keyakinan yang berhubungan dengan respon yang tidak umum, kebaruan, fleksibilitas dan kelancaran, yang dapat dipelajari dengan menjelajahi, memanipulasi, mempertanyakan dan bereksperimen. Munandar (1995 : 25) mendefinisikan kreativitas sebagai suatu kemampuan umum untuk menciptakan suatu yang baru, sebagai kemampuan untuk memberikan gagasan-gagasan baru yang dapat diterapkan dalam pemecahan

masalah, atau sebagai kemampuan untuk melihat hubungan-hubungan baru antara unsur-unsur yang sudah ada sebelumnya. Pada tingkat masyarakat, kreativitas dikaitkan dengan penemuan-penemuan baru. Sedangkan pada tingkat individu, dapat membantu memecahkan masalah dan menghadapi perubahan di tempat kerja dan dalam kehidupan pribadi sehari-hari, termasuk mengelola perubahan (Sternberg et al (Reeves, 2006).

#### **4. PENDIDIKAN MATEMATIKA REALISTIK (PMR)**

##### **4.1 Prinsip dan Karakteristik PMR**

*“Mathematics must be connected to reality”* dan *“mathematics as human activity”* merupakan filosofi dasar dari pendidikan matematika realistik yaitu sebuah teori belajar mengajar dalam pendidikan matematika yang pertama kali dikenalkan dan dikembangkan di Belanda pada tahun 1970 oleh Institut Freudenthal. Dalam filosofinya bahwa matematika haruslah dekat, terkoneksi dan harus relevan dengan situasi peserta didik dengan kata lain bahwa sifat realistik harus terintegrasi dalam pembelajaran matematika. Namun prinsip dasar yang harus dipahami mengenai kerealistikan matematika adalah bukan hanya terbatas pada istilah *“real word”* yang secara umum diartikan sebagai dunia nyata. Pada dasarnya penggunaan kata realistik berasal dari bahasa Belanda yaitu *“zich realiseren”* yang berarti untuk dibayangkan atau *to imagine*.

Panhuizen(Wijaya,2012) mengemukakan bahwa penggunaan kata realistik tidak sekedar menunjukkan adanya suatu koneksi dengan dunia nyata tetapi lebih mengacu pada fokus Pendidikan Matematika Realistik dalam menempatkan penekanan penggunaan suatu situasi yang dapat dibayangkan (*imagineable*) oleh siswa.

Menghadirkan situasi yang dapat dibayangkan pada saat pembelajaran matematika bagi peserta didik merupakan salah satu langkah krusial dalam menciptakan kebermaknaan matematika.

Freudental (Wijaya,2012) menyatakan bahwa proses belajar siswa hanya akan terjadi jika pengetahuan(*knowledge*) yang dipelajari bermakna bagi siswa. Proses pembelajaran yang dilaksanakan dalam suatu konteks akan menjadi bermakna bagi peserta didik. Senada dengan hal ini, Elaine B. Johnson dalam bukunya berjudul *“Contextual Teaching&Learning”* mengemukakan bahwa *“ketika murid dapat mengaitkan isi mata pelajaran akademik seperti matematika, ilmu pengetahuan alam, atau sejarah dengan pengalaman mereka sendiri, mereka menemukan makna, dan makna memberi mereka alasan untuk belajar”*.

Webster’s New World Dictionary (Johnson,2014) mengartikan makna sebagai arti penting atau maksud dari sesuatu. Pandangan para ahli mengenai pentingnya menghadirkan kebermaknaan dalam pembelajaran adalah relevan dengan kebutuhan alamiah syaraf manusia. Otak berusaha memberi arti bagi suatu informasi baru dengan cara menghubungkannya dengan pengetahuan dan keterampilan yang sudah ada, otak berusaha menghubungkan tugas-tugas baru dengan tugas-tugas yang telah ada (Johnson,2014).

Beberapa pandangan para ahli ini menunjukkan bahwa menghadirkan masalah realistik yang biasa juga disebut permasalahan kontekstual dalam pembelajaran matematika adalah aktivitas penting yang akan membantu peserta didik menemukan makna dalam pembelajaran matematika. Permasalahan realistik seperti yang telah disinggung sebelumnya adalah bukan hanya melibatkan masalah riil yang dapat ditemukan langsung dalam keseharian peserta didik melainkan juga menghadirkan hal-hal yang dapat dengan mudah dibayangkan dan mudah diakses oleh pikiran peserta didik. Permainan, alat peraga, cerita atau bahkan konsep matematika formal adalah beberapa hal yang dapat berperan sebagai masalah realistik dalam matematika. Wijaya (2012) dalam gagasannya menyatakan bahwa penggunaan masalah realistik dalam

Pendidikan Matematika Realistik memiliki posisi yang jauh berbeda dengan penggunaan masalah realistik dalam pendekatan mekanistik. Dalam Pendidikan Matematika Realistik, permasalahan realistik digunakan sebagai fondasi dalam membangun konsep matematika atau biasa juga disebut sebagai sumber untuk pembelajaran. Sedangkan dalam pendekatan mekanistik, permasalahan realistik ditempatkan sebagai bentuk aplikasi suatu konsep matematika sehingga sering juga disebut sebagai kesimpulan dalam proses pembelajaran.

Fungsi dan peranan konteks dalam pembelajaran matematika yang dikemukakan oleh Treffers dan Grofee (Wijaya, 2012) adalah sebagai berikut:

1. Pembentukan konsep (*concept forming*)  
Fungsi paling fundamental dari konteks dalam Pendidikan Matematika Realistik adalah memberikan siswa suatu akses yang alami dan motivatif menuju konsep matematika. Konteks harus memuat konsep matematika tetapi dalam suatu kemasan yang bermakna bagi siswa sehingga konsep matematika tersebut dapat dibangun atau ditemukan kembali secara alami oleh siswa.
2. Pengembangan model (*model forming*)  
Konteks berperan dalam mengembangkan kemampuan siswa untuk menemukan berbagai strategi untuk menemukan atau membangun konsep matematika. Strategi tersebut bisa berupa rangkaian model yang berfungsi sebagai alat untuk menerjemahkan konteks dan juga alat untuk mendukung proses berpikir.
3. Penerapan (*applicability*)  
Pada posisi ini peran konteks bukan lagi untuk mendukung penemuan dan pengembangan konsep matematika tetapi untuk menunjukkan bagaimana suatu konsep matematika ada di realita dan digunakan dalam aktivitas keseharian.
4. Melatih kemampuan khusus (*specific abilities*) dalam suatu situasi terapan berupa kemampuan melakukan

identifikasi, generalisasi, dan pemodelan.

Berdasarkan keempat fungsi dan peranan keterlibatan konteks dalam pembelajaran matematika, maka adalah suatu keharusan bagi praktisi pendidikan dalam hal ini adalah guru matematika untuk dapat meningkatkan kapasitas dalam mengembangkan konteks pada suatu konsep matematika. Adapun beberapa hal yang dapat dilakukan dalam mengembangkan konteks adalah sebagai berikut:

1. Konteks disusun seatraktif mungkin dan dapat mengoptimalkan minat siswa untuk belajar matematika. Pemilihan konteks dapat disesuaikan dengan tingkatan siswa. Menghadirkan aneka permainan dan cerita-cerita fiktif merupakan alternative konteks yang bisa disajikan untuk siswa SD tingkat awal. Sedangkan untuk siswa SD tingkat atas dan siswa SMP mungkin menghadirkan permasalahan-permasalahan actual kekinian yang dekat dengan aktivitas keseharian mereka adalah alternatif yang bisa dipilih.
2. Guru perlu memikirkan pemilihan situasi yang relevan untuk suatu konsep matematika yang sering dijumpai. Selanjutnya situasi yang telah ditetapkan ini digunakan untuk membangun konsep yang bersangkutan.
3. Menghindari isu-isu yang bersifat sensitif yaitu hal-hal yang berkaitan dengan kehidupan pribadi siswa.
4. Memperhatikan pengetahuan awal yang dimiliki siswa dan menghindari keberpihakan terhadap suatu gender.

Selain prinsip pelibatan masalah realistik pada pembelajarannya, prinsip selanjutnya dari PMR adalah bahwa matematika haruslah terintegrasi sebagai aktivitas manusia sehingga dalam pembelajaran matematika, peserta didik berhak diberikan akses untuk menemukan kembali ide dan konsep dasar. Menurut Freudenthal matematika sebaiknya tidak

diberikan kepada siswa sebagai produk jadi yang siap pakai, melainkan sebagai suatu bentuk kegiatan dalam mengkonstruksi konsep matematika. Selanjutnya Treffers (Wijaya,2012) merumuskan lima karakteristik Pendidikan Matematika Realistik, yaitu:

1. Penggunaan konteks pada sebagai titik awal pembelajaran matematika.
2. Penggunaan model untuk matematisasi progresif.  
Model digunakan dalam melakukan matematisasi secara progresif. Penggunaan model berfungsi sebagai jembatan dari pengetahuan dan matematika tingkat konkrit menuju pengetahuan matematika tingkat formal.
3. Pemanfaatan hasil konstruksi siswa  
Siswa memiliki kebebasan untuk mengembangkan strategi pemecahan masalah sehingga diharapkan akan muncul strategi yang bervariasi. Hasil kerja dan konstruksi siswa selanjutnya digunakan untuk pengembangan konsep matematika.
4. Interaktivitas  
Proses belajar seseorang bukan hanya suatu proses individu melainkan juga secara bersamaan merupakan suatu proses sosial. Proses belajar siswa akan menjadi lebih singkat dan bermakna ketika siswa saling mengkomunikasikan hasil kerja dan gagasan mereka.
5. Keterkaitan  
Pendidikan Matematika Realistik menempatkan keterkaitan antar konsep matematika sebagai hal yang harus dipertimbangkan dalam proses pembelajaran. Melalui keterkaitan, satu pembelajaran matematika diharapkan bisa mengenalkan dan membangun lebih dari satu konsep matematika secara bersamaan.

#### **4.2 Potensi PMR dalam mengembangkan self esteem dan kreativitas**

Pada awal pembahasan telah dibahas bahwa salah satu usaha yang dapat

dilakukan pada pengembangan kualitas pendidikan adalah dengan melakukan inovasi pendekatan pembelajaran yang dapat membangun kepercayaan diri dan mengembangkan kreativitas peserta didik. Percaya terhadap kemampuan diri dapat dijadikan sebagai landasan dasar dalam menumbuhkembangkan kemampuan berkompetisi. Dalam hal ini, *self esteem*) yang diintrepetasikan sebagai gambaran mental tentang diri seseorang yang salah satunya mengenai kemampuan diri seseorang dalam mengerjakan sesuatu hal atas kemampuannya sendiri tanpa bantuan orang lain dan juga kesadaran akan harga diri seseorang adalah hal dasar yang harus dibangun dalam proses pembelajaran termasuk juga dalam pembelajaran matematika.

Selain itu, bahwa kemampuan berkekrativitas dalam setiap profesi, seseorang akan memiliki keunggulan kompetitif jika dapat mengembangkan kemampuannya untuk menghadirkan ide-ide baru dan juga dalam kehidupan pribadi, berpikir kreatif dapat menuntun seseorang pada aktivitas kreatif. Pembentukan pribadi kreatif diawali dari proses berpikir kreatif. Berpikir kreatif diasosiasikan dengan proses dalam kreativitas. Selanjutnya berdasarkan pemaparan mengenai prinsip dasar dan karakteristik yang terdapat dalam Pendidikan Matematika Realistik, maka dapat diambil benang merah bahwa Pendidikan Matematika Realistik memiliki potensi yang sangat besar untuk dapat berperan dalam menumbuhkembangkan kepercayaan diri dan kemampuan kreativitas siswa. Beberapa karakteristik pada Pendidikan Matematika Realistik yang berpotensi untuk mengembangkan kreativitas siswa maupun *self esteem* siswa diantaranya adalah:

#### **a. Penggunaan konteks sebagai *starting point* untuk mengenalkan dan menggunakan suatu konsep matematika**

Hal dasar yang perlu menjadi perhatian dalam pembelajaran matematika adalah bagaimana matematika tidak dipandang sebagai suatu produk siap pakai, melainkan suatu target yang harus dibangun. Penggunaan konteks pada awal pengenalan suatu konsep matematika memiliki pengaruh signifikan pada pengembangan kreativitas. Hal ini dikarenakan dalam proses pemilihan strategi penyelesaian masalah kontekstual akan sangat dipengaruhi oleh pemahaman atau interpretasi terhadap konteks situasi yang dihadapi serta pengetahuan awal yang telah dimiliki siswa. Perbedaan pemahaman dan kemampuan awal siswa akan berpotensi untuk menghadirkan berbagai strategi penyelesaian yang berbeda sehingga dalam hal ini akses siswa untuk mengembangkan kreativitasnya sangatlah terbuka.

Sejalan dengan hal ini, (Wijaya,2012) mengemukakan bahwa kegiatan matematika cenderung merupakan aktivitas berpikir, oleh karena itu penggunaan kegiatan otak atau *mind on activity* diperlukan untuk mengembangkan kreativitas siswa dalam matematika. Aktivitas berpikir dapat dihadirkan melalui aktivitas pemecahan masalah (*problem solving*) pada konteks yang disajikan. Konteks yang disajikan bisa berupa permasalahan tidak rutin yang membutuhkan pikiran kreatif dan produktif serta cara penyelesaian yang kompleks. Schoenfeld (Wijaya,2012) mendefinisikan masalah (dalam pemecahan masalah) sebagai suatu soal atau pertanyaan yang dihadapi oleh seseorang yang tidak memiliki akses secara langsung yaitu prosedur penyelesaian ke solusi yang dibutuhkan.

Dalam pemecahan masalah non rutin, siswa akan berpotensi untuk menggunakan cara-cara atau prosedur penyelesaian yang variatif dan memperoleh kebebasan untuk

berekplorasi melalui pemodelan dan matematisasi. Hal ini mengindikasikan bahwa karakteristik Pendidikan Matematika Realistik dapat berperan untuk mengembangkan kemampuan siswa untuk berpikir kreatif.

#### **b. Penyajian open ended problem**

Ketika siswa dihadapkan pada satu soal berbentuk *open ended* maka siswa diberikan akses kesempatan yang besar untuk melakukan eksplorasi kemungkinan solusi sehingga dalam hal ini akan terjadi aktivitas kreatif. Beberapa manfaat penggunaan *open-ended* problem dalam pelajaran adalah memungkinkan siswa untuk berpartisipasi aktif dalam pembelajaran, siswa memiliki banyak kesempatan untuk menggunakan pengetahuan dan keterampilan matematika mereka secara komprehensif, setiap siswa memiliki kebebasan memberikan berbagai alternative tanggapan untuk masalah yang dikerjakan, memberikan pengalaman penalaran kepada siswa serta memberikan kesempatan pada siswa untuk melakukan kegiatan penemuan (*discovery*) yang menarik serta menerima pengakuan dari siswa lain terkait solusi yang mereka miliki. Dalam hal ini, pengakuan yang saling diberikan terhadap solusi antar teman tentu saja merupakan salah satu aktivitas yang dapat menumbuhkan kepercayaan diri siswa (*self esteem*) karena salah satu karakteristik *self esteem* adalah merupakan kapasitas seseorang untuk mampu menghadirkan rasa penghormatan terhadap diri sendiri sebagai orang yang memiliki kemampuan, keberartian, berharga, dan berkompetensi.

#### **c. Kreativitas melalui learning by doing**

Aktivitas matematika yang melibatkan kegiatan psikomotorik melalui *hands on activities* merupakan salah satu cara yang juga dapat mengembangkan kreativitas siswa. Pada Pendidikan Matematika Realistik, siswa memiliki banyak kesempatan

untuk melakukan aktivitas psikomotorik dalam rangka menerapkan dan mendemonstrasikan suatu konsep matematika dan juga dalam menemukan dan membangun strategi dan konsep-konsep matematika. Aktivitas psikomotorik yang dilakukan siswa pada Pendidikan Matematika Realistik secara tidak langsung dapat berperan untuk mengembangkan kreativitas siswa.

#### d. Interaktivitas

Interaksi (*interactivity*) merupakan salah satu dari prinsip dasar Pendidikan Matematika Realistik. Interaksi sosial pada proses pembelajaran dalam Pendidikan Matematika Realistik dapat dimulai pada saat aktivitas saling menukar ide. Pada saat bertukar gagasan/ide, selain belajar untuk membangun karakter demokratis dan kemampuan berkomunikasi, siswa juga akan saling memberikan apresiasi. Apresiasi yang diberikan oleh teman diskusi dan juga guru tentu saja akan membangun rasa percaya diri siswa. Sebagaimana bahasan sebelumnya bahwa pembentukan harga diri dimulai dari seseorang yang menyadari dirinya berharga atau tidak. Hal ini merupakan hasil dari proses lingkungan, penghargaan, penerimaan, dan perlakuan orang lain kepadanya. Dengan kata lain, apresiasi yang saling diberikan pada saat aktivitas bertukar gagasan berpotensi membantu siswa untuk dapat melihat dirinya sendiri sebagai seseorang yang memiliki kemampuan dan bermakna serta sebagai pribadi yang bernilai.

#### 5. KESIMPULAN

PMR dengan tahapan (a) pemahaman masalah kontekstual, (b) mendeskripsikan dan menyelesaikan masalah kontekstual, (c) membandingkan dan mendiskusikan jawaban, dan (d) penarikan kesimpulan dinyatakan sebagai sebuah strategi yang berpotensi untuk meningkatkan

kepercayaan diri dan menumbuhkembangkan kreativitas peserta didik/siswa.

#### 6. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Adilia Dewi, N, Hubungan *Self Esteem* dengan Optimisme Meraih Kesuksesan Karir pada Mahasiswa Fakultas Psikologi UIN Syarif Hidayatullah, Repository, Jakarta: UIN Syarif Hidayatullah, 2010.
- [2] Afari, E. Et al, *Global Self Esteem and Self Efficacy Correlate: Relation of Academic Achievement and Self Esteem Among Emirate Students*, Academic Journal, Vol 5, Issue 2, P49, 2012.
- [3] Baron, R.A, & Byrne, D, Psikologi Sosial (10 ed.), Jakarta: Erlangga, 2003.
- [4] Frey, D, & Carlock, J. C, *Enhancing self esteem*, Indiana: Accelerated Developed Inc. 1993.
- [5] Ghufron, M. N., & Risnawita, S. R, Teori - teori psikologi, Yogyakarta: Ar-ruz Media Group, 2010.
- [6] Higgins. Et al, *Creative thinking in planning: How do we climb outside the box?*, The Town Planning Review, Arts & Humanities Full Text pg. 221, 2006.
- [7] Irawati, N & Hajat, N, Hubungan antara Harga Diri (*Self Esteem*) dengan Prestasi Belajar pada Siswa SMKN 48 di Jakarta Timur, *Econusains*, Vol X, No 2, 2012.
- [8] Johnson, Elaine B, *Contextual Teaching and Learning: What Is and Wht It's Here to Stay*, California: Corwin Press Inc, 2002.
- [9] Martin, Jack, *A case against Heightened Self Esteem as an Educational Aim*, Journal of Thought, Fall Winter, Vol 42 Issue ¾, p55, 2007.
- [10] Wijaya, A, Pendidikan Matematika Realistik suatu Alternatif Pendekatan Pembelajaran Matematika, Yogyakarta: Graha Ilmu, 201

## **PEMBELAJARAN MATEMATIKA DENGAN ALAT PERAGA LINTASAN BERLOGIKA PADA MATERI LOGIKA MATEMATIKA**

Lestiana

Prodi Magister Pendidikan Matematika FKIP Universitas Sebelas Maret Surakarta

**Abstrak.** Salah satu upaya untuk menciptakan pembelajaran menarik dan berkesan adalah dengan adanya inovasi penggunaan alat peraga yang dapat merangsang imajinasi siswa. Sehingga proses pembelajaran tidak hanya terpaku pada buku. Siswa dapat mempelajari materi yang ada dengan benda nyata yang dapat dicoba oleh masing-masing siswa. Salah satu alat peraga yang dapat digunakan yaitu alat peraga yang bernama lintasan berlogika dengan harapan alat peraga ini dapat memberikan gambaran secara logis dan memudahkan siswa memahami materi pernyataan majemuk logika matematika. Bahan yang digunakan untuk pembuatan alat peraga ini adalah kertas karton, lem, plastik mika transparan, bola-bola kecil, lempengan seng, dan magnet. Alat peraga ini berbentuk bangun limas segiempat terpancung dan terdiri dari empat sisi miring yang masing-masing berisi lintasan konjungsi, lintasan disjungsi, lintasan implikasi, dan lintasan biimplikasi dengan ciri-ciri yang berbeda-beda. Penggunaan lintasan berlogika dengan memasukkan bola dari ujung atas, jika bola mencapai ujung bawah lintasan maka kesimpulan pernyataan majemuk disimpulkan benar dan jika bola tidak mencapai ujung bawah lintasan maka pernyataan majemuk disimpulkan salah. Cara penggunaan lintasan disesuaikan dengan masing-masing lintasan. Dengan adanya alat peraga ini diharapkan nantinya seorang guru dapat menggunakan alat peraga lintasan berlogika sebagai alat peraga alternatif dalam memberikan pemahaman dan memudahkan siswa memahami materi pernyataan majemuk logika matematika.

**Kata Kunci:** alat peraga, lintasan berlogika, logika matematika

### **1. PENDAHULUAN**

Matematika merupakan ilmu yang mendasari perkembangan teknologi modern dan mempunyai peran penting dalam berbagai disiplin ilmu pengetahuan. Di sekolah matematika sebagai salah satu mata pelajaran yang harus dipelajari secara bertahap dan berkelanjutan karena konsep-konsep matematika tersusun secara terstruktur, logis, dan sistematis mulai dari konsep yang paling sederhana sampai pada konsep yang paling kompleks. Oleh sebab itu, belajar matematika harus dilakukan secara bertahap, berurutan sesuai tingkat perkembangan berfikir siswa dan berkelanjutan berdasarkan pada pengalaman sebelumnya.

Belajar matematika yang harus dilakukan secara hirarkis atau bertahap memperlihatkan akan pentingnya pemahaman konsep matematika pada materi sebelumnya untuk mempelajari materi berikutnya. Namun, selama ini matematika dipandang sebagai mata pelajaran yang sulit untuk pahami oleh sebagian besar siswa. Hal ini senada dengan pernyataan Rostina Sundayana [7]

bahwa masih banyak siswa yang merasa matematika sebagai mata pelajaran yang menakutkan dikarenakan masih banyak siswa yang mengalami kesulitan-kesulitan dalam mengerjakan soal-soal matematika. Walaupun matematika dianggap memiliki tingkat kesulitan yang tinggi, namun setiap orang harus mempelajarinya karena merupakan sarana untuk memecahkan masalah sehari-hari (Marti dalam Rostina Sundayana [7]). Oleh karena itu, selalu diperlukan adanya pengembangan-pengembangan positif pada proses belajar mengajar demi terciptanya pembelajaran yang menarik dan berkesan, selain itu diharapkan juga dapat meningkatkan pemahaman akan materi-materi matematika yang sedang diajarkan oleh guru pada saat itu.

Salah satu upaya untuk menciptakan pembelajaran menarik dan berkesan adalah dengan adanya inovasi penggunaan alat peraga yang dapat merangsang imajinasi siswa. Sehingga proses pembelajaran tidak hanya terpaku pada buku dan siswa dapat mempelajari materi yang ada dengan benda nyata yang dapat dicoba oleh masing-masing siswa. Menurut pendapat

Dienes (dalam Agus Suharjana, [1]) bahwa setiap konsep matematika dapat dipahami dengan baik apabila disajikan kepada siswa dengan bantuan berbagai media pembelajaran yang kongret maka alat peraga sangat berperan dalam pembelajaran matematika.

Materi logika matematika adalah salah satu materi yang memerlukan bantuan alat peraga dan diharapkan dapat memberikan bayangan logis pada siswa. Alat peraga ini membantu memperjelas apa yang disampaikan guru agar mudah dipahami dan dimengerti oleh siswa, maka penulis mencoba membuat sebuah alat peraga yang dapat membantu mempelajari konsep logika matematika. Alat peraga yang dapat diterapkan ialah alat peraga yang bernama lintasan berlogika dapat memudahkan siswa memahami materi pernyataan majemuk logika matematika.

## 2. KAJIAN PUSTAKA

### 2.1 Pembelajaran Matematika

Menurut Hamzah B. Uno [3], pembelajaran dapat diartikan sebagai suatu proses interaksi antara peserta belajar dengan pengajar/instruktur dan/atau sumber belajar pada suatu lingkungan belajar untuk pencapaian tujuan belajar tertentu. Sedangkan menurut Sadiman (dalam Bambang Warsita [2]), pembelajaran adalah usaha-usaha yang terencana dalam memanipulasi sumber-sumber belajar agar terjadi proses belajar dalam diri siswa dan menurut Miarso (dalam Bambang Warsita [2]), pembelajaran adalah usaha mengelola lingkungan dengan sengaja agar seseorang membentuk diri secara positif tertentu dalam kondisi tertentu. Berdasarkan beberapa pengertian pembelajaran yang dikemukakan di atas, maka dapat disimpulkan bahwa pembelajaran adalah suatu proses interaksi antara peserta belajar dengan pengajar pada suatu lingkungan belajar yang direncanakan dengan sengaja agar membentuk proses belajar dalam diri siswa dan tercapainya tujuan belajar tertentu.

Sedangkan pengertian matematika dikemukakan dalam beberapa definisi juga, salah satunya Hamzah B. Uno [3] yang berpendapat bahwa matematika adalah sebagai suatu bidang ilmu yang merupakan alat pikir berkomunikasi, alat untuk memecahkan berbagai persoalan praktis, yang unsur-unsurnya logika dan intuisi, analisis dan konstruksi, generalisasi dan individualitas, serta mempunyai cabang-cabang antara lain aritmatika, aljabar, geometri dan analisis. Selain itu menurut Sukardjono [8] mengatakan bahwa matematika adalah cara atau metode berpikir dan bernalar, matematika dapat digunakan untuk membuat keputusan apakah suatu ide itu benar atau salah atau paling tidak ada kemungkinan benar. Sedangkan menurut Herman Hudojo [4] matematika adalah suatu alat untuk mengembangkan cara berpikir. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa matematika adalah bidang ilmu untuk memecahkan berbagai persoalan praktis, untuk mengembangkan cara berpikir yang dapat membuat keputusan apakah suatu ide itu benar atau salah.

Dari beberapa definisi pembelajaran dan definisi matematika di atas, dapat disimpulkan bahwa pembelajaran matematika adalah suatu proses interaksi antara peserta belajar dengan pengajar pada suatu lingkungan belajar yang direncanakan untuk memecahkan berbagai persoalan matematika, untuk mengembangkan cara berpikir yang dapat membuat keputusan apakah suatu ide itu benar atau salah.

### 2.2 Alat Peraga Matematika

Media pembelajaran berasal dari bahasa latin dan merupakan bentuk jamak dari kata *medium* yang secara harfiah berarti perantara atau penyalur. Sehingga, media pembelajaran diartikan sebagai semua benda yang menjadi perantara dalam terjadinya pembelajaran. Berdasarkan fungsinya media pembelajaran dapat berbentuk alat peraga dan sarana. Suatu media pembelajaran

dikatakan alat peraga jika fungsinya sebagai alat pembelajaran.

Estiningsih (dalam Agus Suharjana [1]) mengemukakan bahwa alat peraga merupakan media pembelajaran yang mengandung atau membawakan ciri-ciri dari konsep yang dipelajari. Hal itu diperkuat dengan pernyataan Djoko Iswaji (dalam Pujiati [6]) bahwa alat peraga matematika adalah seperangkat benda kongret yang dirancang, dibuat, dihimpun, atau disusun secara sengaja yang digunakan untuk membantu menanamkan atau mengembangkan konsep-konsep atau prinsip-prinsip dalam matematika. Oleh karena itu, dapat dikatakan bahwa alat peraga matematika merupakan perantara pembelajaran berupa seperangkat benda kongret yang dirancang berisi ciri-ciri dari konsep yang dipelajari dan dapat membantu menanamkan atau mengembangkan konsep-konsep matematika.

Menurut pendapat Dienes (dalam Agus Suharjana [1]) bahwa setiap konsep matematika dapat dipahami dengan baik apabila disajikan kepada siswa dengan bantuan berbagai media pembelajaran yang kongret maka alat peraga sangat berperan dalam pembelajaran matematika.

Fungsi alat peraga menurut Widyantini dan Sigit [9] adalah sebagai berikut:

- 1) Memudahkan dalam memahami konsep dalam matematika
- 2) Menguatkan atau menerampikan konsep yang telah diberikan
- 3) Memotivasi atau untuk membangkitkan ketertarikan siswa pada suatu konsep
- 4) Sumber belajar.

Membuat alat peraga tidak sembarangan, menurut Ruseffend (dalam Rostina Sundayana [1]) ada beberapa persyaratan yang harus dimiliki alat peraga agar sesuai dengan yang diharapkan dalam pembelajaran, yaitu:

- 1) Tahan lama
- 2) Bentuk dan warna menarik

- 3) Sederhana dan mudah dikelola
- 4) Ukurannya sesuai
- 5) Dapat menyajikan konsep matematika baik dalam bentuk real, gambar, atau diagram
- 6) Sesuai dengan konsep matematika
- 7) Dapat memperjelas konsep matematika dan bukan sebaliknya
- 8) Peragaan itu supaya menjadi dasar bagi tumbuhnya konsep berpikir abstrak bagi siswa
- 9) Menjadikan siswa belajar aktif dan mandiri dengan memanipulasi alat peraga
- 10) Bila mungkin alat peraga tersebut bisa berfaedah banyak.

### **3. PEMBAHASAN**

Penggunaan alat peraga dalam pembelajaran matematika di sekolah sangatlah penting karena salah satu peranan alat peraga dalam proses belajar mengajar adalah meletakkan ide-ide dasar suatu konsep. Maka dengan bantuan alat peraga, siswa akan lebih memahami ide-ide dasar suatu konsep dan dapat menarik kesimpulan dari hasil pengamatan, misalnya konsep matematika pada konsep logika matematika. Siswa akan dapat dengan mudah memahami pernyataan dalam logika matematika dengan adanya bantuan alat peraga pada proses pembelajaran.

Alat peraga pada materi logika matematika yang dapat digunakan adalah alat peraga yang bernama lintasan berlogika. Alat peraga lintasan berlogika ini dapat memberikan gambaran secara logis dan memudahkan siswa memahami kesimpulan pernyataan-pernyataan konjungsi, disjungsi, implikasi, maupun biimplikasi. Bahan yang digunakan untuk pembuatan alat peraga ini sangat mudah untuk dicari dan mudah untuk dijangkau oleh semua kalangan. Alat ini terdiri dari empat sisi yang terdiri dari lintasan konjungsi, lintasan disjungsi, lintasan implikasi, lintasan biimplikasi, dan masing-masing lintasan dengan ciri-ciri yang berbeda.

Manfaat alat peraga secara umum menurut Ali Hamzah dan Muhlissarini [5] dalam proses pembelajaran adalah menumbuhkan minat dan dapat membangkitkan motivasi berprestasi siswa. Melalui penggunaan alat peraga, siswa akan terangsang dan memunculkan motivasi dalam dirinya untuk mempelajari materi lebih lanjut. Rasa penasaran yang timbul dapat menambah keinginan untuk memperdalam materi yang sedang dipelajari. Adapun fungsi dan manfaat alat peraga lintasan berlogika pada pembelajaran matematika sebagai berikut:

- a. Melakukan suatu percobaan untuk menanamkan konsep pernyataan majemuk logika matematika.
- b. Memberikan kesan yang lebih bermakna dalam memahami materi pernyataan majemuk logika matematika yang berhubungan dengan tabel pernyataan konjungsi, disjungsi, implikasi, dan biimplikasi. Pada penggunaan alat peraga ini siswa dapat berpartisipasi aktif melakukan dan menemukan konsep dasar pernyataan majemuk logika matematika.
- c. Proses belajar mengajar menjadi lebih jelas dan menarik. Pembelajaran materi logika matematika dapat lebih jelas dan sajiannya bisa membangkitkan rasa keingintahuan siswa.
- d. Proses pembelajaran menjadi lebih interaktif artinya dapat membantu guru dan siswa melakukan komunikasi dua arah secara aktif selama pembelajaran. Sehingga tidak hanya guru saja yang aktif tetapi juga siswanya.
- e. Kualitas belajar dapat ditingkatkan. Penggunaan alat peraga dapat membantu siswa menyerap materi yang diajarkan lebih bermakna. Bila hanya mendengarkan informasi penjelasan dari guru saja, siswa mungkin kurang memahami materi secara baik. Namun jika siswa terlibat dalam mencoba secara langsung, maka

pemahaman siswa pasti akan lebih baik.

Berdasarkan uraian di atas maka dapat disimpulkan bahwa alat peraga lintasan berlogika yang berupa benda kongret yang dibuat dan dirancang untuk memudahkan siswa menerima materi yang disampaikan guru dan alat peraga yang terdiri dari lintasan-lintasan logis dari pernyataan majemuk.

