TEOREMA INTERPOLASI

UNTUK LOGIKA PREDIKAT L_oRW_+ DAN L_oR_+

SKRIPSI

Disusun Oleh :

INDRIYO LUKITO

J2A 004 022

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS DIPONEGORO

SEMARANG

2008

ABSTRAK

Pada Tugas Akhir ini, dipelajari mengenai pembuktian teorema interpolasi untuk logika predikat L_oRW_+ dan L_oR_+. Logika predikat L_oRW_+ adalah logika proposisional L_oRW_+ yang dilengkapi dengan aturan quantifiers. Sedangkan logika predikat L_oR_+ adalah logika predikat L_oRW_+ dengan menambahkan aturan struktural contraction. Dengan menggunakan modifikasi metode maehara dan dengan menggunakan suatu teorema yang bentuknya lebih umum dari interpolasi, dibuktikan bahwa teorema interpolasi berlaku untuk logika predikat L_oRW_+ dan L_oR_+.

ABSTRACT

In this paper, we study the proof of interpolation theorem for predicate logics L_oRW_+ and L_oR_+. Predicate logic L_oRW_+ can be obtained from propotitional logic L_oRW_+ by adding quantifiers rules. Predicate logic L_oR_+ can be obtained from predicate logic L_oRW_+ by adding contraction structural rule. By using modification of maehara's method and by using a general form theorem of interpolation, we prove that the interpolation theorem holds for predicate logics L_oRW_+ and L_oR_+.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang.

Logika intuisionistik (*intuitionistic logics*) merupakan formulasi suatu logika yang dikenalkan oleh Gentzen pada tahun 1935. Formulasi tersebut yang kemudian lebih dikenal sebagai sistem sequent tipe-Gentzen LJ memuat tiga aturan struktural yaitu aturan *weakening, contraction* dan *exchange*. Sedangkan logika substruktural adalah logika yang tidak memuat salah satu atau beberapa aturan-aturan struktural tersebut.

(Troelstra dan Schwichtenberg, 2000)

Pada logika substruktural distributif, sistem sequent tipe Gentzen berisi dua jenis struktur yang lebih kompleks yaitu intensional dan extensional, yang mana dapat berkaitan satu sama lain. Di dalam struktur intensional bisa terdapat struktur extensional. Di dalam struktur extensional bisa terdapat struktur intensional. Begitu juga seterusnya. Kemudian karena kekomplekskan, maka beberapa kesulitan akan muncul. Pada tulisan ini, dengan menggunakan sistem logika predikat $\mathbf{L_0RW_+}$ dan $\mathbf{L_0R_+}$**,** kita akan menyelesaikan kesulitan dan menunjukkan bahwa teorema interpolasi berlaku untuk logika $\mathbf{RW_+}$ dan $\mathbf{R_+}$ yaitu untuk fragment positif dari logika predikat **RW** dan **R**, berturut–turut.

1.2 Perumusan Masalah.

Berdasar latar belakang yang sudah dijelaskan, permasalahan yang akan diangkat dalam Tugas Akhir ini adalah akan dibuktikan bahwa *teorema interpolasi berlaku untuk sistem logika substruktural distributif tanpa aturan weakening.* Teorema interpolasi tersebut secara berturut-turut dapat dibuktikan untuk logika predikat $\mathbf{L_oRW_+}$ **dan** $\mathbf{L_oR_+}$.

1.3 Pembatasan Masalah.

Penulisan Tugas Akhir ini hanya membahas pembuktian *teorema interpolasi untuk logika predikat* $\boldsymbol{L_oRW_+}$ *dan* $\boldsymbol{L_oR_+}$ yang hanya mempunyai satu sequent inisial saja, yaitu $A \to A$.

1.4 Tujuan Penulisan.

Berdasarkan permasalahan di atas, maka tujuan penulisan Tugas Akhir ini adalah untuk membuktikan bahwa *teorema interpolasi berlaku pada sistem logika substruktural distributif tanpa aturan weakening* khususnya untuk logika predikat $\mathbf{L_oRW_+}$ dan $\mathbf{L_oR_+}$**.**

1.5 Sistematika Penulisan.

Tugas Akhir ini terdiri dari 4 bab dan beberapa subbab, Bab I Pendahuluan yang berisi latar belakang, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan penulisan, dan sistematika penulisan. Pada Bab II diberikan Dasar Teori yang perlu diketahui untuk pembahasan selanjutnya. Kemudian pada Bab III

Pembahasan yang membahas tentang pembuktian *teorema interpolasi untuk sistem logika substruktural distributif dan perluasannya tanpa aturan weakening* yaitu pada logika predikat $\mathbf{L_oRW_+}$ dan $\mathbf{L_oR_+}$**.** Sedangkan pada Bab IV berisi tentang kesimpulan dari pembahasan-pembahasan pada bab-bab sebelumnya, dan saran tentang problem-problem selanjutnya yang dapat dipelajari.

BAB II

DASAR TEORI

Pada bagian ini dibahas teori-teori yang menunjang pembahasan.

2.1 Logika proposisional L_oRW_+.

Sebelum mempelajari tentang logika proposisional $\mathbf{L_oRW_+}$, diberikan beberapa definisi berikut :

Definisi term yaitu :

Definisi 2.1.1 (http://en.wikipedia.org/wiki/Formula.html)

1. *Suatu variabel adalah term.*
2. *Suatu konstanta adalah term.*
3. *Jika f adalah simbol fungsi dan* $t_1, t_2, ..., t_n$ *adalah term maka* $f\left(t_1, t_2, ..., t_n\right)$ *adalah term.*

Contoh :

1. *m, n, y, z.*
2. *6, 7, 8, 9.*
3. $f(a, b) = a^2 + b^2$.

Definisi proposisi yaitu :

Definisi 2.1.2 (http://en.wikipedia.org/wiki/Formula.html)

1. *Jika* t_1 *dan* t_2 *adalah term maka* $t_1=t_2$ *adalah proposisi.*

2. *Jika R adalah simbol relasi dan $t_1, \ldots, t_n$ adalah term maka* $R(t_1,\ldots,t_n)$ *adalah proposisi.*

Contoh :

1. *m = 3.*
2. *R (5,3). R menyatakan lebih dari* $\Rightarrow$ *R(5,3) = 5 >3.*

Definisi formula yaitu :

Definisi 2.1.3 (http://en.wikipedia.org/wiki/Formula.html)

1. *Proposisi adalah formula.*
2. *Jika A adalah formula dan B adalah formula maka* $(A \wedge B), (A \vee B), (\mathrm{A} \supset \mathrm{B}), (A * B)$ *adalah formula.*
3. *Jika x adalah variabel dan A(x) adalah formula maka* $\exists x A(x)$ *adalah formula.*
4. *Jika x adalah variabel dan A(x) adalah formula maka* $\forall x A(x)$ *adalah formula.*

Contoh :

1. *n = 5.*
2. *Jika* a^2 *adalah formula dan* b^2 *adalah formula maka* $(a^2 \wedge b^2), (a^2 \vee b^2), (a^2 \supset b^2), (a^2 * b^2)$ *adalah formula.*
3. $\exists x A(x) = \exists x(2x^2 > x)$.
4. $\forall x A(x) = \forall x(\frac{1}{2}x^3 > x)$.

Definisi subformula yaitu :

Definisi 2.1.4 (http://planetmath.org/encyclopedia/Subformula.html)

Misalkan A adalah formula, maka subformula dari A didefinisikan sebagai berikut:

1. *A subformula dari A.*
2. *A dan B subformula dari* $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(\mathrm{A} \supset \mathrm{B})$ dan $(A * B)$.
3. *A(t) subformula dari* $\exists x A(x)$ *untuk suatu t yang bebas dari x di A(x).*
4. *A(t) subformula dari* $\forall x A(x)$ *untuk suatu t yang bebas dari x di A(x).*

Penjelasan dari "*t* bebas dari *x* di *A*(*x*)", artinya bahwa setelah mensubstitusi term *t* ke variabel *x* dalam formula *A*(*x*), tidak ada variabel bebas di *t* menjadi variabel terikat di *A*(*t*).

Suatu variabel dikatakan bebas jika dan hanya jika tanpa terikat quantifier.

Untuk lebih jelasnya, maka akan diberikan contoh berikut :

1. $\exists y\left(t^2 + y^2 = 8\right)$ adalah subformula dari $\exists x\left(\exists y\left((x^2 + y^2 = 8\right)\right)$ = $\exists x A(x)$ selama *t* adalah term yang tidak mengandung variabel *y*.
2. Jika *t*=*y*+2, maka $\exists y\left((y+2)^2 + y^2 = 8\right)$ = $A(y+2)$ bukan subformula dari $\exists x\left(\exists y\left(x^2 + y^2 = 8\right)\right)$ karena *t* mengandung variabel *y*. Tetapi jika *t*=*z*+2, maka $\exists y\left((z+2)^2 + y^2 = 8\right)$ = $A(z+2)$ subformula dari $\exists z\left(\exists y\left(z^2 + y^2 = 8\right)\right)$ karena *t* tidak mengandung variabel *y*.

Definisi struktur yaitu :

Definisi 2.1.5 (Surarso, 1998)

1. *Suatu formula A adalah struktur.*
2. *Untuk* $n \geq 2$*, jika setiap* x_i *adalah suatu struktur untuk setiap* $i = 1, ..., n$ *maka multiset* ($x_1; ...; x_n$) *dan himpunan* ($x_1, ..., x_n$) *adalah struktur.*

Contoh :

1. $m = 3$.
2. *Misal* x_1 *adalah struktur,* x_{21} *adalah struktur,* x_{22} *adalah struktur,* x_3 *adalah struktur,* x_{41} *adalah struktur,* x_{42} *adalah struktur,* x_5 *adalah struktur, maka :*
   - x_{21}, x_{22} dan x_{41}, x_{42} *merupakan struktur..*
   - x_1 ; (x_{21}, x_{22}) ; x_3 ; (x_{41}, x_{42}) ; x_5 *merupakan struktur.*

Logika proposisional $\mathbf{L_oRW_+}$ mengandung penghubung logika $\supset, \wedge, \vee$ dan $*$ (penggandaan atau fusi).

Sequent pada logika proposisional $\mathbf{L_oRW_+}$ mempunyai definisi yaitu sebagai berikut :

Definisi 2.1.6 (Surarso, 1995)

Sebuah sequent adalah ekspresi dari bentuk $X \rightarrow A$ *dimana X adalah struktur dan A adalah formula.*

Struktur *X* di sebelah kiri tanda panah sequent disebut anteseden *(antecedent)*, sedangkan formula *A* di sebelah kanan tanda panah sequent disebut *succedent* atau *consequent*.

Definisi aturan inferensi pada logika proposisional $\mathbf{L_oRW_+}$ yaitu :

Definisi 2.1.7 (Surarso, 1995)

Pada aturan inferensi, formula yang memuat penghubung logika dan muncul pada sequent bawah dari aturan untuk penghubung logika selanjutnya disebut *prinsipal formula* (formula utama). Struktur dari bentuk (X_1, … ,X_n) disebut *extensional* dan bentuk dari (X_1; … ;X_n) disebut *intensional*. Untuk bentuk struktur (X_1; … ;X_n) dapat diekspresikan oleh formula $X_1 * \ldots * X_n$. Sedangkan bentuk struktur (X_1, … ,X_n) dapat diekspresikan oleh formula $X_1 \wedge \ldots \wedge X_n$. Diasumsikan bahwa (X_1; … ;X_n) adalah sebuah multiset yang secara tidak langsung bahwa aturan exchange berlaku untuk $*$ dan diasumsikan bahwa (X_1, … ,X_n) adalah sebuah multiset yang secara tidak langsung bahwa aturan exchange dan aturan contraction berlaku untuk $\wedge$.

Sehingga definisi dari logika proposisional $\mathbf{L_oRW_+}$ yaitu :

Definisi 2.1.8

Sistem sequent tipe Gentzen untuk logika proposisional $\boldsymbol{L_oRW_+}$ *terdiri dari initial sequent :*

$A \to A$

Aturan - aturan untuk logical connectives :

$$\frac{X; A \to B}{X \to A \supset B}(\to\supset) \qquad \frac{X \to A \quad \Gamma(B) \to C}{\Gamma(A \supset B; X) \to C}(\supset\to)$$

$$\frac{\Gamma(A) \to C \quad \Gamma(B) \to C}{\Gamma(A \vee B) \to C}(\vee\to) \qquad \frac{X \to A \quad Y \to B}{X, Y \to A \wedge B}(\to\wedge)$$

$$\frac{X \to A}{X \to A \vee B}(\to\vee 1) \qquad \frac{X \to B}{X \to A \vee B}(\to\vee 2)$$

$$\frac{X \to A \qquad Y \to B}{X;Y \to A * B}(\to *) \qquad\qquad \frac{\Gamma(A;B) \to C}{\Gamma(A * B) \to C}(* \to)$$

$$\frac{\Gamma(A,B) \to C}{\Gamma(A \wedge B) \to C}(\wedge \to)$$

2.2 Logika Predikat $\mathbf{L_0RW_+}$.

Selanjutnya, dipelajari tentang logika predikat $\mathbf{L_0RW_+}$. Logika predikat $\mathbf{L_0RW_+}$ adalah logika proposisional $\mathbf{L_0RW_+}$ yang dilengkapi dengan aturan quantifiers.

Quantifiers adalah simbol khusus yang digunakan untuk membentuk kalimat umum tentang semua hal atau tentang beberapa (paling sedikit satu) hal. (http://en.wikipedia.org/wiki/Predicate_language.html).

Quantifiers ada 2 macam, yaitu:

1. Universal quantifiers ($\forall$).
   1. $\forall x$ diterjemahkan sebagai "untuk setiap *x*" .
   2. $\forall x F(x)$ disebut sebagai universal generalization.
   3. $\forall x F(x)$ benar jika $F(x)$ benar untuk setiap *x*, dengan kata lain, $\forall x F(x)$ benar jika $F(x_1) \wedge F(x_2) \wedge ... \wedge F(x_i)$ benar.
2. Existensial quantifiers ($\exists$).
   1. $\exists x$ diterjemahkan sebagai "terdapat *x*" atau "terdapat paling sedikit satu *x*" .
   2. $\exists x F(x)$ disebut sebagai existensial generalization.

3. $\exists x F(x)$ benar jika $F(x)$ benar untuk paling sedikit satu *x*, dengan kata lain, $\exists x F(x)$ benar jika $F(x_1) \vee F(x_2) \vee ... \vee F(x_i)$ benar.

Definisi aturan quantifiers yaitu :

Definisi 2.2.1 (Surarso, 1995)

Aturan-aturan quantifiers:

$$\frac{X \rightarrow A(t)}{X \rightarrow \exists z A(z)}(\rightarrow \exists) \qquad \frac{X, A(x), \Delta \rightarrow D}{X, \exists z A(z), \Delta \rightarrow D}(\exists \rightarrow)$$

$$\frac{X \rightarrow A(x)}{X \rightarrow \forall z A(z)}(\rightarrow \forall) \qquad \frac{X, A(t), \Delta \rightarrow D}{X, \forall z A(z), \Delta \rightarrow D}(\forall \rightarrow)$$

Dimana, t adalah suatu term dan x adalah suatu variable yang memenuhi syarat eigenvariabel, yaitu x tidak muncul pada sequent bawah dari $(\exists \rightarrow)$ *dan* $(\rightarrow \forall)$.

Sehingga definisi logika predikat $\mathbf{L_oRW_+}$ yaitu :

Definisi 2.2.2

Sistem sequent tipe Gentzen untuk logika predikat $\mathbf{L_oRW_+}$ *terdiri dari initial sequent :*

$A \rightarrow A$

Dan aturan-aturan inferensi berikut :

Aturan struktural :

$$\frac{\Gamma(X) \rightarrow D}{\Gamma(X, Y) \rightarrow D}(E - weak)$$

Aturan-aturan untuk logical connectives :

$$\frac{X; A \rightarrow B}{X \rightarrow A \supset B}(\rightarrow \supset) \qquad \frac{X \rightarrow A \qquad \Gamma(B) \rightarrow C}{\Gamma(A \supset B; X) \rightarrow C}(\supset \rightarrow)$$

$$\frac{\Gamma(A) \to C \quad \Gamma(B) \to C}{\Gamma(A \vee B) \to C}(\vee \to) \qquad \frac{X \to A \qquad Y \to B}{X, Y \to A \wedge B}(\to \wedge)$$

$$\frac{X \to A}{X \to A \vee B}(\to \vee 1) \qquad \frac{X \to B}{X \to A \vee B}(\to \vee 2)$$

$$\frac{X \to A \qquad Y \to B}{X; Y \to A * B}(\to *) \qquad \frac{\Gamma(A; B) \to C}{\Gamma(A * B) \to C}(* \to)$$

$$\frac{\Gamma(A, B) \to C}{\Gamma(A \wedge B) \to C}(\wedge \to)$$

Aturan-aturan quantifiers :

$$\frac{X \to A(t)}{X \to \exists z A(z)}(\to \exists) \qquad \frac{X, A(x), \Delta \to D}{X, \exists z A(z), \Delta \to D}(\exists \to)$$

$$\frac{X \to A(x)}{X \to \forall z A(z)}(\to \forall) \qquad \frac{X, A(t), \Delta \to D}{X, \forall z A(z), \Delta \to D}(\forall \to)$$

Dimana, t adalah suatu term dan x adalah suatu variable yang memenuhi syarat eigenvariabel, yaitu x tidak muncul pada sequent bawah dari $(\exists \to)$ *dan* $(\to \forall)$.

2.3. Logika Predikat L_0R_+.

Sebuah ekspresi $\Gamma(X)$ digunakan untuk menandakan struktur dengan sebuah indikasi kemunculan struktur *X* di dalam $\Gamma(X)$. Kemudian kita misalkan bahwa $\Gamma(Y)$ struktur yang diperoleh dari $\Gamma(X)$ dengan menggantikan indikasi kemunculan struktur *X* di dalam $\Gamma(X)$ dengan sebuah struktur *Y*.

Logika predikat $\mathbf{L_0R_+}$ diperoleh dari logika predikat $\mathbf{L_0RW_+}$ dengan menambahkan aturan struktural *contraction*.

Aturan contraction :

$$\frac{\Gamma(X;X)\to C}{\Gamma(X)\to C}\left(I-con\right)$$

Sehingga definisi logika predikat $\mathbf{L_oR_+}$ yaitu :

Definisi 2.3.1

Sistem sequent tipe Gentzen untuk logika predikat $\boldsymbol{L_oR_+}$ *terdiri dari initial sequent :*

$$A\to A$$

Dan aturan-aturan inferensi berikut :

Aturan struktural :

$$\frac{\Gamma(X)\to D}{\Gamma(X,Y)\to D}\left(E-weak\right) \qquad \frac{\Gamma(X;X)\to C}{\Gamma(X)\to C}\left(I-con\right)$$

Aturan-aturan untuk logical connectives :

$$\frac{X;A\to B}{X\to A\supset B}(\to\supset) \qquad \frac{X\to A \qquad \Gamma(B)\to C}{\Gamma(A\supset B;X)\to C}(\supset\to)$$

$$\frac{\Gamma(A)\to C \quad \Gamma(B)\to C}{\Gamma(A\vee B)\to C}(\vee\to) \qquad \frac{X\to A \qquad Y\to B}{X,Y\to A\wedge B}(\to\wedge)$$

$$\frac{X\to A}{X\to A\vee B}(\to\vee 1) \qquad \frac{X\to B}{X\to A\vee B}(\to\vee 2)$$

$$\frac{X\to A \qquad Y\to B}{X;Y\to A*B}(\to *) \qquad \frac{\Gamma(A;B)\to C}{\Gamma(A*B)\to C}(*\to)$$

$$\frac{\Gamma(A,B)\to C}{\Gamma(A\wedge B)\to C}(\wedge\to)$$

Aturan-aturan quantifiers :

$$\frac{X \to A(t)}{X \to \exists z A(z)}(\to \exists) \qquad \frac{X, A(x), \Delta \to D}{X, \exists z A(z), \Delta \to D}(\exists \to)$$

$$\frac{X \to A(x)}{X \to \forall z A(z)}(\to \forall) \qquad \frac{X, A(t), \Delta \to D}{X, \forall z A(z), \Delta \to D}(\forall \to)$$

Dimana, t adalah suatu term dan x adalah suatu variable yang memenuhi syarat eigenvariabel, yaitu x tidak muncul pada sequent bawah dari $(\exists \to)$ *dan* $(\to \forall)$.

Bukti dari sequent $X \to A$ dalam $\mathbf{L_0R_+}$ didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 2.3.2 (Surarso, 1995) :

Sebuah bukti P dari sequent $X \to A$ *adalah sebuah pohon sequent (tree) dari sequent-sequent sebagai berikut :*

1. *Sequent paling atas adalah inisial sequent.*
2. *Setiap sequent pada P, kecuali sequent paling bawah, merupakan sequent atas dari aturan inferensi yang mempunyai sequent bawah yang termasuk didalam P.*
3. *Sequent paling bawah adalah* $X \to A$.

Contoh: Berikut adalah bukti dari sequent $A \wedge (B \vee C) \to (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \to A \quad B \to B}{A, B \to (A \wedge B)}(\to \wedge)}{A, B \to (A \wedge B) \vee (A \wedge C)}(\to \vee 1) \qquad \dfrac{\dfrac{A \to A \quad C \to C}{A, C \to (A \wedge C)}(\to \wedge)}{A, C \to (A \wedge B) \vee (A \wedge C)}(\to \vee 2)}{A, (B \vee C) \to (A \wedge B) \vee (A \wedge C)}(\vee \to)$$

Definisi bukti $\dfrac{A, (B \vee C) \to (A \wedge B) \vee (A \wedge C)}{A \wedge (B \vee C) \to (A \wedge B) \vee (A \wedge C)}(\wedge \to)$

Definisi 2.3.3 (Surarso, 1995)

Sebuah bukti dari suatu formula A adalah bukti dari sequent $\rightarrow A$

2.4 Induksi Matematika

a. Untuk membuktikan suatu sifat S berlaku pada x, dimana x adalah bilangan asli, yaitu dengan melakukan proses induksi sebagai berikut:

   1) The Basis : Dibuktikan sifat S tersebut berlaku pada x = 1.

   2) The Induktive step : Dibuktikan jika sifat S berlaku pada x = *k*, maka sifat S akan berlaku pula pada x = *k*+1.

b. Untuk membuktikan suatu sifat S berlaku pada x, dimana x adalah bilangan asli, yaitu dengan melakukan proses induksi sebagai berikut:

   1) The Basis : Dibuktikan sifat S tersebut berlaku pada x = 0.

   2) The Induktive step : Dibuktikan jika sifat S berlaku pada x < *k*, maka sifat S akan berlaku pula pada x = *k*.

http://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_induction).

Pada pembahasan selanjutnya, induksi matematika yang dipakai adalah induksi matematika (b).

BAB III

PEMBAHASAN

Pada logika substruktural distributif, sistem sequentnya berisi dua jenis struktur yaitu pertama, intensional dimana struktur intensional adalah struktur yang dihubungkan oleh penghubung intensional ";" sebagai contoh struktur $(X_1;\ldots;X_n)$ dan kedua, extensional dimana struktur extensional adalah struktur yang dihubungkan oleh penghubung extensional "," sebagai contoh $(X_1,\ldots,X_n)$, yang mana dapat berkaitan satu sama lain. Di dalam struktur intensional bisa terdapat struktur extensional. Di dalam struktur extensional bisa terdapat struktur intensional. Begitu juga seterusnya. Untuk mempermudah pemahaman akan diberikan contoh sebagai berikut :

$$\begin{aligned} X &= X_1;\, X_2;\, X_3;\, X_4;\, X_5. \\ &= X_1;\, (\, X_{21},\, X_{22},\, X_{23}\,);\, X_3;\, (\, X_{41},\, X_{42},\, X_{43}\,);\, X_5. \\ &= X_1;\, (\, X_{21},\, (\, X_{221};X_{222};X_{223}\,),\, X_{23}\,);\, X_3;\, (\, X_{41},\, (\, X_{421};X_{422};X_{423}\,),\, X_{43}\,);\, X_5. \end{aligned}$$

Pada berikutnya, $U_{\{\,c\,/\,z\,\}}$ akan menandakan bahwa struktur diperoleh dari U dengan menggantikan kemunculan struktur Z di dalamnya dengan formula C, dan $U_{\{\,-\,/\,z\,\}}$ akan menandakan bahwa struktur diperoleh dari U dengan menghilangkan kemunculan struktur Z di dalamnya. Himpunan dari variabel proposisional yang muncul dalam sebuah struktur U akan dicatat oleh $V(\,U\,)$.

3.1. Bukti Teorema Interpolasi Untuk Logika Predikat L_oRW_+ dan L_oR_+

Sebelum membuktikan teorema interpolasi untuk logika predikat L_oRW_+ dan L_oR_+, didefinisikan sebuah kemunculan struktur *X* dalam *U* yang extensional maksimal yaitu jika tidak terdapat kemunculan struktur extensional di dalam *U* yang diperlukan. Sebagai contoh ambil $U = (M,(N_1;N_2;N_3));A$. *U* adalah extensional maksimal. $M,(N_1;N_2;N_3)$ adalah extensional maksimal. *A* adalah extensional maksimal. Di pihak lain, N_1 dan $N_1;N_2;N_3$ adalah bukan extensional maksimal.

Selanjutnya dibuktikan bahwa interpolasi berlaku untuk logika predikat L_oRW_+ dan L_oR_+ dengan menunjukkan bentuk berikut berlaku

Teorema 3.1. *Misalkan bahwa* $U \to D$ *adalah sequent yang terbukti. Misalkan juga jika Z adalah kemunculan struktur yang extensional maksimal dalam U. Maka dalam Z terdapat formula C sedemikian sehingga :*

1) $Z \to C$ *terbukti.*

2) $U_{\{C/Z\}} \to D$ *terbukti.*

3) $V(C) \subset V(Z) \cap [V(U_{\{-/Z\}}) \cup V(D)]$.

3.1.1. Bukti Teorema 3.1 Untuk Logika Predikat L_oRW_+

Pertama kita mempertimbangkan bukti dari teorema di atas untuk logika predikat $\mathbf{L_oRW_+}$. Teorema itu dibuktikan dengan induksi pada banyaknya dari aturan inferensi dalam gambar bukti dari sebuah sequent $U \to D$. Kita perhatikan upper sequent dari aturan inferensi terakhir yaitu $U \to D$. Karena banyaknya aturan inferensi dalam gambar bukti dimana upper sequentnya kurang dari *l*, maka berdasarkan aturan induksi matematika sequent tersebut memenuhi teorema 3.1. Dari sini didapatkan bahwa $U \rightarrow D$ juga memenuhi teorema 3.1.

Kasus 1. Aturan terakhir adalah (*E – weak*). Di sini $U \rightarrow D$ harus berbentuk $\Gamma(X,Y) \rightarrow D$ dan aturan terakhirnya adalah bentuk berikut :

$$\frac{\Gamma(X) \rightarrow D}{\Gamma(X,Y) \rightarrow D}(E - weak)$$

Andaikan *Z* adalah sebuah kemunculan struktur yang extensional maksimal dalam $\Gamma(X,Y)$.

Sub kasus 1.1. *Z* memuat tampilan *X,Y*.

Berikut dibuktikan bahwa :

1) $Z \rightarrow C$ terbukti.

2) $\Gamma(X,Y)_{\{C/Z\}} \rightarrow D$ terbukti.

3) $V(C) \subset V(Z) \cap [V(\Gamma(X,Y)_{\{-/Z\}}) \cup V(D)]$.

Andaikan $W = Z_{\{-/Y\}}$ dan $Z = \Delta(X,Y)$. Maka kita perhatikan sequent atas. Dengan menggunakan hipotesa induksi terdapat sebuah formula *C* sedemikian sehingga :

1) $W \rightarrow C$ terbukti.

2) $\Gamma(X)_{\{C/W\}} \rightarrow D$ terbukti.

3) $V(C) \subset V(W) \cap [V(\Gamma(X)_{\{-/W\}}) \cup V(D)]$.

Mengingat hubungan $W = Z_{\{-/Y\}}$ dan $Z = \Delta(X,Y)$ serta dengan menerapkan $(E - weak)$ sehingga :

Dengan *1)* kita mendapatkan bukti dari $Z \rightarrow C$.

$$\frac{\overline{\Delta(X,Y)_{\{-/Y\}} \to C}}{\Delta(X,Y) \to C}(E - weak)$$

Selanjutnya, $\Gamma(X)_{\{C/W\}} = \Gamma(X,Y)_{\{C/Z\}}$. Jadi dengan *2)* $\Gamma(X,Y)_{\{C/Z\}} \to D$ terbukti.

Karena $V(W) \subset V(Z)$ dan $V(\Gamma(X)_{\{-/W\}}) = V(\Gamma(X,Y)_{\{-/Z\}})$.

Bukti :

- $V(W) = V(\Delta(X,Y)_{\{-/Y\}})$...(I).

  $V(Z) = V(\Delta(X,Y))$ ....(II).

  Terlihat bahwa formula yang muncul pada (I) muncul juga pada (II) tetapi tidak demikian sebaliknya. Jadi $V(W) \subset V(Z)$.

- $V(\Gamma(X)_{\{-/W\}}) = V(\Gamma(X)_{\{-/Z_{\{-/Y\}}\}}) = V(\Gamma(X)_{\{-/\Delta(X,Y)_{\{-/Y\}}\}})$....(I).

  $V(\Gamma(X,Y)_{\{-/Z\}}) = V(\Gamma(X,Y)_{\{-/\Delta(X,Y)\}})$ ....(II).

  Dengan (I) dan (II) didapat bahwa $V(\Gamma(X)_{\{-/W\}}) = V(\Gamma(X,Y)_{\{-/Z\}})$.

Jadi dengan *3)* $V(C) \subset V(Z) \cap [V(\Gamma(X,Y)_{\{-/Z\}}) \cup V(D)]$.

Sub kasus 1.2. *Z* adalah kemunculan struktur yang terluar dari tampilan *X,Y.*

Berikut dibuktikan bahwa :

1) $Z \to C$ terbukti.

2) $\Gamma(X,Y)_{\{C/Z\}} \to D$ terbukti.

3) $V(C) \subset V(Z) \cap [V(\Gamma(X,Y)_{\{-/Z\}}) \cup V(D)]$.