Berdasarkan konsep dan fungsinya alat ini dinamakan “Lintasan Berlogika” karena berupa lintasan yang dilalui bola-bola kecil dan berfungsi menggambarkan secara logis dari pernyataan majemuk logika matematika. Alat ini mudah dibuat dan tidak memerlukan bahan dengan biaya yang mahal. Bahan alat lintasan berlogika adalah kertas karton sebagai bahan utamanya. Selain bahan kertas karton bahan lain yang diperlukan yaitu lem, gunting, plastik mika transparan, alat tulis, bola-bola kecil yang memiliki berat ringan, lempengan seng, dan magnet. Namun jika menghendaki bahan dasar yang lebih kuat dan tahan lama maka dapat menggunakan bahan dasar dari papan kayu, hal itu tergantung kemampuan dan lama penggunaan alat peraga oleh si pengguna. Tahapan atau langkah pembuatan alat peraga ini yaitu:

- a. Potong kertas karton tebal dengan membentuk jaring-jaring bangun limas segiempat sama sisi terpancung. Panjang rusuk alas limas 20 cm dan tinggi 25 cm.
- b. Setiap sisi miring masing-masing akan dibuat lintasan konjungsi, disjungsi, implikasi, dan biimplikasi.
- c. Tempel kertas karton yang membentuk dinding lintasan dengan lebar lintasan 3 cm.
- d. Balut lempengan besi dengan kertas warna hijau dan ada yang berwarna kuning.
- e. Tempelkan lempengan besi yang telah di balut pada lintasan. Hal ini disesuaikan dengan bentuk lintasan. Masing-masing lintasan memiliki model yang berbeda.

- f. Buat penyekat yang berbahan kertas karton berukuran  $3 \times 5$  cm.
- g. Warnai penyekat tersebut dengan warna hijau dan kuning. Penyekat warna hijau beri tanda p dan warna kuning beri tanda q.
- h. Tempel magnet dibagian bawah penyekat.
- i. Tutup lintasan dengan plastik mika tembus pandang. Hal ini bertujuan agar bola yang melalui lintasan tidak keluar dari lintasan.
- j. Lubangi plastik mika sesuai letak penyekat yang nantinya akan dipasang dan lubangi bagian ujung lintasan agar bola yang masuk lintasan bisa diambil dari bagian bawah.

Berikut gambar alat peraga lintasan berlogika dengan masing-masing penjelasannya.



Gambar 3.1 bola dan penyekat lintasan

Seperti pada gambar 1, alat peraga ini memerlukan bola dan penyekat warna hijau dan kuning seperti gambar 1 di atas. Penyekat hijau untuk pengganti pernyataan pertama (biasanya disimbolkan p pada buku pelajaran) dan penyekat kuning sebagai pengganti pernyataan kedua (biasanya disimbolkan q pada buku pelajaran). Jika lintasan itu ditutupi oleh penyekat maka pertanyaan itu bernilai salah, begitu sebaliknya.



Gambar 3.2. lintasan konjungsi

Pada lintasan konjungsi terlihat pada gambar 3.2, jika bola yang dimasukkan dari lubang bagian ujung atas dapat mencapai ujung bawah maka kesimpulan pernyataan konjungsi tersebut bernilai benar, dan sebaliknya jika bola tidak mencapai ujung bawah maka kesimpulan pernyataan konjungsi tersebut bernilai salah. Oleh karena itu, pada konjungsi dapat diketahui bahwa bola akan sampai ujung bawah jika penyekat hijau dan kuning tidak dipasang atau dengan kata lain kesimpulan pernyataan majemuk pada konjungsi akan bernilai benar jika kedua pernyataan p dan q sama-sama bernilai benar.



Gambar 3.3 lintasan disjungsi

Pada lintasan disjungsi seperti pada gambar 3, jika salah satu penyekat diletakkan pada tanda warna hijau atau

kuning di lintasan tersebut, maka bola akan tetap dapat mencapai bawah dengan melalui lintasan yang lain. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa bola tidak akan mencapai ujung bawah jika kedua penyekat menghalangi kedua tanda pada lintasan tersebut atau dengan kata lain bahwa kesimpulan pernyataan majemuk pada konjungsi akan bernilai salah jika pernyataan p dan pernyataan q sama-sama bernilai salah.



Gambar 3.4 lintasan implikasi

Pada lintasan implikasi gambar 4, sesuai dengan lintasan yang ada, jika penyekat hijau diletakkan pada lintasan tersebut, maka bola akan tetap dapat mencapai bawah dengan melalui lintasan yang lain. Namun jika penyekat kuning diletakkan pada lintasan, maka bola akan berhenti di tengah lintasan dan tidak mencapai ujung bawah. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa bola tidak akan mencapai ujung bawah jika penyekat kuning diletakkan dan penyekat hijau dicopot dari lintasan. Hal ini dapat diartikan bahwa pernyataan majemuk pada implikasi akan disimpulkan salah jika p bernilai benar dan q bernilai salah.



Gambar 3.5 lintasan biimplikasi

Cara penggunaan lintasan biimplikasi sama halnya lintasan implikasi, namun pada lintasan biimplikasi ini, menggunakan dua bola, dua penyekat hijau, dan dua penyekat kuning. Pasangan dua penyekat dengan warna yang sama diletakkan dan dilepaskan bersamaan selain itu dua bola juga dimasukkan dengan waktu bersamaan. Pada lintasan biimplikasi, bola akan sampai ke ujung bawah jika ke empat penyekat diletakkan pada lintasan atau keempat penyekat dilepas dari lintasan. Oleh karena itu dalam pernyataan majemuk pada biimplikasi akan mempunyai kesimpulan benar jika kedua pernyataan p dan q sama-sama bernilai benar atau bernilai salah.

Adapun kelemahan dari alat peraga ini ialah hanya dapat digunakan untuk materi pernyataan majemuk logika matematika, bahan karton tidak dapat bertahan lama dan kuat untuk jangka panjang, bentuk kurang praktis karena berbentuk bangun limas segiempat terpancung.

#### 4. KESIMPULAN

Alat peraga lintasan berlogika merupakan media pembelajaran matematika yang berupa benda kongret yang dibuat dan dirancang untuk memudahkan siswa menerima materi yang disampaikan guru dan alat peraga yang

terdiri dari lintasan-lintasan logis dari pernyataan majemuk. Alat peraga ini berupa lintasan yang dilalui bola-bola kecil dan berfungsi menggambarkan secara logis dari pernyataan majemuk logika matematika yang terdiri dari konjungsi, disjungsi, implikasi, dan biimplikasi. Pada setiap masing-masing lintasan memiliki bentuk lintasan yang berbeda-beda. Penggunaan lintasan berlogika dengan memasukkan bola dari ujung atas. Jika bola mencapai ujung bawah lintasan maka kesimpulan pernyataan logika disimpulkan benar. Cara penggunaan lintasan disesuaikan dengan masing-masing lintasan.

Berdasarkan kesimpulan di atas, maka untuk peningkatan hasil belajar siswa dapat dikemukakan sebagai berikut:

- a. Seorang guru dapat menggunakan alat peraga lintasan berlogika sebagai alat peraga alternatif dalam memberikan pemahaman dan memudahkan siswa menghafalkan tabel kebenaran logika matematika
- b. Alat peraga ini hanya digunakan pada sub bab pertama tabel kebenaran logika matematika, oleh karena itu disarankan guru untuk dapat meneliti apakah alat peraga ini dapat dikembangkan sehingga dapat digunakan untuk sub bab berikutnya dalam materi logika matematika.

## 5. DAFTAR PUSTAKA

[1] Agus Suharjana. 2009. *Pemanfaatan Alat Peraga Sebagai Media Pembelajaran Matematika*. Diklat

Guru Pengembangan Matematika SMK Jenjang Dasar Tahun 2009. Yogyakarta: PPPPTK Matematika

- [2] Bambang Warsita. 2008. *Teknologi Pembelajaran*. Jakarta: PT. Rineka Cipta
- [3] Hamzah B. Uno. 2007. *Model Pembelajaran*. Jakarta: PT. Bumi Aksara
- [4] Herman Hudojo. 2005. *Pengembangan Kurikulum dan Pembelajaran Matematika*. Malang: UM Press
- [5] M. Ali Hamzah, Muhlisrarini. 2014. *Perencanaan dan Strategi Pembelajaran Matematika*. Jakarta: Raja Grafindo Persada
- [6] Pujiati. 2004. *Penggunaan Alat Peraga Dalam Pembelajaran Matematika SMP*. Makalah disajikan pada Diklat Instruktur/Pengembangan Matematika SMP Jenjang Dasar di PPPG Matematika, Yogyakarta, 10-23 Oktober 2004
- [7] Rostina Sundayana. 2013. *Media Pembelajaran Matematika*. Bandung: Alfabeta
- [8] Sukardjono. 2007. *Hakikat dan Sejarah Matematika*. Jakarta: Universitas Terbuka
- [9] Th. Widyantini, Sigit Tri Guntoro. 2010. *Penggunaan Alat Peraga dalam Pembelajaran Matematika di SMP*. Yogyakarta: PPPPTK Matematika

## EFEKTIFITAS PENGGUNAAN MEDIA DIGITAL MATH GAME DENGAN MODEL ETNOMATEMATIKA PADA MATA KULIAH MATEMATIKA SMA

**Achmad Buchori, Noviana Dini Rahmawati, Sudargo**

Pendidikan Matematika FPMIPATI Universitas PGRI Semarang

Email: buccherypgri@gmail.com, fadiniz@gmail.com, sudargo\_pgri@yahoo.com,

**Abstrak.** Kemajuan teknologi pada dasawarsa ini mengharuskan dosen untuk mengemas pembelajaran yang menarik bagi mahasiswa, hal yang paling tampak adalah semua mahasiswa Universitas PGRI Semarang mayoritas menggunakan Android dalam proses perkuliahan, sehingga menjadi tantangan tersendiri bagi dosen untuk memanfaatkan peluang tersebut. Oleh karena itu salah satu wujud nyata kreativitas dosen adalah mengadakan penelitian *research and development* pada pembelajaran matematika terutama teknologinya dan mengetahui keefektivannya.

Tujuan dari penelitian ini Tahun pertama ini adalah menghasilkan produk berupa *aplikasi digital math game* di handphone dan *aplikasi digital math game* di komputer pada mata kuliah matematika SMA yang valid/layak digunakan di program studi pendidikan matematika di Universitas PGRI Semarang. Metode penelitian ini menggunakan model pengembangan Borg and Gall yang pada pelaksanaannya hanya sampai pada tahapan Tahap *Develop preliminary form of product* untuk menghasilkan produk yang valid oleh ahli. Tahapan ini validasi ahli oleh 2 dosen yaitu 1 dosen ahli materi dan 1 dosen ahli media dari Universitas PGRI Semarang.

Dari hasil penelitian dapat disimpulkan bahwa *digital math game* telah valid/layak yang divalidasi oleh ahli, yaitu: (1) validasi ahli materi dengan presentase untuk aspek umum sebesar 95%, aspek substansi materi sebesar 88%, dan aspek kelayakan bahasa sebesar 93% (2) Validasi ahli media dengan presentase untuk aspek umum sebesar 88%, aspek penyajian pembelajaran sebesar 95%, aspek kelayakan bahasa sebesar 80%, aspek Kelayakan Kefrafikan 84%, aspek kelayakan bahasa sebesar 80% dan aspek kelayakan kegrafikan 80%. Dari presentase hasil validasi ahli tersebut produk yang dihasilkan dikatakan layak atau valid. Kevalidan produk tersebut diharapkan dapat memudahkan dosen dan mahasiswa dalam belajar dimana saja dan kapan saja dengan aplikasi handphone dan komputer yang diperoleh.

Sedangkan nilai rata-rata hasil belajar mahasiswa pada materi geometri menunjukkan rata-rata sebesar 47,17, sedangkan materi trigonometri menunjukkan rata-rata sebesar 60, dan materi statistika menunjukkan rata-rata sebesar 52,5, materi terakhir yaitu peluang menunjukkan rata-rata sebesar 57,5. Hal ini menunjukkan bahwa dengan media digital math game hasil belajar belum maksimal atau belum efektif.

**Kata kunci:** Digital Math Game, Etnomatematika, Matematika SMA

### 1. PENDAHULUAN

#### 2.1 Latar Belakang

Perkembangan dunia ICT sangat pesat dasawarsa ini, hal ini harus ditanggapi secara serius agar membawa dampak positif dalam mencetak calon pendidik yang professional dan berjiwa, langkah-langkah konkret yang dilakukan Universitas PGRI Semarang dalam menghadapi tantangan ini adalah sebagai berikut: (1) menyediakan fasilitas Laboratorium Komputer di setiap program studi, (2) melengkapi perangkat komputer berupa hardware dan software di setiap ruang kelas, (3) melakukan pelatihan bagi dosen-dosen agar mampu menguasai ICT

dalam pembelajaran secara baik dan benar, akan tetapi yang dilihat di lapangan adalah masih sedikitnya dosen yang menerapkan ICT dalam proses pembelajaran.

Berdasarkan data wawancara dengan beberapa dosen matematika Universitas PGRI Semarang, diketahui bahwa minat belajar mahasiswa pada mata kuliah Matematika SMA masih rendah, hal ini dikarenakan dosen belum mampu mengemas pembelajaran secara maksimal, terutama dalam menggunakan hardware dan software matematika. Minat yang rendah dapat membuat pembelajaran menjadi kurang optimal. Hal ini

dikarenakan mahasiswa kurang aktif untuk mengikuti pembelajaran (Syah, 2010: 134). Media pembelajaran yang interaktif dan menyenangkan dapat meningkatkan minat belajar mahasiswa (Ayad & Rigas, 2010: 39). Teknologi yang berkembang sekarang ini sangat mendukung untuk belajar mandiri salah satunya adalah komputer.

## 2.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah yang telah diuraikan di atas, maka permasalahan yang menjadi bahan kajian dalam penelitian dan pengembangan ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimanakah mengembangkan *digital math game* pada mata kuliah matematika SMA dengan model etnomatematika mampu menarik minat dan motivasi belajar mahasiswa?
2. Apakah pembelajaran dengan menggunakan *digital math game* dengan model etnomatematika dapat berlangsung secara efektif dan praktis?

## 2.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan uraian pada latar belakang dan rumusan masalah seperti tersebut di atas, dapat dirumuskan tujuan penelitian ini adalah:

Tahun Pertama:

1. Membuat produk hipotetik *digital math game* pada mata kuliah matematika SMA
2. Untuk menghasilkan produk *digital math game* pada mata kuliah matematika SMA dengan model etnomatematika yang valid dan efektif digunakan dalam pembelajaran di kelas

## 2. METODE PENELITIAN

### 1. Lokasi dan Waktu Penelitian

#### a. Lokasi

Lokasi penelitian berada di prodi pendidikan matematika Universitas PGRI Semarang.

#### b. Waktu Penelitian

Waktu penelitian dimulai pada awal tahun ajaran 2015-2016 selama kurang lebih 18 bulan.

### 2. Subjek Penelitian

#### 1. Populasi

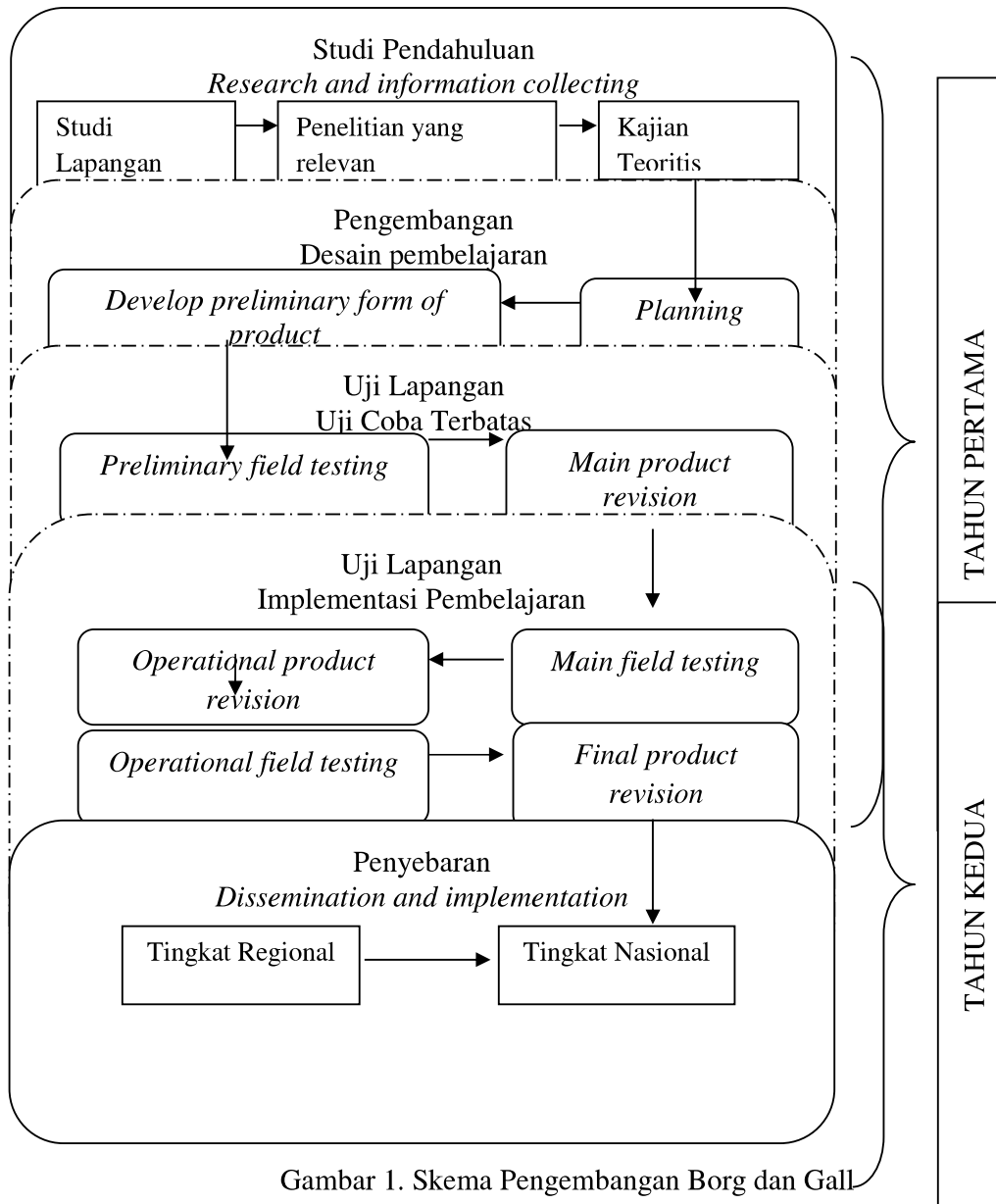
Seluruh mahasiswa semester IV Prodi Pendidikan Matematika Universitas PGRI Semarang tahun ajaran 2014/2015.

#### 2. Sampel

kelas IVA Prodi Pendidikan Matematika Universitas PGRI Semarang tahun ajaran 2014/2015.

### 3. Desain Penelitian

Desain penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah model Borg and Gall dengan 10 tahapan yaitu pada tahun pertama dilaksanakan tahap 1-5 yaitu (1) Tahap *Research and information collecting* (2) Tahap *Planning* (3) Tahap *Develop preliminary form of product*, (4) Tahap *Preliminary field testing*, (5) Tahap *Main product revision*.



Gambar 1. Skema Pengembangan Borg dan Gall

#### 4. Teknik Pengumpulan Data

Teknik pengumpulan data dalam penelitian ini adalah data yang dikumpulkan pada pengembangan *digital math game* berupa data kuantitatif sebagai data pokok dan data kualitatif berupa saran dan masukan dari responden

sebagai data tambahan. Data tersebut memberi gambaran mengenai kelayakan produk yang dikembangkan dan post test di akhir pertemuan.

#### 3. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

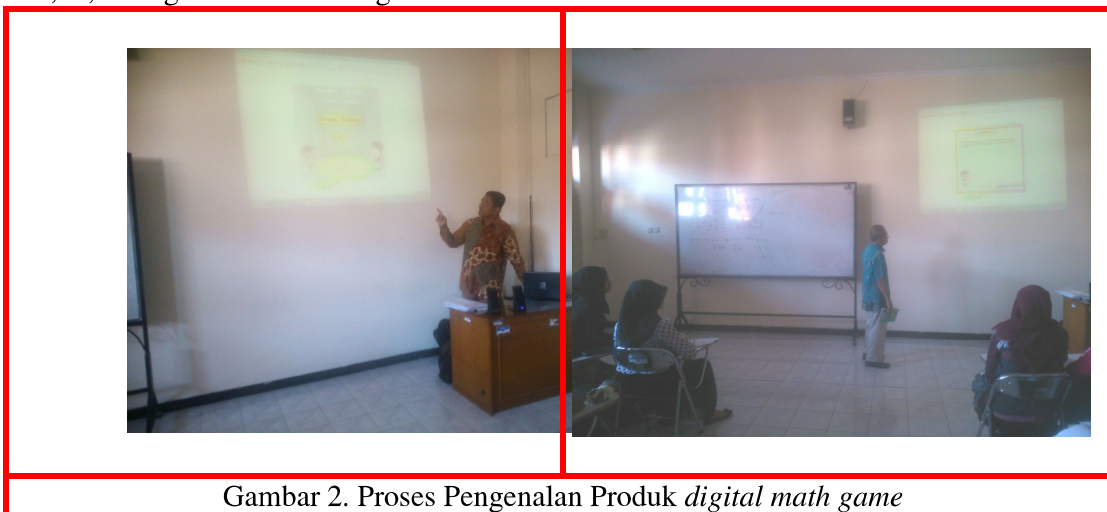
Berdasarkan kriteria valid dari hasil penelitian dapat disimpulkan bahwa *digital math game* telah

valid/layak yang divalidasi oleh ahli yaitu: (1) validasi ahli materi dengan presentase untuk aspek umum sebesar 95%, aspek substansi materi sebesar 88%, dan aspek kelayakan bahasa sebesar 93% (2) Validasi ahli media dengan presentase untuk aspek umum sebesar 88%, aspek penyajian pembelajaran sebesar 95%, aspek kelayakan bahasa sebesar 80%, aspek Kelayakan Kegrafikan sebesar 84%, aspek kelayakan bahasa sebesar 80% dan aspek kelayakan kegrafikan sebesar 80%. Dari presentase hasil validasi ahli tersebut produk yang dihasilkan dikatakan layak atau valid. Kevalidan produk tersebut diharapkan dapat memudahkan dosen dan mahasiswa dalam belajar dimana saja dan kapan saja dengan aplikasi handphone dan komputer yang diperoleh.

Berdasarkan kriteria efektif didapat dari nilai rata-rata hasil belajar mahasiswa pada materi geometri menunjukkan rata-rata sebesar 47,17, sedangkan materi trigonometri

menunjukkan rata-rata sebesar 60, dan materi statistika menunjukkan rata-rata sebesar 52,5, materi terakhir yaitu peluang menunjukkan rata-rata sebesar 57,5. Hal ini menunjukkan bahwa dengan media *digital math game* hasil belajar belum maksimal atau belum efektif.

Proses pengenalan media *digital math game* di dalam kelas yaitu (1) pengenalan produk media *digital math game*, (2) proses pemahaman materi matematika SMA dengan mengangkat budaya lokal, (3) pengisian angket oleh mahasiswa, (4) wawancara dengan mahasiswa setelah proses pembelajaran. Berikut beberapa gambar hasil penelitian proses pembelajaran dengan menggunakan media *digital math game* dengan model etnomatematika.



Gambar 2. Proses Pengenalan Produk *digital math game*



Gambar 3. Proses Pembelajaran dengan Produk *Digital Math Game*



Gambar 4. Proses Setelah Wawancara dengan Mahasiswa mengenai Produk *Digital Math Game*

#### 4. KESIMPULAN

Berdasarkan rumusan masalah, analisis data penelitian dan pembahasan masalah maka dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Telah dihasilkan produk *digital math game* dengan model etnomatematika yang dapat digunakan melalui handphone dan komputer yang layak untuk digunakan menurut ahli materi dan ahli media.
2. Telah dihasilkan prototipe atau produk hipotetik *digital math game* dengan model etnomatematika yang akan direvisi sesuai dengan masukan dan saran dari ahli media, ahli materi dan mahasiswa.
3. Berdasarkan uji terbatas dan hasil postest diketahui bahwa rata-rata

hasil belajarnya dibawah nilai 60 artinya produk digital math game belum efektif sesuai yang diharapkan.

#### 5. Saran:

1. Diharapkan produk digital math game tetap digunakan oleh dosen walaupun tim peneliti masih melakukan revisi produk.
2. Diharapkan produk digital math game tetap digunakan oleh mahasiswa walaupun tim peneliti masih melakukan revisi produk.

#### 5.DAFTAR PUSTAKA

Andreas Holzinger, Primoz Kosec, Gerold Schwantzer, Matjaz Debevc, Rainer Hofmann-Wellenhof, Julia Frühauf (2007) Design and development of a mobile computer application to

- reengineer workflows in the hospital and the methodology to evaluate its effectiveness., 977-968. In *Journal of biomedical informatics* 44 (6).
- Ayad & Rigas, (2010) "Multi-modal game based learning: satisfaction and users achievement approach" published by Stevens Point, Wisconsin, USA
- De Freitas, S., Roberts, G. (2006). *Does distance e-learning work? A comparison between distance and face-to-face learners using e-learning materials*. Association of Learning Technology Journal. Vol. 11, no. 2, pp. 69-87. Cardiff. University of Wales Press.
- J. Wu, H. Cheng, M. Li, A. Carlson, S. Kim, Y. Huang, Z. Kang, K.-C. Hwang, and J.A. Rogers, (2012) "A Viscoelastic Model for the Rate Effect in Transfer Printing," *ASME Journal of Applied Mechanics* 1, 410.
- Buchori (2012), "Pengembangan e-comic berbasis pendidikan karakter di sekolah dasar" *Jurnal Aksioma IKIP PGRI Semarang volume 2*
- Buchori dan Susanto (2011) "Pengembangan Media *Mobile Learning* Berbasis Software *Classpad Casio* Pada Mata Kuliah Geometri Datar di Perguruan Tinggi *jurnal MIPMIPA Unhalu volume 1*
- Buchori dan Noviana Dini (2012) "Pengembangan Bahan Ajar Geometri Analitika II Berbasis Software Cabri 3D dengan pendekatan Matematika Realistik *Jurnal Aksioma IKIP PGRI Semarang volume 2*
- Budi Waluya (2013) "pengembangan inovasi pembelajaran dan bahan ajar berbasis ethnomatematika untuk memperkuat karakter mahasiswa" *Jurnal Kreano UNNES Semarang volume 2*
- JC Burguillo (2010) Using game theory and competition-based learning to stimulate student motivation and performance *Computers & Education* 55 (2), 566-575
- Muhibbin Syah, (2008). *Psikologi Pendidikan dengan Pendekatan Baru*. Bandung: Remaja Rosdakarya.
- M. Jauhar sidhiq (2008) "Panduan Pengembangan Bahan Ajar" penerbit Depdiknas
- Nurdin Muhammad (2011) "Pengertian Mendasar Digital Culture" *jurnal digital/digital game.htm*
- Robson B, Harris R. (eds) (2005) *Hauora: Māori standards of Health IV. A study of the years 2000-2005*. Wellington: Te Rōpū Rangahau Hauora A Eru Pōmare. Available online at [www.hauora.maori.nz](http://www.hauora.maori.nz)
- Safari (2003) "evaluasi pembelajaran" Depdiknas Direktorat Jenderal Pendidikan Dasar dan Menengah
- Wena Made, (2009). *Strategi Pembelajaran Inovatif Kontemporer: Suatu Tinjauan Konseptual Operasional* Penerbit Bumi Aksara, Jakarta

## **PENGEMBANGAN E-MODUL DENGAN MODEL GUIDED NOTE TAKING (GNT) PADA MATA KULIAH PENDIDIKAN MATEMATIKA II PROGRAM S1 PGSD BI DI POKJAR KOTA SEMARANG DITINJAU DARI KEEFEKTIFANNYA**

Nurmawati, Ismartoyo, Edy Prayitno  
Pendidikan Matematika FKIP Universitas Terbuka Semarang  
Email: nurmawati@ut.ac.id

**Abstrak.** Penelitian ini dilatar belakangi oleh kurangnya minat mahasiswa program BI dalam proses kegiatan tutorial, padahal mereka adalah lulusan sarjana semua baik pendidikan maupun non kependidikan, kemudian diketahui masih banyak mahasiswa yang mendapat nilai dibawah 70, hal ini dikarenakan kurangnya kemampuan tutor dalam menciptakan inovasi baru dalam proses tutorial.

Penelitian ini bertujuan untuk mengembangkan suatu media pembelajaran berupa modul elektronik pembelajaran matematika dengan model Guided Note Taking pada mata kuliah pendidikan matematika II, sehingga menghasilkan media pembelajaran yang layak dan efektif digunakan selama proses pembelajaran, serta diharapkan dapat meningkatkan hasil belajar mahasiswa.

Jenis penelitian yang digunakan adalah penelitian Research and Development. Penelitian ini dilakukan dengan dua tahap. Tahap pertama untuk pengembangan produk menggunakan model ADDIE dan tahap kedua untuk menguji keefektifan produk melalui tes uji coba dengan desain eksperimen Posttest-Only Control Design.

Pada kriteria efektif produk ditunjukkan dari prestasi belajar kelas eksperimen lebih baik dibanding kelas kontrol dengan menggunakan uji-t pihak kanan, dengan analisis menggunakan uji-t didapatkan  $t_{hitung} > t_{tabel}$  yaitu  $1,82 > 1,67$ , maka  $H_0$  ditolak artinya pembelajaran dengan menggunakan media E-Modul dengan menggunakan model Guided Note Taking lebih baik dibandingkan dengan pembelajaran konvensional. Jadi dapat disimpulkan bahwa media E-Modul dengan menggunakan model Guided Note Taking efektif digunakan sebagai proses pembelajaran.

**Kata Kunci:** E-Modul, Guided Note Taking, Pendidikan Matematika II, Konvensional

### **1. PENDAHULUAN**

#### **1.1 Latar Belakang**

Dari hasil wawancara peneliti dengan tutor-tutor matematika di pokjar kota Semarang menunjukkan bahwa minat belajar mahasiswa masih kurang, mahasiswa merasa bosan dan malas untuk belajar khususnya pada mata kuliah pendidikan matematika II. Masih banyak mahasiswa yang hasil belajarnya kurang memenuhi syarat kriteria baik yaitu 70, terutama untuk materi bangun ruang. Fasilitas yang ada di SMPN 37 dan SMPN 39 Semarang tersebut kurang digunakan dan dimanfaatkan secara baik dalam kegiatan tutorial. Keadaan yang dialami mahasiswa tersebut disebabkan karena strategi belajar mengajar yang digunakan tutor masih menggunakan metode konvensional. tutor hanya memberi teori, contoh soal dan pembahasan kemudian tugas. Selain itu peran tutor terlihat lebih dominan karena yang lebih berperan aktif adalah tutor. Hal ini menunjukkan

perlu ada suatu inovasi baru di dalam proses pembelajaran untuk menumbuhkan minat belajar mahasiswa sehingga dapat meningkatkan pemahaman dan hasil belajar mahasiswa.

Hal ini didukung oleh Penelitian yang dilakukan oleh Septiani (2012) menunjukkan bahwa pembelajaran matematika dengan menggunakan model Guided Note Taking berbantuan modul lebih baik dibandingkan model pembelajaran konvensional dan penelitian yang dilakukan Hidayatullah (2012) memberikan kesimpulan bahwa prestasi belajar matematika menggunakan model pembelajaran Guided Note Taking dengan pemanfaatan handout lebih baik daripada pembelajaran inside outside cycle dengan pemanfaatan handout serta konvensional.

#### **1.2 Rumusan Masalah**

Dari uraian latar belakang masalah yang telah diuraikan di atas, maka permasalahan yang menjadi bahan kajian

dalam penelitian dan pengembangan ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana mengembangkan media E-Modul dengan model *Guided Note Taking* yang valid digunakan sebagai media pembelajaran Mata Kuliah Pendidikan matematika II bagi mahasiswa UPBJJ UT Semarang?
2. Apakah menggunakan media E-Modul dengan model *Guided Note Taking* lebih efektif dibandingkan dengan media yang lain?

### 1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan uraian pada latar belakang dan rumusan masalah seperti tersebut di atas, dapat dirumuskan tujuan penelitian ini adalah:

1. Untuk mengembangkan E-Modul dengan model *Guided Note Taking* yang valid digunakan untuk mahasiswa UPBJJ UT Semarang.
2. Untuk meneliti efektifitas penggunaan E-Modul dengan model *Guided Note Taking* terhadap hasil belajar

matematika mahasiswa UPBJJ UT Semarang.

## 2. METODE PENELITIAN

### 1. Lokasi dan Waktu Penelitian

#### a. Lokasi

Lokasi penelitian berada di Pokjar Kota Semarang.

#### b. Waktu Penelitian

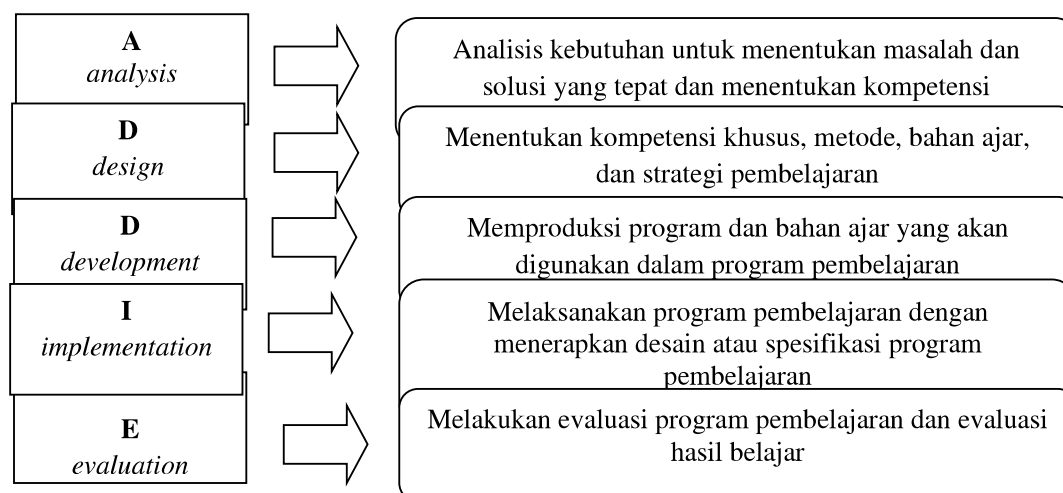
Waktu penelitian dimulai pada awal tahun ajaran 2015 selama kurang lebih 12 bulan.

### 2. Subjek Penelitian

Mahasiswa kelas program S1 PGSD Program BI.

### 3. Desain Penelitian

Desain penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah model desain sistem pembelajaran yang memperlihatkan tahapan-tahapan pembelajaran yang sederhana dan mudah dipelajari, yaitu model ADDIE. Model ini sesuai dengan namanya, terdiri dari lima tahap utama, yaitu *(A)analysis*, *(D)esign*, *(D)velopment*, *(I)mplementation*, dan *(E)valuation*. komponen-komponennya dapat digambarkan dalam diagram berikut:



Gambar 1. Tahap Kegiatan Penelitian dan Pengembangan

### 4. Teknik Pengumpulan Data

Teknik pengumpulan data pada pengembangan *E-Modul*

*online dan offline dengan Model Guided Note Taking (GNT)* berupa data kuantitatif sebagai data pokok

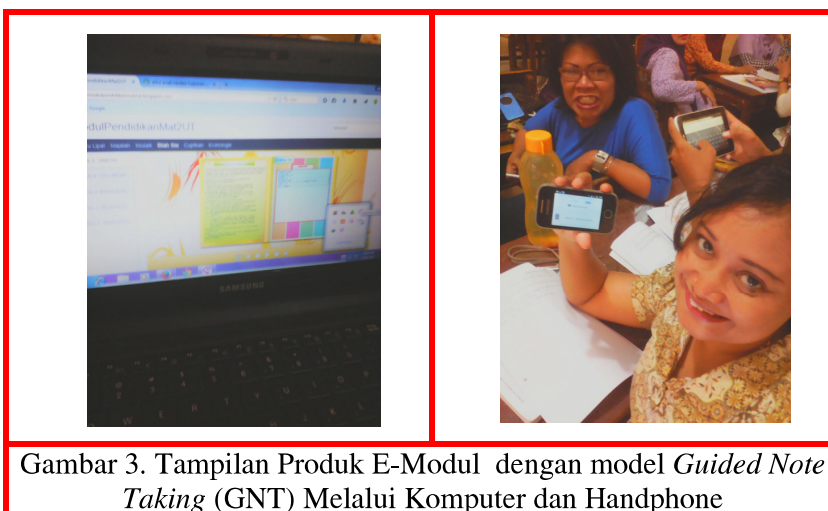
dan data kualitatif berupa saran dan masukan dari responden sebagai data tambahan.

### 3. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Berdasarkan kriteria efektif ditunjukkan dengan perhitungan dengan menggunakan uji-t pihak kanan, yang diperoleh rata-rata kelas eksperimen yaitu = 84,52 dan rata-rata kelas kontrol yaitu = 83,27 dengan  $n_1 = 30$ ,  $n_2 = 27$  dan  $s = 2,58881$  sehingga diperoleh  $t$  hitung = 1,82. Hasil  $t$  hitung dibandingkan dengan  $t$  tabel. Dari daftar distribusi  $t$  dengan peluang 0,95 dan  $dk = 55$  maka  $t_{0,95(55)}$  adalah 1,67. Dari perhitungan didapat  $t$  hitung

sebesar 1,82 dan  $t$  tabel sebesar 1,67. Karena  $t_{hitung} > t_{tabel}$  yaitu  $1,82 > 1,67$  maka  $H_0$  di tolak. Jadi dapat disimpulkan hasil belajar matematika menggunakan media E-Modul dengan menggunakan model *Guided Note Taking* lebih baik dibanding dengan model pembelajaran konvensional pada Mata Kuliah Pendidikan Matematika II. Sehingga media E-Modul dengan menggunakan model *Guided Note Taking* efektif digunakan sebagai media pembelajaran.

Berikut beberapa gambar hasil penelitian proses pembelajaran menggunakan media E-Modul dengan model *Guided Note Taking*.



#### 4. KESIMPULAN

Berdasarkan rumusan masalah, analisis data penelitian dan pembahasan masalah maka dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Telah dihasilkan produk hipotetik *E-Modul offline dan online dengan menggunakan model Guided Note Taking (GNT)* yang akan direvisi sesuai saran dan masukan dari ahli materi, ahli media dan mahasiswa
2. Hasil uji terbatas diperoleh data bahwa produk e-modul dengan model GNT cukup efektif jika digunakan dalam proses tutorial.

#### 5. Saran:

1. Dosen Pengampu pada mata kuliah Pendidikan Matematika II Program S1 PGSD BI di Pokjar Kota Semarang tetap menggunakan produk *E-Modul offline dan online dengan menggunakan model Guided Note Taking (GNT)* dengan melakukan revisi produk oleh tim peneliti.
2. Diharapkan mahasiswa tetap menggunakan produk *E-Modul offline dan online dengan menggunakan model Guided Note Taking (GNT)* online dan offline dengan melakukan revisi produk oleh tim peneliti.

#### DAFTAR PUSTAKA

- Arifin, Zainal. 2011. *Evaluasi Pembelajaran*. Bandung: Remaja Rosdakarya.
- Arikunto, Suharsimi. 2006. *Prosedur Penelitian Suatu Pendekatan Praktik*. Jakarta: Rineka Cipta.
- Buchori, Ahmad. 2010. *Pengembangan Bahan Ajar Geometri Analit Ruang Berbasis Software Cabri 3D*. Jurnal Aksioma. volume 1. tahun 2011.
- Chomsin, dkk. 2008. *Panduan Menyusun Bahan Ajar Berbasis Kompetensi*. Jakarta: PT Elex Media Komputindo.
- Dimiyati dan Mudjiono. 2010. *Belajar dan Pembelajaran*. Jakarta: Rineka Cipta.
- Emzir. 2012. *Metodologi Penelitian Pendidikan Kuantitatif dan Kualitatif*. Jakarta: Rajawali Pres.
- Hamdani. 2011. *Strategi Belajar Mengajar Mengajar*. Bandung: Pustaka Setia.
- Hidayatullah, Agus. 2012. *Efektifitas Model Pembelajaran Kooperatif Tipe Inside Outside Circle dan Guided Note Taking dengan Pemanfaatan Media Handout terhadap Prestasi Belajar Matematika Materi Pokok Logika Matematika Siswa Kelas X Semester II SMA PGRI 1 Kendal*. Semarang: Skripsi Pendidikan Matematika S1 IKIP PGRI Semarang.
- Majid, Abdul. 2007. *Perencanaan Pembelajaran*. Bandung: PT Remaja Rosdakarya Offset.
- Pribadi, Benny A. 2009. *Model Desain Sistem Pembelajaran*. Jakarta: Dian Rakyat.
- Pusparini, Triyana. 2012. *Pengaruh Metode Snowball Throwing dan Guided Note Taking menggunakan Bahan Ajar Handout terhadap Hasil Belajar Fisika Pokok Bahasan Gerak Kelas XI SMA Kesatrian II*. Semarang: Skripsi Pendidikan Fisika S1 IKIP PGRI Semarang.
- Rakhel P, Yulian. 2011. *Studi Perbandingan Hasil Belajar Matematika antara Metode Pembelajaran Guided Note Taking, The Power of Two dan Index Card Math pada Pokok Bahasan Trigonometri Kelas X Semester II SMA N 1 Juwana Pati Tahun Pelajaran 2010/2011*. Semarang: Skripsi Pendidikan Matematika S1 IKIP PGRI Semarang.
- Rahaju, Endah Budi, dkk. 2008. *Contextual Teaching and*

*Learning Matematika: Sekolah  
Menengah Pertama/Madrasah  
Tsanawiyah Kelas VIII Edisi 4.  
Jakarta: Pusat Perbukuan  
Departemen Pendidikan Nasional.*

## PROSES BERPIKIR REFLEKTIF SISWA KELAS X MAN NGAWI YANG BERKEMAMPUAN AWAL MATEMATIKA TINGGI DALAM PEMECAHAN MASALAH BERDASARKAN LANGKAH KRULIK DAN RUDNICK

Ulfamas<sup>1</sup> dan Imamsujadi<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> Prodi Magister Pendidikan Matematika, FKIP, Universitas Sebelas Maret Surakarta

<sup>1</sup>ulfamas@gmail.com, <sup>2</sup>imamsujadi@ymail.com

**Abstrak.** Penelitian ini bertujuan untuk mendeskripsikan proses berpikir reflektif siswa kelas X MAN Ngawi yang berkemampuan awal matematika tinggi dalam pemecahan masalah berdasarkan langkah Krulik dan Rudnick. Jenis penelitian ini adalah penelitian kualitatif dengan pendekatan studi kasus. Subjek penelitian dipilih dari siswa kelas X MAN Ngawi semester genap tahun ajaran 2014/2015. Teknik pengumpulan data dilakukan dengan wawancara berbasis tugas. Hasil penelitian menunjukkan bahwa: pada langkah membaca dan berpikir, siswa meyakini apa yang dibaca dan dipikirkan benar dengan cara (a) membaca soal berulang; (b) memberikan makna setiap kalimat tugas pemecahan masalah; dan (c) merepresentasikan masalah. Pada langkah mengeksplorasi dan merencanakan, siswa menyeleksi dan mempertimbangkan berbagai informasi untuk menyusun rencana awal pemecahan masalah dengan cara (a) menganalisis konsep atau informasi yang ada pada pokok permasalahan dan situasi masalah; (b) menghasilkan dan memeriksa kembali kebenaran informasi yang akan digunakan. Siswa meyakini rencana awal pemecahan masalah yang disusun adalah benar dengan cara (a) mengorganisasikan masalah; (b) memutuskan dengan tegas berbagai rencana awal yang disusun. Pada langkah memilih strategi, siswa mempertimbangkan strategi pemecahan masalah yang ditentukan berdasar pada data dan informasi yang diperoleh dengan cara (a) mengembangkan rencana awal penyelesaian dengan bekerja pada hasil representasi secara *trial-error* dan *guess-test*; (b) menentukan pola pemecahan masalah; dan (c) memeriksa kembali setiap proses yang dilakukan. Pada langkah menentukan penyelesaian, siswa memahami setiap langkah pengerjaan berdasar pada strategi pemecahan masalah yang dipilih adalah benar dengan cara (a) memastikan rumus yang digunakan (luas bangun datar, luas segitiga jika diketahui dua buah sisi yang mengapit sebuah sudut, dan perbandingan trigonometri untuk sudut istimewa berdasarkan pertimbangan yang kuat dan cermat); (b) mengerjakan berulang dengan menggunakan pola yang dipilih; (c) memeriksa dan mencermati setiap langkah pengerjaan dan perhitungan yang dilakukan dengan bekerja mundur; dan (d) menyadari adanya kesalahan (rumus, komputasi, dan nulis) dan memperbaikinya. Pada langkah merefleksi dan generalisasi, siswa mempertimbangkan kesesuaian antara hasil yang diperoleh dengan permasalahan yang ada dengan (a) merefleksi setiap proses yang dilakukan untuk mendapatkan solusi; (b) menguji kebenaran kesimpulan yang diambil dengan memverifikasi informasi. Pada setiap langkah pemecahan masalah subjek menggunakan intuisi dan bertanya pada diri sendiri (*self-questioning*) untuk meyakinkan diri rencana awal pemecahan masalah yang disusun adalah benar.

**Kata kunci:** Proses, berpikir reflektif, pemecahan masalah, kemampuan awal matematika tinggi

### 1. PENDAHULUAN

Berpikir reflektif merupakan pertimbangan yang kuat, tetap dan cermat terhadap keyakinan atau bentuk pengetahuan apapun yang cenderung dianggap benar (Dewey [1]). Inhelder dan Piaget (Skemp [2]) menjelaskan bahwa individu mulai mengembangkan proses berpikir reflektif mulai usia 7 tahun. Hal ini dikarenakan pada usia tersebut, seorang individu mampu memanipulasi berbagai ide-ide konkrit dan menceritakan kembali apa yang telah dilakukan (dalam imajinasinya). Berpikir reflektif merupakan aspek penting yang harus dimiliki seorang siswa (Ayazgok dan

Aslan [3]). Kurniawati, dkk [4] melaporkan bahwa berpikir reflektif sangat diperlukan siswa untuk memecahkan masalah. Hal ini dikarenakan dalam pemecahan masalah, siswa harus memprediksi jawaban benar dengan segera sehingga dapat mengeksplorasi masalah dengan mengidentifikasi konsep matematika yang terlibat dalam masalah matematika dan menggunakan berbagai strategi. Ketika strategi telah dipilih oleh siswa, mereka perlu membangun ide, menarik kesimpulan, menentukan validitas argumen, memeriksa kembali

solusi yang ada, dan mengembangkan strategi-strategi alternatif.

Proses pemecahan masalah memberikan kesempatan untuk belajar dan memikirkan strategi terbaik, sehingga berpikir reflektif sebagai sarana untuk mendorong proses berpikir selama pemecahan masalah (Gurol [5]). Sezer (Choy dan Oo [6]) mengungkapkan bahwa siswa seringkali menemukan soal yang tidak dengan segera dapat dicari solusinya, sementara siswa dituntut untuk dapat menyelesaikan soal tersebut. Untuk itu, siswa perlu mempunyai kesadaran untuk berpikir atau bernalar, menduga atau memprediksi, mencari rumusan yang sederhana, baru kemudian membuktikan kebenarannya.

Proses berpikir reflektif terjadi ketika individu menyadari dan secara aktif mengakses berbagai pengetahuan yang dimiliki sebelumnya, apa yang diketahui, apa yang perlu untuk diketahui, dan bagaimana cara untuk menjembatani kesenjangan tersebut (Sezer [7]). Hmelo dan Lin (Tan [8]) menyatakan bahwa untuk mengakses pengetahuan sebelumnya (*prior knowledge*), membangun ruang masalah (*problem space*), mencari dan menemukan informasi baru untuk menemukan pemecahan masalah sebagai tujuannya, dan membangun representasi mental yang baru atau restrukturisasi yang mencakup kondisi dimana ada pengetahuan dapat digunakan diperlukan pengembangan kesadaran metakognitif dalam belajar dan pemecahan masalah.

Kosslyn [9] menjelaskan bahwa proses berpikir reflektif terjadi ketika informasi yang tersimpan dalam *long-term memory* (LTM) tidak memungkinkan seseorang untuk merespon secara otomatis ke sebuah objek atau kejadian. Informasi yang tersimpan tersebut harus dimasukkan ke dalam *working memory* (WM) kemudian respon baru atau solusi dihasilkan. Lebih lanjut, citra mental (*mental imagery*) memainkan peran penting dalam proses berpikir reflektif. Pemahaman tentang citra mental memberikan informasi terkait dengan adanya gangguan perkembangan kognitif misalnya, kegagalan siswa untuk

menggunakan berpikir reflektifnya dalam kondisi yang tepat bahkan ketika tidak dapat melakukan pemrosesan informasi secara efektif.

Informasi yang diterima oleh individu diolah oleh suatu sistem memori yang ada dalam otak untuk dapat dikenali, diorganisasikan, dan direspon. Salah satu faktor yang menentukan seberapa baik memori diingat adalah cara dimana materi pertama kali dipersepsi, diproses, dan dipahami (Schunk [10]). Teori tingkat pemrosesan informasi menekankan tingkat dimana materi baru secara mental dianalisis dan banyaknya pemrosesan informasi yang terjadi ketika materi pada awalnya muncul adalah penting untuk menentukan berapa banyak informasi tersebut yang akhirnya dapat diingat. Menurut pendekatan ini, kedalaman dari pemrosesan informasi pada saat pemunculan material tingkat keberartian yang dianalisis dan diperhatikan adalah penting. Semakin besar intensitas dari pemrosesan awalnya, semakin besar kemungkinan kita dapat mengingat informasi tersebut (Craik [11]). Berdasarkan hasil penelitian yang dilakukan Shapiro [12], ditemukan bahwa pengetahuan awal siswa berkontribusi dalam membantu siswa mengkode dan menyimpan pengetahuan baru yang diperoleh secara lebih efektif. Demikian halnya dengan penelitian yang dilakukan Kail (1990) dan Flavell *et. Al.* (2002) dalam Schunk [10] menyimpulkan bahwa pengetahuan-pengetahuan yang diperoleh sebelumnya digunakan untuk membantu memahami dan mengelaborasi ide-ide dan peristiwa tertentu. Dewey [1] menyatakan bahwa pengetahuan dan pengalaman yang diperoleh individu sebelumnya akan mempengaruhi proses berpikir reflektif. Sementara itu, Ibrahim [13]; Nindiasari [14] berdasarkan hasil penelitiannya menemukan salah satu faktor yang perlu diperhatikan dan akan berpengaruh dalam pemerolehan pengetahuan selanjutnya adalah kemampuan matematika yang dimiliki siswa sebelumnya.

Hamdi [15] melaporkan dari penelitiannya bahwa kemampuan matematika

hakikatnya mempengaruhi proses berfikir reflektif siswa. Tingkat variasi dari jawaban yang memiliki sekup akurasi serta membutuhkan pengembangan formula atau rumus yang telah ada akan memudahkan siswa untuk menemukan penyelesaian. Siswa yang memiliki pola pikir yang sederhana serta kemampuan nalar yang cukup cenderung menggunakan intusi atau bisikan hati untuk memaparkan setiap jawaban yang ditemukan. Padahal setiap permasalahan dalam matematika pada umumnya mempunyai alur atau langkah-langkah penyelesaian yang konkrit dan sistemik dalam berbagai pola pengembangan.

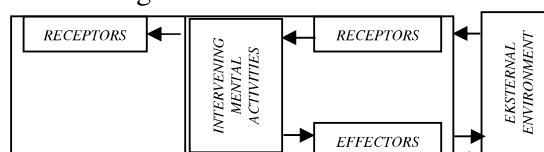
Galton (Ibrahim [13]) menekankan bahwa dari sekelompok siswa yang dipilih secara acak, akan selalu dijumpai siswa yang mempunyai kemampuan tinggi, sedang, dan rendah. Hal ini diperkuat penelitian Siswono [16] mengatakan bahwa latar belakang dan kemampuan awal matematika siswa yang berbeda akan berpengaruh pada beragamnya kemampuan menyelesaikan masalah matematika. Nurman [17] menemukan bahwa siswa yang berkemampuan matematika tinggi mempunyai kemampuan yang baik dalam pemecahan masalah matematika. Hal senada diungkapkan Ormrod [18] yang menyatakan bahwa pada sekolah menengah atas, hanya siswa-siswa yang berprestasi tinggi yang secara teratur mampu menggunakan pengetahuan apa yang telah diketahui untuk memperluas informasi baru ketika mereka membaca dan belajar. Sejalan dengan hal tersebut, Usodo [19] menemukan bahwa banyak siswa pandai yang menggunakan cara-cara yang cerdas di luar dugaan dan kebiasaan, sehingga memberikan jawaban yang singkat dan akurat dalam memecahkan masalah matematika.

Dilain pihak, proses pemecahan masalah matematika sangat terkait dengan tahap-tahap pemecahan masalah yang dilakukan (Usodo [18]). Krulik dan Rudnick [20] menyusun prosedur memecahkan masalah dalam empat langkah, yaitu: (1) membaca dan berfikir (*read and think*), (2) mengeksplorasi dan merencanakan

(*explore and plan*), (3) memilih strategi (*select a strategy*), (4) menentukan penyelesaian (*find an answer*), dan (5) merefeksi dan memperluas (*reflect and extend*). Meskipun siswa menguasai langkah-langkah penyelesaian masalah, terkadang sering mengalami kesulitan dalam memecahkan masalah. Berkaitan dengan proses berpikir reflektif dalam pemecahan masalah, maka proses berpikir reflektif yang dilalui siswa dalam proses pemecahan masalah dapat dilacak dari tahap-tahap pemecahan masalah. Berdasarkan teori dan hasil riset yang ada, dirasa perlu adanya penelitian lanjutan berupa penelitian kualitatif untuk menggali lebih mendalam terkait proses berpikir reflektif. Adapun tujuan penelitian ini adalah mendeskripsikan proses berpikir reflektif siswa kelas X MAN Ngawi yang berkemampuan awal matematika tinggi dalam pemecahan masalah berdasarkan langkah Krulik dan Rudnick.

## 2. PROSES BERPIKIR REFLEKTIF DALAM PEMECAHAN MASALAH

Dewey [1] mendefinisikan berpikir reflektif sebagai pertimbangan yang kuat, tetap dan cermat terhadap keyakinan atau bentuk pengetahuan apapun yang cenderung dianggap benar. Berpikir reflektif dipandang sebagai proses kognitif aktif dan berkelanjutan yang diterapkan diberbagai pengaturan dan konteks (Rogers [21]). Hal ini berarti bahwa proses berpikir reflektif tidak memiliki awal atau akhir yang ditetapkan. Sebaliknya, berpikir reflektif dipahami sebagai proses yang kontinyu, terus berkembang spiral dimana situasi yang menantang mengantarkan proses berpikir reflektif dan melalui berpikir reflektif inilah interpretasi dan pemahaman baru akan diperoleh. Skemp [22] menjelaskan alur proses terjadinya berpikir reflektif sebagaimana Bagan berikut.



Bagan terjadinya proses berpikir reflektif

dipahami bahwa terjadinya proses berpikir reflektif seorang individu dipicu dengan adanya faktor luar (*eksternal environment*) yang kemudian diterima oleh reseptor. Kemudian pancaindra sebagai reseptor me-respons informasi tersebut. Register senso-rik membantu informasi tersebut masuk dan terjadi aktivitas mental (*intervening mental activities*) sehingga terjadi pemrosesan informasi yaitu informasi diterjemahkan ke dalam satu atau lebih proposisi dalam memori kerja individu. Sementara itu, proposisi-proposisi yang terkait dengan memori jangka panjang akan diberi tanda. Proposisi-proposisi yang baru berhubungan dengan proposisi-proposisi yang terkait dengan memori kerja melalui proses aktivasi yang menyebar. Pada tahapan ini, siswa mungkin memunculkan proposisi-proposisi tambahan. Seluruh proposisi baru yang diterima dan dihasilkan disimpan dalam LTM. Dari memori jangka panjang kemudian dihasilkan respons (*efectors*).

*Eksternal Environment* yang dimaksud dalam bagan proses berpikir reflektif adalah faktor luar yang memicu terjadinya proses berpikir reflektif. Loughran [23] menggambarkan sebagai *problematic or puzzling situation that needs to be attended to*. Berdasarkan pernyataan Loughran tersebut, maka dibutuhkan suatu situasi yang meragukan (masalah) atau membingungkan untuk memicu terjadinya proses berpikir reflektif. Masalah merupakan situasi yang memerlukan pemecahan dimana individu tidak melihat suatu alat atau metode yang jelas dalam memperoleh pemecahan dari masalah yang bersangkutan (Krulik dan Rudnik [20]). Lebih lanjut, untuk menemukan solusi dari situasi yang tidak biasa tersebut, individu dituntut untuk menggunakan berbagai pengetahuan, keterampilan, dan pemahaman yang diperoleh sebelumnya. Adapun langkah-langkah pemecahan masalah sebagai berikut, 1) membaca dan berpikir (*read and think*); 2) mengeksplorasi dan merencanakan (*explore and plan*); 3) memilih strategi (*select a strategy*); 4) menentukan penye-

lesaian (*find an answer*); dan merefleksi dan generalisasi (*reflect and extend*) (Krulik dan Rudnik [20]). Dengan demikian indikator proses berpikir reflektif dalam pemecahan masalah dijelaskan sebagaimana Tabel berikut.

**Tabel 2.1**  
Indikator Proses Berpikir Reflektif dalam Pemecahan Masalah

<b>Langkah-Langkah Pemecahan Masalah</b>	<b>Indikator Proses Berpikir Reflektif dalam Pemecahan Masalah</b>
Membaca dan berpikir ( <i>Read and Think</i> )	Meyakini bahwa apa yang dibaca dan dipikirkan adalah benar
Mengeksplorasi dan merencanakan ( <i>Explore and Plan</i> )	Menyeleksi dan mempertimbangkan berbagai informasi untuk menyusun rencana pemecahan masalah
	Meyakini strategi/rencana awal pemecahan masalah yang disusun adalah benar
Memilih strategi ( <i>Select a strategy</i> )	Mempertimbangkan bahwa rencana/strategi pemecahan masalah yang ditentukan berdasar pada data dan informasi yang ada
Menentukan penyelesaian ( <i>Find an answer</i> )	Memahami setiap langkah pengerjaan berdasarkan strategi pemecahan masalah yang dipilih adalah benar
Merefleksi dan generalisasi ( <i>Reflect and Extend</i> )	Mempertimbangkan dan meyakini kesesuaian antara hasil yang diperoleh dengan permasalahan yang ada

### 3. PROSES BERPIKIR REFLEKTIF SISWA KELAS X MAN NGAWI YANG BERKEMAMPUAN AWAL MATEMATIKA TINGGI DALAM PEMECAHAN MASALAH BERDASARKAN LANGKAH KRULIK DAN RUDNICK

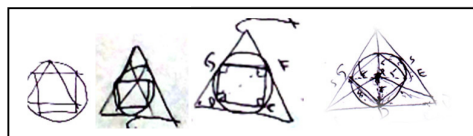
Penelitian ini dilakukan di MAN Ngawi, pada semester genap tahun ajaran 2014/2015. Subjek penelitian ini adalah siswa kelas X MAN Ngawi tahun ajaran 2014/2015 semester genap yang telah menempuh materi trigonometri. Teknik pemilihan subjek penelitian menggunakan *purposive sampling* yaitu suatu cara pengambilan informan sumber data dengan pertimbangan tertentu. Diperoleh dua siswa sebagai subjek penelitian.

Data penelitian yang dikumpulkan adalah proses berpikir reflektif siswa yang diperoleh dari wawancara berbasis tugas pemecahan masalah. Tugas pemecahan masalah tersebut terkait materi bangun datar dan trigonometri yang diberikan kepada subjek. Hasil pekerjaan subjek dijadikan sebagai dasar wawancara berbasis tugas, kemudian dianalisis sehingga diperoleh kesimpulan sementara proses berpikir reflektif subjek. Pada waktu yang berbeda, subjek diberikan tugas pemecahan masalah yang isomorf dilanjutkan dengan wawancara berbasis tugas, data kemudian dianalisis dan dilakukan triangulasi waktu untuk mengetahui keajegan data. Analisis data dilakukan dengan mengelompokkan data sesuai dengan langkah-langkah pemecahan masalah Krulik dan Rudnick yaitu 1) membaca dan berpikir (*read and think*), 2) mengeksplorasi dan merencanakan (*explore and plan*), 3) memilih strategi (*select a strategy*), 4) menentukan jawaban (*find an answer*), dan 5) merefleksikan dan generalisasi (*reflect and extend*).

Berdasarkan analisis data, diperoleh proses berpikir reflektif siswa kelas X MAN Ngawi yang berkemampuan awal matematika tinggi dalam pemecahan masalah berdasarkan langkah Krulik dan Rudnick, yaitu pada langkah membaca dan berpikir, siswa meyakini apa yang dibaca

dan dipikirkan benar dengan (a) membaca soal secara berulang, (b) memberikan makna setiap kalimat soal pemecahan masalah, (c) merepresentasikan masalah, dan (d) menggunakan intuisi dan bertanya pada diri sendiri untuk meyakini bahwa apa yang dibaca dan dipikirkan adalah benar.

Pada langkah mengeksplorasi dan merencanakan, siswa menyeleksi dan mempertimbangkan berbagai informasi yang diberikan, diperlukan, dan kecukupan informasi untuk menyusun rencana pemecahan masalah adalah dengan (a) menganalisis konsep atau informasi yang ada pada pokok permasalahan dan situasi masalah; (b) menghasilkan dan memeriksa kembali kebenaran informasi yang akan digunakan; dan (c) menggunakan intuisi dan bertanya pada diri sendiri (*self-questioning*) untuk meyakini bahwa informasi tersebut dapat digunakan untuk menyusun rencana penyelesaian masalah. Siswa meyakini rencana awal pemecahan masalah yang disusun benar dengan cara (a) mengorganisasikan masalah; (b) memutuskan dengan tegas berbagai rencana awal yang disusun; dan (c) menggunakan intuisi dan bertanya pada diri sendiri untuk yakin bahwa rencana yang disusun adalah benar. Berikut adalah hasil representasi subjek pada tugas pemecahan masalah pertama.



**Gambar hasil representasi subjek pada tugas pemecahan masalah pertama**

Solso *et.al* [24] menyebut representasi pengetahuan secara visual sebagai perum-pamaan atau pembayangan mental (*mental imagery*). Kaldrimidou (Gagatsis dan Patronis [25]) mencatat bahwa pembayangan mental sebagai objek mental untuk melakukan proses berpikir reflektif. Pembayangan mental akan membantu individu untuk menyelesaikan masalah. Selain itu, pembayangan mental akan membantu untuk mereorganisasikan berbagai penge-

tahuan dan merekonstruksi konsep dari masalah. Clark dan Paivio (Solso *et.al* [24]) menyatakan bahwa LTM memiliki dua sarana untuk merepresentasikan pengetahuan yaitu sistem verbal dan sistem imaginal. Sistem verbal memasukkan pengetahuan yang diekspresikan dengan bahasa sedangkan sistem imaginal atau sistem gambar menyimpan informasi visual dan spasial. Kedua sistem ini saling berkaitan, sebuah kode verbal dapat dikonversi menjadi sebuah kode imaginal atau kode gambar, demikian sebaliknya. Berbeda dengan teori dua-kode, teori *unier (unitary teory)* yang menyatakan bahwa semua informasi direpresentasikan dalam LTM dalam bentuk kode-kode verbal (proposisi-proposisi).

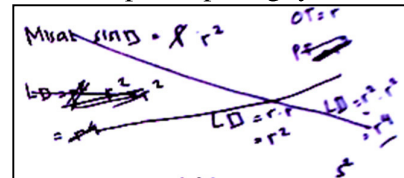
Pada langkah menentukan strategi, siswa mempertimbangkan bahwa strategi pemecahan masalah yang ditentukan berdasar pada data dan informasi yang diperoleh dengan (a) mengembangkan rencana awal penyelesaian dengan bekerja pada hasil representasi secara *trial-error* dan *guess-test*; (b) menentukan pola pemecahan masalah; dan (c) memeriksa kembali setiap proses yang dilakukan; dan (c) menggunakan intuisi dan bertanya pada diri sendiri untuk meyakini strategi pemecahan masalah yang dipilih adalah benar.

Feldman [26] menyatakan bahwa untuk menemukan solusi dapat dilakukan dengan menggunakan strategi *trial-error*. Penyelesaian masalah yang kompleks seringkali melibatkan penggunaan heuristik, jalur pendek kognitif yang dapat menghasilkan solusi. Heuristik yang paling sering digunakan dalam pemecahan masalah adalah analisis *mens-end*. Suatu analisis *mens-end* setiap langkah membawa individu semakin dekat dengan suatu resolusi. Meskipun pendekatan ini sering kali efektif jika masalah tersebut memerlukan langkah tidak langsung yang secara temporer meningkatkan diskrepansi antara suatu kondisi saat ini dengan solusi, analisis *mens-end* menjadi tidak produktif.

Pada langkah menentukan penyelesaian, siswa memahami setiap langkah pe-

ngerjaan berdasar strategi pemecahan masalah yang dipilih dengan (a) mengerjakan berulang dengan menggunakan pola yang dipilih; (b) memeriksa dan mencermati setiap langkah pengerjaan dan perhitungan yang dilakukan dengan bekerja mundur; (c) menyadari adanya kesalahan (rumus, komputasi, dan nulis) dan memperbaikinya; (d) menggunakan intuisi dan bertanya pada diri sendiri untuk meyakini langkah-langkah pengerjaannya sesuai dengan cara yang dipilih.

Berikut disajikan beberapa kesalahan yang dilakukan subjek dalam menyelesaikan tugas pemecahan masalah. Kesalahan konsep luas persegi yaitu



**Kesalahan penggunaan rumus**

$$L\Delta ABC = L\Delta AOB + L\Delta BOC + L\Delta AOC$$

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin 60 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot r \cdot \sin 60 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot r + \frac{1}{2} \cdot a \cdot r$$

**Kesalahan komputasi**

$$L\Delta ABC : L\Delta = 3\sqrt{3}r^2 : r^2$$

$$= 3\sqrt{3} : 1$$

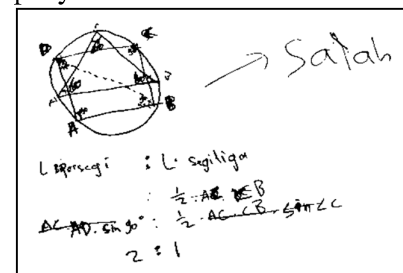
$$= 3\sqrt{3} : 1$$

**Kesalahan penulisan**

$$a = \frac{12r}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{6r}{\sqrt{3}}$$

**Kesalahan merepresentasikan masalah dan penyelesaian**



Pada langkah merefleksi dan generalisasi, siswa mempertimbangkan kese-

suaian antara hasil yang diperoleh dengan masalah yang ada dengan (a) merefleksikan setiap proses yang dilakukan untuk mendapatkan solusi; dan (b) menggunakan intuisi dan bertanya pada diri sendiri untuk meyakini bahwa solusi yang diperoleh sudah menjawab permasalahan yang ada.