Maka kita perhatikan sequent atas. Dengan menggunakan hipotesa induksi terdapat sebuah formula *C* sedemikian sehingga :

1) $Z \to C$ terbukti.

2) $\Gamma(X)_{\{C/Z\}} \to D$ terbukti.

3) $V(C) \subset V(Z) \cap [V(\Gamma(X)_{\{-/Z\}}) \cup V(D)]$.

Maka dengan *2)* dan dengan menerapkan $(E-weak)$ pada $\Gamma(X)_{\{C/Z\}} \to D$, kita mendapatkan bukti $\Gamma(X,Y)_{\{C/Z\}} \to D$.

$$\frac{\dfrac{\vdots}{\Gamma(X)_{\{C/Z\}} \to D}}{\Gamma(X,Y)_{\{C/Z\}} \to D}(E-weak)$$

Dengan *3)* $V(C) \subset V(Z) \cap [V(\Gamma(X,Y)_{\{-/Z\}}) \cup V(D)]$.

Kasus 2. Aturan terakhir adalah $(\to\supset)$. Bentuk $U \to D$ adalah bentuk $U \to A \supset B$ dan aturan terakhirnya adalah bentuk di bawah ini :

$$\frac{U; A \to B}{U \to A \supset B}(\to\supset)$$

Andaikan *Z* adalah kemunculan struktur extensional maksimal dalam *U*.

Berikut dibuktikan bahwa :

1) $Z \to C$ terbukti.

2) $U_{\{C/Z\}} \to A \supset B$ terbukti.

3) $V(C) \subset V(Z) \cap [V(U_{\{-/Z\}}) \cup V(A \supset B)]$.

Maka kita pertimbangkan sequent atas. Dengan menggunakan hipotesa induksi terdapat sebuah formula *C* sedemikian sehingga :

1) $Z \to C$ terbukti.

2) $U_{\{C/Z\}}; A \to B$ terbukti.

3) $V(C) \subset V(Z) \cap [V(U_{\{-/Z\}}; A) \cup V(B)]$.

(perhatikan bahwa terdapat $(U;A)_{\{C/Z\}} = U_{\{C/Z\}};A$ dan $(U;A)_{\{-/Z\}} = U_{\{-/Z\}};A$).

Karena bentuk $(U;A)_{\{C/Z\}}$ dan $(U;A)_{\{-/Z\}}$ adalah sebuah multiset, maka dapat ditulis juga berturut-turut ke dalam bentuk $(U)_{\{C/Z\}};A$ dan $(U)_{\{-/Z\}};A$ Sekarang, dengan menerapkan $(\to\supset)$ pada $U_{\{C/Z\}};A \to B$ kita mendapatkan $U_{\{C/Z\}} \to A \supset B$. Jadi dengan *2)* kita dapat bukti dari $U_{\{C/Z\}} \to A \supset B$ sebagai berikut :

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{U_{\{C/Z\}};A \to B}}{U_{\{C/Z\}} \to A \supset B}(\to\supset)$$

Kemudian, $V(U_{\{-/Z\}};A) \cup V(B) = V(U_{\{-/Z\}}) \cup V(A \supset B)$.

Bukti : karena formula yang muncul pada struktur sebelah kiri muncul juga pada struktur sebelah kanan begitu juga sebaliknya sehingga $V(U_{\{-/Z\}};A) \cup V(B) = V(U_{\{-/Z\}}) \cup V(A \supset B)$.

Jadi dengan *3)* $V(C) \subset V(Z) \cap [V(U_{\{-/Z\}}) \cup V(A \supset B)]$.

Kasus 3. Aturan terakhir adalah $(\supset\to)$. Di sini $Z \to D$ adalah bentuk $\Gamma(A \supset B; X) \to D$ dan aturan terakhir adalah bentuk sebagai berikut :

$$\dfrac{X \to A \quad \Gamma(B) \to D}{\Gamma(A \supset B; X) \to D}$$

Andaikan Z adalah kemunculan struktur extensional maksimal dalam $\Gamma(A \supset B; X)$.

Sub kasus 3.1. Z memuat tampilan $A \supset B; X$.

Berikut dibuktikan bahwa :

1) $Z_{\{A \supset B;\, X \,/\, A \supset B;\, X\}} \to C$ terbukti.

2) $\Gamma(A \supset B; X)_{\{C \,/\, Z\}} \to D$ terbukti.

3) $V(C) \subset V(Z) \cap [V(\Gamma(A \supset B; X)_{\{- \,/\, Z\}}) \cup V(D)]$.

Andaikan $W = Z_{\{B \,/\, A \supset B;\, X\}}$ dan $Z = \Delta(A \supset B; X)$. Maka kita perhatikan sequent kanan atas. Dengan menggunakan hipotesa induksi terdapat sebuah formula C sedemikian sehingga :

1) $W \to C$ terbukti.

2) $\Gamma(B)_{\{C \,/\, W\}} \to D$ terbukti.

3) $V(C) \subset V(W) \cap [V(\Gamma(B)_{\{- \,/\, W\}}) \cup V(D)]$.

Mengingat hubungan $W = Z_{\{B \,/\, A \supset B;\, X\}}$ dan $Z = \Delta(A \supset B; X)$ sehingga kita mempunyai bentuk sebagai berikut :

Dengan menerapkan $(\supset\to)$ pada sequent kiri atas $X \to A$ dan sequent $W \to C$ kita mendapatkan $Z \to C$. Jadi dengan *1)* kita dapat bukti dari $Z \to C$ sebagai berikut :

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{X \to A} \qquad \dfrac{\vdots}{Z_{\{B/A \supset B;X)} \to C}}{Z_{\{A \supset B;\, X \,/\, A \supset B;\, X\}} \to C}\ (\supset\to)$$

Selanjutnya, $\Gamma(B)_{\{C \,/\, W\}} = \Gamma(A \supset B; X)_{\{C \,/\, Z\}} \to D$. Jadi dengan *2)* $\Gamma(A \supset B; X)_{\{C \,/\, Z\}} \to D$ terbukti.

$V(W) \subset V(Z)$ dan $(V(\Gamma(B)_{\{-/\Delta(A \supset B;X)_{\{B/A \supset B;X\}}\}}))$ = $V(\Gamma(A \supset B;X)_{\{-/\Delta(A \supset B;X)\}})$.

<u>Bukti</u> :

- $V(W) = V(\Delta(A \supset B;X)_{\{B/A \supset B;X\}}) = V(B)$....................................(I).

  $V(Z) = V(\Delta(A \supset B;X))$ ....(II).

  Terlihat bahwa formula yang muncul pada (I) muncul juga pada (II) tetapi tidak demikian sebaliknya. Jadi $V(W) \subset V(Z)$.

- $V(\Gamma(B)_{\{-/W\}} = V(\Gamma(B)_{\{-/\Delta(A \supset B;X)_{\{B/A \supset B;X\}}\}})$ ....(I).

  $V(\Gamma(A \supset B;X)_{\{-/Z\}} = V(\Gamma(A \supset B;X)_{\{-/\Delta(A \supset B;X)\}})$............................(II).

  Dengan (I) dan (II) didapat bahwa $V(\Gamma(B)_{\{-/W\}} = V(\Gamma(A \supset B;X)_{\{-/Z\}}$.

Jadi dengan *3)* $V(C) \subset V(Z) \cap [V(\Gamma(A \supset B;X)_{\{-/Z\}}) \cup V(D)]$.

Sub kasus 3.2. *Z* memuat tampilan $A \supset B$, sebuah kemunculan struktur di dalam *X* dan kemunculan struktur di luar dari $A \supset B;X$, akan tetapi *Z* tidak memuat *X.*

Catatan bahwa pada kasus ini kita dapat menulis aturan terakhir ke dalam bentuk :

$$\frac{X_1;X_2 \to A \qquad \Gamma(Y;B) \to B}{\Gamma(Y;A \supset B;X_1;X_2) \to D}(\supset\to)$$

dan ambil $Z = Y;A \supset B;X_1$.

Berikut dibuktikan bahwa :

1) $Y;A \supset B;X_1 \to C_2 \supset C_1$ terbukti.

2) $\Gamma(Y; A \supset B; X_1; X_2)_{\{C_2 \supset C_1 / Z\}} \rightarrow D$ terbukti.

3) $V(C_2 \supset C_1) \subset V(Y; A \supset B; X_1) \cap [V(\Gamma(Y; A \supset B; X_1; X_2)_{\{- / Y; A \supset B; X_1\}}$
$\cup V(D)]$.

Andaikan $W = Z_{\{B / A \supset B; X_1\}} = Y; B$. Maka kita perhatikan sequent kanan atas. Dengan menggunakan hipotesa induksi terdapat sebuah formula C_1 sedemikian sehingga :

1a) $W \rightarrow C_1$ terbukti.

2a) $\Gamma(Y; B)_{\{C_1 / W\}} \rightarrow D$ terbukti.

3a) $V(C_1) \subset V(W) \cap [V(\Gamma(Y; B)_{\{- / W\}}) \cup V(D)]$.

Kemudian kita perhatikan sequent kiri atas. Dengan menggunakan hipotesa induksi terdapat sebuah formula C_2 sedemikian sehingga :

1b) $X_2 \rightarrow C_2$ terbukti.

2b) $X_1; X_{2\{C_2 / X_2\}} \rightarrow A$ terbukti.

3b) $V(C_2) \subset V(X_2) \cap [V(X_1; X_{2\{- / X_2\}}) \cup V(A)]$.

Mengingat hubungan $W = Z_{\{B / A \supset B; X_1\}} = Y; B$ sehingga kita mempunyai bentuk sebagai berikut :

Dengan menerapkan $(\supset\rightarrow)$ pada $X_1; X_{2\{C_2 / X_2\}} \rightarrow A$ dan $W \rightarrow C_1$ kita mendapatkan $Z; C_2 \rightarrow C_1$. Maka dengan *1a)* dan *2b)* dan dengan menerapkan $(\rightarrow\supset)$ ke dalamnya, kita dapat memperoleh bukti dari $Z \rightarrow C_2 \supset C_1$ sebagai berikut :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{X_1; C_2 \rightarrow A} \qquad \dfrac{\vdots}{Y; B \rightarrow C_1}}{Y; A \supset B; X_1; C_2 \rightarrow C_1}(\supset\rightarrow)}{Y; A \supset B; X_1 \rightarrow C_2 \supset C_1}(\rightarrow\supset)$$

Kemudian, dengan menerapkan $(\supset\rightarrow)$ pada $X_2 \rightarrow C_2$ dan $\Gamma(Y; B)_{\{C_1/W\}} \rightarrow D$ kita mendapatkan sequent $\Gamma(Y; B; X_2)_{\{C_2 \supset C_1/W\}} \rightarrow D$. $\Gamma(Y; B; X_2)_{\{C_2 \supset C_1/W\}} = \Gamma(Y; A \supset B; X_1; X_2)_{\{C_2 \supset C_1/Z\}}$.

Jadi dengan *2a)* dan *1b)* kita dapat memperoleh bukti dari $\Gamma(Y; A \supset B; X_1; X_2)_{\{C_2 \supset C_1/Z\}} \rightarrow D$ sebagai berikut :

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{X_2 \rightarrow C_2} \qquad \dfrac{\vdots}{\Gamma(C_1) \rightarrow D}}{\Gamma(C_2 \supset C_1; X_2) \rightarrow D}\,(\supset\rightarrow)$$

Terakhir, $V(C_2 \supset C_1) \subset [V(Y;B) \cup V(X_1) \cup V(A)] = V(Z)$ dan $V(C_2 \supset C_1) \subset [V(X_2) \cup V(Y;B)_{\{-/Y;\boldsymbol{B}\}}) \cup V(D)] = [\mathrm{V}(\Gamma(Y;A \supset B;X_1;X_2)_{\{-/Z\}} \cup V(D)]$.

<u>Bukti</u> :

- $V(C_1 \supset C_2) \subset [V(Y;B) \cup V(X_1) \cup V(A)]$ ....(I).

  $V(Z) = V(Y; A \supset B; X_1)$ ....(II).

  Formula yang muncul pada (I) muncul juga pada (II) begitupun sebaliknya sehingga terbukti bahwa $V(C_2 \supset C_1) \subset [V(Y;B) \cup V(X_1) \cup V(A)] = V(Z)$.

- $V(C_2 \supset C_1) \subset [V(X_2) \cup V(Y; B)_{\{-/Y;\boldsymbol{B}\}}) \cup V(D)] = V(C_2 \supset C_1) \subset [V(X_2) \cup V(D)]$ ....(I).

  $[\mathrm{V}(\Gamma(Y; A \supset B; X_1; X_2)_{\{-/Z\}} \cup V(D)] = [\mathrm{V}(\Gamma(Y; A \supset B; X_1; X_2)_{\{-/Y; A \supset B; X_1\}} \cup V(D)] = [\mathrm{V}(\Gamma(X_2) \cup V(D)]$ ....(II).

Formula yang muncul pada (I) muncul juga pada (II) begitupun sebaliknya sehingga terbukti bahwa $V(C_2 \supset C_1) \subset [V(X_2) \cup V(Y ;\ B)_{\{ - / Y ; B \}}) \cup V(D)] = [V(\Gamma (Y ;\ A \supset B ; X_1 ; X_2)_{\{ - / Z \}} \cup V(D)]$.

Jadi dengan *3a)* dan *3b*) $V(C_2 \supset C_1) \subset V(Y; A \supset B; X_1) \cap [V(\Gamma (Y ; A \supset B; X_1 ; X_2)_{\{ - / Y; A \supset B; X_1 \}} \cup V(D)]$.

Sub kasus 3.3. Z memuat tampilan $A \supset B$ dan sebuah kemunculan struktur di dalam X, tetapi Z bukan terdiri dari X bukan pula terdiri dari kemunculan struktur terluar dari $A \supset B; X$.

Catatan bahwa pada kasus ini kita dapat menulis aturan terakhir ke dalam bentuk :

$$\frac{X_1; X_2 \to A \qquad \Gamma(B) \to B}{\Gamma(A \supset B; X_1; X_2) \to D} (\supset\to)$$

dan ambil $Z = A \supset B; X_1$.

Berikut dibuktikan bahwa :

1) $A \supset B; X_1 \to C_2 \supset C_1$ terbukti.

2) $\Gamma(A \supset B; X_1; X_2)_{\{C_2 \supset C_1 / Z\}} \to D$ terbukti.

3) $V(C_2 \supset C_1) \subset V(A \supset B; X_1)$ $[V(\Gamma (A \supset B; X_1 ; X_2)_{\{ - / A \supset B; X_1 \}} \cup V(D)]$.

Andaikan $W = Z_{\{B / A \supset B; X_1\}} = B$. Maka kita perhatikan sequent kanan atas. Dengan menggunakan hipotesa induksi terdapat sebuah formula C_1 sedemikian sehingga :

1a) $W \to C_1$ terbukti.

2a) $\Gamma(B)_{\{C_1 / W\}} \to D$ terbukti.

3a) $V (C_1) \subset V (W) \cap [V (\Gamma (B)_{\{ - / W \}}) \cup V (D)]$.

Kemudian kita perhatikan sequent kiri atas. Dengan menggunakan hipotesa induksi terdapat sebuah formula C_2 sedemikian sehingga :

1b) $X_2 \to C_2$ terbukti.