Satu hal yang menarik yang ditunjukkan oleh subjek dengan kemampuan awal matematika tinggi adalah setiap langkah pemecahan masalah yang dilaluinya dengan cara bertanya pada diri sendiri (*self questioning*) dan menggunakan intuisinya untuk meyakinkan diri apa yang dilakukannya adalah benar. Hasil penelitian ini semakin menguatkan penelitian terdahulu yang dilakukan oleh Teekman [27]. Teekman mencatat dari hasil studinya bahwa bertanya pada diri sendiri merupakan hal yang penting dalam menunjang pengembangan proses berpikir reflektif. Bertanya pada diri sendiri digunakan untuk mengkreasikan dan memahami makna suatu objek mental. Lebih lanjut, adapun beberapa manfaat bertanya pada diri sendiri adalah 1) membantu individu untuk mengklarifikasi dan mengkategorikan situasi dan kejadian, dan berkontribusi untuk keterampilan logika berpikir; 2) membantu untuk menstrukturisasi proses berpikir dan mengurangi kemungkinan *overlooking* aspek penting dalam suatu kejadian; 3) membantu individu untuk membuat makna dari suatu situasi dan merencanakan apa yang harus dilakukan selanjutnya; dan 4) membantu individu untuk mengklarifikasi skema atau aturan yang ada dalam diri yang kemudian digunakan untuk merespon dalam konteks yang lebih luas.

Intuisi dijelaskan oleh Fischbein [28] sebagai kognisi yang secara subjektif kebenarannya terkandung di dalamnya, dapat diterima dengan sendirinya dan langsung, holistik, penggiringan dan pemerkiraan. Salah satu karakteristik intuisi adalah *coerciveness*, yaitu intuisi mempunyai sifat menggiring kearah sesuatu yang diyakini yang berarti bahwa individu cenderung menolak interpretasi alternatif yang akan mengkontradiksi intuisinya. Hal

ini sejalan dengan penelitian Hogarth [29] yang menyatakan bahwa intuisi akan hadir dan digunakan ketika berhadapan dengan dilema pemecahan masalah atau pengambilan keputusan. Lebih lanjut, Fischbein [28] menyatakan bahwa intuisi dapat dijadikan sebagai *mediating cognitive* yang dapat dijadikan jembatan pemahaman seseorang, sehingga dapat membantu dan memudahkan dalam mengaitkan objek yang dibayangkan dengan alternatif solusi yang diinginkan.

#### 4. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan, diperoleh kesimpulan sebagai berikut. Proses berpikir reflektif siswa kelas X MAN Ngawi yang berkemampuan awal matematika tinggi dalam pemecahan masalah berdasar langkah Krulik dan Rudnick yaitu: (1) pada langkah membaca dan berpikir, siswa meyakini apa yang dibaca dan dipikirkan benar dengan (a) membaca soal berulang; (b) memberikan makna setiap kalimat tes pemecahan masalah, dan (c) merepresentasikan masalah; (2) pada langkah mengeksplorasi dan merencanakan, siswa menyeleksi dan mempertimbangkan berbagai informasi untuk menyusun rencana awal pemecahan masalah dengan (a) menganalisis konsep atau informasi yang ada pada pokok permasalahan dan situasi masalah; dan (b) menghasilkan dan memeriksa kembali kebenaran informasi yang akan digunakan. Siswa meyakini rencana awal pemecahan masalah yang disusun adalah benar dengan cara (a) mengorganisasikan masalah; (b) memutuskan dengan tegas berbagai rencana awal yang disusun; (3) pada langkah memilih strategi, siswa mempertimbangkan strategi pemecahan masalah yang ditentukan berdasar pada data dan informasi yang diperoleh dengan (a) mengembangkan rencana awal penyelesaian dengan bekerja pada hasil representasi secara *trial-error* dan *guess-test*; (b) menentukan pola pemecahan masalah; dan (c) memeriksa kembali setiap proses yang dilakukan; (4) pada langkah menentukan

penyelesaian, siswa memahami setiap langkah pengerjaan berdasar pada strategi pemecahan masalah yang dipilih adalah benar dengan (a) memastikan rumus yang digunakan (luas bangun datar, luas segitiga jika diketahui dua buah sisi yang mengapit sebuah sudut, dan perbandingan trigonometri untuk sudut istimewa berdasarkan pertimbangan yang kuat dan cermat); (b) mengerjakan berulang dengan menggunakan pola yang dipilih; (c) memeriksa dan mencermati setiap langkah pengerjaan dan perhitungan yang dilakukan dengan bekerja mundur; dan (d) menyadari adanya kesalahan (rumus, komputasi, dan nulis) dan memperbaikinya; (5) pada langkah merefleksi dan generalisasi, siswa mempertimbangkan kesesuaian antara hasil yang diperoleh dengan permasalahan yang ada dengan (a) merefleksi setiap proses yang dilakukan untuk mendapatkan solusi; dan (b) menguji kebenaran kesimpulan yang diambil dengan memverifikasi informasi. Pada setiap langkah pemecahan masalah selalu menggunakan intuisi dan bertanya pada diri sendiri (*self questioning*) untuk meyakinkan diri apa yang dilakukan adalah benar. Siswa menggunakan intuisi dan bertanya pada diri sendiri (*self-questioning*) untuk meyakinkan diri apa yang dilakukan adalah benar pada setiap langkah pemecahan masalah.

##### 5. Daftar Pustaka

- [1] Dewey, J. *How We Think: A Restatement of the Relation of Reflective Thinking to the Educative Process*. Boston, MA: D.C., Heath and Company, 1933
- [2] Skemp, R. R. *The Psychology of Learning Mathematics*. Great Britain: Penguin Books, 1982.
- [3] Ayazgok, B. dan Aslan, H. The Review of Academic Perception, Level of Metacognitive Awareness and Reflective Thinking Skills of Science and Mathematic University Student. *Procedia-Social and Behavioral Sciences Vol.141, PP. 781 – 790, 2014*
- [4] Kurniawati, L., Kusumah, Y. S., Sumarmo, U., dan Sabandar, J. Enhancing Students' Mathematical Intuitive-Reflective Thinking Ability Through Problem-Based Learning with Hypoteaching Method. *Journal of Education and Practice, Vol.5, No.36, 2014.*
- [5] Gurol. A. Determining the Reflective Thinking Skills of Pre-Service Teachers in Learning and Teaching Process. *Energy Education Science and Technology Part B: Social and Educational Studies, Volume (Issue) 3(3): 387-402, 2011*
- [6] Choy, S. C. dan OO, P. S. Reflective Thinking And Teaching Practices: A Precursor For Incorporating Critical Thinking Into The Classroom?. *International Journal of Instruction. Vol 5. No 1. (e-ISSN: 1308-1470), 2012.*
- [7] Sezer, R. Integration of Critical Thinking Skills into Elementary School Teacher Education Courses in Mathematics. *Education, 128(3), PP. 349-362, 2008.*
- [8] Tan, O. S. *Cognition, Metacognition, and Problem-Based Learning, in Enhancing Thinking through Problem-based Learning Approaches*. Singapore: Thomson Learning, 2004.
- [9] Kosslyn, S. M. Reflective Thinking and Mental Imagery: A Perspective on the Development of Posttraumatic Stress Disorder. *Development and Psychopathology Vol.17, PP. 851–863, Cambridge University Press, 2005.*
- [10] Schunk, D. H. *Learning Theories an Educational Perspective, Sixth Edition*. Penerjemah: Eva Hamdiah dan Rahmat Fajar. Yogyakarta: Pustaka Pelajar, 2012.
- [11] Craik, F. I. M. Levels of Processing: Past, Present... and

- Future. *Memory*. 10 (5/6), 305-318, 2002.
- [12] Shapiro, A. M. How Including Prior Knowledge As a Subject Variable May Change Outcomes of Learning Research. *American Educational Research Journal Spring 2004, Vol. 41, No. 1, pp. 159–189*, 2004.
- [13] Ibrahim. *Peningkatan Kemampuan Komunikasi, Penalaran, dan Pemecahan Masalah Matematis serta Kecerdasan Emosional Melalui Pembelajaran Berbasis Masalah Pada Siswa Sekolah Menengah Atas*. Disertasi SPS UPI. Bandung: Tidak Diterbitkan, 2011.
- [14] Nindiasari, H. *Meningkatkan Kemampuan dan Disposisi berpikir Reflektif Matematis serta Kemampuan Belajar Siswa SMA melalui Pembelajaran dengan Pendekatan Metakognitif*. Disertasi SPS UPI. Bandung: Tidak diterbitkan, 2013.
- [15] Hamdi, S. *Memahami Karakteristik Psikologis Siswa dalam Pembelajaran Matematika Berdasarkan Kecerdasan Intuitif dan reflektif*. Makalah dipresentasikan dalam Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika dengan tema "Kontribusi Pendidikan Matematika dan Matematika dalam Membangun Karakter Guru dan Siswa" pada tanggal 10 November 2012 di Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY, ISBN : 978-979-16353-8-7. Yogyakarta: FMIPA, 2012.
- [16] Siswono, T. Y. E. *Penjenjangan Kemampuan Berpikir Kreatif dan Identifikasi Tahap Berpikir Kreatif Siswa dalam Memecahkan dan Mengajukan Masalah Matematika*. Disertasi PPS UNESA. Surabaya: Tidak diterbitkan, 2007.
- [17] Nurman, T. A. *Profil Kemampuan Siswa SMP dalam Memecahkan masalah Matematika Open Ended Ditinjau dari Perbedaan Tingkat Kemampuan Matematika*. PPS UNESA. Surabaya: Tidak diterbitkan, 2008.
- [18] Ormrod, E.J. *Psikologi Pendidikan*. Jakarta: Erlangga, 2008.
- [19] Usodo, B. *Karakteristik Intuisi Siswa SMA dalam Memecahkan Masalah Matematika Ditinjau dari Perbedaan Gender*. Jurnal.Untad. AKSIOMA, 2012.
- [20] Krulik, S. dan Rudnick, J. A. 1988. *Problem Solving: A Handbook for Teachers*. Boston: Allyn & Bacon, 1988.
- [21] Rogers, R. R. *Reflective Thinking in Professional Practice: a Model*. CPD Journal Volume (3). Chicago USA: Associate Professor (Professional Studies) DePaul University, 2000.
- [22] Skemp, R. R. *The Psychology of Learning Mathematics*. Great Britain: Penguin Books, 1982.
- [23] Loughran, J. J. *Developing Reflective Practice: Learning About Teaching and Learning Through Modeling*. Washington, DC: Falmer, 1996.
- [24] Solso, L.R., Maclin, H.O., dan Maclin, K. M. *Psikologi Kognitif*. Jakarta: Erlangga, 2008.
- [25] Gagatsis, A. dan Patronis, T. *Using Geometrical Models in a Process of Reflective Thinking in Learning and Teaching Mathematics*. *Educational Studies in Mathematics Netherlands, Vol. 21, 29-54*, 1990.
- [26] Feldman, R. S. *Understanding Psychology 10<sup>th</sup> ed*. New York: McGraw-Hill, 2012.
- [27] Teekman, B. *Exploring Reflective Thinking in Nursing Practice*. *Journal of Advanced*

- Nursing, Vol. 3, Number 5, PP. 1125-1135, 2000.*
- [28] Fischbein, E. *Intuition in Science and Mathematics*. Dordrecht: D. Reidel, 1987.
- [29] Hogarth, R. *Educating Intuition*. Chicago: University of Chicago Press, 2001.
-

## SELF EFFICACY SEBAGAI KARAKTER DALAM MATEMATIKA

Fertilia Ikashaum<sup>1</sup>, Sri Hastuti Noer<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universitas Lampung

**Abstrak.** *Self efficacy* adalah keyakinan siswa terhadap kompetensi yang dimilikinya untuk berhasil mengerjakan tugas-tugas yang diberikan. Saat siswa diberikan suatu tugas matematika, ada dua kondisi yang tercipta dalam kelas tersebut. Pertama, siswa akan antusias dalam mengerjakannya; dan kedua, siswa akan mengerjakan tugasnya dengan setengah hati. Dari keadaan ini dapat diklasifikasikan mana saja siswa yang memiliki keyakinan tinggi bahwa ia akan berhasil dalam tugas-tugasnya dan mana yang tidak. Keyakinan siswa ini adalah karakter yang penting untuk divisualisasikan dalam kehidupan sehari-harinya. Jika *self efficacy* ini dapat dipahami dan dikembangkan oleh guru, maka siswa akan memiliki kepercayaan diri dalam menyelesaikan setiap masalah yang dimilikinya, bukan hanya dalam matematika, tetapi juga dalam kehidupan sehari-harinya. Untuk mengembangkan karakter ini, perlu dipahami terlebih dahulu apa yang dimaksud dengan *self efficacy*, kaitan *self efficacy* dengan pelajaran matematika, apa saja sumbernya, bagaimana cara mengukurnya, dan skala yang digunakan.

**Kata kunci:** Karakter, Pendidikan Matematika, *Self Efficacy*.

### 1. PENDAHULUAN

Dalam upaya bersaing di era teknologi yang semakin modern, kualitas pendidikan perlu ditingkatkan, salah satunya dalam bidang matematika. Matematika merupakan ilmu dasar pengembangan sains yang memiliki banyak peranan dalam menyelesaikan permasalahan dalam kehidupan sehari-hari. Besarnya peran yang dimilikinya menjadikan matematika suatu ilmu yang wajib dikuasai oleh siswa. Akan tetapi, matematika selalu dianggap sebagai mata pelajaran yang sulit dan membosankan. Siswa seringkali mengatakan bahwa matematika hanya mata pelajaran yang memerlukan kemampuan menghafal rumus dan berhitung yang baik.

Anggapan matematika adalah pelajaran yang sulit disebabkan tujuan sebenarnya dari belajar matematika belum disadari oleh siswa. Adapun tujuan pembelajaran matematika di sekolah yang diungkapkan oleh Depdiknas [1] adalah: (1) melatih cara berpikir dan bernalar dalam menarik kesimpulan; (2) mengembangkan aktivitas kreatif yang melibatkan imajinasi, intuisi, dan penemuan dengan mengembangkan pemikiran divergen, orisinal, rasa ingin tahu, membuat prediksi dan dugaan, serta mencoba – coba; (3) mengembangkan kemampuan memecah-

kan masalah; dan (4) mengembangkan kemampuan menyampaikan informasi dan mengkomunikasikan gagasan. Dengan demikian, tujuan belajar matematika tidak terbatas pada pengembangan kemampuan kognitif saja, tetapi juga melibatkan kemampuan afektif dan psikomotor siswa.

Matematika tidak hanya dapat digunakan untuk mengembangkan kecakapan kognitif siswa, tetapi juga membentuk nilai-nilai pada diri siswa sehingga terbentuk suatu karakter positif. Oleh karena itu, untuk membentuk karakter siswa tidaklah diperlukan mata pelajaran khusus, tetapi dapat diintegrasikan juga ke dalam pelajaran matematika. Sudrajat (Yohanes [2]) mengatakan bahwa pendidikan karakter dapat diintegrasikan dalam pembelajaran pada setiap mata pelajaran. Materi pembelajaran yang dapat mengembangkan karakter positif perlu dikaitkan dengan kehidupan sehari-hari, sehingga pembelajaran yang mengandung karakter ini tidak hanya menyentuh daerah kognitif siswa, tetapi juga dapat divisualisasikan siswa di kehidupannya sendiri

Hasil penelitian Prabowo dan Pramono [3] juga menekankan bahwa pembelajaran matematika tidak sekadar mengajarkan matematika, tetapi juga mendidik untuk membangun dan memahat karakter. Menurut Soedjadi, kemampuan

yang dapat diperoleh dalam pembelajaran matematika diantaranya adalah kemampuan berpikir kreatif, kemampuan berpikir dan bertindak secara mandiri berdasarkan alasan yang dapat dipertanggungjawabkan, serta kemampuan memecahkan masalah dalam berbagai situasi (Siswono [4]). Dari pendapat tersebut, jelas terlihat bahwa pembelajaran matematika memerlukan kemandirian siswa dalam mengembangkan kemampuannya mengolah masalah yang disajikan. Dari kemandirian ini kemudian akan tercipta kepercayaan diri pada siswa, terlepas dari fakta bahwa solusi yang siswa dapatkan berasal dari kemampuannya sendiri atau dari faktor lain selama ia belajar.

Saat siswa diberikan suatu tugas akan tercipta dua kondisi dalam kelas tersebut. Pertama, sebagian siswa akan antusias dalam mengerjakannya; dan kedua, siswa lainnya akan melaksanakannya dengan setengah hati. Penyebab siswa yang mengerjakan tugasnya dengan setengah hati antara lain karena ketidapahamannya dalam materi yang diberikan. Dari keadaan ini dapat di-klasifikasikan mana saja siswa yang memiliki keyakinan tinggi bahwa ia dapat berhasil dalam tugas-tugasnya dan mana saja siswa yang tidak yakin dengan kompetensi dirinya untuk berhasil dalam tugas-tugasnya. Selanjutnya, karakter yakin pada kemampuan dirinya sendiri ini disebut dengan *self efficacy*.

Untuk meningkatkan karakter percaya pada kemampuan diri siswa sendiri ini, perlu diketahui terlebih dahulu apa yang dimaksud dengan *self efficacy*, apa saja yang menjadi sumber munculnya *self efficacy* pada siswa, kaitan *self efficacy* dengan pelajaran matematika, dan sebagainya. Dengan demikian, dalam proses pembelajaran, siswa tidak hanya akan menguasai sisi kognitif dari matematika, tetapi juga dapat dikembangkan kepercayaan dirinya dalam menyelesaikan masalah.

## 2. SELF EFFICACY

Kemampuan siswa dalam menyelesaikan tugas-tugas yang diberikan tidak hanya bergantung pada kemampuan kognitifnya saja, tetapi juga pada keyakinan dirinya dalam menyelesaikan tugas tersebut. Kepercayaan diri atas kemampuannya dalam menyelesaikan tugas dengan baik ini disebut *self efficacy*. Bandura [5] mendefinisikan *self efficacy* sebagai kepercayaan yang dimiliki seseorang mengenai kemampuannya untuk mengatur dan memutuskan tindakan tertentu untuk mencapai tujuan yang ditetapkan. Santrock [6] menyebut *self efficacy* sebagai keyakinan bahwa seseorang bisa menguasai situasi dan mendapatkan hasil positif. Lebih lanjut Pajares and Schunk [7] menyebut *self efficacy* sebagai penilaian kepercayaan terhadap kinerja seseorang berkaitan dengan keyakinan yang berhubungan langsung terhadap pencapaian yang akan dituju. Dengan demikian, *self efficacy* adalah kepercayaan yang dimiliki seseorang terhadap kemampuan dirinya sendiri untuk dapat menyelesaikan tujuan yang telah ditetapkannya.

*Self-efficacy* individu didasarkan pada empat hal menurut Bandura (Zeldin [8]), yaitu: (1) *authentic mastery experiences*; (2) *vicarious experiences*; (3) *verbal persuasions*; (4) *physiological indexes*. Berikut akan dijelaskan mengenai sumber-sumber tersebut berdasarkan Zeldin [8], Pajares [9], dan Loo [10]:

### 1. *Authentic mastery experiences*

Penguasaan pengalaman yang berasal dari pengalaman pribadi merupakan sumber *self efficacy* yang paling besar pengaruhnya siswa. Pengalaman saat siswa berhasil mengerjakan tugas akan meningkatkan *self efficacy* dan minat pada tugas tersebut. Sebaliknya, jika kegagalan terjadi berulang-ulang, maka *self efficacy* akan menurun. Sederhananya, siswa menilai hasil dari kegiatan-kegiatan mereka dan menginterpretasikannya dari penilaian ini sehingga menciptakan keyakinan tingkat keberhasilan mereka.

### 2. *Vicarious experiences*

Dalam *vicarious experience*, seseorang memberikan contoh penyelesaian. Semakin dekat siswa mengidentifikasi diri dengan sang model, akan semakin besar pula dampaknya pada *self efficacy*. Bila sang model bekerja dengan baik, maka efikasi diri siswa meningkat, tetapi bila sang model bekerja dengan buruk, maka *self efficacy* siswa menurun.

### 3. *Verbal persuasion*

*Verbal persuasions* meyakinkan seseorang bahwa mereka memiliki keterampilan untuk menyelesaikan tugasnya. Siswa yang memiliki *self efficacy* tinggi akan mendapat pengaruh yang paling positif sehingga meningkatkan keberhasilan pribadi dan keterampilannya. Sebaliknya, *verbal persuasion* ini dapat melemahkan *self efficacy* siswa yang tingkatnya masih rendah, sehingga siswa akan menganggap bahwa mereka tidak memiliki kemampuan yang baik.

### 4. *Physiological indexes*

Indeks psikologi merupakan reaksi fisik dan psikologis yang menyebabkan seseorang siaga, bergairah atau tegang. Perlu diperhatikan bahwa gejala emosional yang tinggi dapat melemahkan *self efficacy* siswa. Faktor lingkungan juga memiliki pengaruh yang kuat terhadap penilaian keadaan psikologi siswa. Oleh karena itu, emosi seseorang terhadap keberhasilan penyelesaian tugas akan bervariasi tergantung pada faktor-faktor situasionalnya.

Bandura (J. Strecher, V. Et al, [11]) menyatakan bahwa pengukuran *self efficacy* seseorang mengacu pada tiga dimensi, yaitu *magnitude*, *strength*, dan *generality*. Berikut akan diuraikan mengenai ketiga dimensi tersebut:

#### 1. *Magnitude*

Dimensi ini berkaitan dengan penyusunan tugas-tugas berdasarkan tingkat kesulitan yang diyakini seseorang untuk dapat diselesaikan. Misalnya, jika ia dihadapkan pada masalah atau tugas-tugas yang disusun menurut tingkat kesulitan tertentu maka *self efficacy*-nya akan jatuh pada tugas-tugas yang mudah, sedang, dan sulit

sesuai dengan batas kemampuan yang dirasakan untuk memenuhi tuntutan perilaku yang dibutuhkan bagi masing-masing tingkatannya tersebut (Dzulfikar [12]).

#### 2. *Strength*

Dimensi ini berkaitan dengan kepercayaan pada diri seseorang yang dapat diwujudkan untuk melakukan tugas tertentu. Dengan kata lain, dimensi ini menekankan tingkat kekuatan atau kemantapan individu terhadap keyakinannya dalam mengerjakan tugas. Siswa yang memiliki *self efficacy* tinggi akan lebih mudah berpartisipasi dalam tugas dan memperoleh keterampilan, selanjutnya akan mencapai tingkat yang lebih tinggi daripada siswa dengan *self efficacy* rendah (Schunk & Zimmerman, [13]). *Self-efficacy* menjadi dasar dirinya melakukan usaha yang keras, bahkan ketika menemui hambatan sekalipun. Dengan kata lain dimensi ini berkaitan dengan tingkat kegigihan seseorang dalam menghadapi kesulitan.

#### 3. *Generality*

Dimensi ini menunjukkan apakah *self efficacy* seseorang akan berlangsung pada ranah tertentu atau berlaku dalam berbagai macam aktivitas dan situasi. Dengan kata lain, *generality* mengacu pada sejauh mana keyakinan seseorang dari situasi tertentu dapat digeneralisasi ke situasi lain. Dalam keterampilan kognitif, siswa dengan kemampuan matematika yang tinggi diharapkan dapat melanjutkan ke materi matematika selanjutnya dengan hasil yang lebih baik daripada siswa dengan kemampuan matematika rendah. Misalnya jika keyakinan siswa pada materi pengurangan dan perkalian tinggi, maka saat melanjutkan ke materi pembagian, peluang keberhasilannya juga akan tinggi (Schunk [14])

Untuk meningkatkan kepercayaan siswa terhadap kemampuan dirinya diperlukan penanaman rasa percaya diri yang kuat terutama terhadap pelajaran yang ditakuti siswa, seperti matematika. Siswa seringkali menghindari mata pelajaran ini karena dianggap sulit, oleh

karena itu perlu ditanamkan kepercayaan bahwa setiap siswa mampu belajar matematika dengan baik. Zimmerman [15] menunjukkan bahwa *self efficacy* berhubungan positif dengan hasil belajar sebagai akibat dari ketekunan, pengerjaan tugas, kegiatan belajar yang efektif, akuisisi keterampilan, dan prestasi akademis. Lebih lanjut, Schunk dan Pajares [16] mengungkapkan bahwa siswa yang percaya terhadap kemampuan belajarnya akan lebih mudah dalam belajar, lebih mudah mengerjakan tugas, bekerja lebih keras, dan bertahan lebih lama saat menghadapi kesulitan. Hal yang sama juga diungkapkan Noer [17] yang menyatakan bahwa *self-efficacy* yang positif akan mempengaruhi siswa dalam pengambilan keputusannya. Semakin tinggi *self-efficacy* seseorang maka akan semakin tinggi upaya yang dilakukannya dalam menyelesaikan masalah. Jadi, *self efficacy* diperlukan dalam matematika sebagai bentuk kepercayaan diri terhadap kemampuan menyelesaikan masalah matematika, cara belajar dalam mengerjakan tugas, dan ketahanan dalam menghadapi kesulitan.

*Self efficacy* matematika dan prestasi matematika memiliki hubungan yang positif (Liu [18]). *Self efficacy* matematika adalah prediktor signifikan positif terhadap prestasi matematika. Secara khusus, siswa yang memiliki keyakinan terhadap kinerja mereka dalam matematika cenderung memiliki prestasi matematika yang lebih baik. Mereka bisa memahami materi paling sulit yang disajikan dalam teks-teks matematika, memahami materi paling sulit yang disajikan oleh guru, melakukan pekerjaan dengan baik pada tugas matematika, dan menguasai keterampilan yang diajarkan di kelas matematika tersebut.

*Self efficacy* juga dapat mempengaruhi motivasi, ketekunan, upaya, tindakan, perilaku, dan prestasi siswa. Penelitian menunjukkan bahwa *self efficacy* yang tinggi dapat meningkatkan prestasi belajar yang lebih tinggi (Liu [18]). Lebih lanjut Bouchev dan Harter (Tansil, dkk, [19])

menyatakan bahwa prestasi yang diraih oleh siswa dalam suatu bidang tertentu dipengaruhi oleh *self efficacy* individu terhadap bidang tersebut. Seorang siswa yang merasa mampu dalam mengerjakan sesuatu akan berdampak pada keberhasilannya dalam menyelesaikan hal yang ia kerjakan tersebut.

Zimmerman & Schunk [20] menyatakan bahwa terdapat hubungan timbal balik antara tujuan siswa dan persepsi mereka tentang *self efficacy*. Ketika siswa memiliki tujuan yang spesifik untuk mereka sendiri dan terpusat pada waktu, mereka dapat melihat kemajuan belajar mereka lebih jelas, dan ini pada gilirannya dapat meningkatkan *self efficacy* mereka. Hal yang sama berlaku sebaliknya, yaitu jika *self efficacy* siswa meningkat maka siswa dapat menetapkan tujuan akhir bahkan memiliki tujuan yang lebih menantang untuk diri mereka sendiri. Schunk [21] menambahkan bahwa tujuan nonspesifik yang dimaksud adalah kata-kata seperti "Aku dapat melakukan ini". Tujuan yang lebih konkret dan spesifik adalah seperti: "Aku dapat mencapai nilai 100 dalam ujian matematika besok".

Untuk mengembangkan karakter *self-efficacy* dalam mata pelajaran matematika, guru memiliki peran yang sangat penting. Beberapa penelitian yang diungkapkan oleh Liu [18] menunjukkan bahwa *self efficacy* dapat ditingkatkan dengan menggunakan strategi pembelajaran yang tepat. Stipek (Santrock [6]) menjelaskan strategi tersebut sebagai berikut: (1) Ajarkan strategi spesifik; (2) Bimbing siswa dalam menentukan tujuan; (3) Pertimbangkan *mastery*; (4) Kombinasikan strategi latihan dengan tujuan; (5) Sediakan dukungan bagi siswa; (6) Pastikan agar siswa tidak terlalu semangat atau terlalu cemas; dan (7) Beri contoh bagi orang dewasa dan teman. Untuk mengukur sejauh mana siswa memiliki karakter ini, digunakan skala *self efficacy*.

Skala *self efficacy* matematika digunakan untuk mengukur tingkat kepercayaan siswa dalam menyelesaikan

masalah matematika dan tugas sehari-hari yang terkait dengan matematika. Hasil penelitian Liu [18] menunjukkan bahwa sikap matematika memiliki efek langsung dan tidak langsung terhadap prestasi matematika, *self efficacy* adalah mediator variabel antara sikap matematika dan prestasi matematika.

Terdapat beberapa jenis pendapat dalam mengukur *self efficacy* matematika pada siswa. Britner [22] menggunakan pedoman penyusunan item dari Lent, Lopez, et al. Penyusunan penilaian item *self efficacy* terdiri dari sub-item yang mengukur empat sumber *self efficacy*, yaitu mengukur (1) *Mastery experiences* yang terdiri dari delapan sub-item (misalnya “Saya mendapat nilai bagus di kelas matematika pada semester terakhir); (2) *Vicarious experiences* yang terdiri dari tujuh sub-item (misalnya “Banyak orang dewasa yang saya kagumi dalam bidang matematika); (3) *Social Persuasions* yang terdiri dari delapan sub-item (misalnya “Guru saya percaya bahwa saya bisa melakukannya dengan baik pada materi yang sulit); (4) *Physiological States* yang terdiri dari delapan sub-item (misalnya “Matematika membuat saya merasa tidak nyaman dan gugup). Sedangkan Bandura [23] mengukur *self efficacy* berdasarkan derajat kepercayaan diri siswa yang terlihat dalam skala 0-100 dimana 100 menyatakan keyakinan penuh siswa terhadap hal yang diukur, misalnya “Kepercayaan diri untuk pencapaian akademik dalam bidang matematika”

### 3. KESIMPULAN

Karakter *self efficacy* memiliki pengaruh yang besar terhadap keberhasilan siswa dalam belajar. Saat siswa memiliki *self efficacy*, siswa tidak hanya akan belajar percaya pada dirinya saja, tetapi juga belajar untuk mengatasi kesulitan – kesulitan yang dimilikinya. Kepercayaan diri ini dapat terbentuk melalui proses belajar mengajar di kelas. Ketika guru telah menguasai strategi atau latihan-latihan yang mengajak siswa mengolah

kemampuannya sendiri, siswa akan menghargai kemampuan yang dimilikinya tersebut. Dengan demikian siswa akan memiliki kepercayaan bahwa dirinya dapat mengatasi suatu masalah secara mandiri. Jika hal ini terus ditingkatkan, maka siswa akan terbiasa menyelesaikan masalah dalam kehidupan sehari-harinya.