2b) $X_1; X_{2\{C_2 / X_2\}} \to D$ terbukti.

3b) $V(C_2) \subset V(X_2) \cap [V(X_1; X_{2\{-/X_2\}}) \cup V(A)]$.

Mengingat hubungan $W = Z_{\{B/A \supset B; X_1\}} = B$ sehingga kita mempunyai bentuk sebagai berikut :

Dengan menerapkan $(\supset\to)$ pada $X_1; X_{2\{C_2/X_2\}} \to A$ dan $W \to C_1$ kita mendapatkan $Z; C_2 \to C_1$. Maka dengan *1a)* dan *2b)* dan dengan menerapkan $(\to\supset)$ ke dalamnya, kita dapat memperoleh bukti dari $Z \to C_2 \supset C_1$ sebagai berikut :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{X_1; C_2 \to A} \qquad \dfrac{\vdots}{B \to \dot{C}_1}}{A \supset B; X_1; C_2 \to C_1}(\supset\to)}{A \supset B; X_1 \to C_2 \supset C_1}(\to\supset)$$

Kemudian, dengan menerapkan $(\supset\to)$ pada $X_2 \to C_2$ dan $\Gamma(B)_{\{C_1/W\}} \to D$, kita mendapatkan sequent $\Gamma(B; X_2)_{\{C_2 \supset C_1/W\}} \to D$. $\Gamma(B; X_2)_{\{C_2 \supset C_1/W\}} = \Gamma(A \supset B; X_1; X_2)_{\{C_2 \supset C_1/W\}}$. Jadi dengan *2a)* dan *1b)* kita dapat memperoleh bukti dari $\Gamma(A \supset B; X_1; X_2)_{\{C_2 \supset C_1/Z\}} \to D$ sebagai berikut :

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{X_2 \to C_2} \qquad \dfrac{\vdots}{\Gamma(C_1) \to D}}{\Gamma(C_2 \supset C_1; X_2) \to D}(\supset\to)$$

Terakhir, $V(C_2 \supset C_1) \subset [V(B) \cup V(X_1) \cup V(A)] = V(Z)$ dan $V(C_2 \supset C_1) \subset [V(X_2) \cup V(B)_{\{-/\boldsymbol{B}\}}) \cup V(D)] = [\mathrm{V}(\Gamma(A \supset B; X_1; X_2)_{\{-/Z\}} \cup V(D)]$.

<u>Bukti</u> :

- $V(C_1 \supset C_2) \subset [V(B) \cup V(X_1) \cup V(A)]$ ....(I).

  $V(Z) = V(A \supset B; X_1)$ ....(II).

  Formula yang muncul pada (I) muncul juga pada (II) begitupun sebaliknya sehingga terbukti bahwa $V(C_2 \supset C_1) \subset [V(B) \cup V(X_1) \cup V(A)] = V(Z)$.

- $V(C_2 \supset C_1) \subset [V(X_2) \cup V(B)_{\{-/\boldsymbol{B}\}}) \cup V(D)] = V(C_2 \supset C_1) \subset [V(X_2) \cup V(D)]$ ....(I).

  $[\mathrm{V}(\Gamma(A \supset B; X_1; X_2)_{\{-/Z\}} \cup V(D)] = [\mathrm{V}(\Gamma(A \supset B; X_1; X_2)_{\{-/A \supset B; X_1\}} \cup V(D)] = [\mathrm{V}(\Gamma(X_2) \cup V(D)]$ ....(II).

  Formula yang muncul pada (I) muncul juga pada (II) begitupun sebaliknya sehingga terbukti bahwa $V(C_2 \supset C_1) \subset [V(X_2) \cup V(B)_{\{-/\boldsymbol{B}\}}) \cup V(D)] = [\mathrm{V}(\Gamma(A \supset B; X_1; X_2)_{\{-/Z\}} \cup V(D)]$.

Jadi dengan *3a)* dan *3b)* didapat $V(C_2 \supset C_1) \subset V(A \supset B; X_1) \cap [\mathrm{V}(\Gamma(A \supset B; X_1; X_2)_{\{-/A \supset B; X_1\}} \cup V(D)]$.

Sub kasus 3.4. Z memuat tampilan $A \supset B$ dan sebuah kemunculan struktur terluar dari $A \supset B; X$, tetapi Z bukan terdiri dari kemunculan struktur di dalam X.

Catatan bahwa pada kasus ini kita dapat menulis aturan terakhir ke dalam bentuk :

$$\frac{X \to A \quad \Gamma(Y; B) \to B}{\Gamma(Y; A \supset B; X) \to D} (\supset\to)$$

dan ambil $Z = Y; A \supset B$.

Berikut dibuktikan bahwa :

1) $Y; A \supset B \rightarrow C_2 \supset C_1$ terbukti.

2) $\Gamma(Y; A \supset B; X_2)_{\{C_2 \supset C_1 / Z\}} \rightarrow D$ terbukti.

3) $V(C_2 \supset C_1) \subset V(Y; A \supset B) \cap [V(\Gamma(Y; A \supset B; X_2)_{\{- / Y; A \supset B\}} \cup V(D)]$.

Andaikan $W = Z_{\{B / A \supset B\}} = Y; B$. Maka kita perhatikan sequent kanan atas. Dengan menggunakan hipotesa induksi terdapat sebuah formula C_1 sedemikian sehingga :

1a) $W \rightarrow C_1$ terbukti.

2a) $\Gamma(Y; B)_{\{C_1 / W\}} \rightarrow D$ terbukti.

3a) $V(C_1) \subset V(W) \cap [V(\Gamma(Y; B)_{\{- / W\}}) \cup V(D)]$.

Kemudian kita perhatikan sequent kiri atas. Dengan menggunakan hipotesa induksi terdapat sebuah formula C_2 sedemikian sehingga :

1b) $X \rightarrow C_2$ terbukti.

2b) $X_{\{C_2 / X\}} \rightarrow A$ terbukti.

3b) $V(C_2) \subset V(X) \cap [V(X_{\{- / X\}}) \cup V(A)]$.

Mengingat hubungan $W = Z_{\{B / A \supset B\}} = Y; B$ sehingga kita mempunyai bentuk sebagai berikut :

Dengan menerapkan $(\supset\rightarrow)$ pada $X_{\{C_2 / X\}} \rightarrow A$ dan $W \rightarrow C_1$ kita mendapatkan $Z; C_2 \rightarrow C_1$. Maka dengan *1a)* dan *2b)* dan dengan menerapkan $(\rightarrow\supset)$ ke dalamnya, kita dapat memperoleh bukti dari $Z \rightarrow C_2 \supset C_1$ sebagai berikut :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{C_2 \rightarrow A} \quad \dfrac{\vdots}{Y; B \rightarrow C_1}}{Y; A \supset B; C_2 \rightarrow C_1}\ (\supset\rightarrow)}{Y; A \supset B \rightarrow C_2 \supset C_1}\ (\rightarrow\supset)$$

Kemudian, dengan menerapkan $(\supset\rightarrow)$ pada $X \rightarrow C_2$ dan $\Gamma(Y;B)_{\{C_1/W\}} \rightarrow D$, kita mendapatkan sequent $\Gamma(Y;B;X)_{\{C_2 \supset C_1/W\}} \rightarrow D$. $\Gamma(Y;B;X)_{\{C_2 \supset C_1/W\}} = \Gamma(Y;A \supset B;X)_{\{C_2 \supset C_1/W\}}$. Jadi dengan *2a)* dan *1b)* kita dapat memperoleh bukti dari $\Gamma(Y;A \supset B;X)_{\{C_2 \supset C_1/Z\}} \rightarrow D$ sebagai berikut :

$$\frac{\dfrac{\vdots}{X \rightarrow C_2} \qquad \dfrac{\vdots}{\Gamma(C_1) \rightarrow D}}{\Gamma(C_2 \supset C_1; X) \rightarrow D} \ (\supset\rightarrow)$$

Terakhir, $V(C_2 \supset C_1) \subset [V(Y;B) \cup V(A)] = V(Z)$ dan $V(C_2 \supset C_1) \subset [V(X) \cup V(Y;B)_{\{-/Y;\boldsymbol{B}\}}) \cup V(D)] = [\mathrm{V}(\Gamma(Y;A \supset B;X)_{\{-/Z\}} \cup V(D)]$.

<u>Bukti</u> :

- $V(C_1 \supset C_2) \subset [V(Y;B) \cup V(A)]$ ....(I).

  $V(Z) = V(Y;A \supset B)$ ....(II).

  Formula yang muncul pada (I) muncul juga pada (II) begitupun sebaliknya sehingga terbukti bahwa $V(C_2 \supset C_1) \subset [V(Y;B) \cup V(A)] = V(Z)$.

- $V(C_2 \supset C_1) \subset [V(X) \cup V(Y;B)_{\{-/Y;\boldsymbol{B}\}}) \cup V(D)] = V(C_2 \supset C_1) \subset [V(X) \cup V(D)]$ ....(I).

  $[\mathrm{V}(\Gamma(Y;A \supset B;X)_{\{-/Z\}} \cup V(D)] = [\mathrm{V}(\Gamma(Y;A \supset B;X)_{\{-/Y;A \supset B\}}) \cup V(D)] = [\mathrm{V}(\Gamma(X) \cup V(D)]$ ....(II).

  Formula yang muncul pada (I) muncul juga pada (II) begitupun sebaliknya sehingga terbukti bahwa $V(C_2 \supset C_1) \subset [V(X) \cup V(B_{\{-/\boldsymbol{B}\}}) \cup V(D)] = [\mathrm{V}(\Gamma(A \supset B;X)_{\{-/Z\}}) \cup V(D)]$.

Jadi dengan *3a)* dan *3b)* didapat $V(C_2 \supset C_1) \subset V(Y; A \supset B)$ [V($\Gamma(Y; A \supset B$; $X_2)_{\{-/Y;\,A \supset B\}} \cup V(D)$].

Sub kasus 3.5. $Z = A \supset B$.

Catatan bahwa pada kasus ini kita dapat menulis aturan terakhir ke dalam bentuk :

$$\frac{X \to A \qquad \Gamma(B) \to B}{\Gamma(A \supset B; X) \to D}(\supset\to)$$

dan ambil $Z = A \supset B$.

Berikut dibuktikan bahwa :

1) $A \supset B \to C_2 \supset C_1$ terbukti.

2) $\Gamma(A \supset B; X_2)_{\{C_2 \supset C_1/Z\}} \to D$ terbukti.

3) $V(C_2 \supset C_1) \subset V(A \supset B)$ [V($\Gamma(A \supset B; X)_{\{-/A \supset B\}} \cup V(D)$].

Andaikan $W = Z_{\{B/A \supset B\}} = B$. Maka kita perhatikan sequent kanan atas. Dengan menggunakan hipotesa induksi terdapat sebuah formula C_1 sedemikian sehingga :

1a) $W \to C_1$ terbukti.

2a) $\Gamma(B)_{\{C_1/W\}} \to D$ terbukti.

3a) $V(C_1) \subset V(W) \cap [V(\Gamma(B)_{\{-/W\}}) \cup V(D)]$.

Maka kita perhatikan sequent kiri atas. Dengan menggunakan hipotesa induksi terdapat sebuah formula C_2 sedemikian sehingga :

1b) $X \to C_2$ terbukti.

2b) $X_{\{C_2/X\}} \to A$ terbukti.

3b) $V(C_2) \subset V(X) \cap [V(X_{\{-/X\}}) \cup V(A)]$.

Mengingat hubungan $W = Z_{\{B/A \supset B\}} = B$ sehingga kita mempunyai bentuk sebagai berikut :

Dengan menerapkan ($\supset\rightarrow$) pada $X_{\{C_2/X\}} \rightarrow A$ dan $W \rightarrow C_1$ kita mendapatkan $Z; C_2 \rightarrow C_1$. Maka dengan *1a)* dan *2b)* dan dengan menerapkan ($\rightarrow\supset$) ke dalamnya, kita dapat memperoleh bukti dari $Z \rightarrow C_2 \supset C_1$ sebagai berikut :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{C_2 \rightarrow A} \quad \dfrac{\vdots}{B \rightarrow \dot{C}_1}}{A \supset B; C_2 \rightarrow C_1}(\supset\rightarrow)}{A \supset B \rightarrow C_2 \supset C_1}(\rightarrow\supset)$$

Kemudian, dengan menerapkan ($\supset\rightarrow$) pada $X \rightarrow C_2$ dan $\Gamma(B)_{\{C_1/W\}} \rightarrow D$, kita mendapatkan sequent $\Gamma(B;X)_{\{C_2 \supset C_1/W\}} \rightarrow D$. $\Gamma(B;X)_{\{C_2 \supset C_1/W\}} = \Gamma(A \supset B; X_2)_{\{C_2 \supset C_1/W\}}$. Jadi dengan *2a)* dan *1b)* kita dapat memperoleh bukti dari $\Gamma(A \supset B; X)_{\{C_2 \supset C_1/Z\}} \rightarrow D$ sebagai berikut :

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{X \rightarrow C_2} \qquad \dfrac{\vdots}{\Gamma(C_1) \rightarrow D}}{\Gamma(C_2 \supset C_1; X) \rightarrow D}(\supset\rightarrow)$$

Terakhir, $V(C_2 \supset C_1) \subset [V(B) \cup V(A)] = V(Z)$ dan $V(C_2 \supset C_1) \subset [V(X) \cup V(B)_{\{-/B\}}) \cup V(D)] = [V(\Gamma(A \supset B; X)_{\{-/Z\}} \cup V(D)]$.

<u>Bukti</u> :

- $V(C_1 \supset C_2) \subset [V(B) \cup V(A)]$ ....(I).

  $V(Z) = V(A \supset B)$ ....(II).

  Formula yang muncul pada (I) muncul juga pada (II) begitupun sebaliknya sehingga terbukti bahwa $V(C_2 \supset C_1) \subset [V(B) \cup V(A)] = V(Z)$.

- $V(C_2 \supset C_1) \subset [V(X) \cup V(B)_{\{ - / B \}}) \cup V(D)] = V(C_2 \supset C_1) \subset [V(X) \cup V(D)]$ ....(I).

  $[V(\Gamma (A \supset B ; X)_{\{ - / Z \}} \cup V(D)] = [V(\Gamma (A \supset B ; X)_{\{ - / A \supset B \}} \cup V(D)] = [V(\Gamma (X) \cup V(D)]$ ....(II).

  Formula yang muncul pada (I) muncul juga pada (II) begitupun sebaliknya sehingga terbukti bahwa $V(C_2 \supset C_1) \subset [V(X) \cup V(B)_{\{ - / B \}}) \cup V(D)] = [V(\Gamma (A \supset B ; X)_{\{ - / Z \}} \cup V(D)]$.

Jadi dengan *3a)* dan *3b)* didapat $V(C_2 \supset C_1) \subset V(A \supset B)$ $[V(\Gamma (A \supset B ; X)_{\{ - / A \supset B \}} \cup V(D)]$.

Sub kasus 3.6. Z terdiri sebuah kemunculan struktur di dalam X dan sebuah kemunculan struktur terluar dari $A \supset B; X$, tetapi Z bukan hanya terdiri dari X bukan pula $\mathrm{A} \supset \mathrm{B}$.