### 4. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Depdiknas, Kurikulum Mata Pelajaran Matematika SMP, Jakarta: Depdiknas, 2004.
- [2] Yohanes, Rudi, “Kontribusi Pendidikan Matematika dalam Pembentukan Karakter Siswa.” *Makalah pada Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan matematika, 3 Desember 2011, Universitas Negeri Yogyakarta*, 2011.
- [3] Prabowo, Agus dan Sidi, Purnomo, “Memahat Karakter Melalui Pembelajaran Matematika.” *Proceedings of The 4th International Conference on Teacher Education, 8 – 10 November 2010. Universitas Pendidikan Indonesia*, 2010.
- [4] Siswono, Tatag, “Membangun Karakter melalui Pembelajaran Matematika.” *Makalah pada Seminar Nasional Pendidikan Matematika, 7 April 2012, Universitas Lambung Mangkurat, Banjarmasin*, 2012.
- [5] Bandura, A, *Self efficacy in Changing Societies*, Cambridge: University of Cambridge, 1995.
- [6] Santrock, J, *Educational Psychology*, 2<sup>nd</sup> Edition, McGraw-Hill Company Inc, 2004.
- [7] Pajares, Frank dan Dale H. Schunk, *Self Belief and School Success: Self-Efficacy, Self Concept, and School Achievement*, London: Ablex Publishing, 2001.  
Tersedia [online]: <http://www.uky.edu/~eushe2/Pajares/PajaresSchunk2001.html> (20 Mei 2015)
- [8] Zeldin, A.L, *Sources and Effects of the Self-Efficacy Beliefs of Men with Careers in Mathematics, Science, and*

- Technology, Emory University, 2000. Disertasi: tidak dipublikasikan. Tersedia [online]: <http://www.des.emory.edu/mfp/ZeldinDissertation2000.PDF> (24 Mei 2015)
- [9] Pajares, "A Sources of Science Self-Efficacy Beliefs of Middle School Students." *Journal of Research in Science Teaching Vol.43 No.5 PP.485-499*, 2006.
- [10] Loo, C.W. dan Choy, J.L.F, *Sources of "Self-Efficacy Influencing Academic Performacce of Engineering Students."* *American Journal of Educational Research, 2013, Vol. 1, No. 3, 86-92*, 2013.
- [11] J. Strecher, V. Et al, "The Role of Self-Efficacy in Achieving Health Behavior Change." *Health Education Quarterly Vol. 13 (1): 73-91(Spring 1986)*. John Wiley & Sons.Inc, 1986.
- [12] Dzulfikar, Ahmad, "Studi Literatur: Pembelajaran Kooperatif Dalam Mengatasi Kecemasan Matematika Dan Mengembangkan Self efficacy Matematis Siswa." *Makalah pada Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan matematika, 9 November 2013, Universitas Negeri Yogyakarta*, 2013.
- [13] Schunk, Dale. H dan Barry J. Zimmerman, "Influencing Children's Self-Efficacy and Self Regulation of Reading and Writing Thorough Modeling." *Reading and Writing Quarterly, 23, 7-25*, 2007. Tersedia [online]: <http://www.tandf.co.uk/journals/> (20 Mei 2015)
- [14] Schunk, Dale. H, "Self-efficacy and academic motivation." *Educational Psychologist, 26, 207-231*, 1991. Tersedia [online]: <http://www.tandf.co.uk/journals/> (20 Mei 2015)
- [15] Zimmerman, Barry J, "A social cognitive view of self-regulated academic learning." *Journal of educational psychology Vol.81 No.3 329-339*, 1989.
- [16] Schunk, Dale. H dan Frank Pajares, *The Development of Academic Self-Efficacy*, San Diego: Academic Press, 2001.
- [17] Noer, Sri Hastuti, "Self-Efficacy Mahasiswa Terhadap Matematika." *Makalah pada Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika, 10 November 2012. Universitas Negeri Yogyakarta, 2012.*
- [18] Liu, Xing, "The Effect of Mathematics Self-efficacy on Mathematics Achievement of High School Students." *NERA Conference Proceedings, 22 Oktober 2009, University of Connecticut*, 2009.
- [19] Tansil, Sampurna, dkk, "Reflected Appraisals dan Mathematic Academic Self-Efficacy pada Siswa SMA." *Anima, Indonesian Psychological Journal, Vol. 24, No.2, 183-188*, 2009.
- [20] Zimmerman, Barry J. dan Schunk, D. H, *Self-Regulated Learning and Academic Achievement*. Mahwah: Erlbaum, 2001.
- [21] Schunk, D. H, "Self-Regulated Learning: The Educational Legacy of Paul R. Pintrich." *Educational Psychologist, 40, 85-94*, 2005.
- [22] Britner, Shari L dan Frank Pajares, "Sources of Sciences Self-Efficacy Beliefs of Middle School Students." *Journal of Research in Science Teaching Vol. 43, No. 5, PP. 485-499*, 2006.
- [23] Bandura, A. "Self-Efficacy Beliefs of Adolescents, 307-337." Greenwich, CT: Information Age Publishing, 2006.

## ANALISIS KEBUTUHAN AWAL DAN PERENCANAAN BAHAN AJAR BERBASIS DIGITAL STORYTELLING UNTUK MENINGKATKAN KOPETENSI PEDAGOGIK MAHASISWA (STUDI KASUS MATA KULIAH STRATEGI PEMBELAJARAN)

A.Y. Soegeng<sup>1</sup>, Ysh, Anton Sukarno<sup>2</sup>, Ida Dwijayanti<sup>3</sup>  
<sup>1,2,3</sup>Jurusan Pendidikan Matematika Universitas PGRI Semarang  
idadwijayanti@upgrismg.ac.id

**Abstrak.** Media yang baik juga akan mampu memberikan motivasi dan meningkatkan ketrampilan dasar peserta didik. Pemanfaatan *Digital storytelling* dalam pembelajaran dapat menginformasikan pesan yang telah dirancang oleh pendidik pada peserta didik melalui video proses pembelajaran sehingga memungkinkan pembelajaran yang lebih realistic dan menyenangkan. Sesuai dengan tujuan penelitian, maka penelitian ini tergolong dalam penelitian pengembangan. Prosedur pengembangan melalui dua tahap yaitu analisis kebutuhan awal dan perancangan dan penyusunan produk. Adapun teknik pengumpulan dan analisis data Metode Dokumentasi untuk memperoleh data awal yang digunakan untuk mengetahui kondisi bahan ajar yang ada serta kemampuan pedagogic calon guru serta Metode Observasi untuk memperoleh data tentang kebutuhan calon guru dan metode dosen dalam mengelola pembelajaran. Semua data ini dianalisis secara deskriptif. Hasil analisis kebutuhan awal ialah informasi tentang kekurangan bahan ajar yang ada, stratgi penyampaian, kebutuhan mahasiswa, materi yang diperlukan serta harapan mahasiswa tentang perkuliahan. Adapun hasil tahap perencanaan dan pengembangan produk awal ialah Sinopsis, *Storyboard*, Skenario, RPP, instrumen tes dan instrumen non tes untuk menilai kemampuan pedagogik calon guru serta lembar validasi RPP, Sinopsis dan Instrumen Tes.

**Kata Kunci:** Bahan Ajar, *Digital Storytelling*, Pedagogik

### 1. PENDAHULUAN

Media pembelajaran merupakan bagian penting dalam pembelajaran, karena media menjadi penentu keberhasilan proses penyampaian pesan dari sumber pesan (pendidik) ke penerima pesan (peserta didik). Media yang baik juga akan mampu memberikan motivasi dan meningkatkan ketrampilan dasar peserta didik (Tinio, 2002). Demikian pula yang terjadi dalam perkuliahan, bahan ajar yang merupakan media pengiriman pesan pada mahasiswa harus disesuaikan dengan karakter pesan (materi) yang ingin di sampaikan serta tujuan yang ingin dicapai.

Bertolak dari karakteristik matakuliah utama sebagai calon guru (strategi pembelajaran, perencanaan pembelajaran serta inovasi pembelajaran) yang padat

akan teori tentang teori belajar dan model pembelajaran serta tuntutan agar mahasiswa juga mampu mengaplikasikan dalam pembelajaran, maka diperlukan bahan ajar yang dapat memvisualisasikan setiap teori yang ada dalam sebuah proses pembelajaran yang telah direncanakan. Pemanfaatan *Digital storytelling* dalam pembelajaran dapat menginformasikan pesan yang telah dirancang oleh pendidik pada peserta didik melalui video proses pembelajaran sehingga memungkinkan pembelajaran yang lebih realistic dan menyenangkan (Skouge, 2009).

Sebagai perguruan tinggi penghasil calon guru, banyak penelitian yang dilakukan dosen yang menghasilkan produk berupa bahan ajar pembelajaran, namun jarang yang mengembangkan bahan

ajar yang langsung berhubungan dengan modal mahasiswa sebagai calon guru. Adapun penelitian-penelitian yang pernah dilakukan sebelumnya di IKIP PGRI Semarang sehubungan dengan ICT dan pengembangan karakter antara lain Nizaruddin (2012) dan Wijonarko (2013) yang semuanya membahas tentang pengembangan bahan ajar dengan subjek peserta didik. Untuk itu perlu adanya sebuah upaya untuk mengembangkan bahan ajar perkuliahan yang mampu menjadi media mahasiswa untuk belajar secara realistic proses pembelajaran yang sesuai dengan teori yang ada sebagai bekal untuk pengembangan kemampuan pedagogiknya.

Berdasarkan uraian latar belakang diatas, maka permasalahan yang dikemukakan dalam penelitian ini adalah bagaimana pengembangan bahan ajar berbasis *digital storytelling* berdasarkan hasil analisis bahan ajar sebelum dikembangkan (studi kasus mata kuliah strategi pembelajaran)?

Berikut akan dibahas teori-teori yang digunakan untuk mengulas proses berpikir mahasiswa ditinjau dari kemampuan metakognisi awal pada pemecahan masalah. *Digital storytelling* yang akan dikembangkan sebagai bahan ajar akan disusun berdasarkan pedoman pemanfaatan *digital storytelling* dalam pembelajaran (Robin, 2014) yang terdiri *digital storytelling*, *lesson plant*, serta *evaluation and assessment*. *Digital storytelling* sendiri akan berupa video suatu pembelajaran yang akan terbagi menjadi 3 video sesuai dengan teori belajar yang akan dipelajari, yaitu behavioristic, kognitif serta humanistik.

Kopetensi pedagogic sebagai karakter utama pendidik yang mengandung beberapa aspek (Kemendiknas, 2010), yaitu: a) menguasai karakter peserta didik; b) Menguasai teori belajar dan prinsip-prinsip pembelajaran yang mendidik, c) kegiatan pembelajaran yang mendidik, d) pengembangan potensi peserta didik dan e) komunikasi dengan peserta didik.

## 2. METODOLOGI PENELITIAN

### 1. Jenis Penelitian

Sesuai dengan tujuan penelitian, maka penelitian ini tergolong dalam penelitian pengembangan. Perangkat yang dikembangkan dalam penelitian ini pada tahun 1 meliputi: (1) RPP (Rencana Pelaksanaan Pembelajaran), (2) Sinopsis digital *storytelling on Movie*, (3) *storyboard* digital *storytelling on Movie*, (4) Skenario digital *storytelling on Movie*, dan (5) Soal Tes Kopetensi Pedagogik Calon Guru.

Instrumen penelitian meliputi: (1) lembar validasi RPP, (2) Lembar Validasi ahli materi Sinopsis dan *storyboard* digital *storytelling on Movie*, (3) lembar pengamatan kopetensi pedagogik calon guru, (4) angket keterbacaan untuk calon Guru; (5) angket respon mahasiswa terhadap perangkat pembelajaran dan proses pembelajaran.

### 2. Prosedur Pengembangan Perangkat

#### a. Tahap Analisis Pendahuluan

Kegiatan yang dilakukan pada tahap ini meliputi analisis terhadap bahan ajar matakuliah strategi pembelajaran yang telah ada ditinjau dari media yang digunakan serta dampak yang diperoleh mahasiswa dari penggunaan bahan ajar yang ada.

#### b. Tahap Perancangan dan Penyusunan Produk Awal

Kegiatan yang dilakukan pada tahap perencanaan ini ialah pemilihan format media dan bahan materi yang akan disajikan dalam media, serta scenario pembelajaran yang akan ditampilkan dalam video.

### 3. Teknik Pengumpulan dan Analisis Data

Teknik pengumpulan data yang digunakan menggunakan metode:

- a. Metode Dokumentasi: Metode ini digunakan untuk memperoleh data awal yang digunakan untuk mengetahui kondisi bahan ajar yang ada serta kemampuan pedagogic

calon guru. Data ini dianalisis secara deskriptif.

- b. Metode Observasi: Metode ini digunakan untuk memperoleh data tentang kebutuhan calon guru dan metode dosen dalam mengelola pembelajaran. Data ini dianalisis secara deskriptif

### **3. HASIL DAN PEMBAHASAN**

#### **1. Analisis Bahan Ajar Sebelum Dikembangkan Beserta Analisis Kebutuhan**

- a. Analisis Bahan Ajar Sebelum Dikembangkan

Bahan ajar yang digunakan dalam perkuliahan strategi pembelajaran selama ini berupa *handout* yang disusun sendiri oleh dosen pengampu. Adapun isi dari *handout* tersebut ialah berupa ringkasan tentang teori-teori belajar yang diambil dari berbagai sumber. Ada beberapa hal yang dikeluhkan mahasiswa yaitu minimnya contoh aplikasi teori dan penjelasan mendalam tentang teori yang ada. Pemutaran video oleh dosen belum terkonsep, hanya secara kebetulan mengandung unsur pendekatan ataupun teori belajar yang sedang dipelajari. Metode yang digunakan ialah diskusi klasikal dengan presentasi kelompok sebagai pendahuluan

- b. Analisis Kebutuhan Calon Guru (Mahasiswa)

Kopetensi pedagogic sebagai karakter utama pendidik yang mengandung beberapa aspek (Kemendiknas, 2010), yaitu: a) menguasai karakter peserta didik; b) Menguasai teori belajar dan prinsip-prinsip pembelajaran yang mendidik, c) kegiatan pembelajaran yang mendidik, d) pengembangan potensi peserta didik dan e) komunikasi dengan peserta didik.

- c. Identifikasi Teori Belajar yang akan Digunakan

#### **Teori Belajar Behavioristik**

- 1) Teori Belajar Thorndike: Hukum Kesiapan, Hukum Latihan dan Hukum akibat.
- 2) Teori Gagne dalam pembelajaran: Upaya transfer belajardan latihan
- 3) Teori Belajar Skinner: Respondent conditioning dan Operant conditioning.
- 4) Teori Belajar Pavlov: Teori pengkondisian asosiatif stimulus-respons dan hal ini yang dikenang darinya hingga kini.

#### **Teori Belajar Kognitif**

- 1) Teori kognitif jean piaget: Tingkatan – tingkatan perkembangan intelektual
- 2) Teori belajar Bruner: Tahap enaktif, Tahap ikonik dan Tahap simbolik
- 3) Teori belajar Dienes: Setiap konsep atau prinsip matematika dapat dimengerti secara sempurna hanya jika pertama – tama disajikan kepada peserta didik dalam bentuk – bentuk konkrit.
- 4) Teori belajar Vygotsky: proses belajar akan terjadi secara efisien dan efektif apabila siswa belajar secara kooperatif dengan siswa lain, suasana lingkungan yang mendukung, dalam bimbingan seseorang yang lebih mampu atau lebih dewasa.
- 5) Teori belajar Ausebel: Pembelajaran bermakna

#### **Teori Belajar Humanistik**

Rogers (1969) berpendapat pembelajaran hendaknya berpusat pada peserta didik (*learner centered*). Menurut Gage and Berliner (dalam Arsury, 2007) terdapat lima tujuan yang mendasar dengan diterapkannya pendekatan humanistik dalam pendidikan, yaitu: (1)

mengembangkan self-direction yang positif dan kebebasan (kemandirian) pada diri peserta didik; (2) membangun kemampuan untuk bertanggung jawab terhadap apa yang dipelajari; (3) membangun kreativitas; (4) membangun rasa keingintahuan; dan (5) membangun minat terhadap matematika atau menciptakan sensitivitas matematika.

Alvin (dalam Haglun, 2004) menyebutkan beberapa karakteristik umum dari sebuah kelas humanistik: (1) Menempatkan peserta didik pada posisi penyelidik, bukan hanya reseptor fakta dan prosedur; (2) Membiarkan peserta didik untuk saling membantu memahami masalah dan solusinya lebih mendalam; (3) Belajar berbagai cara untuk memecahkan masalah, bukan hanya suatu pendekatan aljabar; (4) Termasuk latar belakang sejarah menunjukkan matematika sebagai usaha manusia; (5) Menggunakan pengajuan masalah dan pertanyaan-pertanyaan terbuka, bukan hanya latihan; (6) Menggunakan berbagai teknik penilaian, bukan hanya menilai seorang peserta didik terhadap kemampuannya untuk melaksanakan prosedur hafal; (7) Mengembangkan pemahaman dan apresiasi dari beberapa ide-ide matematika besar yang telah membentuk sejarah dan budaya kita; (8) Membantu para peserta didik melihat matematika sebagai studi tentang pola-pola, termasuk aspek-aspek seperti keindahan dan kreativitas; dan (9) Membantu peserta didik mengembangkan sikap kemandirian, kemerdekaan dan rasa ingin tahu.

## 2. Tahap Pengembangan Produk Awal

### a. Menentukan Kemasan *Digital Storytelling on Movie*

Peneliti memutuskan untuk mengganti menggunakan sebuah film dokumenter berdurasi kurang lebih 20 menit setiap part nya. Berdasarkan jenis teori belajar yang akan diangkat maka *Digital Storytelling on Movie* akan terbagi menjadi 3 bagian. *Digital Storytelling on Movie* (Part 1) akan berisi cuplikan adegan yang merupakan aplikasi dari teori belajar behavioristik, part 2 adalah teori belajar kognitif sedangkan part 3 akan berisi adegan yang merupakan aplikasi teori belajar humanistik. Ketiga bagian tersebut berkaitan satu dan yang lainnya sehingga diharapkan nanti calon guru akan lebih mudah menangkap pesan yang ingin disampaikan.

### b. Menyusun Sinopsis *Digital Storytelling on Movie*

Sebelum menyusun Sinopsis *Digital Storytelling on Movie*, peneliti terlebih dahulu menentukan judul film yang akan dibuat. Dan akhirnya peneliti sepakat mengangkat judul film "Panggil saya Pak Guru" sebagai judul yang digunakan. Kemudian peneliti membuat alur cerita dari film berdasarkan teori-teori belajar yang digunakan. Adegan yang diangkat tidak hanya berisi konflik guru dan siswa di dalam kelas, namun secara menyeluruh berisi perjalanan seorang guru yang pada awal karir memiliki karakter tidak disenangi siswa hingga akhirnya bermetamorfosis menjadi sosok guru yang dirindukan tiap kedatangannya serta dicintai siswanya. Part 1 terdiri dari 4 adegan inti yang mengambil latar belakang sekolah dan kediaman sang guru, sedangkan part 2 terdiri

- dari 7 adegan inti serta part 3 terdiri dari 4 adegan inti.
- c. Menyusun *Storyboard Digital Storytelling on Movie*  
*Storyboard* dibuat untuk mendapatkan gambaran tampilan awal *Digital Storytelling on Movie*. melalui *storyboard* kita bisa mengetahui bahwa peneliti menyisipkan fokus perhatian dalam setiap adegan film. Hal ini diperlukan agar selama menonton film, pesan yang diharapkan menjadi perhatian tetap didapatkan oleh calon guru.
  - d. Menyusun Skenario *Digital Storytelling on Movie*  
Setelah sinopsis selesai, peneliti mulai menyusun skenario *Digital Storytelling on Movie* dengan mengembangkan setiap adegan yang sudah dirancang dalam sinopsis. Selain itu, ekspresi dan respon tak terucap juga diperhatikan dalam penyusunan skenario sehingga diharapkan para pemainnya nanti akan dapat menyajikan karakter yang benar-benar sesuai dengan yang diharapkan oleh tiap teori belajar.
  - e. Menyusun RPP  
RPP disusun sebagai panduan dosen pengampu dalam pemanfaatan bahan ajar. Hal ini diperlukan supaya maksud dan tujuan keberadaan bahan ajar dapat tersampaikan dengan baik.
  - f. Menyusun Lembar Observasi Kemampuan Pedagogik  
Setelah seluruh perangkat penelitian selesai, kegiatan yang selanjutnya dilakukan ialah penyusunan instrumen penelitian. Dan yang pertama kali dibuat ialah lembar observasi kemampuan Pedagogik calon guru. Indikator yang digunakan dalam penyusunan lembar observasi ini ialah indikator kompetensi pedagogik dari kemendiknas (2010).
  - g. Menyusun Instrumen Tes  
Instrumen lain yang tidak kalah penting untuk mengukur kemampuan pedagogik calon guru ialah instrumen tes tertulis yang akan diberikan untuk mengukur kemampuan pedagogik calon guru secara tertulis. Instrumen tes terdiri dari 10 soal uraian yang harus dikerjakan selama 120 menit.
  - h. Menyusun Lembar Validasi  
Adapun instrumen yang digunakan untuk meminta pendapat ahli tentang bahan ajar yang dikembangkan ialah lembar validasi yang terdiri dari ahli materi (termasuk di dalamnya ahli pembelajaran) dan ahli teknologi pembelajaran.
  - i. Angket Keterbacaan  
Angket keterbacaan terbagi menjadi 2 yaitu angket keterbacaan untuk dosen pengampu dan angket keterbacaan untuk mahasiswa (calon guru). Angket ini nantinya akan digunakan untuk mengambil data tentang keterbacaan RPP dan bahan ajar pada tahun 2.
  - j. Menyusun Angket Respon  
Angket respon terbagi menjadi 2 yaitu angket respon untuk dosen pengampu dan angket respon untuk mahasiswa (calon guru).

#### 4. KESIMPULAN

Berdasarkan Prosedur pengembangan menggunakan teori Borg dan Gall (Emzir (2010: 271) yang telah dilakukan, maka dapat disimpulkan bahwa proses penghasilan Pengembangan Bahan Ajar berbasis *Digital Storytelling* untuk Meningkatkan Kopetensi Pedagogik Mahasiswa IKIP PGRI Semarang (Studi kasus Mata Kuliah Strategi Pembelajaran) dimulai dari analisis produk yang akan dikembangkan. Pada tahapan ini diperoleh informasi tentang kekurangan bahan ajar yang ada, strategi penyampaian, kebutuhan mahasiswa, materi yang diperlukan serta harapan mahasiswa tentang perkuliahan

selanjutnya. Semua informasi tersebut digunakan untuk mengembangkan produk awal. Adapun produk awal yang dihasilkan ialah Sinopsis, *Storyboard*, Skenario, RPP, instrumen tes dan instrumen non tes untuk menilai kemampuan pedagogik calon guru.

## 5.DAFTAR PUSTAKA

- [1] Arikunto, S. 1999. *Dasar-dasar Evaluasi Pendidikan*. Edisi Revisi VI. Jakarta: PT. Bumi Aksara.
- [2] Clark, C., Guskey, T., & Benninga, J. 1983. The effectiveness of mastery learning strategies in undergraduate education courses. *Journal of Educational Research*, 76(4): 210-214.
- [3] Emzir. 2010. *Metodologi Penelitian Pendidikan: Kuantitatif dan Kualitatif*. Jakarta: PT Rajagrafindo Persada.
- [4] Halat, E. 2006. Sex-Related Differences In The Acquisition Of The Van Hiele Levels And Motivation In Learning Geometry. *Asia Pacific Education Review Copyright 2006 by Education Research Institute*. 7(2): 173-183.
- [5] Kemendiknas. 2010. *Pedoman Pelaksanaan Penilaian Kinerja Guru (PK Guru)*. Jakarta. [bermutuprofesi.org](http://bermutuprofesi.org)
- [6] Nizaruddin.; Dwijayanti, Ida.; Ariyanto, Lilik. 2012. Pengembangan Perangkat Pembelajaran Matematika Humanistik Berideologi Pancasila Berbasis konstruktivis menggunakan ICT di SMP. *Prosiding Seminar Nasional Inovasi Pembelajaran*. Semarang: IKIP Pres
- [7] Robin, Bernard. 2014. *Education Uses of Digital Storytelling*. Tersedia di <http://digitalstorytelling.coe.uh.edu/index.cfm> [05/04/ 2014]
- [8] Samsudi. 2009. *Desain Penelitian Pendidikan*. Semarang: Unnes Pres.
- [9] Santoso, S. 2003. *Mengatasi Berbagai Masalah Statistik dengan SPSS Versi 11,5*. Jakarta: PT. Gramedia.
- [10] Soegeng. 2013. *Landasan Pendidikan Karakter*. Semarang: IKIP Pres.
- [11] Soegeng. 2014. *Pedoman Praktis Pendidikan Karakter*. Semarang: IKIP Pres.
- [12] Skouge, James R.; Rao, Kavita. 2009. Digital Storytelling in Teacher Education: Creating Transformations through Narrative. *Educational Perspectives*. 42(1-2):54-60.
- [13] Sudjana. 2002. *Metode Statistika*. Bandung: Tarsito.
- [14] Sukarno, Anton. 2008. *Pengaruh Program Sertifikasi Pendidik Terhadap Profesionalisme Guru SMU di Karesidenan Surakarta*. Surakarta: Jurusan.
- [15] Tinio, V. L. *ICT in Education*. Tersedia di [www.apdip.net/publications/iespprimer/eprimer-edu.pdf](http://www.apdip.net/publications/iespprimer/eprimer-edu.pdf) [31/10/2009].
- [16] Wijonarko.; Dwijayanti, Ida.; Harun, Lukman. 2013. *Pengembangan Bahan Ajar matematika SMP berbasis smart communications dan konstruktivisme untuk meningkatkan kompetensi pedagogik calon Guru*. Semarang: Jurusan Pendidikan Matematika IKIP PGRI Semarang

## DESAIN PERANGKAT PEMBELAJARAN BERKARAKTER DENGAN PENDEKATAN INQUIRY BERBANTUAN CABRI 3D PADA MATAKULIAH GEOMETRI RUANG

Venissa Dian Mawarsari<sup>1</sup>, Achmad Solichan<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universitas Muhammadiyah Semarang, venissa@unimus.ac.id

<sup>2</sup>Universitas Muhammadiyah Semarang, solihan17@gmail.com

**Abstrak.** Proses pendidikan yang terus berkembang sejalan dengan perkembangan teknologi menjadikan para pendidik ataupun calon pendidik untuk mengembangkan inovasi pembelajaran ataupun pendidikan yang lebih baik. Namun inovasi tersebut tentunya tidak hanya terpusat pada peningkatan kognitif saja, tetapi karakter peserta didik dalam hal ini baik siswa sekolah sampai dengan mahasiswa harus tetap dimunculkan ataupun ditingkatkan dalam segala bidang, tak terkecuali matematika. Objek matematika yang abstrak tentunya membutuhkan perantara yang dapat menghubungkan objek abstrak ke dalam objek kongret. Apalagi geometri ruang yang terkait dengan objek abstrak di R<sup>3</sup> tentunya membutuhkan alat peraga ataupun yang lebih praktis lagi menggunakan *software*. Salah satu *software* yang dapat diterapkan adalah Cabri 3D. Berdasarkan permasalahan tersebut perlu adanya suatu penelitian yang mendesain perangkat pembelajaran sehingga dapat menumbuhkan karakter mahasiswa dengan pendekatan inquiry dalam pembelajaran geometri ruang berbantuan Cabri 3D. Tujuan penelitian ini adalah menghasilkan desain perangkat pembelajaran berkarakter dengan pendekatan inquiry berbantuan Cabri 3D pada matakuliah geometri ruang yang valid. Perangkat yang didesain berupa Silabus, Rencana Pelaksanaan Pembelajaran (RPP), Diktat dan Lembar Kerja Mahasiswa Elektronik (LKME). Penelitian ini merupakan penelitian kualitatif dengan metode pengumpulan data berdasarkan hasil wawancara dan pemberian lembar validasi perangkat pembelajaran yang telah didesain kepada validator. Berdasarkan penilaian dari validator diperoleh nilai rata-rata untuk seluruh perangkat yang telah didesain sebesar 3,55% yang termasuk dalam kriteria baik.

**Keywords:** karakter, pendekatan inquiry, Cabri 3D.

### 1. PENDAHULUAN

Perubahan teknologi yang terus berkembang dalam berbagai bidang mengakibatkan pula perubahan pada bidang pendidikan. Tak terkecuali di Indonesia yang melakukan perubahan sistem pendidikan. Pendidikan di Indonesia diatur dalam Undang-Undang Nomor 20 tahun 2003 tentang Sistem Pendidikan Nasional yang mempunyai visi terwujudnya sistem pendidikan sebagai pranata sosial yang kuat dan berwibawa untuk memberdayakan semua warga negara Indonesia berkembang menjadi manusia yang berkualitas sehingga mampu dan proaktif menjawab tantangan zaman yang selalu berubah (Arifin, 2011). Hal tersebutlah yang menuntut seorang pendidik ataupun calon pendidik untuk mengembangkan inovasi pembelajaran ataupun pendidikan yang lebih baik.

Inovasi pembelajaran tentunya dilakukan di seluruh jenjang satuan pendidikan, dari dasar hingga perguruan tinggi. Inovasi pembelajaran yang dilakukan pendidik berawal dari desain perangkat pembelajaran yang dilakukan dalam proses pembelajaran. Untuk mendapatkan hasil proses pembelajaran yang maksimal tentunya seorang pendidik perlu mendesain perangkat pembelajaran yang sesuai dengan kompetensi yang hendak dicapai. Hasil penelitian Moses (2008) menunjukkan faktor-faktor yang mempengaruhi kualitas pendidikan pada perguruan tinggi salah satunya adalah proses pembelajaran.

Hasil evaluasi proses pembelajaran pada matakuliah geometri ruang di Pendidikan Matematika Universitas Muhammadiyah Semarang menunjukkan hasil yang kurang maksimal. Dalam proses pembelajaran yang selama ini berlangsung

telah menggunakan bantuan alat peraga dalam membantu mahasiswa untuk mengabstraksikan objek keruangan dalam geometri. Namun, hal tersebut masih membuat mahasiswa dalam mengalami kesulitan dalam memahami konsep geometri ruang. Selain itu dalam proses pembelajaran tidak hanya kognitif saja yang dimunculkan, namun berdasarkan perkembangan kurikulum yang menuntut karakter mahasiswa juga turut dimunculkan.

Berdasarkan permasalahan tersebut perlu adanya desain perangkat pembelajaran yang dapat membantu mahasiswa dalam meningkatkan kompetensi yang hendak dicapai serta dapat memunculkan karakter mahasiswa pada saat proses pembelajaran geometri ruang. Untuk membantu mahasiswa dalam mengabstraksikan bentuk ruang geometri maka diperlukan bantuan teknologi. Hal ini didukung oleh Ritz (2009: 15) menyatakan bahwa penerapan teknologi berguna untuk membantu pembelajaran dan menambah pengetahuan. Teknologi yang dimaksud dapat berupa software Cabri 3D. Hal ini karena *software* Cabri 3D dapat membantu mahasiswa di dalam mengembangkan kemampuan spasial, khususnya dalam mempelajari konsep geometri (Guven & Kosa, 2008). Selain itu penelitian Pranawestu (2012) yang menggunakan cabri 3D menyimpulkan bahwa pembelajaran *problem based learning* berbantuan Cabri 3D berbasis karakter terhadap kemampuan spasial dikatakan efektif. Selanjutnya dalam membantu mahasiswa memunculkan karakter perlu adanya pendekatan inquiry dalam proses pembelajaran. Tidak hanya karakter saja yang dapat muncul, namun pemahaman konsep mahasiswa dalam geometri ruang juga dapat meningkat.

Inkuiry merupakan suatu cara mengajarkan kepada mahasiswa untuk belajar dengan menggunakan keterampilan, proses, sikap dan pengetahuan berpikir rasional (Bruce & Bruce, 1992). Sund dan Trowbrige

(Mulyasa, 2005) mengemukakan tiga macam inquiry yaitu : (1) Inquiry terpimpin (*guide inquiry*), (2) Inquiry bebas (*free inquiry*), (3) Inquiry bebas yang dimodifikasi (*modified free inquiry*). Pendekatan inquiry yang digunakan dalam penelitian ini adalah pendekatan inquiry terpimpin dengan menggunakan LKME dan media interaktif serta software Cabri 3D dalam proses pembelajaran. Hal tersebut akan meningkatkan kompetensi mahasiswa dalam matakuliah geometri ruang. Selain itu memunculkan pula karakter mahasiswa dalam hal disiplin, jujur, kerja keras, gotong royong, tanggung jawab, mandiri, dan toleransi. Sehingga peneliti melakukan penelitian dengan langkah awal mendesain perangkat pembelajaran berkarakter dengan pendekatan inquiry berbantuan cabri 3D pada matakuliah geometri ruang.

Tujuan penelitian ini adalah menghasilkan desain perangkat pembelajaran berkarakter dengan pendekatan inquiry berbantuan Cabri 3D pada matakuliah geometri ruang yang valid. Perangkat yang didesain berupa Silabus, Rencana Pelaksanaan Pembelajaran (RPP), Diktat dan Lembar Kerja Mahasiswa Elektronik (LKME).

## 2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian kualitatif. Tahapan dalam mendesain perangkat pembelajaran berkarakter dengan pendekatan inquiry berbantuan Cabri 3D pada matakuliah geometri ruang menggunakan bagian dari tahapan Model ADDIE (*Analysis, Design, Development, Implementation, Evaluation*) muncul pada tahun 1990-an yang dikembangkan oleh Reiser dan Mollenda (dalam badarudin, 2011). Namun dalam mendesain hanya menggunakan dua tahapan saja yaitu :

### a) Tahap analisis (*Analysis*)

Tahap analisis merupakan suatu proses mendefinisikan apa yang akan dipelajari oleh mahasiswa, yaitu melakukan *needs assessment* (analisis kebutuhan), mengidentifikasi masalah

(kebutuhan), dan melakukan analisis tugas (*task analysis*). Tahap analisis dalam penelitian ini adalah mengidentifikasi permasalahan, mengidentifikasi faktor penyebab permasalahan, merumuskan solusi dari permasalahan.

b) Tahap Desain (*Design*)

Tahap ini dimulai dengan cara merumuskan tujuan pembelajaran yang SMART (*spesifik, measurable, applicable, dan realistic*), dalam hal ini menentukan kompetensi yang akan dicapai dalam pembelajaran. Selanjutnya menyusun perangkat pembelajaran, metode pembelajaran, media pembelajaran, dan instrumen pembelajaran yang akan digunakan guna mencapai kompetensi yang diharapkan tersebut.

c) Tahap Pengembangan (*Development*)

Tahap pengembangan yang dilakukan dalam penelitian ini adalah (1) menghasilkan perangkat yang telah di desain, (2) perangkat tersebut divalidasi oleh validator untuk mengetahui validasi isi dari perangkat pembelajaran yang telah dirancang, (3) uji coba terbatas yang dilakukan pada kelompok kecil untuk mengetahui keterbacaan perangkat yang disusun dan mengetahui kevalidan instrumen penelitian. Perangkat yang telah divalidasi dan instrumen telah diujicobakan pada kelompok kecil, selanjutnya perangkat yang telah direvisi siap untuk diimplementasikan.

Metode yang digunakan dalam pengumpulan data-data, yaitu:

- a) Metode observasi : observasi mengenai permasalahan proses pembelajaran geometri ruang sebelumnya. Untuk merumuskan tujuan atau kompetensi yang hendak dicapai dalam proses pembelajaran geometri ruang.
- b) Metode wawancara dan penilaian validasi perangkat : metode ini diawali dengan permohonan validasi kepada para ahli sebagai validator

perangkat pembelajaran yang telah didesain. Selanjutnya validator menilai perangkat pembelajaran sesuai lembar validasi yang telah disusun oleh peneliti. Hasil validasi ahli selanjutnya di revisi oleh peneliti dan di uji keterbacaannya oleh mahasiswa untuk mengetahui tingkat keterbacaan perangkat dalam pemahamannya mahasiswa. Setiap lembar validasi terdapat beberapa indikator dengan penilaian skala 1 – 4

### 3. HASIL DAN PEMBAHASAN PENELITIAN

Tahap analisis dalam penelitian ini adalah mengidentifikasi permasalahan, mengidentifikasi faktor penyebab permasalahan, merumuskan solusi dari permasalahan. Pada tahapan ini peneliti memberikan questioner kepada mahasiswa pendidikan matematika angkatan 2013/2014 yang merupakan bagian dari evaluasi pembelajaran geometri ruang yang telah dilakukan selama ini. Baik kelebihan ataupun kekurangan dari pelaksanaan pembelajaran geometri ruang. Hasil evaluasi menunjukkan bahwa:

- a) Identifikasi permasalahan dalam pembelajaran geometri ruang adalah hasil belajar mahasiswa rendah.
- b) Keaktifan mahasiswa dalam proses pembelajaran geometri ruang hanya 35%.
- c) Keterampilan mahasiswa dalam menyelesaikan permasalahan geometri ruang hanya 24%, apalagi mahasiswa mengalami kesulitan pada saat melukiskan irisan bangun ruang.

Ketiga hal tersebut tentunya terdapat faktor penyebab dari permasalahannya, sehingga hasil analisis tim peneliti dan hasil wawancara dengan mahasiswa, diperoleh hasil bahwa faktor penyebabnya adalah

- a) Mahasiswa tidak mampu menggambarkan objek abstrak mengenai bangun ruang terutama pada materi proyeksi dan sudut antara garis

- dan bidang; jarak atau garis hubung terpendek; dan irisan bangun ruang.
- b) Minimnya alat peraga yang digunakan dan alat peraga yang dibunakan masih bersifat klasik artinya alat peraga yang digunakan sebatas kerangka bangun ruang sisi datar, sehingga ketika berbicara mengenai irisan bangun ruang masih belum bisa tergambarkan secara jelas bentuk irisannya.
  - c) Model pembelajaran yang dilakukan belum secara maksimal meningkatkan hasil belajar, keaktifan dan keterampilan proses mahasiswa dalam menyelesaikan masalah geometri ruang, selain itu karakter mahasiswa juga belum secara maksimal muncul. Sehingga perlu adanya pengembangan perangkat pembelajaran yang dapat secara maksimal meningkatkan variabel-variabel tersebut.

Solusi yang dilakukan oleh peneliti dalam menyelesaikan permasalahan di atas adalah mendesain perangkat pembelajaran berkarakter dengan pendekatan inquiry berbantuan Cabri 3D pada matakuliah geometri ruang. Hal tersebut dilakukan karena berdasarkan teori bahwa untuk menggambarkan bangun ruang secara detail diperlukan bantuan media pembelajaran yang lebih mutakhir dan dapat mempermudah mahasiswa dalam mengabstraksikan bangun ruang ataupun irisannya, sehingga dalam proses pembelajaran geometri ruang yang dilakukan peneliti menggunakan media software Cabri 3D. Hal tersebut dilakukan untuk mempermudah dalam penyampaian materi, selian itu juga bertujuan untuk meningkatkan meotivasi mahasiswa dalam pelaksanaan proses pembelajaran sehingga berdampak pada keaktifan mahasiswa. Selanjutnya pendekatkn inquiry yang digunakan dapat mengkntruk pemikiran mahasiswa dalam menyelesaikan permasalahan terkait geometri ruang sehingga harapannya dapat meningkatkan keterampilan proses mahasiswa dalam menyelesaikan permasalahan. Hamalik (2005:29) mengatakan bahwa

pembelajaran inkuiri adalah strategi pembelajaran yang berpusat pada siswa, biasanya siswa diarahkan untuk belajar kelompok, siswa diarahkan dan dipusatkan pada satu pokok persoalan, atau siswa diarahkan untuk mencari jawaban-jawaban dan pertanyaan yang sudah ditetapkan. Perangkat pembelajaran yang dikembangkan adalah Silabus, Rencana Pelaksanaan Pembelajaran (RPP), Diktat dan Lembar Kerja Mahasiswa Elektronik (LKME).

Tahap desain dimulai dengan cara merumuskan tujuan pembelajaran yang SMAR (*spesifik, measurable, applicable, dan realistic*), dalam hal ini menentukan kompetensi yang akan dicapai.

Tujuan pembelajaran geometri ruang dalam penerapan perangkat pembelajaran berkarakter dengan pendekatan inquiry pada matakuliah geometri ruang berbasis ICT yang telah dikembangkan adalah mahasiswa dapat:

- a) menggambarkan jarak antara titik ke garis/bidang,
- b) menggambarkan jarak garis ke garis/bidang dalam ruang,
- c) menentukan jarak antara titik ke garis/bidang,
- d) menentukan jarak garis ke garis/bidang dalam ruang,
- e) menggambarkan sudut antara garis dengan garis/ bidang,
- f) menggambarkan sudut antara bidang dengan bidang,
- g) menentukan besar sudut antara garis dengan garis/ bidang,
- h) menentukan besar sudut antara bidang dengan bidang,
- i) menggambar/ melukis irisan bidang pada bangun ruang menggunakan sumbu afinitas,
- j) menggambar/ melukis irisan bidang pada bangun ruang menggunakan perpotongan bidang diagonal, dan
- k) menggambar/ melukis irisan bidang pada bangun ruang menggunakan perluasan sisi tegak.

Langkah selanjutnya dalam tahap desain setelah menentukan kompetensi

yang hendak dicapai adalah mendesain perangkat pembelajaran berkarakter dengan pendekatan inquiry pada matakuliah geometri ruang berbasis ICT untuk meningkatkan hasil belajar mahasiswa, keaktifan dan keterampilan proses mahasiswa. Perangkat yang dikembangkan berupa silabus, RPP, diktat elektronik, LKME dan media pembelajaran yang berbasis ICT. Selain itu merancang pula instrumen yang digunakan pada saat penelitian, berupa : lembar validasi perangkat pembelajaran, lembar observasi keaktifan, lembar observasi keterampilan proses, lembar questioner respon mahasiswa, dan lembar soal pretest dan postest. Perangkat yang desain tentunya berdasarkan tujuan yang hendak dicapai.

Tahap pengembangan bertujuan untuk menghasilkan perangkat pembelajaran yang sudah direvisi berdasarkan masukan dari ahli. Tahap ini meliputi: validasi perangkat oleh para ahli terhadap perangkat pembelajaran matematika yang dikembangkan dan disusun pada tahap perencanaan (*Draft I*) diikuti dengan revisi (*Draft II*), selanjutnya perangkat hasil revisi uji (*Draft II*) diujicobakan secara terbatas yang dilakukan pada kelompok kecil untuk mengetahui keterbacaan perangkat yang disusun dan mengetahui kevalidan instrumen penelitian.

Tahapan ini dimulai dengan proses validasi perangkat pembelajaran yang telah di desain pada tahapan sebelumnya. Proses validasi ini membutuhkan ahli sekaligus teman sejawat dalam memvalidasi perangkat pembelajaran yang dikembangkan. Validator dapat menilai perangkat pembelajaran pada lembar validasi perangkat pembelajaran. Dimana setiap lembar validasi dari setiap perangkat memiliki aspek penilaian. Berikut aspek penilaian dari perangkat pembelajaran dalam penelitian ini.

a) Silabus

Aspek penilaian yang ditinjau dalam silabus, yaitu: identitas, standar

kompetensi, kompetensi dasar, indikator, kegiatan pembelajaran yang sesuai dengan pendekatan inquiry yang berkarakter pada matakuliah geometri ruang, media pembelajaran, penilaian, sumber belajar, alokasi waktu dan bahasa serta ejaan.

Hasil validasi dari silabus diperoleh Penilaian validator terhadap Silabus didasarkan pada indikator-indikator yang termuat dalam Lembar Validasi Silabus. Dalam penelitian ini skor rata-rata penilaian validator terhadap *draft I* Silabus = 3,71% (dari skor tertinggi 4) yang berarti *draft I* Silabus termasuk dalam kategori "baik", sedangkan simpulan yang diberikan adalah "dapat digunakan meskipun masih ada sedikit revisi".

b) Rencana Pelaksanaan Pembelajaran (RPP)

Aspek penilaian yang ditinjau dalam RPP, yaitu: kelengkapan komponen RPP, Perencanaan rumusan tujuan pembelajaran yang disesuaikan dengan silabus, perencanaan pengelolaan kelas, perencanaan penggunaan media pembelajaran sebagai sumber belajar, perencanaan penggunaan Standar Proses dalam pembelajaran, perencanaan skenario pembelajaran (langkah-langkah kegiatan pembelajaran: pendahuluan, inti, dan penutup) dimana mengacu pada pendekatan inquiry yang berkarakter serta berbantuan ICT, perencanaan penilaian, dan bahasa yang digunakan dalam RPP.

Penilaian validator terhadap RPP didasarkan pada indikator-indikator yang termuat dalam Lembar Validasi RPP. Dalam penelitian ini skor rata-rata penilaian validator terhadap *draft I* RPP = 3,675% (dari skor tertinggi 4) yang berarti *draft I* RPP termasuk dalam kategori "baik", sedangkan simpulan yang diberikan adalah "dapat digunakan meskipun masih ada sedikit revisi".

c) Diktat

Aspek penilaian yang ditinjau dalam Diktat, yaitu: kelengkapan komponen Diktat, kekesuaian materi dalam Diktat dengan SK, KD dan indikator yang hendak dicapai, bahasa yang digunakan dalam

Diklat, serta Komponen kegrafisan dalam Diklat.

Penilaian validator terhadap Diklat didasarkan pada indikator-indikator yang termuat dalam Lembar Validasi Diklat. Dalam penelitian ini skor rata-rata penilaian validator terhadap *Draft I* Diklat = 3,25% (dari skor tertinggi 4) yang berarti *Draft I* Diklat termasuk dalam kategori "baik", sedangkan simpulan yang diberikan adalah "dapat digunakan meskipun masih ada sedikit revisi".

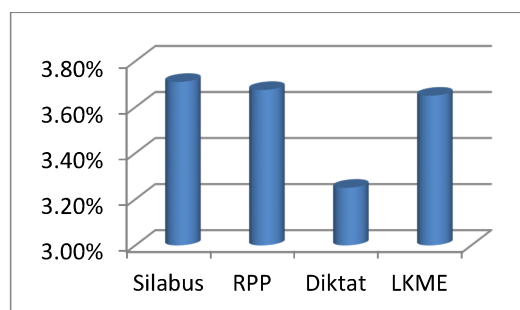
#### d) Lembar Kerja Mahasiswa Elektronik (LKME)

Aspek penilaian yang ditinjau dalam LKME, yaitu: kelengkapan komponen LKME, penjabaran isi LKME yang berisi kegiatan pendahuluan, kegiatan inti dan kegiatan penutup, bahasa yang digunakan dalam LKME, serta Komponen kegrafisan dalam LKME.

Penilaian validator terhadap LKME didasarkan pada indikator-indikator yang termuat dalam Lembar Validasi LKME. Dalam penelitian ini skor rata-rata penilaian validator terhadap *Draft I* LKPD = 3,65% (dari skor tertinggi 4) yang berarti *Draft I* LKME termasuk dalam kategori "baik", sedangkan simpulan yang diberikan adalah "dapat digunakan meskipun masih ada sedikit revisi".

Perangkat pembelajaran tersebut selain divalidasi oleh para ahli atau teman sejawat, dilakukan pula uji coba skala kecil pada 1 kelompok mahasiswa dengan anggota 10 mahasiswa, mengenai penggunaan perangkat pembelajaran yang dikembangkan. Hal tersebut bertujuan untuk mengetahui tingkat keterbacaan diklat dan LKME pada mahasiswa. Selain itu peneliti juga melakukan stimulasi proses pembelajaran yang menerapkan perangkat pembelajaran berkarakter dengan pendekatan inquiry berbantuan Cabri 3D pada matakuliah geometri ruang. Stimulasi tersebut bertujuan untuk mengetahui validasi butir soal dan validasi instrumen lain yang digunakan. Berikut diagram batang yang menunjukkan hasil validasi ahli terhadap

perangkat pembelajaran yang telah di desain.



Gambar 1. Hasil Presentase Validasi Perangkat

## 4. KESIMPULAM

Kesimpulan dari hasil penelitian yang telah dilakukan adalah desain perangkat pembelajaran berkarakter dengan pendekatan inquiry berbantuan Cabri 3D pada matakuliah geometri ruang yang telah dikembangkan valid. Hal tersebut berdasarkan penilaian dari ahli atau teman sejawat dalam hal ini sebagai validator yang telah menilai perangkat pembelajaran yang dikembangkan, dengan nilai rata-rata penilaian 3,55% termasuk dalam kriteria baik. Perangkat yang didesain berupa Silabus, Rencana Pelaksanaan Pembelajaran (RPP), Diklat dan Lembar Kerja Mahasiswa Elektronik (LKME).

## 5. DAFTAR PUSTAKA

- [1] M. Sakawa, I. Nishizaki dan H. Katagiri, *Fuzzy Stochastic Multiobjective Programming*, London: Springer, 2011.
- [2] Badarudin. Model Pengembangan Perangkat Pembelajaran. Tersedia di: <http://ayahalby.wordpress.com/2011/02/23/model-pengembangan-perangkat-pembelajaran/> [di unduh 23 Februari 2011], 2011.
- [3] Bruce, W.C & J.K. Bruce. 1992. *Teaching with inquiry*. Maryland : Alpha Publishing Company, Inc, 1992.
- [4] Guven, B. & T. Kosa. The Effect of Dynamic Geometry Software on Student Mathematics Teachers' Spatsil Visualization Skills. *The Turkish Online*

*Journal of Educational Technology*. 7(4):  
100-107, 2008.

- [5] Hamalik, O. Pendidikan Guru, Konsep dan Strategi. Bandung: Mandar Maju, 2005
- [6] Moses L, S. Faktor-Faktor yang Mempengaruhi Kualitas Pendidikan Pada Perguruan Tinggi. Prossiding Seminar Nasional Teknoin, 2008
- [7] Mulyasa. E. Menjadi Guru Profesional. Remaja Rosdakarya. Bandung, 2005.
- [8] Ritz, J. M. A New Generation of Goals for Technology Education. *Journal of Technologi Education*, 20/2:50-64, 2009.

## **KEMANDIRIAN BELAJAR SISWA DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA**

Rahmah

Universitas Lampung

email: [rahmahfauzi31@gmail.com](mailto:rahmahfauzi31@gmail.com)

**Abstrak.** Kemandirian adalah salah satu sifat yang ada pada setiap orang. Kemandirian diartikan sebagai hal atau keadaan seseorang yang dapat berdiri sendiri tanpa bergantung pada orang lain. Kemandirian dipandang sebagai suatu kekuatan dalam diri individu yang diperoleh melalui proses individualisasi, yaitu proses realisasi kedirian. Sifat mandiri tidak hanya dibutuhkan dalam kehidupan sehari-hari namun dibutuhkan juga dalam proses belajar. Kemandirian belajar akan terwujud apabila siswa aktif mengontrol sendiri segala sesuatu yang dikerjakan, mengevaluasi dan selanjutnya merencanakan sesuatu yang lebih dalam pembelajaran yang dialaminya. Dengan demikian, sikap mandiri sangat dibutuhkan dalam mempertimbangkan pengambilan keputusan yang berhubungan dengan kegiatan belajar sehingga siswa bertanggung jawab sepenuhnya dalam proses belajar tersebut. Bagaimana Kemandirian Belajar Siswa dalam pembelajaran Matematika?

**Keywords:** Kemandirian Belajar, Siswa, Pembelajaran Matematika

### **1. PENDAHULUAN**

Mandiri berarti berdiri sendiri. Mandiri dapat terbentuk dari rumah, sekolah dan lingkungan sekitar. Beranjak dari rumah, kemandirian dapat diarahkan dari didikan orangtua, sebaiknya orangtua tidak bersifat kaku dan memberikan kebebasan kepada anak dalam melakukan sesuatu yang positif, memberikan anak kesempatan memilih kegiatan bermanfaat yang diinginkannya agar sifat mandiri tumbuh dan berkembang dengan baik. Dalam pembelajaran di sekolah hendaknya seorang guru membangun suasana demokratis, memberikan siswanya kesempatan untuk berpendapat, berpikir secara mandiri dan tidak mutlak menjadi sumber pembelajaran. Akibatnya dengan diberikan kesempatan-kesempatan tersebut maka siswa tidak akan tergantung pada guru dan kemandirianpun akan terbentuk.

Banyak karakter yang ingin di-bangun dalam sebuah pembelajaran, salah satunya adalah kemandirian. Kemandirian merupakan sikap penting yang harus dimiliki oleh siswa dalam pembelajaran Matematika dan perlu ditumbuhkembangkan pada siswa sebagai individu yang diposisikan sebagai peserta didik. Pentingnya kemandirian dalam belajar terdapat

dalam tujuan pendidikan nasional. Pada Undang-Undang Sisdiknas No. 20 tahun 2003 tentang Sistem Pendidikan Nasional pasal 3 [1] disebutkan bahwa :

“Pendidikan nasional berfungsi mengembangkan kemampuan dan membentuk watak serta peradaban bangsa yang bermartabat dalam rangka mencerdaskan kehidupan bangsa, bertujuan untuk berkembangnya potensi peserta didik agar menjadi manusia yang beriman dan bertakwa kepada Allah Swt. Yang Maha Esa, berakhlak mulia, sehat, berilmu, cakap, kreatif, mandiri, dan menjadi warga negara yang demokratis serta bertanggung jawab”.

Berdasarkan pernyataan di atas, kemandirian merupakan salah satu tujuan yang hendak dicapai dalam proses pendidikan.

Dengan dikembangkannya sikap mandiri pada siswa, maka siswa tidak akan bergantung pada orang lain dalam mengerjakan segala sesuatu, siswa akan mengerjakan pekerjaan sesuai kemampuan yang dimilikinya. Siswa yang memiliki sikap mandiri rendah akan tergantung pada orang lain dalam pembelajaran, namun siswa yang memiliki sikap mandiri yang tinggi akan mengerjakan dan menyelesaikan

kan tugas dengan kemampuan yang dimilikinya.

Mengapa kemandirian belajar itu penting?. Dari hasil penelitian yang telah dilakukan oleh Sulistiyaningsih dkk (2013) [2] diperoleh suatu kesimpulan bahwa guru sebaiknya memperhatikan kemandirian belajar siswa dalam pembelajaran, karena kemandirian belajar siswa akan mempengaruhi kegiatan belajar siswa dan selanjutnya berpengaruh terhadap prestasi belajar. Dari hasil penelitian Rosyidah (2010) [3] didapat bahwa semakin tinggi tingkat kemandirian belajar, maka akan semakin tinggi hasil belajar matematika siswa. Senada dengan penelitian Rosyidah, hasil penelitian Tahar dkk (2006) [4] mengungkapkan bahwa jika semakin tinggi kemandirian belajar seseorang peserta didik, maka akan memungkinkannya untuk mencapai hasil belajar yang tinggi juga. Dari hasil penelitian-penelitian tersebut terlihat bahwa kemandirian belajar itu penting. Semakin tinggi tingkat kemandirian belajar maka akan semakin tinggi pula hasil belajar matematika siswa. Jadi, kemandirian belajar akan mempengaruhi hasil belajar.

## 2. PEMBAHASAN

### 2.1 Pengertian Kemandirian Belajar (*Self Regulated Learning*)

Kata kemandirian menurut Kamus Besar Bahasa Indonesia (KBBI) Pusat Bahasa (872:2008) [5] adalah “hal atau keadaan dapat berdiri sendiri tanpa bergantung pada orang lain”. Kata *kemandirian* berasal dari kata dasar *mandiri* yang mendapat awalan *ke* dan akhiran *an* yang kemudian membentuk suatu kata keadaan atau kata benda. Kemandirian termasuk ke dalam lingkup sifat seseorang. Sifat merupakan struktur mental seseorang yang menunjukkan adanya suatu konsistensi karena kemandirian merupakan salah satu segi dari sifat seseorang, maka dalam mempelajari konsep kemandirian harus dilihat sebagai bagian dari kepribadian atau karakter individu yang bersangkutan. Jadi dapat

disimpulkan bahwa kemandirian adalah sikap seseorang yang tidak bergantung pada orang lain, mempercayai dirinya dapat melakukan suatu hal dengan kemampuannya sendiri.

Sedangkan pengertian belajar banyak dikemukakan oleh para ahli, antara lain sebagai berikut :

1. Djamarah (2011:13) [6], “Belajar adalah serangkaian kegiatan jiwa raga untuk memperoleh suatu perubahan tingkah laku sebagai hasil dari pengalaman individu dalam interaksi dengan lingkungannya yang menyangkut kognitif, afektif dan psikomotor”. Secara psikologi belajar merupakan suatu proses perubahan yaitu perubahan tingkah laku sebagai hasil dari interaksi dengan lingkungannya dalam memenuhi kebutuhan hidupnya.
2. Dimiyati dan Mudjiono (2013:17) [7] menyatakan bahwa “Belajar merupakan peristiwa sehari-hari di sekolah. Belajar merupakan hal yang kompleks. Kompleksitas belajar tersebut dapat dipandang dari dua subjek, yaitu dari siswa dan dari guru. Dari siswa, belajar dialami sebagai suatu proses. Siswa mengalami proses mental dalam menghadapi bahan belajar”.
3. Teori belajar *purposeful learning* (Slameto, 2013:15) [8]: “*Purposeful learning* adalah belajar yang dilakukan dengan sadar untuk mencapai tujuan dan yang: (a) dilakukan oleh siswa sendiri tanpa perintah atau bimbingan orang lain, (b) dilakukan siswa dengan bimbingan orang lain didalam situasi belajar-mengajar di sekolah”.

Berdasarkan pendapat dan teori-teori di atas dapat disimpulkan bahwa belajar adalah sebuah proses untuk memperoleh pengetahuan, keterampilan dan kebiasaan yang mengakibatkan perubahan pemahaman, tingkah laku, dan sikap seseorang akibat adanya interaksi dengan lingkungan sekitar. Proses belajar ini dapat terjadi akibat kemauan sendiri atau atas dasar dorongan orang lain dan dapat terjadi

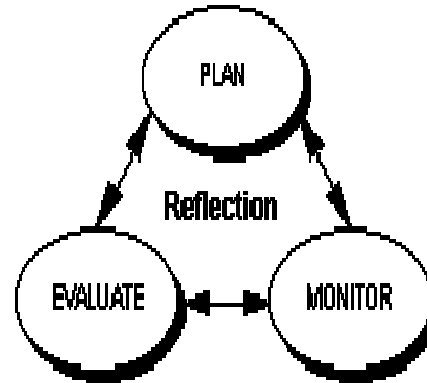
dimanapun baik di sekolah maupun di rumah. Namun belajar yang baik adalah belajar atas kemauan sendiri, jika sesuatu dikerjakan atas kemauan sendiri maka kegiatan tersebut akan menarik dan menyenangkan.

Kemandirian belajar atau *self-regulated learning* (SRL) menurut Vohs dan Baumeister (2004:2) [9] mengungkapkan salah satu definisi dari *self-regulation*: “one definition of “self-regulation” encompasses any efforts by the human self to alter any of its own inner states or response” yang diartikan “self-regulation” mencakup upaya apapun oleh diri manusia untuk mengubah atau menanggapi setiap bagian dari dalam diri sendiri. Senada dengan Vohs dan Baumeister, Tirtarahardja dan Sulo (2005:50) [10] adalah aktivitas belajar yang berlangsungnya lebih didorong oleh kemauan sendiri, pilihan sendiri dan tanggung jawab sendiri dari pembelajaran. Sedangkan Butler (Sumarmo:2010) [11] mengemukakan bahwa SRL merupakan siklus kegiatan kognitif yang rekursif (berulang-ulang) yang memuat kegiatan: menganalisis tugas; memilih, mengadopsi, atau menemukan pendekatan strategi untuk mencapai tujuan tugas; dan memantau hasil dari strategi yang telah dilaksanakan. Senada dengan pernyataan di atas, Zimmerman (Nakata:2010) [12] mendefinisikan SRL sebagai berikut: “Self-regulation as self-generated thoughts, feelings, and actions that are planned and cyclically adapted to the attainment of personal goals”. SRL didefinisikan sebagai pemikiran, perasaan, dan tindakan yang dihasilkan sendiri, direncanakan dan secara siklus disesuaikan dengan pencapaian tujuan pribadi.

Dari pendapat-pendapat di atas dapat disimpulkan bahwa kemandirian belajar adalah kegiatan belajar atas kemauan sendiri yang dipengaruhi oleh pemikiran, perasaan, strategi, dan perilaku sendiri untuk pencapaian tujuan dengan penuh tanggung jawab.

## 2.2 Siklus SRL

Menurut Schunk dan Zimmerman (Sumarmo:2010) [13] terdapat tiga fase utama dalam siklus SRL yaitu: *plan* (merancang) belajar, *monitor* (memantau) kemajuan belajar selama menerapkan rancangan, dan *evaluate* (mengevaluasi) hasil belajar secara lengkap serta adanya reflection (refleksi).



Gambar 2.1 Siklus SRL

Terdapat beberapa kegiatan pada setiap fase SRL tersebut, kegiatan dari fase merancang, memantau, mengevaluasi dan merefleksikan tercermin pada tabel di bawah ini.

Tabel 2.1 Kegiatan pada Fase SRL

Sumber Schunk dan Zimmerman (Sumarmo:2010) [14]

Fase	Kegiatan
<b>Merancang belajar</b>	1. Menganalisis tugas belajar 2. Menetapkan tujuan pembelajaran (pastikan tujuan tersebut sangat jelas) 3. Merancang strategi pembelajaran (mempertimbangkan berbagai cara untuk mendekati tugas belajar).
<b>Memantau</b>	(Berlangsung kegiatan mengajukan pertanyaan pada diri sendiri) 1. Apakah strategi yang

	<p>dilaksanakan sesuai dengan rencana?</p> <p>2. Apakah saya kembali kepada kebiasaan lama?</p> <p>3. Apakah saya tetap fokus?</p> <p>4. Apakah strategi telah berjalan dengan baik?</p> <p>5. Apakah saya perlu menyesuaikan strategi?</p>
<b>Mengevaluasi</b>	<p>Memuat kegiatan memeriksa bagaimana jalannya strategi.</p> <p>1. Apakah strategi telah dilaksanakan dengan baik? (evaluasi proses).</p> <p>2. Hasil belajar apa yang telah dicapai? (evaluasi produk)</p> <p>3. Sesuainkah strategi dengan jenis tugas belajar yang dihadapi?</p>
<b>Merefleksi</b>	<p>Pada dasarnya tahap ini tidak hanya berlangsung pada tahap keempat dalam siklus <i>self regulated learning</i>, namun refleksi berlangsung pada tiap tahap selama siklus berjalan.</p>

Dari fase-fase tersebut terlihat bahwa kemandirian dalam belajar merupakan hal yang penting, dengan melalui fase-fase tersebut banyak kegiatan yang dilakukan siswa dari merancang, memantau, mengevaluasi serta merefleksi pada setiap kegiatan yang dilakukan.

Pada pembelajaran Matematika fase-fase tersebut sangat penting, pada fase merancang terlihat kegiatan siswa mulai dari menganalisis tugas, menganalisis

merupakan keterampilan Matematika yang seharusnya dikembangkan, lalu ada kegiatan menetapkan tujuan dan mencari cara bagaimana cara mengerjakan tugas, hal inipun melatih pemikiran mandiri siswa. Pada fase memantau siswa dapat mengontrol diri mereka sendiri, apakah setiap kegiatan belajar telah sesuai dengan rencana? jika siswa dapat mengontrol kegiatan belajar mereka maka kemandirianpun dengan sendirinya akan terbentuk. Pada fase mengevaluasi siswa diharapkan dapat memeriksa pekerjaan mereka, dengan melihat hasil-hasil dari kegiatan belajar, apakah telah berjalan dengan baik, hasil belajar apa yang telah didapat dan sesuainkah pendekatan yang digunakan. Pada setiap fase tersebut akan selalu ada fase refleksi, refleksi tidak hanya terdapat diakhir pembelajaran namun dalam seluruh kegiatan pembelajaran.

Pintrich (Nodoushan:2012) [15] menyarankan empat fase pada *self-regulation* yang biasa disebut model temporal dengan tahap-tahap sebagai berikut:

- 1) **Pemikiran:** meliputi perencanaan, penetapan tujuan dan aktivasi;
- 2) **Pemantauan:** meliputi pemantauan proses pembelajaran;
- 3) **Manajemen:** mencakup penggunaan strategi regulasi dan kontrol; dan
- 4) **Refleksi:** meliputi evaluasi, penilaian, dan atribusi (setelah episode belajar).

Empat fase yang dikemukakan oleh Pintrich senada dengan fase SRL yang dikemukakan oleh Schunk dan Zimmerman, begitupula Kegiatan-kegiatan yang ada pada fase tersebut. Namun fase refleksi merupakan fase akhir menurut pendapat Pintrich sedangkan menurut Schunk dan Zimmerman refleksi berlangsung pada tiap fase selama siklus berjalan.

### **2.3 Kaitan Kemandirian Belajar dengan Pembelajaran Matematika**

Kemandirian dapat berasal dari dalam diri sendiri atau dari dorongan orang lain, hal ini sejalan dengan teori *purposeful learning* dalam Slameto yang telah dikemukakan di atas, *Purposeful learning* adalah belajar yang dilakukan dengan sadar untuk mencapai tujuan dan yang dilakukan oleh siswa sendiri tanpa perintah atau bimbingan orang lain, atau dilakukan siswa dengan bimbingan orang lain di dalam situasi belajar-mengajar di sekolah, jadi untuk mencapai kemandirian tersebut dapat juga dilatih oleh orang-orang di sekitar.

Kemandirian belajar dapat dipandang sebagai suatu proses dan hasil. Kemandirian belajar sebagai proses mengandung makna bahwa siswa mempunyai tanggung jawab dalam mencapai tujuan belajar dengan cara merencanakan, mengontrol, mengevaluasi serta merefleksi kegiatan belajarnya tanpa tergantung kepada orang lain, guru, atau faktor eksternal lainnya. Sedangkan kemandirian sebagai hasil mengandung makna bahwa setelah mengikuti pembelajaran atau setelah mendapatkan beberapa perlakuan siswa menjadi mandiri.

Sumarmo (2010) [16] Menyatakan: “Pembelajaran matematika diarahkan untuk mengembangkan (1) kemampuan berfikir matematis yang meliputi: pemahaman, pemecahan masalah, penalaran, komunikasi, dan koneksi matematis, (2) kemampuan berfikir kritis, sikap yang terbuka dan obyektif, serta (3) disposisi matematis atau kebiasaan, dan sikap belajar berkualitas yang tinggi. Kebiasaan dan sikap belajar yang dimaksud antara lain terlukis pada karakteristik utama SRL yaitu: (1) Menganalisis kebutuhan belajar matematika, merumuskan tujuan dan merancang program belajar (2) Memilih dan menerapkan strategi belajar, (3) Memantau dan mengevaluasi diri apakah strategi telah dilaksanakan dengan benar, memeriksa hasil (proses dan produk), serta

merefleksi untuk memperoleh umpan balik”.

Karakter dalam SRL melukiskan sikap belajar berkualitas tinggi dan sangat dibutuhkan pada pembelajaran Matematika. Mengapa kebiasaan dan sikap dalam pembelajaran Matematika terlukis pada karakteristik utama SRL? Ini dikarenakan pada kegiatan di setiap fase membangun kemampuan Matematis. Misalnya pada fase merancang siswa harus menganalisis tujuan belajarnya, membuat tujuan belajar dan merencanakan strategi apa yang akan digunakan, dari kegiatan tersebut akan berkembang kemampuan matematis seperti pemahaman, analisis, dan pemecahan masalah, jika peserta didik dapat memahami, menganalisis dan memecahkan suatu permasalahan maka akan timbul kemampuan kritis, dimana dalam pembelajaran Matematika hal tersebut merupakan kemampuan yang ingin dicapai. Pada fase memantau dan mengevaluasi, peserta didik belajar mengkomunikasikan dan mengkoneksikan rencana-rencana yang dibuatnya pada masa perencanaan. Misalnya peserta didik bertanya pada dirinya sendiri, apakah strategi yang dilaksanakan sesuai dengan rencana? apakah saya kembali kepada kebiasaan lama? apakah saya tetap fokus? apakah strategi telah berjalan dengan baik? apakah saya perlu menyesuaikan strategi?. Lalu pada fase mengevaluasi, peserta didik dapat mengembangkan kemampuan komunikasi dan koneksi dengan cara memeriksa bagaimana jalannya strategi. Misal dengan membuat pertanyaan apakah strategi telah dilaksanakan dengan baik? (evaluasi proses). Hasil belajar apa yang telah dicapai? (evaluasi produk). Sesuaikah strategi dengan jenis tugas belajar yang dihadapi?. Jika peserta didik dapat menerapkan siklus SRL pada pembelajaran Matematika maka kemampuan-kemampuan matematis yang ingin dikembangkan akan berkembang dengan baik.