Perhatikan bahwa pada kasus ini kita dapat menulis aturan terakhir ke dalam bentuk :

$$\frac{X_1; X_2 \to A \quad \Gamma(B;Y) \to D}{\Gamma(A \supset B; X_1; X_2; Y) \to D} (\supset\to)$$

dan ambil $Z = X_2;Y$.

Berikut dibuktikan bahwa :

1) $X_2;Y \to C_2 * C_1$ terbukti.

2) $\Gamma(A \supset B; X_1; X_2; Y)_{\{C_2 * C_1 / Z\}} \to D$ terbukti.

3) $V(C_2 \circ C_1) \subset V (X_2 ; Y) \cap [V(\Gamma (A \supset B ; X_1 ; X_2 ; Y)_{\{ - / X_2;Y \}}) \cup V(D)]$.

Andaikan $W = Z_{\{-/X_2\}} = Y$. Maka kita perhatikan sequent kanan atas. Dengan menggunakan hipotesa induksi terdapat sebuah formula C_1 sedemikian sehingga :

1a) $W \rightarrow C_1$ terbukti.

2a) $\Gamma(B;Y)_{\{C_1/W\}} \rightarrow D$ terbukti.

3a) $V(C_1) \subset V(W) \cap [V(\Gamma(B;Y)_{\{-/W\}}) \cup V(D)]$.

Kemudian kita perhatikan sequent kiri atas. Dengan menggunakan hipotesa induksi terdapat sebuah formula C_2 sedemikian sehingga :

1b) $X_2 \rightarrow C_2$ terbukti.

2b) $X_1; X_{2\{C_2/X_2\}} \rightarrow A$ terbukti.

3b) $V(C_2) \subset V(X_2) \cap [V(X_1; X_{2\{-/X_2\}}) \cup V(A)]$.

Mengingat hubungan $W = Z_{\{-/X_2\}} = Y$ sehingga kita mempunyai bentuk sebagai berikut :

Dengan menerapkan $(\rightarrow *)$ pada $X_2 \rightarrow C_2$ dan $W \rightarrow C_1$ kita dapat memperoleh $Z \rightarrow C_2 * C_1$. Jadi dengan *1a)* dan *1b)* kita dapat memperoleh bukti dari $Z \rightarrow C_2 * C_1$ sebagai berikut :

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{X_2 \rightarrow C_2} \quad \dfrac{\vdots}{Y \rightarrow C_1}}{X_2; Y \rightarrow C_2 * C_1}\,(\rightarrow *)$$

Kemudian, dengan menerapkan $(\supset\rightarrow)$ pada $X_1; X_{2\{C_2/X_2\}} \rightarrow A$ dan $\Gamma(B;Y)_{\{C_1/W\}} \rightarrow D$ kita mendapatkan $\Gamma(A \supset B; X_1; X_2; Y)_{\{C_2;C_1/Z\}} \rightarrow D$. Jadi dengan *2a)* dan *2b)* dan dengan menerapkan $(* \rightarrow)$ ke dalamnya, kita dapat memperoleh bukti dari $\Gamma(A \supset B; X_1; X_2; Y)_{\{C_2 * C_1/Z\}} \rightarrow D$ sebagai berikut :

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{X_1; C_2 \to A} \quad \dfrac{\vdots}{\Gamma(B; C_1) \to D}}{\dfrac{\Gamma(A \supset B; X_1; C_2 * C_1) \to D}{\Gamma(A \supset B; X_1; C_2 * C_1) \to D}(* \to)} (\supset\to)$$

Terakhir, $V(C_2 \circ C_1) \subset [V(Y) \cup V(X_2)] = V(Z)$ dan $V(C_2 \circ C_1) \subset [V(\Gamma (B) \cup V (D)] \cup [V(X_1) \cup V(A)] = [V(\Gamma (A \supset B ; X_1 ; X_2 ; Y)_{\{ - / Z \}}) \cup V (D)]$.

<u>Bukti</u> :

- $V (C_1 \circ C_2) \subset [V (Y) \cup V (X_2)] = V (C_1 \circ C_2) \subset V (Y; X_2)$ terbukti.
- $V (C_1 \circ C_2) \subset [V(\Gamma (B) \cup V (D)] \cup [V(X_1) \cup V(A)]$ ....(I).

  $[V(\Gamma (A \supset B ; X_1 ; X_2 ; Y)_{\{ - / Z \}}) \cup V (D)] = [V(\Gamma (A \supset B ; X_1 ; X_2 ; Y)_{\{ - / X_2 ; Y \}}) \cup V (D)] = [V(\Gamma (A \supset B ; X_1)) \cup V (D)]$ ....(II).

  Formula yang muncul pada (I) muncul juga pada (II) begitupun sebaliknya sehingga terbukti bahwa $V(C_2 \circ C_1) \subset [V(\Gamma (B) \cup V (D)] \cup [V(X_1) \cup V(A)] = [V(\Gamma (A \supset B ; X_1 ; X_2 ; Y)_{\{ - / Z \}}) \cup V (D)]$.

Jadi dengan *3a)* dan *3b)* $V(C_2 \circ C_1) \subset V(X_2;Y) \cap [V(\Gamma (A \supset B;X_1 ;X_2;Y)_{\{ - / X_2;Y \}}) \cup V(D)]$.

Sub kasus 3.7. *Z* adalah sebuah kemunculan struktur di dalam tampilan *X*.

Berikut dibuktikan bahwa :

1) $Z \to C$ terbukti.

2) $\Gamma(A \supset B; X)_{\{C / Z\}} \to D$ terbukti.

3) $V (C) \subset V (Z) \cap [V(\Gamma (A \supset B ; X)_{\{ - / Z \}}) \cup V(D)]$.

Maka kita perhatikan sequent kiri atas. Dengan menggunakan hipotesa induksi terdapat sebuah formula *C* sedemikian sehingga :

1) $Z \rightarrow C$ terbukti.

2) $X_{\{C/Z\}} \rightarrow A$ terbukti.

3) $V(C) \subset V(Z) \cap [V(X_{\{-/Z\}}) \cup V(A)]$.

Sekarang, dengan menerapkan $(\supset\rightarrow)$ pada $X_{\{C/Z\}} \rightarrow A$ dan sequent kanan atas $\Gamma(B) \rightarrow D$, kita mendapatkan $\Gamma(A \supset B; X)_{\{C/Z\}} \rightarrow D$. Jadi dengan *2)* kita dapat memperoleh bukti dari $\Gamma(A \supset B; X)_{\{C/Z\}} \rightarrow D$ sebagai berikut :

.

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{X_{\{C/Z\}} \rightarrow A} \quad \dfrac{\vdots}{\Gamma(B) \rightarrow D}}{\Gamma(A \supset B; X)_{\{C/Z\}} \rightarrow D} \; (\supset\rightarrow)$$

Karena $[V(X_{\{-/Z\}}) \cup V(A)] \subset [V(\Gamma(A \supset B; X)_{\{-/Z\}}) \cup V(D)]$.

<u>Bukti</u> :

- $[V(X_{\{-/Z\}}) \cup V(A)]$ ....(I).

  $[V(\Gamma(A \supset B; X)_{\{-/Z\}}) \cup V(D)]$ ....(II).

  Formula yang muncul pada (I) muncul juga pada (II) tetapi tidak sebaliknya sehingga $[V(X_{\{-/Z\}}) \cup V(A)] \subset [V(\Gamma(A \supset B; X)_{\{-/Z\}}) \cup V(D)]$.

Jadi dengan *3)* didapat $V(C) \subset V(Z) \cap [V(\Gamma(A \supset B; X)_{\{-/Z\}}) \cup V(D)]$.

Sub kasus 3.8. Z adalah kemunculan struktur terluar dari tampilan $A \supset B; X$.

Berikut dibuktikan bahwa :

1) $Z \to C$ terbukti.

2) $\Gamma(A \supset B; X)_{\{C/Z\}} \to D$ terbukti.

3) $V(C) \subset V(Z) \cap [V(\Gamma(A \supset B; X)_{\{-/Z\}}) \cup V(D)]$.

Maka kita perhatikan sequent atas. Dengan menggunakan hipotesa induksi terdapat sebuah formula *C* sedemikian sehingga :

1) $Z \to C$ terbukti.

2) $\Gamma(B)_{\{C/Z\}} \to D$ terbukti.

3) $V(C) \subset V(Z) \cap [V(\Gamma(B)_{\{-/Z\}}) \cup V(D)]$.

Maka dengan *2)* dan dengan menerapkan $(\supset\to)$ pada $\Gamma(B)_{\{C/Z\}} \to D$, kita mendapatkan bukti $\Gamma(A \supset B; X)_{\{C/Z\}} \to D$.

$$\frac{\dfrac{\vdots}{X \to A} \qquad \dfrac{\vdots}{\Gamma(B)_{\{C/Z\}} \to D}}{\Gamma(A \supset B; X)_{\{C/Z\}} \to D}$$

Dengan *3)* didapat $V(C) \subset V(Z) \cap [V(\Gamma(A \supset B; X)_{\{-/Z\}}) \cup V(D)]$.

Kasus 4. Aturan terakhir adalah $(\to \wedge)$. Pada kasus ini $U \to D$ adalah bentuk $X, Y \to A \wedge B$ dan aturan terakhir adalah bentuk sebagai berikut :

$$\frac{X \to A \qquad Y \to B}{X, Y \to A \wedge B}(\to \wedge)$$

Catatan bahwa dengan kondisi untuk *Z,* pada kasus ini $Z = X, Y$.

Berikut dibuktikan bahwa :

1) $X, Y \rightarrow C_1 \wedge C_2$ terbukti.

2) $C_1 \wedge C_2 \rightarrow A \wedge B$ terbukti.

3) $V(C_1 \wedge C_2) \subset V(X, Y) \cap V(A \wedge B)$.

Maka kita perhatikan sequent kiri atas. Dengan menggunakan hipotesa induksi terdapat sebuah formula C_1 sedemikian sehingga :

1a) $X \rightarrow C_1$ terbukti.

2a) $C_1 \rightarrow A$ terbukti.

3a) $V(C_1) \subset V(X) \cap V(A)$.

Kemudian kita perhatikan sequent kanan atas. Dengan menggunakan hipotesa induksi terdapat sebuah formula C_2 sedemikian sehingga :

1b) $Y \rightarrow C_2$ terbukti.

2b) $C_2 \rightarrow B$ terbukti.

3b) $V(C_2) \subset V(Y) \cap V(B)$.

Mengingat bahwa $Z = X, Y$ sehingga kita mempunyai bentuk sebagai berikut :

Dengan menerapkan $(\rightarrow \wedge)$ pada $X \rightarrow C_1$ dan $Y \rightarrow C_2$ kita dapat memperoleh $X, Y \rightarrow C_1 \wedge C_2$. Jadi dengan *1a)* dan *1b)* sequent ini terbukti.

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{X \rightarrow C_1} \quad \dfrac{\vdots}{Y \rightarrow C_2}}{X, Y \rightarrow C_1 \wedge C_2}(\rightarrow \wedge)$$

Kemudian, dengan menerapkan $(\rightarrow \wedge)$ pada $C_1 \rightarrow A$ dan $C_2 \rightarrow B$ kita dapat memperoleh $C_1, C_2 \rightarrow A \wedge B$. Maka dengan menerapkan $(\wedge \rightarrow)$ pada sequent ini kita dapat memperoleh $C_1 \wedge C_2 \to A \wedge B$. Jadi dengan *2a)* dan *2b)* sequent terakhir juga terbukti.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{C_1 \to A} \quad \dfrac{\vdots}{C_2 \to B}}{C_1, C_2 \to A \wedge B}(\to \wedge)}{C_1 \wedge C_2 \to A \wedge B}(\wedge \to)$$

Terakhir, dengan *3a)* dan *3b)* didapat $V(C_1 \wedge C_2) \subset V(X, Y) \cap V(A \wedge B)$.

Kasus 5. Aturan terakhir adalah $(\wedge \to)$. Pada kasus ini $U \to D$ adalah bentuk $\Gamma(A \wedge B) \to D$ dan aturan terakhir adalah bentuk berikut :

$$\dfrac{\Gamma(A,B) \to D}{\Gamma(A \wedge B) \to D}(\wedge \to)$$

Andaikan Z adalah sebuah kemunculan struktur extensional maksimal dalam $\Gamma(A \wedge B)$.

Sub kasus 5.1. Z memuat tampilan $A \wedge B$.

Berikut dibuktikan bahwa :

1) $Z \to C$ terbukti.

2) $\Gamma(A \wedge B)_{\{C/Z\}} \to D$ terbukti.

3) $V(C) \subset V(Z) \cap [V(\Gamma(A \wedge B)_{\{-/Z\}}) \cup V(D)]$.

Andaikan $W = Z_{\{A, B / A \wedge B\}}$ dan $Z = \Delta(A \wedge B)$. Maka kita perhatikan sequent atas. Dengan mengggunakan hipotesa induksi terdapat sebuah formula C sedemikian sehingga :

1) $W \to C$ terbukti.

2) $\Gamma(A,B)_{\{C/W\}} \to D$ terbukti.

3) $V(C) \subset V(W) \cap [V(\Gamma(A,B)_{\{-/W\}}) \cup V(D)]$.

Mengingat hubungan $W = Z_{\{A,B/A \wedge B\}}$ dan $Z = \Delta(A \wedge B)$ sehingga kita mempunyai bentuk sebagai berikut :

Dengan menerapkan $(\wedge \to)$ pada $W \to C$ kita dapat memperoleh $Z \to C$. Jadi dengan *1)* $Z \to C$ terbukti.

$$\frac{\dfrac{\vdots}{\Delta(A \wedge B)_{\{A,B/A \wedge B\}} \to C}}{\Delta(A \wedge B) \to C}(\wedge \to)$$

Kemudian, $\Gamma(A \wedge B)_{\{C/Z\}} \to D$ equivalen pada $\Gamma(A,B)_{\{C/W\}} \to D$. Jadi dengan *2)* $\Gamma(A \wedge B)_{\{C/Z\}} \to D$ terbukti.

Terakhir, $V(W) = V(Z)$ dan $\Gamma(A,B)_{\{-/W\}} = \Gamma(A \wedge B)_{\{-/Z\}}$.

<u>Bukti</u> :

- $V(W) = V(Z_{\{A,B/A \wedge B}) = V(\Delta(A \wedge B)\{_{A,B/A \wedge B})$ ....(I).

  $V(Z) = V(\Delta(A \wedge B))$ ....(II).

  Formula yang muncul pada (I) muncul juga pada (II) begitupun sebaliknya sehingga $V(W) = V(Z)$.

- $\Gamma(A,B)_{\{-/W\}} = \Gamma(A,B)_{\{-/Z_{\{A,B/A \wedge B\}}\}} = \Gamma(A,B)_{\{-/\Delta(A \wedge B)_{\{A,B/A \wedge B\}}\}}$ ....(I).

  $\Gamma(A \wedge B)_{\{-/Z\}} = \Gamma(A \wedge B)_{\{-/\Delta(A \wedge B)\}}$ ....(II).

Jadi dengan *3)* didapat $V(C) \subset V(Z) \cap [V(\Gamma(A \wedge B)_{\{-/Z\}}) \cup V(D)]$.

Sub kasus 5.2. Z tidak memuat tampilan $A \wedge B$.

Berikut dibuktikan bahwa :

1) $Z \to C$ terbukti.

2) $\Gamma(A \wedge B)_{\{C/Z\}} \to D$ terbukti.

3) $V(C) \subset V(Z) \cap [V(\Gamma(A \wedge B)_{\{-/Z\}}) \cup V(D)]$.

Maka kita perhatikan sequent atas. Dengan menggunakan hipotesa induksi terdapat sebuah formula C sedemikian sehingga :

1) $Z \to C$ terbukti.

2) $\Gamma(A, B)_{\{C/Z\}} \to D$ terbukti.

3) $V(C) \subset V(Z) \cap [V(\Gamma(A, B)_{\{-/Z\}}) \cup V(D)]$.

Maka dengan *2)* dan dengan menerapkan $(\wedge \to)$ pada $\Gamma(A, B)_{\{C/Z\}} \to D$, kita mendapatkan bukti $\Gamma(A \wedge B)_{\{C/Z\}} \to D$.

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma(A, B)_{\{C/Z\}} \to D}}{\Gamma(A \wedge B)_{\{C/Z\}} \to D}(\wedge \to)$$

Dengan *3)* didapat $V(C) \subset V(Z) \cap [V(\Gamma(A \wedge B)_{\{-/Z\}}) \cup V(D)]$.

Kasus 6. Aturan terakhir adalah $(\to *)$. Pada kasus ini $(U \to D)$ adalah bentuk $(X;Y \to A * B)$. Dan aturan terakhir adalah bentuk berikut :

$$\frac{X \to A \quad Y \to B}{X;Y \to A * B}(\to *)$$

Andaikan Z adalah kemunculan struktur extensional maksimal dalam *X*;*Y*.

Sub kasus 6.1. $Z = X\,;\,Y$.

Catatan bahwa dengan kondisi untuk Z, pada kasus ini $Z = X;Y$.

Berikut dibuktikan bahwa :

1) $X;Y \rightarrow C_1 * C_2$ terbukti.

2) $C_1 * C_2 \rightarrow A * B$ terbukti.

3) $V(C_1 * C_2) \subset V(X\,;\,Y) \cap V(A * B)$.

Maka kita perhatikan sequent kiri atas. Dengan menggunakan hipotesa induksi terdapat sebuah formula C_1 sedemikian sehingga :

1a) $X \rightarrow C_1$ terbukti.

2a) $C_1 \rightarrow A$ terbukti.

3a) $V(C_1) \subset V(X) \cap V(A)$.

Maka kita perhatikan sequent kanan atas. Dengan menggunakan hipotesa induksi terdapat sebuah formula C_2 sedemikian sehingga :

1b) $Y \rightarrow C_2$ terbukti.

2b) $C_2 \rightarrow B$ terbukti.

3b) $V(C_2) \subset V(Y) \cap V(B)$.

Mengingat bahwa $Z = X;Y$ sehingga kita mempunyai bentuk sebagai berikut :

Dengan menerapkan $(\rightarrow *)$ pada $X \rightarrow C_1$ dan $Y \rightarrow C_2$ kita dapat memperoleh $X;Y \rightarrow C_1 * C_2$. Jadi dengan *1a)* dan *1b)* sequent ini terbukti.

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{X \rightarrow C_1} \quad \dfrac{\vdots}{Y \rightarrow C_2}}{X;Y \rightarrow C_1 * C_2}\,(\rightarrow *)$$

Maka, dengan menerapkan $(\to *)$ pada $C_1 \to A$ dan $C_2 \to B$ kita dapat memperoleh $C_1; C_2 \to A * B$. Maka dengan menerapkan $(* \to)$ pada sequent ini kita dapat memperoleh $C_1 * C_2 \to A * B$. Jadi dengan *2a)* dan *2b)* sequent terakhir juga terbukti.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{C_1 \to A} \quad \dfrac{\vdots}{C_2 \to B}}{C_1; C_2 \to A * B}\,(\to *)}{C_1 * C_2 \to A * B}\,(* \to)$$

Terakhir, dengan *3a)* dan *3b)* didapat $V(C_1 * C_2) \subset V(X ; Y) \cap V(A * B)$.

Sub kasus 6.2. *Z* memuat sebuah kemunculan struktur di dalam *X* dan sebuah kemunculan struktur di dalam *Y*, tetapi *Z* tidak memuat tampilan *X* dan tampilan *Y*.

Catatan bahwa pada kasus ini kita dapat menulis aturan terakhir ke dalam bentuk :

$$\dfrac{X_1; X_2 \to A \quad Y_1; Y_2 \to B}{X_1; X_2; Y_1; Y_2 \to A * B}\,(\to *)$$

dan ambil $Z = X_2; Y_1$.

Berikut dibuktikan bahwa :

1) $X_2; Y_1 \to C_1 * C_2$ terbukti.

2) $X_1; X_2; Y_1; Y_{2\{C_1 * C_2 / X_2; Y_1\}} \to A * B$ terbukti.

3) $V(C_1 * C_2) \subset V(X_2 ; Y_1) \cap [V(X_1 ; X_2 ; Y_1 ; Y_{2\{-/X_2;Y_1\}}) \cup V(A * B)]$.

Maka kita perhatikan sequent kiri atas. Dengan menggunakan hipotesa induksi terdapat sebuah formula C_1 sedemikian sehingga :

1a) $X_2 \to C_1$ terbukti.

2a) $X_1; X_{2\{C_1 / X_2\}} \to A$ terbukti.

3b) $V(C_1) \subset V(X_2) \cap [V(X_1; X_{2\{-/X_2\}}) \cup V(A)]$.

Maka kita perhatikan sequent kanan atas. Dengan menggunakan hipotesis induksi terdapat sebuah formula C_2 sedemikian sehingga :

1b) $Y_1 \to C_2$ terbukti.

2b) $Y_1; Y_{2\{C_2 / Y_1\}} \to B$ terbukti.

3b) $V(C_2) \subset V(Y_1) \cap [V(Y_1; Y_{2\{-/Y_1\}}) \cup V(B)]$.

Mengingat bahwa $Z = X_2; Y_1$, sehingga kita mempunyai bentuk sebagai berikut :

Dengan menerapkan $(\to *)$ pada $X_2 \to C_1$ dan $Y_1 \to C_2$ kita dapat memperoleh $Z \to C_1 * C_2$. Jadi dengan *1a)* dan *1b)*, sequent ini terbukti.

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{X_2 \to C_1} \quad \dfrac{\vdots}{Y_1 \to C_2}}{X_2; Y_1 \to C_1 * C_2} (\to *)$$

Maka, dengan menerapkan $(\to *)$ pada $X_1; X_{2\{C_1 / X_2\}} \to A$ dan $Y_1; Y_{2\{C_2 / Y_1\}} \to B$ kita mendapatkan $X_1; X_2; Y_1; Y_{2\{C_1; C_2 / Z\}} \to A * B$. Maka dengan menerapkan $(* \to)$ pada $X_1; X_{2\{C_1 / X_2\}} \to A$ dan $Y_1; Y_{2\{C_2 / Y_1\}} \to B$ kita mendapatkan $X_1; X_2; Y_1; Y_{2\{C_1 * C_2 / Z\}} \to A * B$. Jadi dengan *2a)* dan *2b)*, sequent ini terbukti.

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{X_1; X_{2\{C_1/X_2\}} \rightarrow A} \quad \dfrac{\vdots}{Y_1; Y_{2\{C_2/Y_1\}} \rightarrow B}}{\dfrac{X_1; X_2; Y_1; Y_{2\{C_1;\, C_2/X_2;\, Y_1\}} \rightarrow A * B}{X_1; X_2; Y_1; Y_{2\{C_1 * C_2/X_2;\, Y_1\}} \rightarrow A * B} (* \rightarrow)} (\rightarrow *)$$

Terakhir, $V(C_1 * C_2) \subset V(X_2 ; Y_1)$ dan $V(C_1 * C_2) \subset V(X_1; Y_2) \cup V(A * B)]$.

Bukti :

- $V(C_1 * C_2) \subset [V(X_2) \cup V(Y_1)] = V(C_1 * C_2) \subset V(X_2; Y_1)$ terbukti.

- $V(C_1 * C_2) \subset [\{V(X_2) \cap V(X_1;X_{2\{-/X_2\}}) \cup V(A)\} \cup \{V(Y_1) \cap V(Y_1;Y_{2\{-/Y_1\}}) \cup V(B)\}]$.

  $= V(C_1 * C_2) \subset [\{V(X_2) \cup \{V(Y_1)\} \cap \{V(X_1;X_{2\{-/X_2\}}) \cup V(A) \cup V(Y_1;Y_{2\{-/Y_1\}}) \cup V(B)\}]$.

  $= [V(C_1 * C_2) \subset V(X_2) \cup V(Y_1)] \cap [V(C_1 * C_2) \subset V(X_1 ; X_{2\{-/X_2\}} \cup V(Y_1 ; Y_{2\{-/Y_1\}}) \cup V(A) \cup V(B)]$.

  $=[V(C_1 * C_2) \subset V(X_2) \cup V(Y_1)] \cap [V(C_1 * C_2) \subset V(X_1) \cup V(Y_2) \cup V(A * B)]$.

  Terbukti bahwa $V(C_1 * C_2) \subset V(X_1 ; Y_2) \cup V(A * B)]$.

Jadi dengan *3a)* dan *3b)* didapat $V(C_1 * C_2) \subset V(X_2 ; Y_1) \cap [V(X_1 ; X_2 ; Y_1 ; Y_{2\{-/X_2;\, Y_1\}}) \cup V(A * B)]$.

Sub kasus 6.3. Z memuat tampilan X dan sebuah kemunculan struktur di dalam Y, akan tetapi Z tidak memuat tampilan Y.

Catatan bahwa pada kasus ini kita dapat menulis aturan terakhir ke dalam bentuk :

$$\frac{X \to A \quad Y_1;Y_2 \to B}{X;Y_1;Y_2 \to A * B}(\to *)$$

dan ambil $Z = X;Y_1$.

Berikut dibuktikan bahwa :

1) $X;Y_1 \to C_1 * C_2$ terbukti.

2) $X;Y_1;Y_{2\{C_1 * C_2 / X;Y_1\}} \to A * B$ terbukti.

3) $V(C_1 * C_2) \subset V(X;Y_1) \cap [V(X;Y_1;Y_{2\{-/X;Y_1\}}) \cup V(A * B)]$.

Maka kita perhatikan sequent kiri atas. Dengan menggunakan hipotesa induksi terdapat sebuah formula C_1 sedemikian sehingga :

1a) $X \to C_1$ terbukti.

2a) $X_{\{C_1/X\}} \to A$ terbukti.

3b) $V(C_1) \subset V(X) \cap [V(X_{\{-/X\}}) \cup V(A)]$.

Maka kita perhatikan sequent kanan atas. Dengan menggunakan hipotesis induksi terdapat sebuah formula C_2 sedemikian sehingga :

1b) $Y_1 \to C_2$ terbukti.

2b) $Y_1;Y_{2\{C_2/Y_1\}} \to B$ terbukti.

3b) $V(C_2) \subset V(Y_1) \cap [V(Y_1;Y_{2\{-/Y_1\}}) \cup V(B)]$.

Mengingat bahwa $Z = X;Y_1$ sehingga kita mempunyai bentuk sebagai berikut :

Dengan menerapkan $(\to *)$ pada $X \to C_1$ dan $Y_1 \to C_2$ kita dapat memperoleh $Z \to C_1 * C_2$. Jadi dengan *1a)* dan *1b)*, sequent ini terbukti.

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{X \to C_1} \qquad \dfrac{\vdots}{Y_1 \to C_2}}{X ; Y_1 \to C_1 * C_2}\,(\to *)$$

Maka, dengan menerapkan $(\to *)$ pada $X_{\{C_1/X\}} \to A$ dan $Y_1;Y_{2\{C_2/Y_1\}} \to B$ kita mendapatkan $X;Y_1;Y_{2\{C_1;C_2/Z\}} \to A*B$. Maka dengan menerapkan $(* \to)$ pada $X_{\{C_1/X\}} \to A$ dan $Y_1;Y_{2\{C_2/Y_1\}} \to B$ kita mendapatkan $X;Y_1;Y_{2\{C_1*C_2/Z\}} \to A*B$.

Jadi dengan *2a)* dan *2b)*, sequent ini terbukti.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{X_{\{C_1/X\}} \to A} \qquad \dfrac{\vdots}{Y_1;Y_{2\{C_2/Y_1\}} \to B}}{X;Y_1;Y_{2\{C_1;C_2/X;Y_1\}} \to A*B}\,(\to *)}{X;Y_1;Y_{2\{C_1*C_2/X;Y_1\}} \to A*B}\,(* \to)$$

Terakhir, $V(C_1 * C_2) \subset V(X;Y_1)$ dan $V(C_1 * C_2) \subset V(Y_2) \cup V(A * B)]$.

<u>Bukti</u> :

- $V(C_1 * C_2) \subset [V(X) \cup V(Y_1)] = V(C_1 * C_2) \subset V(X;Y_1)$ terbukti.
- $V(C_1 * C_2) \subset [\{V(X) \cap V(X_{\{-/X\}}) \cup V(A)\} \cup \{V(Y_1) \cap V(Y_1;Y_{2\{-/Y_1\}}) \cup V(B)\}]$.

  $= V(C_1 * C_2) \subset [\{V(X) \cup \{V(Y_1)\} \cap \{V(X_{\{-/X\}}) \cup V(A) \cup V(Y_1;Y_{2\{-/Y_1\}}) \cup V(B)\}]$.

  $= [V(C_1 * C_2) \subset V(X) \cup V(Y_1)] \cap [V(C_1 * C_2) \subset V(Y_1;Y_{2\{-/Y_1\}}) \cup V(A) \cup V(B)]$.

  $=[V(C_1 * C_2) \subset V(X) \cup V(Y_1)] \cap [V(C_1 * C_2) \subset V(Y_2) \cup V(A * B)]$.

  Terbukti bahwa $V(C_1 * C_2) \subset V(Y_2) \cup V(A * B)]$.

Jadi dengan *3a)* dan *3b)* didapat $V(C_1 * C_2) \subset V(X;Y_1) \cap [V(X;Y_1;Y_{2\{-/X;Y_1\}}) \cup V(A * B)]$.

Sub kasus 6.4. Z memuat tampilan Y dan sebuah kemunculan struktur di dalam X, akan tetapi Z tidak memuat tampilan X.

Catatan bahwa pada kasus ini kita dapat menulis aturan terakhir ke dalam bentuk :

$$\frac{X_1; X_2 \to A \quad Y \to B}{X_1; X_2; Y \to A * B}(\to *)$$

dan ambil $Z = X_2; Y$.

Berikut dibuktikan bahwa :

1) $X_2; Y \to C_1 * C_2$ terbukti.

2) $X_1; X_2; Y_{\{C_1 * C_2 / X_2; Y\}} \to A * B$ terbukti.

3) $V(C_1 * C_2) \subset V(X_2 ; Y) \cap [V(X_1 ; X_2 ; Y_{\{-/X_2;Y\}}) \cup V(A * B)]$.

Maka kita perhatikan sequent kiri atas. Dengan menggunakan hipotesa induksi terdapat sebuah formula C_1 sedemikian sehingga :

1a) $X_2 \to C_1$ terbukti.

2a) $X_1; X_{2\{C_1 / X_2\}} \to A$ terbukti.

3b) $V(C_1) \subset V(X_2) \cap [V(X_1 ; X_{2\{-/X_2\}}) \cup V(A)]$.