Berdasarkan definisi dan fase-fase SRL yang dikemukakan oleh Schunk dan Zimmerman, Vohs dan Baumeister, dan

Pintrich dapat disimpulkan ciri-ciri siswa yang mandiri dalam belajar, yaitu:

1. Tidak menyandarkan diri pada orang lain
2. Percaya pada kemampuan diri
3. Mau berbuat sendiri
4. Bertanggung jawab
5. Merencanakan pembelajaran
6. Memantau pembelajaran
7. Mengevaluasi pembelajaran, dan
8. Merefleksi pembelajaran

Dari ciri-ciri di atas dapat dibuat indikator kemandirian belajar, siswa dikategorikan mandiri jika:

1. Dapat berdiri sendiri
2. Dapat percaya pada kemampuan diri
3. Dapat bertanggung jawab
4. Dapat merencanakan pembelajaran
5. Dapat memantau pembelajaran
6. Dapat mengevaluasi pembelajaran, dan
7. Dapat merefleksi pembelajaran

Kemandirian belajar tersebut dapat diukur selama pembelajaran, baik didalam kelas maupun diluar kelas melalui beberapa cara misalnya dengan observasi dan wawancara berdasarkan indikator yang diinginkan.

### 3. KESIMPULAN

Berdasarkan uraian di atas, dapat disimpulkan bahwa kemandirian belajar merupakan kegiatan belajar yang dilakukan dengan sadar untuk mencapai tujuan yang dilakukan oleh siswa sendiri tanpa perintah atau bimbingan orang lain, atau dilakukan siswa dengan bimbingan orang lain. Kemandirian belajar akan terwujud apabila siswa aktif mengontrol sendiri segala sesuatu yang dikerjakannya. Dalam pembelajaran Matematika diarahkan untuk mengembangkan kemampuan berfikir matematis, kemampuan berfikir kritis, serta disposisi matematis, atau kebiasaan dan sikap belajar berkualitas yang tinggi. Kebiasaan dan sikap belajar yang dimaksud terlukis pada karakteristik utama SRL yaitu: (1) Menganalisis kebutuhan belajar Matematika, merumuskan tujuan; dan merancang program

belajar (2) Memilih dan menerapkan strategi belajar; (3) Memantau dan mengevaluasi diri, memeriksa hasil, serta merefleksi pembelajaran. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa sikap mandiri sangat dibutuhkan dalam pembelajaran matematika, contohnya mempertimbangkan pengambilan keputusan yang berhubungan dengan kegiatan belajar sehingga siswa bertanggung jawab sepenuhnya dalam proses belajar tersebut dan diharapkan siswa dapat menerapkannya dalam kehidupannya sehari-hari.

### 4. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Depdiknas. Undang-undang Republik Indonesia Nomor 20 Tahun 2003 tentang Sistem Pendidikan Nasional. Jakarta: Depdiknas.2003.
- [2] Sulistyaningsih, dkk. *Kemandirian Belajar dan Prestasi Belajar Matematika siswa SMPN 27 Purworejo*. Jurnal. Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Muhammadiyah Purworejo: Purworejo. 2013.
- [3] Rosyidah. *Hubungan antara kemandirian belajar dengan hasil belajar matematika pada siswa MTsN Parung Bogor*. Skripsi. Universitas Islam Negeri Jakarta: Jakarta. 2010. Tersedia di <http://repository.uinjkt.ac.id/dspace/bitstream/123456789/21624/1/ROSYIDAH-FITK.pdf> [diakses 24 April 2015]
- [4] Tahar I, dkk. *Hubungan Kemandirian Belajar dan Hasil Belajar Pada Pendidikan Jarak Jauh*. Jurnal Pendidikan Terbuka dan Jarak Jauh, Volume. 7, Nomor 2, September 2006. Tersedia di <http://lppm.ut.ac.id/htmlpublikasi/tahar.pdf> [diakses 24 April 2015]
- [5] Departemen Pendidikan Nasional. *Kamus Besar Bahasa Indonesia (KBBI) Pusat Bahasa*. PT. Gramedia Pustaka Utama. Jakarta. hal 872.2008.

- [6] Djamarah, S. B. *Psikologi Belajar*. Jakarta: PT. Rineka Cipta. hlm 13.2011.
- [7] Dimiyati dan Mudjiono. *Belajar dan Pembelajaran*. PT. Rineka Cipta. Jakarta. hlm 17.2013.
- [8] Slameto. *Belajar dan Faktor-faktor yang Mempengaruhinya*. PT. Rineka Cipta. Jakarta. hlm 15.2013.
- [9] Vohs, K. D. dan Baumeister, R. F. *Handbook of Self-Regulation second edition*. New York: The Guilford Press. hlm 2. 2011.
- [10] Tirtarahardja, U. dan Sulo, L. *Pengantar Pendidikan*. Jakarta: PT. Rineka Cipta. hlm 50.2005.
- [11] Sumarmo, U. *Kemandirian Belajar: Apa, Mengapa, dan Bagaimana dikembangkan pada peserta didik*. 2010. Tersedia di <http://math.sps.upi.edu/?p=61> [diakses 25 April 2015]
- [12] Nakata, Y. *Toward a Framework for Self-Regulated Language-Learning*. Canada. Jurnal Vol. 27, No 2, Spring 2010. Tersedia di
- [13] Sumarmo, U. *Kemandirian Belajar: Apa, Mengapa, dan Bagaimana dikembangkan pada peserta didik*. 2010. Tersedia di <http://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ924054.pdf> [diakses 23 April 2015]
- [14] Sumarmo, U. *Kemandirian Belajar: Apa, Mengapa, dan Bagaimana dikembangkan pada peserta didik*. 2010. Tersedia di <http://math.sps.upi.edu/?p=61> [diakses 25 April 2015]
- [15] Nodoushan, M.A.S.,. *Self-regulated learning (SRL): Emergence of the RSRLM model*. Iran. Jurnal internasional Vol. 6(3), 2012 (pp. 1-16). Tersedia di <http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED533138.pdf> [diakses 25 April 2015]
- [16] Sumarmo, U. *Kemandirian Belajar: Apa, Mengapa, dan Bagaimana dikembangkan pada peserta didik*. Bandung. Jurnal. 2010. Tersedia di <http://math.sps.upi.edu/?p=61> [diakses 25 April 2015]

## **KETERAMPILAN BERPIKIR KREATIF DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA**

Herlin Novalia<sup>1</sup>, Sri Hastuti Noer<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universitas Lampung, herlinnovalia@gmail.com

**Abstrak.** Tujuan pendidikan adalah mampu menciptakan pesertadidik yang siap menghadapi segala tantangan di masa depan. Peserta didik yang memiliki kesiapan itu adalah peserta didik yang kemampuan berpikirnya berkembang dengan baik. Salah satu bentuk kemampuan berpikir adalah berpikir kreatif. Berpikir kreatif merupakan proses penggunaan pikiran yang dipenuhi dengan ide atau gagasan ketika berimajinasi dan mampu menggunakan potensi yang ada dalam berbagai keadaan. Kemampuan ini terdapat dalam matematika sebagai salah satu karakteristik matematika yang membedakannya dari mata pelajaran lainnya. Dalam proses pembelajaran matematika terdapat indikator-indikator yang menyatakan bahwa peserta didik telah memiliki keterampilan berpikir kreatif yang baik. Indikator tersebut tercakup dalam lima aspek yaitu, kelancaran, keluwesan, keaslian, elaborasi, dan sensitivitas. Banyak cara dalam mengukur keterampilan berpikir kreatif, salah satunya adalah dengan memberikan soal cerita kepada peserta didik. Dalam artikel ini akan dipaparkan pengertian dan cara mengukur keterampilan berpikir kreatif dalam pembelajaran matematika.

**Kata Kunci:** Berpikir Kreatif, Pembelajaran Matematika, Peserta Didik.

### **1. PENDAHULUAN**

Peserta didik merupakan generasi muda yang akan menghadapi tantangan yang rumit di masa yang akan datang. Peserta didik hendaknya diberikan kesempatan berkembang agar siap menghadapi tantangan. Oleh karena itu setiap pendidik harus siap membantu peserta didiknya dalam mengembangkan potensi yang dimiliki. Salah satu potensi yang dimiliki oleh peserta didik diantaranya merupakan adalah berpikir kreatif.

Keterampilan berpikir kreatif peserta didik dapat dikembangkan melalui berbagai proses pembelajaran di sekolah, salah satunya adalah proses pembelajaran matematika. Hal ini karena matematika memiliki karakteristik yang mampu menumbuhkembangkan keterampilan berpikir kreatif peserta didik. Sehingga matematika mempunyai peran penting terhadap perkembangan pola pikir peserta didik.

Sejalan dengan Peraturan Menteri Pendidikan Nasional nomor 23 tahun 2006 [1] tentang standar kompetensi lulusan untuk mata pelajaran matematika di jenjang pendidikan dasar dan menengah, yaitu bahwa salah satu tujuan mata pelajaran matematika adalah untuk membekali peserta didik dengan kemampuan berpikir logis, analitis, sistematis, kritis,

dan kreatif, serta kemampuan bekerjasama. Mengikuti peraturan tersebut dapat dilihat bahwa kemampuan berpikir kreatif merupakan salah satu hal yang penting pada pembelajaran matematika. Demikian Dalam pelaksanaan pembelajaran matematika seorang guru harus mampu membantu dalam menumbuhkembangkan kemampuan berpikir kreatif peserta didiknya.

Seorang pendidik harus mengetahui makna keterampilan berpikir kreatif serta mengetahui indikator-indikator yang harus dikembangkan dalam mencapai keterampilan yang diinginkan. Sehingga dalam pelaksanaannya pembelajaran matematika perlu dirancang agar mampu mengembangkan potensi peserta didik. Artikel ini akan mengkaji pengertian keterampilan berpikir kreatif, indikator-indikator dalam mengukur keterampilan berpikir kreatif, dan bagaimana cara mengukurnya serta memberikan contoh soal cerita sebagai alat untuk mengukurnya.

### **2. PEMBAHASAN**

Sebagai pendidik, kita percaya bahwa dengan matematika seorang anak akan mampu mengembangkan keterampilan berpikir kreatifnya. Namun apakah pengertian dari berpikir kreatif itu? Sebelum lebih jauh membahas pengertian dari berpikir kreatif itu, kita

perlu mengetahui arti kreatif dan kreativitas.

Menurut Foresster [2] kreatif melibatkan kemampuan untuk mengembangkan sesuatu yang baru, bervariasi, dan ide yang unik. Sementara Noer [3] mengatakan bahwa kreativitas dapat dipandang sebagai produk dari hasil pemikiran atau perilaku manusia dan sebagai proses memikirkan berbagai gagasan dalam menghadapi persoalan atau masalah. Jadi, kreativitas itu adalah sebagai hasil yang diperoleh dari individu kreatif.

Individu yang kreatif tentunya mampu menggunakan ide-ide pemikiran mereka dalam berpikir. Seperti Martin [4] yang berpendapat bahwa mampu berpikir kreatif berarti mampu menghasilkan ide atau cara baru untuk menghasilkan suatu produk. Sejalan pula dengan McGregor [5] yang menyatakan bahwa berpikir kreatif adalah berpikir yang mengarah pada pemrolehan wawasan baru, pendekatan baru, perspektif baru, atau suatu cara baru untuk memahami sesuatu. Pada umumnya berpikir kreatif merupakan proses penggunaan yang dipenuhi dengan ide atau gagasan ketika berimajinasi dan mampu menggunakan potensi yang ada dalam berbagai keadaan.

Setelah mengetahui pengertian berpikir kreatif, kita sadari bahwa kemampuan berpikir kreatif dapat dilihat dari indikator-indikator tertentu. Dalam pendefinisian oleh Isaksen *et al* (Grieshaber [6]) yaitu berpikir kreatif sebagai proses konstruksi ide yang menekankan pada aspek kelancaran, keluwesan, kebaruan, dan keterincian. Hal ini berarti bahwa untuk memiliki keterampilan berpikir kreatif terdapat indikator yang harus dicapai oleh seorang individu yang dalam bahasan selanjutnya difokuskan pada peserta didik.

Indikator-indikator berpikir kreatif yang sering dipaparkan dalam penelitian-penelitian terpopuler biasanya berhubungan dengan kognitif peserta didik seperti keluwesan, kelancaran, keaslian, kepekaan, kerincian, kebaruan, dan lain-lain. Identifikasi oleh Sharp (Briggs dan

Davis [7]) tentang aspek berpikir kreatif yaitu kebaruan, hasil atau manfaat, dan produktivitas. Sementara Torrance (dalam Tarrow dan Lundsteen, [8]) merumuskan kriteria berpikir kreatif dalam 4 kriteria yaitu yakni 1) kelancaran, 2) keluwesan, 3) keaslian, 4) kerincian. Serta Holland (Mann [9]) mengidentifikasi aspek-aspek kemampuan berpikir kreatif matematis, yaitu kelancaran, keluwesan, keaslian, elaborasi, dan sensitivitas. Merujuk pendapat-pendapat sebelumnya, secara umum disimpulkan bahwa ada 4 indikator keterampilan berpikir kreatif matematis mencakup kelancaran, keluwesan, keaslian, dan keterincian.

Penjelasan dan ciri-ciri dari setiap indikator yang berkaitan dengan keterampilan berpikir kreatif diuraikan menurut menurut Munandar dalam Mulyana & Sabandar [10] adalah sebagai berikut.

1. Ciri-ciri kelancaran:

a) Mencetuskan banyak gagasan dalam pemecahan masalah  
b) Memberikan banyak jawaban dalam menjawab suatu pertanyaan  
c) Memberikan banyak cara atau saran untuk melakukan berbagai hal.  
d) Bekerja lebih cepat dan melakukan lebih banyak daripada anak-anak lain.

2. Ciri-ciri berpikir luwes (fleksibel):

a) Menghasilkan gagasan penyelesaian masalah atau jawaban suatu pertanyaan bervariasi.  
b) Dapat melihat suatu masalah dari sudut pandang yang berbeda-beda.  
c) Menyajikan suatu konsep dengan cara yang berbeda-beda.

3. Ciri-ciri orisinal (keaslian):

a) Memberikan gagasan yang baru dalam menyelesaikan masalah atau jawaban yang lain dari yang sudah biasa dalam menjawab suatu pertanyaan  
b) Membuat kombinasi-kombinasi yang tidak lazim dari bagian-bagian atau unsur-unsur.

4. Ciri-ciri memperinci (elaborasi):

a) Mengembangkan atau memperkaya gagasan orang lain.  
b) Menambahkan atau memperinci suatu gagasan sehingga tambah meningkatkan kualitas gagasan tersebut.

5. Ciri-ciri menilai (mengevaluasi):

a) Dapat menemukan kebenaran suatu pertanyaan atau kebenaran suatu rencana penyelesaian masalah. b) Dapat mencetuskan gagasan penyelesaian suatu masalah dan dapat melaksanakannya dengan benar. c) Mempunyai alasan yang dapat dipertanggungjawabkan untuk mencapai suatu keputusan.

Ciri-ciri tersebut dapat digunakan sebagai indikator untuk mengukur kemampuan berpikir kreatif seseorang dalam menyelesaikan masalah tertentu, misalnya dalam pembelajaran matematika. Aspek-aspek keterampilan ini mempresentasikan proses menjadi sensitif pada pemahaman-pemahaman peserta didik, dan merupakan ciri-ciri utama berpikir kreatif yang telah berkembang.

Para ahli telah mengembangkan instrumen untuk mengukur kemampuan berpikir kreatif matematis, seperti Torrance (Silver [11]) yang mengembangkan instrumen *Torrance Tests of Creative Thinking* (TTCT). Instrumen ini berupa tugas membuat soal matematika berdasarkan informasi yang terdapat pada soal terkait situasi sehari-hari yang diberikan. Sedangkan Jensen (Park [12]) mengukur keterampilan berpikir kreatif dalam pembelajaran matematika dengan memberikan tugas membuat sejumlah pertanyaan atau pernyataan berdasarkan informasi pada soal-soal yang diberikan. Soal-soal yang diberikan tersebut disajikan dalam bentuk narasi, grafik, atau diagram. Pengukuran yang dilakukan oleh Torrance dan Jensen adalah sering disebut dengan *Problem Posing* dimana keduanya mengukur aspek keterampilan berpikir kreatif dengan indikator kebaruan, keluwesan, dan kelancaran.

Cara lain dikemukakan oleh Getzles dan Jackson (Silver [11]) yang mengukur keterampilan berpikir kreatif dengan memberikan soal terbuka *open ended*. Begitu pula Noer [3] yang juga mengukur aspek keterampilan berpikir kreatif dengan memberikan soal cerita berbentuk *open ended*. Menurutnya, soal-soal seperti akan mem-

berikan jawaban beragam. Dalam hal ini, soal-soal cerita *open ended* mampu untuk memperlihatkan keterampilan berpikir kreatif dan banyak dikembangkan oleh para peneliti.

Berikut diberikan contoh soal cerita untuk mengukur keterampilan berpikir kreatif siswa pada aspek keluwesan, kelancaran, kebaruan, kepekaan, dan keterincian. Soal ini mengadopsi soal kelas XI SMA/SMK yang diterbitkan Kemendikbud tahun 2014 [13] tentang bahasan Fungsi Komposisi dan Fungsi Invers.

**Soal :** Suatu bank di Amerika menawarkan harga tukar Dollar Amerika (USD) ke Ringgit Malaysia (MYR), yaitu; 1 USD = 3,28 MYR, dengan biaya penukaran sebesar 2 USD untuk setiap transaksi penukaran. Kemudian salah satu bank di Malaysia menawarkan harga tukar ringgit Malaysia (MYR) ke Rupiah Indonesia (IDR), yaitu; 1 MYR = Rp3.169,54, dengan biaya penukaran sebesar 3 MYR untuk setiap transaksi penukaran. Seorang turis asal Amerika ingin bertamasya ke Malaysia kemudian melanjutkannya ke Indonesia dengan membawa uang sebesar 2.000 USD. Berapa IDR akan diterima turis tersebut jika pertama dia menukarkan semua uangnya ke mata uang Ringgit Malaysia di Amerika dan kemudian menukarkannya ke Rupiah Indonesia di Malaysia? Pertanyaan dari soal ini mengukur aspek-aspek keluwesan, kepekaan, kelancaran, kebaruan, serta kerincian yang merupakan indikator dalam keterampilan berpikir kreatif. Sehingga soal ini bisa digunakan untuk mengukur keterampilan berpikir kreatif.

Keterampilan siswa dalam menyelesaikan soal tersebut dengan berbagai strategi, akan menggambarkan aspek keluwesan. Kemampuan siswa mengira-ngira apakah soal ini dapat diselesaikan adalah gambaran kepekaan. Kemampuan siswa menemukan solusi dengan strategi tertentu menggambarkan aspek kelancaran. Aspek kebaruan ditunjukkan oleh kemampuan menggunakan strategi yang baru, unik, atau berbeda dari yang lain. kebaruan

juga ditunjukkan seberapa jarang suatu strategi digunakan. Misal, strategi yang hanya digunakan oleh kurang dari 5% siswa di kelas dikategorikan sebagai strategi baru. Sedangkan aspek keterincian ditunjukkan oleh kemampuan memberikan penjelasan secara rinci terhadap jawaban yang diberikan, misalnya dengan menggunakan konsep-konsep terkait. Aspek keterincian juga terkait dengan keruntutan atau koherensi penjelasan yang diberikan.

Setelah menyusun indikator, dilakukan pemberian skor dengan diberikan nilai maksimal dan minimal yang ditentukan dalam meraih perolehan skor.

### **3. KESIMPULAN**

Keterampilan berpikir kreatif memiliki pengaruh yang cukup penting terhadap perkembangan pola pikir peserta didik. Siswa yang memiliki keterampilan berpikir kreatif akan mudah untuk mengatasi kesulitan-kesulitan yang akan dihadapinya di masa mendatang. Keterampilan ini dapat diukur dengan memberikan soal cerita dalam proses pembelajaran matematika di kelas. Setelah menyadari bahwa penting dalam membekali peserta didik untuk mengembangkan keterampilan berpikir kreatif, seorang pendidik harus mengetahui cara mengukur ketrampilan berpikir kreatif siswa dan memperhatikan indikator-indikator yang ingin dicapai.

### **4. DAFTAR PUSTAKA**

- [1] Lampiran Peraturan Menteri Pendidikan Nasional RI No 23 Tahun 2006 dalam <http://staff.unila.ac.id/radengunawan/files/2011/09/Permendiknas-No.-23-tahun-2006.pdf>
- [2] Forrester, Julie C. (2008). *Thinking Creatively; Thinking Critically*. Paper at Asian Social Science, Riviera Gardens, Tsuen Wan, New Territories, Hong Kong SAR, China.
- [3] Noer, S.H. (2009). *KEMAMPUAN BERPIKIR KREATIF MATEMATIS Apa, Mengapa, dan Bagaimana?* Yogyakarta: Prosiding Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan dan Penerapan MIPA.
- [4] Martin. (2009). *Convergent and Divergent Thinking*. [Online] Tersedia: <http://www.eruptingmind.com/convergent-divergent-creative-thinking/> [23 Juli 2015]
- [5] McGregor, D. (2007). *Developing Thinking Developing Learning*. Poland: Open University Press
- [6] Grieshober, W. E. (2004). *Continuing a Dictionary of Creativity Terms & Definition*. New York: International Center for Studies in Creativity State University of New York College at Buffalo. [Online]. Tersedia: <http://www.buffalostate.edu/orgs/cbir/ReadingRoom/theses/Grieswep.pdf>. [27 Juli 2015]
- [7] Briggs, M & Davis, S. (2008). *Creative Teaching Mathematics in the Early Years & Primary Classrooms*. Madison Ave, New York, USA
- [8] Tarrow, N.B. dan Lundsteen. (1978). *Guiding Young Children Learning*. New York: McGraw-Hill Book Company.
- [9] Mann, E. L. (2005). *Mathematical Creativity and School Mathematics: Indicators of Mathematical Creativity in Middle School Students*. Disertasi University of Connecticut. [Online]. Tersedia: <http://www.gifted.uconn.edu/Siegle/Dissertations/Eric%20Mann.pdf>. [2 Agustus 2015]
- [10] Mulyana.T dan Sabandar J, *Upaya Meningkatkan kemampuan Berpikir Kreatif Matematik Siswa SMA Jurusan IPA Melalui Pembelajaran Dengan Pendekatan Deduktif-Induktif*. Makalah tidak dipublikasikan, 2005
- [11] Silver, E. A. (1997). *Fostering Creativity through Instruction Rich in Mathematical Problem Solving and Problem Posing*. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM)* –

- The International Journal on Mathematics Education. [Online]. Tersedia di: <http://www.emis.de/journals/ZDM/zdm973a3.pdf>. ISSN 1615-679X. [1 Agustus 2015]
- [12] Park, H. (2004). The Effects of Divergent Production Activities with Math Inquiry and Think Aloud of Students With Math Difficulty. Disertasi. [Online] Tersedia: <http://txspace.tamu.edu/bitstream/handle/1969.1/2228/etd-tamu-2004;jsessionid=BE099D46D00F1A54FDB51BF2E73CC609?sequence=1>. [1 Agustus 2015]
- [13] Bornok Sinaga, Pardomuan N.J.M. Sinambela, Andri Kristianto Sitanggang, Tri Andri Hutapea, Lasker Pangarapan Sinaga, Sudianto Manullang, dan Mangara Simanjorang. 2014. Buku Guru *Matematika SMA/MA/SMK/MAK Kelas XI*. Edisi ke-1. Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan. Matematika/Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.
-

## PENGEMBANGAN MATIKLOPEDIA BERBASIS PENDIDIKAN KARAKTER DI SEKOLAH MENENGAH PERTAMA SE- WILAYAH KEDUNGSAPUR DI TINJAU KEEFEKTIVANNYA

Sutrisno<sup>1</sup>, Dhian Endahwuri<sup>2</sup>, Achmad Buchori<sup>3</sup>,

<sup>1,2,3</sup> Pendidikan Matematika FPMIPATI Universitas PGRI Semarang,

[sutrisnopgrismg@gmail.com](mailto:sutrisnopgrismg@gmail.com)<sup>1</sup>, [endahwuridhian14@yahoo.co.id](mailto:endahwuridhian14@yahoo.co.id)<sup>2</sup>, [buccherypgri@gmail.com](mailto:buccherypgri@gmail.com)<sup>3</sup>

**Abstrak.** Penelitian ini dilatar belakangi hasil penelitian tahun pertama di SMPN 1 Semarang dan SMPN 2 Semarang yang telah dilakukan uji terbatas terhadap desain matiklopedia yang menunjukkan bahwa siswa dan guru sangat senang dan antusias dalam menggunakan media tersebut, oleh karena itu perlu dilakukan penelitian lebih lanjut secara uji diperluas di wilayah sekitar semarang

Penelitian ini bertujuan untuk menghasilkan produk Matiklopedia bagi siswa SMP sehingga menghasilkan media pembelajaran yang valid dan efektif digunakan selama proses belajar mengajar berlangsung

Jenis penelitian yang digunakan adalah penelitian pengembangan Research and Development oleh Borg and Gall dengan 10 tahapan, pada tahun pertama dilaksanakan tahap 1-6 yaitu (1) Potensi dan masalah, (2) Pengumpulan data, (3) Desain produk, (4) Validasi desain, (5) Revisi desain, (6) Uji coba produk selanjutnya pada tahun kedua dilaksanakan tahap 7-10 yaitu (7) Revisi desain (8) Uji coba pemakaian (9) Revisi Produk, (10) Produksi masal.

Kriteria kevalidannya ditunjukkan dengan hasil angket yang diisi oleh guru dan siswa SMP negeri dan swasta di 5 kabupaten adalah sebagai berikut: (1) Guru dan siswa di Kabupaten Grobogan untuk aspek media sebesar 95% dan 95%, aspek materi sebesar 100% dan 100%, aspek bahasa 88% dan 88%, Aspek ragam soal sebesar 88% dan 75% serta aspek desain media sebesar 95% dan 95% (2) Guru dan siswa di Kabupaten Demak untuk aspek media sebesar 100% dan 85%, aspek materi sebesar 83% dan 100%, aspek bahasa 88% dan 88%, Aspek ragam soal sebesar 88% dan 75%, serta aspek desain media sebesar 95% dan 85% (3) Guru dan siswa di Kabupaten Kendal untuk aspek media sebesar 85% dan 95%, aspek materi sebesar 100% dan 83%, aspek bahasa 88% dan 100%, aspek ragam soal sebesar 100% dan 100%, serta aspek desain media sebesar 85% dan 85% (4) Guru dan siswa di Kabupaten Semarang untuk aspek media sebesar 95% dan 90%, aspek materi sebesar 100% dan 92%, aspek bahasa 88% dan 100%, Aspek ragam soal sebesar 100% dan 100%, serta aspek desain media sebesar 95% dan 90% (5) Guru dan siswa di Kabupaten Salatiga untuk aspek media sebesar 90% dan 85%, aspek materi sebesar 100% dan 92%, aspek bahasa 88% dan 88%, Aspek ragam soal sebesar 100% dan 100%, serta aspek desain media sebesar 95% dan 90%.

Sedangkan kriteria keefektifannya ditunjukkan dari hasil postest yang ditunjukkan dari prestasi belajar kelas eksperimen lebih baik dibanding kelas kontrol dengan menggunakan uji-t pihak kanan, dengan analisis menggunakan uji-t didapatkan  $t_{hitung} > t_{tabel}$  yaitu  $1,43 > 1,22$ , maka  $H_0$  ditolak artinya pembelajaran dengan menggunakan media matiklopedia berbasis pendidikan karakter lebih baik dibandingkan dengan pembelajaran konvensional. Jadi dapat disimpulkan bahwa media matiklopedia berbasis pendidikan karakter efektif digunakan sebagai media pembelajaran.

**Kata Kunci:** Keefektifan, Matiklopedia, Pendidikan Karakter, Matematika SMP

### 1. PENDAHULUAN

#### 1.1 LATAR BELAKANG

Dari hasil penelitian tahun pertama penelitian hibah bersaing yang berjudul pengembangan matiklopedia berbasis pendidikan karakter di Sekolah Menengah Pertama menunjukkan bahwa siswa SMPN 1 Semarang dan siswa SMPN 2 Semarang sangat antusias dalam mengikuti proses pembelajaran berbantuan matiklopedia baik secara offline berupa versi cetak dan

media online di alamat [matiklopediasmp.blogspot.com](http://matiklopediasmp.blogspot.com),

berdasarkan angket yang diisi oleh siswa menunjukkan bahwa lebih dari 85% siswa SMPN 1 dan SMPN 2 Semarang sangat setuju pembelajaran matematika menggunakan matiklopedia berbasis pendidikan karakter karena membuat pembelajaran matematika lebih menarik dan menyenangkan

Kemudian dari hasil revisi produk yang telah divalidasi oleh ahli materi dan media diperoleh skor lebih dari 90% menyatakan bahwa media matiklopedia layak untuk di ujicobakan secara lebih luas dan hasil uji terbatas di dua sekolah menunjukkan bahwa guru dan siswa sama-sama memberikan penilaian bahwa media matiklopedia berbasis pendidikan karakter ini layak untuk diujicobakan secara diperluas, tidak hanya di kota Semarang melainkan di sekolah-sekolah SMP Negeri dan swasta di sekitar kota Semarang atau lebih dikenal dengan nama wilayah Kedungsapur.

Dalam hal ini diperlukan ketelitian dalam memilih sampel penelitian, karena tidak semua sekolah menengah pertama (SMP) di wilayah sekitar Semarang memiliki fasilitas internet, hotspot area dan tingkat akreditasi sekolah yang memadai, dalam memilih kabupaten disekitar Kota Semarang dipilih 5 (lima) kabupaten/kotamadya yaitu kabupaten Semarang, kotamadya Salatiga, kabupaten Kendal, kabupaten Demak dan kabupaten Grobogan yang masing-masing kabupaten dipilih 2 (dua) sekolah dalam kategori baik dilihat dari hasil Ujian Nasional, sarana prasarana dan tingkat akreditasi sekolah.

## **1.2 RUMUSAN MASALAH**

Berdasarkan latar belakang masalah yang telah diuraikan di atas, maka permasalahan yang menjadi bahan kajian dalam penelitian dan pengembangan ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana menghasilkan produk final media Matiklopedia berbasis pendidikan karakter yang valid atau layak digunakan sebagai media pembelajaran matematika bagi siswa SMP Negeri dan Swasta di wilayah Kedungsapur ?
2. Apakah menggunakan media Matiklopedia berbasis pendidikan karakter lebih efektif dibandingkan dengan media sebelumnya bagi siswa SMP Negeri dan Swasta di wilayah Kedungsapur ?

## **1.3 TUJUAN PENELITIAN**

Tujuan dari penelitian dan pengembangan ini adalah :

1. Menghasilkan produk final matiklopedia SMP berbasis pendidikan karakter dengan uji diperluas agar diketahui keunggulan dan kelemahannya di wilayah kedungsapur.
2. Dapat diketahui tingkat efektifitas penggunaan matiklopedia ini dalam proses pembelajaran di SMP di beberapa kabupaten di wilayah kedungsapur.

## **1.4 METODE PENELITIAN**

### **Lokasi dan Waktu Penelitian**

#### **1. Lokasi**

Lokasi penelitian berada di 5 (lima) kabupaten/kotamadya yaitu kabupaten Kendal, kabupaten Grobogan, kabupaten Semarang, kabupaten Demak dan Kota Salatiga atau lebih dikenal dengan nama daerah Kedungsapur.