Maka kita perhatikan sequent kanan atas. Dengan menggunakan hipotesa induksi terdapat sebuah formula C_2 sedemikian sehingga :

1b) $Y \to C_2$ terbukti.

2b) $Y_{\{C_2 / Y\}} \to B$ terbukti.

3b) $V(C_2) \subset V(Y) \cap [V(Y_{\{-/Y\}}) \cup V(B)]$.

Mengingat bahwa $Z = X; Y_1$ sehingga kita mempunyai bentuk sebagai berikut :

Dengan menerapkan $(\to *)$ pada $X_2 \to C_1$ dan $Y \to C_2$ kita dapat memperoleh $Z \to C_1 * C_2$. Jadi dengan *1a)* dan *1b)*, sequent ini terbukti.

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{X_2 \rightarrow C_1} \quad \dfrac{\vdots}{Y \rightarrow C_2}}{X_2; Y \rightarrow C_1 * C_2} (\rightarrow *)$$

Maka, dengan menerapkan $(\rightarrow *)$ pada $X_1; X_{2\{C_1 / X_2\}} \rightarrow A$ dan $Y_{\{C_2 / Y\}} \rightarrow B$ kita mendapatkan $X_1; X_2; Y_{\{C_1; C_2 / Z\}} \rightarrow A * B$. Maka dengan menerapkan $(* \rightarrow)$ pada $X_1; X_{2\{C_1 / X_2\}} \rightarrow A$ dan $Y_{\{C_2 / Y\}} \rightarrow B$ kita mendapatkan $X_1; X_2; Y_{\{C_1 * C_2 / Z\}} \rightarrow A * B$. Jadi dengan *2a)* dan *2b)*, sequent ini terbukti.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{X_1; X_{2\{C_1 / X_2\}} \rightarrow A} \quad \dfrac{\vdots}{Y_{\{C_2 / Y\}} \rightarrow B}}{X_1; X_2; Y_{\{C_1; C_2 / X_2; Y\}} \rightarrow A * B} (\rightarrow *)}{X_1; X_2; Y_{\{C_1 * C_2 / X_2; Y\}} \rightarrow A * B} (* \rightarrow)$$

Terakhir, $V(C_1 * C_2) \subset V(X_2; Y)$ dan $V(C_1 * C_2) \subset V(X_1) \cup V(A * B)$].

<u>Bukti</u> :

- $V(C_1 * C_2) \subset [V(X_2) \cup V(Y)] = V(C_1 * C_2) \subset V(X_2; Y)$ terbukti.
- $V(C_1 * C_2) \subset [\{V(X_2) \cap V(X_1; X_{2\{-/X_2\}}) \cup V(A)\} \cup \{V(Y) \cap V(Y_{\{-/Y\}}) \cup V(B)\}]$.

  $= V(C_1 * C_2) \subset [\{V(X_2) \cup \{V(Y)\} \cap \{V(X_1; X_{2\{-/X_2\}}) \cup V(A) \cup V(B)\}]$.

  $= [V(C_1 * C_2) \subset V(X_2) \cup V(Y)] \cap [V(C_1 * C_2) \subset V(X_1) \cup V(A) \cup V(B)]$.

  $=[V(C_1 * C_2) \subset V(X_2) \cup V(Y)] \cap [V(C_1 * C_2) \subset V(X_1) \cup V(A * B)]$.

  Terbukti bahwa $V(C_1 * C_2) \subset V(X_1) \cup V(A * B)$].

Jadi dengan *3a)* dan *3b)* didapat $V\,(\,C_1 * C_2\,) \subset V(\,X_2\,;\,Y\,) \cap [V\,(\,X_1\,;\,X_2\,;\,Y_{\{-/X_2\,;\,Y\}}\,) \cup V\,(\,A * B)]$.

Sub kasus 6.5. Z memuat sebuah kemunculan struktur di dalam X.

Berikut dibuktikan bahwa :

1) $Z \to C$ terbukti.

2) $X_{\{C/Z\}};Y \to A * B$ terbukti.

3) $V\,(\,C\,) \subset V\,(\,Z\,) \cap V\,(\,X_{\{-/Z\}}\,;\,Y\,) \cup V\,(\,A * B\,)$.

Maka kita perhatikan sequent kiri atas. Dengan menggunakan hipotesa induksi terdapat sebuah formula C sedemikian sehingga :

1) $Z \to C$ terbukti.

2) $X_{\{C/Z\}} \to A$ terbukti.

3) $V\,(\,C\,) \subset V\,(\,Z\,) \cap [V\,(\,X_{\{-/Z\}}\,) \cup V\,(\,A\,)]$.

Sekarang, dengan menerapkan $(\to *)$ pada $X_{\{C/Z\}} \to A$ dan sequent kanan atas $Y \to B$, kita mendapatkan $X_{\{C/Z\}};Y \to A * B$. Jadi dengan *2)* sequent ini terbukti.

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{X_{\{C/Z\}} \to A} \qquad \dfrac{\vdots}{Y \to B}}{X_{\{C/Z\}};Y \to A * B}\,(\to *)$$

Kemudian dengan $V\,(\,X_{\{-/Z\}}\,) \cup V\,(\,A\,) \subset V\,(\,X_{\{-/Z\}}\,;\,Y\,) \cup V\,(\,A * B\,)$ dan dengan *3)* didapat $V\,(\,C\,) \subset V\,(\,Z\,) \cap V\,(\,X_{\{-/Z\}}\,;\,Y\,) \cup V\,(\,A * B\,)$. Catatan pada kasus ini adalah karena bentuk $X_{\{C/Z\}}\,;\,Y$ dan $X_{\{-/Z\}}\,;\,Y$ adalah multiset sehingga bisa ditulis $X_{\{C/Z\}}\,;\,Y = X\,;\,Y_{\{C/Z\}}$ dan $X_{\{-/Z\}}\,;\,Y = X\,;\,Y_{\{-/Z\}}$.

Sub kasus 6.6. *Z* adalah sebuah kemunculan struktur di dalam *Y*.

Catatan bahwa pada kasus ini kita dapat menulis aturan terakhir ke dalam bentuk :

$$\frac{X \to A \quad Y_1;Y_2 \to B}{X;Y_1;Y_2 \to A*B}(\to *)$$

dan ambil $Z = X;Y_1$.

Berikut dibuktikan bahwa :

1) $X;Y_1 \to C_1 * C_2$ terbukti.

2) $X;Y_1;Y_{2\{C_1*C_2/X;Y_1\}} \to A*B$ terbukti.

3) $V(C_1 * C_2) \subset V(X;Y_1) \cap [V(X;Y_1;Y_{2\{-/X;Y_1\}}) \cup V(A*B)]$.

Maka kita perhatikan sequent kiri atas. Dengan menggunakan hipotesa induksi terdapat sebuah formula C_1 sedemikian sehingga :

1a) $X \to C_1$ terbukti.

2a) $X_{\{C_1/X\}} \to A$ terbukti.

3b) $V(C_1) \subset V(X) \cap [V(X_{\{-/X\}}) \cup V(A)]$.

Maka kita perhatikan sequent kanan atas. Dengan menggunakan hipotesa induksi terdapat formula C_2 sedemikian sehingga :

1b) $Y_1 \to C_2$ terbukti.

2b) $Y_1;Y_{2\{C_2/Y_1\}} \to B$ terbukti.

3b) $V(C_2) \subset V(Y_1) \cap [V(Y_1;Y_{2\{-/Y_1\}}) \cup V(B)]$.

Mengingat bahwa $Z = X;Y_1$ sehingga kita mempunyai bentuk sebagai berikut :

Dengan menerapkan $(\to *)$ pada $X \to C_1$ dan $Y_1 \to C_2$ kita dapat memperoleh $Z \to C_1 * C_2$. Jadi dengan *1a)* dan *1b)*, sequent ini terbukti.

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{X \to C_1} \qquad \dfrac{\vdots}{Y_1 \to C_2}}{X;Y_1 \to C_1 * C_2}(\to *)$$

Maka, dengan menerapkan $(\to *)$ pada $X_{\{C_1/X\}} \to A$ dan $Y_1;Y_{2\{C_2/Y_1\}} \to B$ kita mendapatkan $X;Y_1;Y_{2\{C_1;C_2/Z\}} \to A*B$. Maka dengan menerapkan $(* \to)$ pada $X_{\{C_1/X\}} \to A$ dan $Y_1;Y_{2\{C_2/Y_1\}} \to B$ kita mendapatkan $X;Y_1;Y_{2\{C_1*C_2/Z\}} \to A*B$.

Jadi dengan *2a)* dan *2b)*, sequent ini terbukti.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{X_{\{C_1/Z\}} \to A} \qquad \dfrac{\vdots}{Y_1;Y_{2\{C_2/Y_1\}} \to B}}{X;Y_1;Y_{2\{C_1;C_2/X;Y_1\}} \to C_1 * C_2}(\to *)}{X;Y_1;Y_{2\{C_1*C_2/X;Y_1\}} \to A*B}(* \to)$$

Terakhir, dengan *3a)* dan *3b)* didapat $V(C_1 * C_2) \subset V(X;Y_1) \cap [V(X;Y_1;Y_{2\{-/X;Y1\}}) \cup V(A*B)]$.

Kasus 7. Kesimpulan terakhir adalah $(* \to)$. Pada kasus ini $U \to D$ adalah bentuk $\Gamma(A*B) \to D$ dan aturan terakhir adalah bentuk berikut :

$$\frac{\Gamma(A;B) \to D}{\Gamma(A*B) \to D}(* \to)$$

Andaikan Z adalah sebuah kemunculan struktur extensional maksimal dalam $\Gamma(A*B)$.

Sub kasus 7.1. Z memuat tampilan $A * B$.

Berikut dibuktikan bahwa :

1) $Z \to C$ terbukti.

2) $\Gamma(A * B)_{\{C / Z\}} \to D$ terbukti.

3) $V(C) \subset V(\mathrm{Z}) \cap [V(\Gamma(A * B)_{\{-/\mathrm{Z}\}}) \cup V(D)]$.

Andaikan $W = Z_{\{A;\,B / A * B\}}$ dan $Z = \Delta(A * B)$. Maka kita perhatikan sequent atas. Dengan menggunakan hipotesa induksi terdapat sebuah formula C sedemikian sehingga :

1) $W \to C$ terbukti.

2) $\Gamma(A; B)_{\{C / W\}} \to D$ terbukti.

3) $V(C) \subset V(W) \cap [V(\Gamma(A; B)_{\{-/\mathrm{W}\}}) \cup V(D)]$.

Mengingat hubungan $W = Z_{\{A;\,B / A * B\}}$ dan $Z = \Delta(A * B)$ sehingga kita mempunyai bentuk sebagai berikut :

Dengan menerapkan $(* \to)$ pada $W \to C$ kita dapat memperoleh $Z \to C$. Jadi dengan *1)* $Z \to C$ terbukti.

$$\dfrac{\overline{\quad\vdots\quad}}{\dfrac{\Delta(A * B)_{\{A;\,B / A * B\}} \to C}{\Delta(A * B) \to C}(* \to)}$$

Kemudian, $\Gamma(A * B)_{\{C / Z\}} \to D$ equivalen pada $\Gamma(A; B)_{\{C / W\}} \to D$. Jadi dengan *2)* $\Gamma(A * B)_{\{C / Z\}} \to D$ terbukti.

Terakhir, $V(W) = V(Z)$ dan $\Gamma(A; B)_{\{-/\mathrm{W}\}} = \Gamma(A * B)_{\{-/\mathrm{Z}\}}$.

<u>Bukti</u> :

- $V(W) = V(Z_{\{A;\,B / A * B\}}) = V(\Delta(A * B)_{\{A;\,B / A * B\}})$ ....(I).

$V(Z) = V(\Delta(A * B))$ ....(II).

Formula yang muncul pada (I) muncul juga pada (II) begitupun sebaliknya sehingga $V(W) = V(Z)$.

- $\Gamma(A;B)_{\{-/W\}} = \Gamma(A;B)_{\{-/Z\{A;B/A*B\}\}} = \Gamma(A;B)_{\{-/\Delta(A*B)\{A;B/A*B\}\}}$ ....(I).

  $\Gamma(A*B)_{\{-/Z\}} = \Gamma(A*B)_{\{-/\Delta(A*B)\}}$ ....(II).

  Formula yang muncul pada (I) muncul juga pada (II) begitupun sebaliknya sehingga $\Gamma(A;B)_{\{-/W\}} = \Gamma(A*B)_{\{-/Z\}}$.

Jadi dengan *3)* didapat $V(C) \subset V(Z) \cap [V(\Gamma(A*B)_{\{-/Z\}}) \cup V(D)]$.

Sub kasus 7.2. Z tidak memuat tampilan $A*B$.

Berikut dibuktikan bahwa :

1) $Z \rightarrow C$ terbukti.

2) $\Gamma(A*B)_{\{C/Z\}} \rightarrow D$ terbukti.

3) $V(C) \subset V(Z) \cap [V(\Gamma(A*B)_{\{-/Z\}}) \cup V(D)]$.

Maka kita perhatikan sequent atas. Dengan menggunakan hipotesa induksi terdapat sebuah formula C sedemikian sehingga :

1) $Z \rightarrow C$ terbukti.

2) $\Gamma(A;B)_{\{C/Z\}} \rightarrow D$ terbukti.

3) $(C) \subset V(Z) \cap [V(\Gamma(A;B)_{\{-/Z\}}) \cup V(D)]$.

Maka dengan *2)* dan dengan menerapkan $(* \rightarrow)$ pada $\Gamma(A;B)_{\{C/Z\}} \rightarrow D$, kita mendapatkan bukti $\Gamma(A*B)_{\{C/Z\}} \rightarrow D$.

$$\frac{\overline{\quad\vdots\quad}}{\dfrac{\Gamma(A;B)_{\{C/Z\}} \rightarrow D}{\Gamma(A*B)_{\{C/Z\}} \rightarrow D}}\,(* \rightarrow)$$

Dengan *3)* didapat $V(C) \subset V(Z) \cap [V(\Gamma(A*B)_{\{-/Z\}}) \cup V(D)]$.

Kasus 8. Aturan terakhir adalah $(\rightarrow \vee 1)$. Pada kasus ini $U \rightarrow D$ adalah bentuk $U \rightarrow A \vee B$ dan aturan terakhir mempunyai bentuk sebagai berikut :

$$\frac{U \rightarrow A}{U \rightarrow A \vee B}\,(\rightarrow \vee 1)$$

Andaikan *Z* adalah kemunculan struktur extensional maksimal di dalam *U*.

Berikut dibuktikan bahwa :

1) $Z \rightarrow C$ terbukti.

2) $U_{\{C/Z\}} \rightarrow A \vee B$ terbukti.

3) $V(C) \subset V(Z) \cap [V(U_{\{-/Z\}}) \cup V(A \vee B)]$.

Maka kita perhatikan sequent atas. Dengan menggunakan hipotesa induksi terdapat sebuah formula *C* sedemikian sehingga :

1) $Z \rightarrow C$ terbukti.

2) $U_{\{C/Z\}} \rightarrow A$ terbukti.

3) $V(C) \subset V(Z) \cap [V(U_{\{-/Z\}}) \cup V(A)]$.