#### **2. Waktu Penelitian**

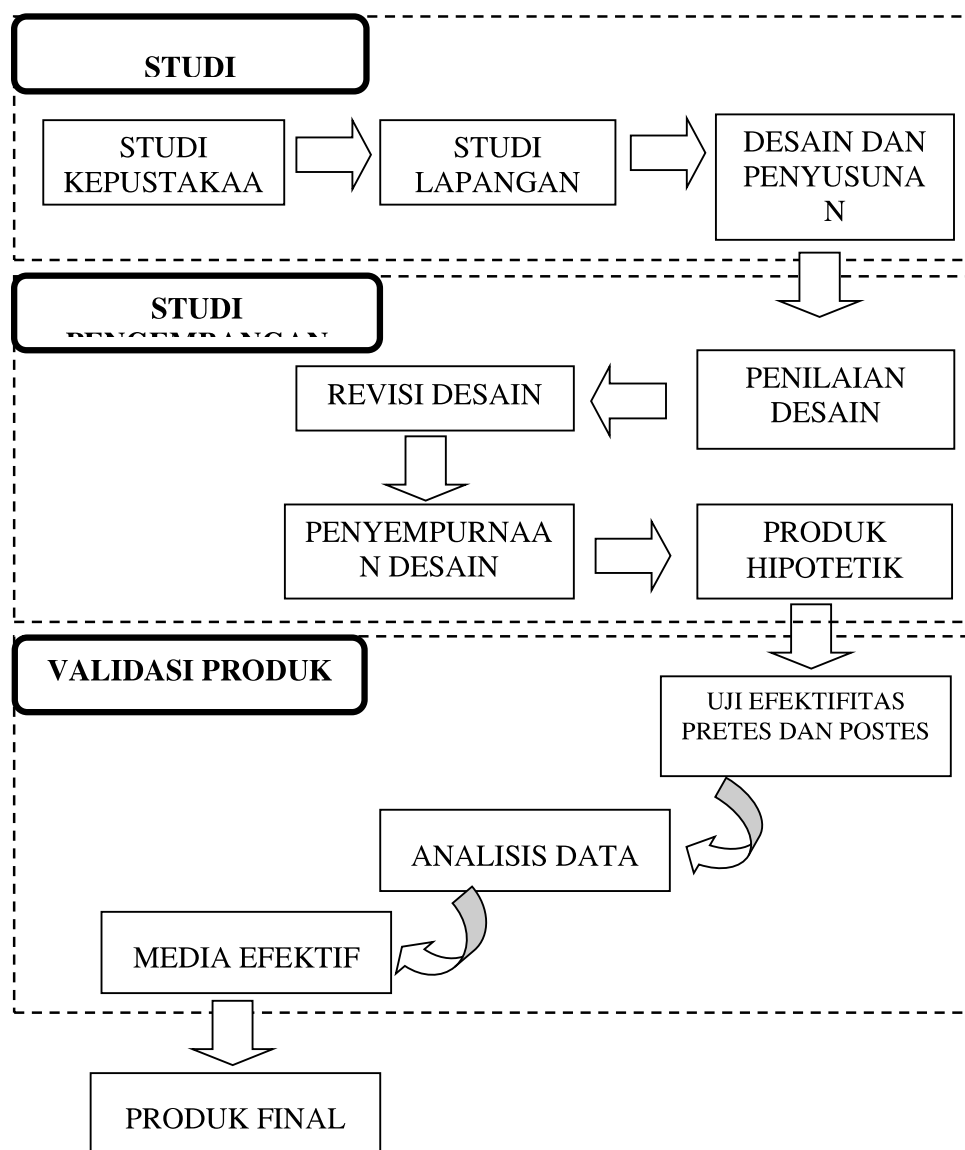
Waktu penelitian dimulai pada awal tahun ajaran 2015-2016 selama kurang lebih 8 bulan.

#### **3. Subjek Penelitian**

Subjek penelitian ini adalah siswa-siswi SMP Negeri dan Swasta di 10 (sepuluh) sekolah yaitu (1) SMPN 1 Kaliwungu dan (2) SMP PGRI 10 Kaliwungu Kendal, (3) SMPN 1 Tegowanu dan (4) SMP PGRI Tegowanu Grobogan, (5) SMPN 2 Ungaran dan (6) SMP PGRI Ungaran Semarang, (7) SMPN 1 Mranggen dan (8) SMP PGRI 2 Mranggen Demak dan (9) SMPN 1 Salatiga dan (10) SMP Muhammadiyah Salatiga.

#### **3. Desain Penelitian**

Desain penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah model Borg and Gall dengan 10 tahapan yaitu pada tahun kedua dilaksanakan tahap 7-10 yaitu (7) Revisi desain (8) Uji coba pemakaian (9) Revisi Produk, (10) Produksi masal. Pada penelitian tahun kedua ini, tahap yang telah dilaksanakan yaitu tahap (7) Revisi desain dan (8) Ujicoba pemakaian.



#### 4. Teknik Pengumpulan Data

Teknik pengumpulan data dalam penelitian ini adalah teknik angket, yang mana angket digunakan untuk mengetahui efektivitas produk media Matiklopedia berbasis pendidikan karakter selama proses belajar mengajar berlangsung.

#### 2.HASIL PENELITIAN

Berdasarkan kriteria validnya yaitu hasil angket yang diberikan kepada guru pada 5 (lima) Kabupaten di 10 (sepuluh) sekolah menunjukkan sebagai berikut: (1) Guru

dan siswa di Kabupaten Grobogan untuk aspek media sebesar 95% dan 95%, aspek materi sebesar 100% dan 100%, aspek bahasa 88% dan 88%, Aspek ragam soal sebesar 88% dan 75% serta aspek desain media sebesar 95% dan 95% (2) Guru dan siswa di Kabupaten Demak untuk aspek media sebesar 100% dan 85%, aspek materi sebesar 83% dan 100%, aspek bahasa 88% dan 88%, Aspek ragam soal sebesar 88% dan 75%, serta aspek desain media sebesar 95% dan 85% (3) Guru dan siswa di Kabupaten Kendal untuk aspek media sebesar 85% dan 95%, aspek materi sebesar 100% dan 83%, aspek bahasa 88%

dan 100%, aspek ragam soal sebesar 100% dan 100%, serta aspek desain media sebesar 85% dan 85% (4) Guru dan siswa di Kabupaten Semarang untuk aspek media sebesar 95% dan 90%, aspek materi sebesar 100% dan 92%, aspek bahasa 88% dan 100%, Aspek ragam soal sebesar 100% dan 100%, serta aspek desain media sebesar 95% dan 90% (5) Guru dan siswa di Kabupaten Salatiga untuk aspek media sebesar 90% dan 85%, aspek materi sebesar 100% dan 92%, aspek bahasa 88% dan 88%, Aspek ragam soal sebesar 100% dan 100%, serta aspek desain media sebesar 95% dan 90%. jadi dalam pembelajaran menggunakan media Matiklopedia berbasis pendidikan karakter bahwa media ini termasuk sangat layak digunakan sebagai media pembelajaran. Berdasarkan kriteria efektif yaitu hasil posttest di 10 sekolah SMP Negeri dan Swasta di wilayah Kedungsapur pada materi segitiga dan segiempat yang ditunjukkan dari prestasi belajar kelas

eksperimen lebih baik dibanding kelas kontrol dengan menggunakan uji-t pihak kanan, dengan analisis menggunakan uji-t didapatkan  $t_{hitung} > t_{tabel}$  yaitu  $1,43 > 1,22$ , maka  $H_0$  ditolak artinya pembelajaran dengan menggunakan media matiklopedia berbasis pendidikan karakter lebih baik dibandingkan dengan pembelajaran konvensional. Dan nilai rata-rata hasil posttest kelas eksperimen 88,22 dan kelas kontrol 70,35. Jadi dapat disimpulkan bahwa media matiklopedia berbasis pendidikan karakter sangat efektif digunakan sebagai media pembelajaran. Berikut beberapa dokumentasi kegiatan penelitian dalam proses pembelajaran matematika menggunakan media Matiklopedia Berbasis Pendidikan Karakter yang dibagi berdasarkan kabupaten yaitu Kabupaten Grobogan, Kabupaten Demak, Kabupaten Semarang, Kabupaten Kendal, dan Kabupaten Salatiga.

#### A. Kabupaten Grobogan



Gambar 2. Proses Pembelajaran Matiklopedia di SMPN 1 Tegowanu



B. Kabupaten Demak



C. Kabupaten Semarang

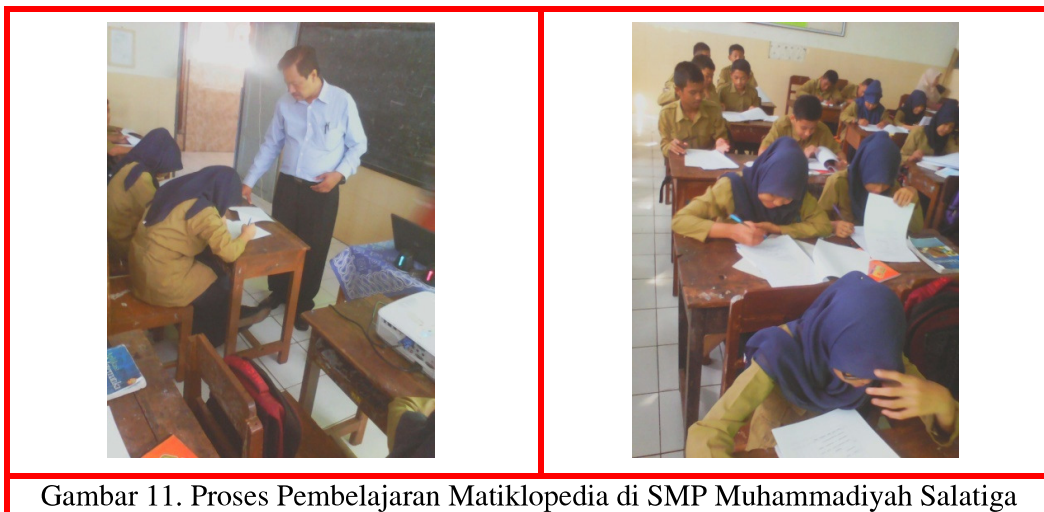


D. Kabupaten Kendal





E. Kabupaten Salatiga



### **3.KESIMPULAN**

Berdasarkan rumusan masalah, analisis data penelitian dan pembahasan masalah maka dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Telah dihasilkan produk matiklopedia berbasis pendidikan karakter baik online dan offline yang layak menurut guru dan siswa di 5 kabupaten.
2. Produk matiklopedia berbasis pendidikan karakter cukup efektif dalam meningkatkan hasil belajar siswa SMP di wilayah kedungsapur.

### **4. SARAN**

1. Perlu dilakukan uji coba diperluas secara komprehensif agar menghasilkan produk akhir yang dapat dipergunakan secara luas tidak hanya di wilayah kedungsapur.
2. Produk offline dan online matiklopedia berbasis pendidikan karakter di SMP perlu dimulai untuk mengembangkan matiklopedia SMA dengan tingkat kesulitan lebih tinggi.

### **5. REFERENSI**

Achmad Buchori (2010) yang berjudul pengembangan bahan ajar geometri analit ruang berbasis software Cabri 3D jurnal aksioma volume 1 tahun 2011

Abdul malik (2012) "pengembangan model pendidikan anti korupsi di sekolah dasar dengan media komik, menunjukkan bahwa siswa-siswa SD sangat menyukai seseorang guru yang membuat media pembelajaran" jurnal pytagoras volume 3 tahun 2012

Arikunto, S. 2002. *Prosedur Penelitian Suatu Pendekatan Praktek*. Jakarta:Rineka Cipta.

Baharudin dan Wahyuni, 2008. *Teori Belajar dan Pembelajaran*. Yogyakarta : Ruzz Media.

Bell, H. 1991. *Teaching and Learning Mathematics (In Secondary School)*. Iowa:Wm C. Brown Company.(

[digilib.uns.ac.id/pengguna.php?mn=detail&d...D](http://digilib.uns.ac.id/pengguna.php?mn=detail&d...D) wi Mei Heni - 2012 )

Suyanto, A. 2010. Pengembangan perangkat pembelajaran Matematika humanistik berbasis Konstruktivisme berbantuan ICT materi Geometri dimensi dua kelas XI SMK. UNNES. Tesis.

Febrianto dan Wijayanto. 2012. *Pengantar Teknologi dan Komunikasi (TIK) Untuk Pendidikan*. Semarang : IKIP PGRI Semarang Press

Gagne, A. 2008. *Constructivism and Peer Collaboration in Elementary Mathematics Education: The Connection to Estimology*. *Eurasia Journal of Mathematics*, vol. 4, no.4, 381-386.

Gagne et al. 1983. *The Effectiveness of Mastery Learning Strategies in Undergraduate Educations Courses*. *Journal of Educational Research*, vol.76, No. 4, 210-214.

Hudojo, H. 1998. *Mengajar Belajar*. Jakarta: Depdikbud

Noviana Dini (2011) yang berjudul *Pengembangan Perangkat Pembelajaran Matematika Humanistik Berideologi Pancasila Berbasis Konstruktivis menggunakan ICT di SMP* jurnal aksioma volume II tahun 2012

Isjoni, Ismail, dan Mahmud. 2008. *ICT Untuk Sekolah Unggul*. Yogyakarta: Pustaka Pelajar.

Surtino c. 2003 "The comic of clamat ; the use of comic as a linguistic mediator (prosiding internasional UNIPA)

Hadi Syaipul (2008) "Pembelajaran penjumlahan dan pengurangan pecahan dengan menggunakan media komik pada siswa kelas VII SMP Muhammadiyah 08 Malang, simposium nasional penelitian pendidikan Jakarta

Kertajaya., 1999. *Relational Understanding and Instrumental Understanding*. In *character Teaching*, No. 77 Mulyana, E.

2004. *Kurikulum Berbasis Kompetensi*, Bandung; PT. Remaja Rosdakarya.

Muijs dan Reynold. 2008. *Effective Teaching: Teori dan Aplikasi*. Yogyakarta : Pustaka Pelajar.

Piaget, J. 1973. *The Child and Reality* (W. Mays, Trans). London: Routledge & Kegan Paul.

Samsudi. 2009. *Disain Penelitian Pendidikan*. Semarang : UNNES PRESS.

Schramm, 1984. *Media Besar Media Kecil, Alat dan Teknologi untuk Pengajaran*, Seri *Pustaka Teknologi Pendidikan* No. 5. IKIP Semarang.

Syadely, M. 2003. *Psikologi Belajar*. Semarang : Laboratorium Komputer Pasca Sarjana UNNES.

Plomp. 1978. Characteristic building of Constructivist Learning and Teaching. <http://www.stemnet.nf.ca> (26/11/2009).

Prayito (2011) ;” pengembangan bahan ajar matematika berbasis e-learning untuk membangun peserta didik yang cerdas dan berkarakter” edumatica volume 1 unjambi 2012

Tiedth, W.S. 2004. Psikologi Pengajaran. Yogyakarta : Media Abadi.

Titik haryati (2012) “ pengembangan bahan ajar IPS SD dengan media komik” jurnal ilmu pendidikan volume 3 IKIP PGRI Semarang

Trimo, A. Dkk. 2011. Implementasi Pembelajaran pendidikan karakter dengan Media E-Learning Materi Ruang Dimensi Tiga Kelas VII Semester II SMP Walisongo Semarang. Semarang : Universitas Terbuka.

## PENGEMBANGAN PERMAIAN ULAR TANGGA DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA DI SEKOLAH DASAR

Rahaju  
Universitas Kanjuruhan Malang

**Abstrak.** Pembelajaran matematika di sekolah dasar (SD) seharusnya dilakukan dalam situasi menyenangkan agar mengurangi kesan bahwa matematika itu sulit dan membosankan. Kegiatan pembelajaran disesuaikan dengan karakter siswa SD yang cenderung suka bermain. Permainan ular tangga dapat digunakan sebagai alternatif untuk memotivasi siswa agar senang mengerjakan soal-soal matematika. Soal-soal yang harus dikerjakan siswa ditulis pada kartu dan diletakkan pada setiap petak papan permainan. Media yang digunakan dalam permainan ular tangga adalah papan berbentuk persegi berukuran  $4 \times 4$  m dan dadu berbentuk kubus berukuran  $20 \times 20 \times 20$  cm. Bentuk dan ukuran media disesuaikan dengan banyak siswa. Aturan permainan yaitu: (1) siswa dibagi menjadi beberapa kelompok; (2) perwakilan kelompok melakukan hompimpa untuk menentukan urutan bermain; (3) anggota kelompok bergantian menjadi bidak; (4) bidak bertugas melempar dadu, melangkah di atas papan, membacakan kartu soal, berdiskusi dengan anggota kelompok, menyampaikan jawaban; dan (5) kelompok yang menjawab soal dengan benar mendapatkan poin, tetapi apabila jawaban tidak benar, maka kelompok lain boleh memperebutkannya. Permainan dilakukan sampai akhir pembelajaran atau ada kelompok mencapai petak *finish*. Pemenang permainan adalah kelompok yang pertama kali mencapai *finish* atau yang mendapat poin terbanyak.

**Kata Kunci:** pembelajaran matematika, permainan ular tangga, ukuran media, aturan permainan

### 1. PENDAHULUAN

Pembelajaran adalah upaya sadar dan terencana untuk mengembangkan seluruh potensi siswa agar memiliki kecerdasan, kepribadian, dan akhlak mulia. Tetapi, pembelajaran di sekolah dasar (SD) masih ditekankan pada pemberian sejumlah pengetahuan melalui ceramah dan pemberian tugas. Guru hampir tidak pernah menggunakan cara belajar yang unik agar siswa memperoleh pengetahuan sekaligus membentuk kepribadian dan menanamkan akhlak mulia. Oleh karena itu, hasil pembelajaran cenderung bersifat kognitif. Pembelajaran hanya memberikan pengetahuan prosedural yang menuntut siswa menghafal.

Pada penelitian ini diberikan alternatif penggunaan permainan ular tangga dalam pembelajaran matematika. Hal ini didasari pertimbangan bahwa pelajaran matematika sering dianggap sulit dan membosankan. Oleh karena itu, pembelajaran dengan permainan akan mengurangi kesan bahwa pembelajaran matematika tidak menarik. Selain itu, pemilihan permainan ini memperhatikan karakter siswa siswa SD suka bermain. Melalui permainan

diharapkan siswa antusias bermain sambil belajar atau belajar sambil bermain.

Wulandari [12] menggunakan permainan ular tangga pada pembelajaran bilangan romawi. Ermawan [1], Susianto [9], Nurma'sumah [3], dan Wahyuni [11] menggunakan permainan ular tangga pada pembelajaran IPA, IPS, BI, dan PKn. Kelima penelitian tersebut menghasilkan kesimpulan bahwa permainan ular tangga dapat digunakan untuk meningkatkan aktivitas dan prestasi belajar siswa. Nurma'sumah [2] menambahkan bahwa permainan ini membuat siswa berani mengemukakan pendapat. Rahaju [5] menemukan fakta bahwa permainan ular tangga dapat digunakan untuk membentuk karakter siswa.

Penelitian di atas menggunakan papan permainan dengan ukuran dan banyak petak yang beragam. Demikian juga aturan permainan yang digunakan berbeda. Oleh karena itu, penelitian ini bertujuan untuk mendeskripsikan bentuk dan ukuran media serta aturan permainan ular tangga yang tepat, sehingga dapat digunakan pada pembelajaran di SD, terutama pada matapelajaran matematika.

## 2. MEDIA PERMAINAN ULAR TANGGA

Media permainan ular tangga dibedakan menjadi 2, yaitu: media utama dan media pendukung. Yang dimaksud media utama adalah media yang wajib ada agar dapat dilakukan permainan. Media utama permainan ular tangga meliputi: papan permainan, kartu soal, dadu, dan bidak. Papan permainan dibuat dari banner berukuran 4 x 4 m. Ukuran papan permainan disesuaikan dengan fungsinya yaitu sebagai tempat berkumpul semua siswa. Keliling papan dengan ukuran 16 m memungkinkan semua siswa (30-40 siswa) berjajar mengelilingi papan dan melihat gambar pada setiap petak. Kedekatan siswa dengan area bermain meningkatkan perhatian siswa terhadap hal yang akan dilakukan atau yang dipelajari.

Papan permainan dibagi menjadi 25 petak, sehingga setiap petak berukuran 80 x 80 cm. Ukuran petak cukup luas, memungkinkan setiap petak ditempati 2-3 bidak. Pada setiap petak terdapat gambar sesuai dengan materi pelajaran dan 4 kartu soal, kecuali pada petak ke-25 (*finish*) hanya terdapat 1 kartu. Kartu soal berbentuk persegi panjang terbuat dari kertas duplex berukuran 12,5 x 17,5 cm. Jenis kertas dan ukuran kartu menyebabkan kartu soal tampak kaku (tidak lentur), sehingga mudah dipegang dan tidak mudah rusak. Soal dalam kartu dapat digunakan untuk melatih siswa menyelesaikan masalah yang melibatkan matematika.

Penentuan 4 kartu pada setiap petak didasarkan pertimbangan bahwa ada kemungkinan sebuah petak ditempati oleh bidak dari kelompok yang berbeda. Bidak yang pertama mendarat petak tersebut akan menjawab soal pada kartu A, sedangkan bidak yang mendarat kedua akan menjawab soal pada kartu B. Demikian seterusnya untuk bidak-bidak lainnya. Dengan demikian, setiap pemain yang mendarat pada petak tersebut mendapat soal yang berbeda. Banyaknya soal yang

dibahas dapat memperkaya pengetahuan siswa.

Pada penelitian ini, permainan dilaksanakan selama 60 menit dan berhasil membahas 25-30 soal. Pada akhir permainan, ada kelompok yang mencapai petak ke-24. Oleh karena itu, banyaknya petak harus disesuaikan dengan waktu bermain. Jika terlalu banyak petak, maka guru akan terbebani untuk menyediakan soal, padahal soal-soal pada petak di atas 25 tidak akan ditempati pemain karena adanya keterbatasan waktu belajar.

Dadu berbentuk kubus berukuran 20 x 20 x 20 cm dan terbuat dari kain flanel berisi dakron. Sisi-sisi dadu mempunyai warna berbeda. Noktah pada setiap sisi berwarna kontras dengan warna sisi kubus. Karena ukurannya yang besar, maka penggunaan dadu dilakukan dengan cara dilempar di atas papan. Warna, ukuran, dan cara penggunaan dadu yang unik menarik perhatian siswa, sehingga meningkatkan motivasi siswa untuk menggunakannya. Hal ini secara tidak langsung meningkatkan perhatian siswa terhadap pembelajaran.

Bidak adalah perwakilan kelompok. Pada umumnya, bidak yang digunakan dalam permainan ular tangga berupa benda berbentuk kerucut. Tetapi, pada permainan ular tangga ini keberadaan bidak digantikan oleh anggota kelompok. Setiap anggota kelompok bergantian menjadi bidak untuk mewakili kelompok. Pelibatan siswa sebagai bidak memberikan dampak positif, yaitu semua anggota kelompok lebih memperhatikan permainan karena mereka akan terlibat menjadi bidak. Dengan demikian, semua siswa aktif mengikuti proses pembelajaran. Hal ini seperti yang tertulis dalam referensi [2] bahwa belajar akan lebih efektif jika siswa turut aktif dalam pembelajaran..

Selain media di atas, permainan ini memerlukan media pendukung. Keberadaan media pendukung dimaksudkan lebih memperlancar pelaksanaan permainan. Media pendukung yang digunakan pada permainan ular

tangga ini adalah identitas kelompok, stiker emoticon *smile*, dan papan skor. Identitas kelompok terbuat dari kertas jasmine metalik berbentuk persegi panjang berukuran 5 x 55 cm yang dipakai di kepala (seperti memakai mahkota). Pada identitas kelompok tertulis nama kelompok, yaitu kelompok 1, 2, 3, dan seterusnya bergantung pada banyak kelompok. Nomor ini menunjukkan urutan bermain. Dengan adanya identitas ini, guru dan siswa mudah mengenali kelompok yang sedang bermain dan urutan pemain berikutnya. Stiker emoticon *smile* merupakan poin yang diberikan kepada kelompok yang dapat menjawab pertanyaan dengan benar. Stiker ini ditempel pada papan skor. Papan skor diletakkan ditempat yang dapat dengan mudah dilihat siswa, agar memotivasi siswa untuk mengumpulkan poin sebanyak-banyaknya.

Secara keseluruhan, pelaksanaan permainan ular tangga dapat berjalan lancar dan sesuai dengan harapan karena permainan tersebut didukung oleh alat-alat atau media yang memadai. Semua alat yang diperlukan tersedia dan dapat digunakan sesuai dengan fungsinya. Artinya, perangkat permainan ular tangga yang disediakan guru sudah sesuai dengan kebutuhan belajar. Djamarah [2] mengatakan "sebagai alat bantu, media mempunyai fungsi melicinkan jalan menuju tercapainya tujuan pengajaran". Rusman [7] menegaskan "jika di dalam kegiatan pembelajaran telah tersedia fasilitas, media, dan sumber belajar yang menarik dan cukup untuk mendukung proses pembelajaran, maka hal itu juga akan menumbuhkan semangat belajar siswa".

### **3. ATURAN PERMAINAN ULAR TANGGA**

Aturan permainan yang diterapkan dalam pembelajaran sebagian besar sama dengan aturan permainan ular tangga pada umumnya. Permainan diawali dengan hompimpa untuk menentukan urutan

bermain. Setelah itu, bidak melempar dadu kemudian melangkah di atas papan sesuai dengan banyaknya mata dadu yang muncul. Suatu petak dapat ditempati 2 atau 3 bidak. Kesamaan aturan ini memberi keuntungan yaitu guru tidak memerlukan banyak waktu untuk menjelaskan aturan karena siswa sudah mengenalnya. Hal ini dimaksudkan untuk mengantisipasi kelemahan penggunaan permainan seperti yang dikemukakan Rahman [6] bahwa penggunaan permainan ular tangga dalam pembelajaran memerlukan banyak waktu untuk menjelaskan aturan main.

Ketika mendarat pada salah satu petak, bidak mengambil dan membacakan kartu soal. Setelah itu, bidak kembali ke kelompok untuk berdiskusi kemudian menyampaikan jawaban yang telah disepakati kelompok. Kelompok yang menjawab soal dengan benar mendapatkan poin. Tetapi apabila jawabannya salah, maka kelompok lain boleh berebut untuk menjawab pertanyaan tersebut. Penetapan aturan ini didasarkan pengalaman Ermawan [1], Nurma'sumah [3] Susianto [9], Wahyuni [11], dan Wulandari [12] bahwa keadaan kelas kurang kondusif pada saat kelompok pemain berdiskusi, sedangkan kelompok lain ramai sendiri karena tidak mendapat tugas apa-apa saat menunggu giliran bermain". Dengan memberikan kesempatan pada kelompok lain untuk memperebutkan pertanyaan yang tidak dapat dijawab oleh pemain, maka semua siswa memperhatikan pertanyaan yang dibacakan bidak dan berdiskusi untuk mencari jawabannya, sehingga setiap pertanyaan selalu diperhatikan dan dicari jawabannya oleh semua siswa. Dengan aturan ini, semua siswa memahami semua materi yang dituangkan dalam bentuk permainan tersebut.

Aturan selanjutnya yaitu bidak yang mendarat pada petak bergambar kaki tangga boleh naik ke ujung tangga jika dapat menjawab pertanyaan. Tetapi, jika tidak dapat menjawab pertanyaan, maka bidak tidak boleh naik ke petak bergambar

ujung tangga. Demikian juga jika bidak mendarat pada petak bergambar ekor ular, maka bidak akan turun ke petak bergambar kepala ular jika tidak dapat menjawab pertanyaan yang terdapat pada petak tersebut. Rahaju [4] mengatakan bahwa hal ini dimaksudkan untuk mempertahankan konsep permainan itu sendiri yaitu untuk mengajarkan nilai-nilai moral. Perbuatan baik diganjar dengan kenaikan ke petak yang lebih tinggi melewati tangga, sedangkan perbuatan buruk dihukum dengan penurunan ke petak yang lebih rendah melewati ular. Siswa yang rajin belajar akan berhasil menjawab pertanyaan, sehingga berhak naik melalui tangga. Siswa yang salah menjawab pertanyaan dianggap kurang belajar, sehingga tidak berhak naik ke petak yang lebih tinggi. Demikian juga dengan siswa yang berada pada petak bergambar ekor ular akan mendapat hukuman berupa turun ke petak yang lebih rendah jika tidak dapat menjawab pertanyaan. Tetapi jika bidak dapat menjawab pertanyaan dengan benar, maka hukuman dibatalkan karena dianggap telah melakukan perbuatan baik yaitu rajin belajar.

Permainan dilakukan sampai akhir pembelajaran atau ada salah satu kelompok mencapai petak *finish*. Pemenang permainan adalah kelompok yang pertama kali mencapai *finish* atau yang mendapat poin terbanyak. Cara memotivasi belajar siswa adalah memberikan poin kepada kelompok yang jawabannya benar. Poin yang diperoleh kelompok dikumpulkan lalu dihitung pada akhir permainan dan digunakan untuk menentukan pemenang atau yang berhak mendapat hadiah. Hal ini pun memberikan motivasi siswa untuk mempelajari materi pembelajaran. Sardiman [8] menyatakan “persaingan atau kompetisi dapat digunakan sebagai alat motivasi untuk mendorong belajar siswa. Persaingan individual maupun persaingan kelompok dapat meningkatkan prestasi belajar siswa.”

Selama permainan tidak ada siswa yang mencari jawaban di buku catatan. Hal

ini disebabkan permainan dilakukan di luar kelas dan perhatian siswa lebih terfokus pada kegiatan diskusi. Siswa lebih mengandalkan pada hasil pemikirannya daripada sekedar mengingat. Selain itu, konsep bermain yang dilakukan pada permainan ular tangga memberikan suasana yang lebih santai, sehingga siswa tidak merasa belajar dalam tekanan. Pembelajaran di luar kelas mempunyai keuntungan bahwa siswa tidak lagi bergantung pada catatan atau teori-teori yang diberikan guru. Referensi [10] memaparkan bahwa pembelajaran di luar kelas memungkinkan terjalinnya hubungan akrab antara siswa dan guru. Pembelajaran di luar kelas juga memberikan suasana belajar yang menyenangkan karena siswa dapat belajar tanpa batasan ruang yang dapat menimbulkan kebosanan dan kejenuhan. Siswa dapat belajar dalam berbagai posisi, misalnya: duduk, berdiri, berlari, atau santai. Kondisi ini membuat siswa semakin antusias untuk belajar.

#### 4. KESIMPULAN

Permainan ular tangga merupakan salah satu permainan yang dapat digunakan untuk belajar matematika, lebih tepatnya melatih siswa menyelesaikan permasalahan yang melibatkan kecakapan matematika. Permainan ini akan memberi kesempatan siswa berlatih menyelesaikan soal matematika dengan cara yang unik. Akan tetapi, penggunaan permainan ini tidak boleh mengabaikan konsep dan kebutuhan belajar siswa. Oleh karena itu, penggunaan permainan ular tangga dalam pembelajaran harus dilengkapi dengan media pembelajaran yang memadai seperti yang telah dipaparkan di atas.

Penelitian ini telah menghasilkan konsep (bentuk dan ukuran) media yan. Bentuk dan ukuran media berfungsi untuk menarik perhatian dan memotivasi siswa.

Selain itu, aturan permainan harus sesuai dengan tujuan penggunaannya, yaitu belajar. Dalam hal ini, permainan harus dilakukan secara efektif agar tujuan pembelajaran tercapai dan sesuai waktu

pembelajaran yang telah ditetapkan. Aturan permainan yang dianggap tepat adalah aturan seperti yang diuraikan di atas.

Seluruh konsep media dan aturan permainan ular tangga yang disarankan berupa hasil pengujian yang dilakukan dengan menerapkan pembelajaran dengan permainan ular tangga. Pada tahap ahli terhadap konsep yang telah diperoleh dalam penelitian ini.

## 5. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Ermawan, Agus, *Penggunaan Permainan Ular Tangga untuk Meningkatkan Aktivitas dan Prestasi Belajar Materi Energi Panas dan Bunyi pada Siswa Kelas IV SD Negeri Karangbesuki 4 Malang*, Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: Universitas Kanjuruhan Malang, 2013.
- [2] Djamarah, Syaiful Bahri dan Zain, Aswan, *Strategi Belajar Mengajar*, Jakarta: Rineka Cipta, 2010.
- [3] Nurma'sumah, Ummi, *Penggunaan Permainan Ular Tangga untuk Meningkatkan Aktivitas dan Prestasi Belajar Materi Menulis Pantun pada Siswa Kelas IV SDN Karangbesuki 3 Malang*, Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: Universitas Kanjuruhan Malang, 2013.
- [4] Rahaju, *Penggunaan Model Pembelajaran "EMT" dan Permainan Ular Tangga untuk Meningkatkan Keterampilan Menulis Pantun Siswa Kelas X SMA Negeri 2 Malang*. Malang: LPPM Universitas Kanjuruhan Malang, 2010.
- [5] Rahaju, *Peran Permainan Ular Tangga dalam Pembentukan Karakter pada Pembelajaran Matematika Realistik*. Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pembelajaran Matematika UMS, (2015), 266-275.
- [6] Rahman, Faizal, *Permainan Ular Tangga*. Makalah disajikan dalam rangka PKM, Politeknik Bandung, 2010.
- [7] Rusman, *Model-Model Pembelajaran Mengembangkan Profesionalisme Guru*, Jakarta: Rajawali, 2011.
- [8] Sardiman, *Interaksi dan Motivasi Belajar Mengajar*, Jakarta: PT Raja Grafindo Persada, 2011.
- [9] Susianto. Lucky. *Penggunaan Permainan Ular Tangga untuk Meningkatkan Aktivitas dan Prestasi Belajar Materi Perjuangan Melawan Penjajah pada Siswa Kelas V SD Negeri Karangbesuki 1 Malang*, Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: Universitas Kanjuruhan, 2013
- [10] Vera, Adelia. 2012. *Metode Mengajar Anak di Luar Kelas (Outdoor Study)*. Jogjakarta: Diva Press.
- [11] Wahyuni, Roib. *Penggunaan Permainan Ular Tangga untuk Meningkatkan Aktivitas dan Prestasi Belajar Materi Peraturan Perundang-undangan pada Siswa Kelas V SDN Karangbesuki 2 Malang*, Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: Universitas Kanjuruhan, 2013.
- [12] Wulandari, Niken. *Penggunaan Permainan Ular Tangga untuk Meningkatkan Aktivitas dan Prestasi Belajar Materi Belajar Materi Bilangan Romawi dan pada Siswa Kelas IV MI Sunan Kalijogo Malang*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: Universitas Kanjuruhan, 2013.



***SEMINAR NASIONAL MATEMATIKA DAN PENDIDIKAN MATEMATIKA  
UNIVERSITAS DIPONEGORO 2015  
SEMARANG, 12 SEPTEMBER 2015***

ISBN : 978-979-097-402-9