Sekarang, dengan menerapkan $(\rightarrow \vee 1)$ pada $U_{\{C/Z\}} \rightarrow A$ kita mendapatkan $U_{\{C/Z\}} \rightarrow A \vee B$. Jadi dengan *2)* sequent ini terbukti.

$$\frac{\overline{\quad\vdots\quad}}{\dfrac{U_{\{C/Z\}} \rightarrow A}{U_{\{C/Z\}} \rightarrow A \vee B}}\,(\rightarrow \vee 1)$$

Kemudian, karena $V(A) \subset V(A \vee B)$.

Bukti :

- $V (A)$ ....(I).

  $V(A \vee B)$ ....(II).

  Formula yang muncul pada (I) muncul juga pada (II) tetapi tidak sebaliknya sehingga $V(A) \subset V(A \vee B)$.

Jadi dengan *3)* didapat $V (C) \subset V (Z) \cap [V (U_{\{ - / Z \}}) \cup V (A \vee B)]$.

Kasus 9. Aturan terakhir $(\rightarrow \vee 2)$. Pada kasus ini $U \rightarrow D$ adalah bentuk $U \rightarrow A \vee B$ dan aturan terakhir mempunyai bentuk sebagai berikut :

$$\frac{U \rightarrow B}{U \rightarrow A \vee B} (\rightarrow \vee 2)$$

Andaikan Z adalah kemunculan struktur extensional maksimal di dalam U.

Berikut dibuktikan bahwa :

1) $Z \rightarrow C$ terbukti.

2) $U_{\{C / Z\}} \rightarrow A \vee B$ terbukti.

3) $V (C) \subset V (Z) \cap [V (U_{\{ - / Z \}}) \cup V (A \vee B)]$.

Maka kita perhatikan sequent atas. Dengan menggunakan hipotesa induksi terdapat sebuah formula C sedemikian sehingga :

1) $Z \rightarrow C$ terbukti.

2) $U_{\{C / Z\}} \rightarrow B$ terbukti.

3) $V (C) \subset V (Z) \cap [V (U_{\{ - / Z \}}) \cup V (B)]$.

Sekarang, dengan menerapkan $(\rightarrow\vee 2)$ pada $U_{\{C/Z\}} \rightarrow B$ kita mendapatkan $U_{\{C/Z\}} \rightarrow A \vee B$. Jadi dengan *2)* sequent ini terbukti.

$$\cfrac{\cfrac{\vdots}{U\{_{C/Z\}} \rightarrow B}}{U_{\{C/Z\}} \rightarrow A \vee B}\,(\rightarrow\vee 2)$$

Kemudian, karena $V(B) \subset V(A \vee B)$.

<u>Bukti</u> :

- $V(B)$ ....(I).

  $V(A \vee B)$ ....(II).

  Formula yang muncul pada (I) muncul juga pada (II) tetapi tidak sebaliknya sehingga $V(B) \subset V(A \vee B)$.

Jadi dengan *3)* didapat $V(C) \subset V(Z) \cap [V(U_{\{-/Z\}}) \cup V(A \vee B)]$.

Kasus 10. Aturan terakhir adalah $(\vee\rightarrow)$. Di sini $U \rightarrow D$ adalah bentuk dari $\Gamma(A \vee B) \rightarrow D$ dan kesimpulan terakhir adalah bentuk sebagai berikut :

$$\frac{\Gamma(A) \rightarrow D \quad \Gamma(B) \rightarrow D}{\Gamma(A \vee B) \rightarrow D}\,(\vee\rightarrow)$$

Andaikan Z adalah kemunculan struktur extensional maksimal dalam $\Gamma(A \vee B)$.

Sub kasus 10.1. Z terdiri dari tampilan $A \vee B$.

Berikut dibuktikan bahwa :

1) $Z \to C_1 \vee C_2$ terbukti.

2) $\Gamma(A \vee B)_{\{C_1 \vee C_2 / Z\}} \to D$ terbukti.

3) $V(C_1 \vee C_2) \subset V(Z) \cap [V(\Gamma(A \vee B_{\{-/Z\}}) \cup V(D)]$.

Misalkan $W = Z_{\{A / A \vee B\}}$ dan $Z = \Delta(A \vee B)$. Maka pertama – tama kita perhatikan sequent kiri atas. Dengan menggunakan hipotesa induksi terdapat sebuah formula C_1 sedemikian sehingga :

1a) $W \to C_1$ terbukti.

2a) $\Gamma(A)_{\{C_1 / W)} \to D$ terbukti.

3a) $V(C_1) \subset V(W) \cap [V(\Gamma(A)_{\{-/W\}}) \cup V(D)]$.

Kemudian misalkan $W' = Z_{\{B / A \vee B\}}$ dan $Z = \Delta(A \vee B)$. Maka kita perhatikan sequent kanan atas. Dengan menggunakan hipotesa induksi terdapat sebuah formula C_2 sebagai berikut :

1b) $W' \to C_2$ terbukti.

2b) $\Gamma(B)_{\{C_2 / W`)} \to D$ terbukti.

3b) $V(C_2) \subset V(W`)\ [V(\Gamma(B)_{\{-/W`\}}) \cup V(D)]$.

Sekarang, andaikan kembali $W = Z_{\{A / A \vee B\}}$ dan $W' = Z_{\{B / A \vee B\}}$ serta $Z = \Delta(A \vee B)$. Maka kita mempunyai bentuk sebagai berikut :

Pertama – tama, dengan menerapkan $(\to \vee 1)$ pada $W \to C_1$ dan $(\to \vee 2)$ pada $W' \to C_2$ kita dapat memperoleh $W \to C_1 \vee C_2$ dan $W' \to C_1 \vee C_2$ berturut - turut. Maka, dengan menerapkan $(\vee \to)$ pada $W \to C_1$ dan $W' \to C_2$ kita dapat memperoleh $Z \to C_1 \vee C_2$. Jadi dengan *1a)* dan *1b)* kita dapat memperoleh bukti dari sequent ini sebagai berikut :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{Z_{\{A/A\vee B\}} \to C_1}}{Z_{\{A/A\vee B\}} \to C_1 \vee C_2}(\to\vee 1) \quad \dfrac{\dfrac{\vdots}{Z_{\{B/A\vee B\}} \to C_2}}{Z_{\{B/A\vee B\}} \to C_1 \vee C_2}(\to\vee 2)}{Z_{\{A\vee B/A\vee B\}} \to C_1 \vee C_2}(\vee\to)$$

Kemudian, dengan menerapkan $(\vee\to)$ pada $\Gamma(A)_{\{C_1/W)} \to D$ dan $\Gamma(B)_{\{C_2/W')} \to D$ kita dapat memperoleh $\Gamma(A\vee B)_{\{C_1\vee C_2/Z\}} \to D$. Jadi dengan *2a)* dan *2b)* kita dapat memperoleh bukti dari sequent ini sebagai berikut :

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma(A)_{\{C_1/Z(A/A\vee B)\}} \to D} \quad \dfrac{\vdots}{\Gamma(B)_{\{C_2/Z(B/A\vee B)\}} \to D}}{\Gamma(A\vee B)_{\{C_1\vee C_2/Z\}} \to D}(\vee\to)$$

Terakhir, dengan *3a)* dan *3b)* $V(C_1 \vee C_2) \subset V(A\vee B) \cap [V(\Gamma(A \vee B_{\{-/A\vee B\}}) \cup V(D)]$.

Sub kasus 10.2. Z tidak memuat tampilan $A\vee B$.

Berikut dibuktikan bahwa :

1) $Z \to C_1 \wedge C_2$ terbukti.

2) $\Gamma(A\vee B)_{\{C_1\wedge C_2/Z\}} \to D$ terbukti.

3) $V(C_1 \wedge C_2) \subset V(Z) \cap [V(\Gamma(A \vee B_{\{-/Z\}}) \cup V(D)]$.

Maka kita perhatikan sequent kiri atas. Dengan menggunakan hipotesa induksi terdapat sebuah formula C_1 sedemikian sehingga :

1a) $Z \to C_1$ terbukti.

2a) $\Gamma(A)_{\{C_1/Z)} \to D$ terbukti.

3a) $V(C_1) \subset V(Z) \cap [V(\Gamma(A)_{\{-/Z\}}) \cup V(D)]$.

Kemudian, kita perhatikan sequent kanan atas. Dengan menggunakan hipotesis induksi terdapat sebuah formula C_2 sedemikian sehingga :

1b) $Z \to C_2$ terbukti.

2b) $\Gamma(B)_{\{C_2/Z)} \to D$ terbukti.

3b) $V(C_2) \subset V(Z) \cap [V(\Gamma(B)_{\{-/Z\}}) \cup V(D)]$.

Sekarang, dengan menerapkan $(\to \wedge)$ pada $Z \to C_1$ dan $Z \to C_2$, kita dapat memperoleh $Z \to C_1 \wedge C_2$ (perhatikan bahwa dari definisi struktur extensional, *Z*, *Z* = *Z*.). Jadi dengan *1a)* dan *1b)* kita dapat memperoleh bukti dari $Z \to C_1 \wedge C_2$ sebagai berikut :

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{Z \to C_1} \qquad \dfrac{\vdots}{Z \to C_2}}{Z, Z \to C_1 \wedge C_2}\,(\to \wedge)$$

Kemudian, dengan menerapkan $(\wedge 1 \to)$ pada $\Gamma(A)_{\{C_1/Z)} \to D$ dan menerapkan $(\wedge 2 \to)$ pada $\Gamma(B)_{\{C_2/Z)} \to D$ kita dapat memperoleh $\Gamma(A)_{\{C_1 \wedge C_2/Z\}} \to D$ dan $\Gamma(B)_{\{C_1 \wedge C_2/Z\}} \to D$. Maka dengan menerapkan $(\vee \to)$ pada $\Gamma(A)_{\{C_1/Z)} \to D$ dan $\Gamma(B)_{\{C_2/Z)} \to D$ kita dapat memperoleh $\Gamma(A \vee B)_{\{C_1 \wedge C_2/Z\}} \to D$. Jadi dengan *2a)* dan *2b)* kita dapat memperoleh bukti dari sequent terakhir ini sebagai berikut :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma(A)_{\{C_1/Z\}} \to D}}{\Gamma(A)_{\{C_1 \wedge C_2/Z\}} \to D}\,(\wedge 1 \to) \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma(B)_{\{C_2/Z\}} \to D}}{\Gamma(B)_{\{C_1 \wedge C_2/Z\}} \to D}\,(\wedge 2 \to)}{\Gamma(A \vee B)_{\{C_1 \wedge C_2/Z\}} \to D}\,(\vee \to)$$

Terakhir, dengan *3a)* dan *3b)* didapat $V(C_1 \wedge C_2) \subset V(Z) \cap [V(\Gamma (A \vee B_{\{-/Z\}}) \cup V(D)]$.

Kasus 11. Aturan terakhir adalah $(\rightarrow \exists)$. Pada kasus ini $U \rightarrow D$ adalah bentuk $\Gamma \rightarrow \exists z A(z)$ dan aturan terakhir mempunyai bentuk sebagai berikut :

$$\frac{X \rightarrow A(t)}{X \rightarrow \exists z A(z)} (\rightarrow \exists)$$

Andaikan *Z* adalah kemunculan struktur extensional maksimal di dalam *U*.

Berikut dibuktikan bahwa :

1) $Z \rightarrow C$ terbukti.

2) $X_{\{C/Z\}} \rightarrow \exists z A(z)$ terbukti.

3) $V (C) \subset V (Z) \cap [V (X_{\{-/Z\}}) \cup V (\exists z A(z))]$.

Maka kita perhatikan sequent atas. Dengan menggunakan hipotesa induksi terdapat sebuah formula *C* sedemikian sehingga :

1) $Z \rightarrow C$ terbukti.

2) $X_{\{C/Z\}} \rightarrow A(t)$ terbukti.

3) $V (C) \subset V (Z) \cap [V (X_{\{-/Z\}}) \cup V (A(t))]$.

Sekarang, dengan menerapkan $(\rightarrow \exists)$ pada $X_{\{C/Z\}} \rightarrow A(t)$ kita mendapatkan $X_{\{C/Z\}} \rightarrow \exists z A(z)$. Jadi dengan *2)* sequent ini terbukti.

$$\frac{\dfrac{\vdots}{X_{\{C/Z\}} \rightarrow A(t)}}{X_{\{C/Z\}} \rightarrow \exists z A(z)} (\rightarrow \exists)$$

Kemudian, $V(A(t)) \subset V(\exists z A(z))$.

<u>Bukti</u> :

Himpunan variabel proposisi yang muncul pada $A(t)$ adalah subformula dari himpunan variabel proposisi yang muncul pada $\exists zA(z)$.

catatan : 2 buah variabel proposisi dalam $A(t)$ dan $A(z)$ dianggap mempunyai arti logika yang sama bila t bebas dari z di $A(z)$.

Jadi $V(\ A(t)\ ) \subset V(\exists zA(z))$.

Jadi dengan *3)* didapat $V(\ C\ ) \subset V(\ Z\ ) \cap [V(\ X_{\{-/Z\}}) \cup V(\exists zA(z))]$.

Kasus 12. Aturan terakhir adalah $(\exists \rightarrow)$. Pada kasus ini $U \rightarrow D$ adalah bentuk $X;\exists zA(z);\Delta$ dan aturan terakhir adalah bentuk berikut :

$$\frac{X;A(x);\Delta \rightarrow D}{X;\exists zA(z);\Delta \rightarrow D}(\exists \rightarrow)$$

Andaikan Z adalah sebuah kemunculan struktur extensional maksimal dalam $X;\exists zA(z);\Delta$.

Sub kasus 12.1. Z memuat tampilan $\exists zA(z)$.

Berikut dibuktikan bahwa :

1) $Z \rightarrow C$ terbukti.

2) $X(\exists zA(z))_{\{C/Z\}} \rightarrow D$ terbukti.

3) $V(\ C\ ) \subset V(\ Z\ ) \cap [V(\ X(\exists zA(z))_{\{-/Z\}}) \cup V(\ D\ )]$.

Andaikan $W = Z_{\{A(x)/\exists zA(z)\}}$ dan $Z = \Sigma(\exists zA(z))$. Maka kita perhatikan sequent atas. Dengan mengggunakan hipotesa induksi terdapat sebuah formula C sedemikian sehingga :

1) $W \rightarrow C$ terbukti.

2) $X(A(x))_{\{C/W\}} \rightarrow D$ terbukti.

3) $V(C) \subset V(W) \cap [V(X(A(x))_{\{-/W\}}) \cup V(D)]$.

Mengingat hubungan $W = Z_{\{A(x)/\exists zA(z)\}}$ dan $Z = \Sigma(\exists zA(z))$ sehingga kita mempunyai bentuk sebagai berikut :

Dengan menerapkan $(\exists \rightarrow)$ pada $W \rightarrow C$ kita dapat memperoleh $Z \rightarrow C$. Jadi dengan *1)* $Z \rightarrow C$ terbukti.

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Sigma(A(x)) \rightarrow C}}{\Sigma(\exists zA(z)) \rightarrow C}(\exists \rightarrow)$$

Kemudian, $X(\exists zA(z))_{\{C/Z\}} \rightarrow D$ equivalen pada $X(A(x))_{\{C/W\}} \rightarrow D$. Jadi dengan *2)* $X(\exists zA(z))_{\{C/Z\}} \rightarrow D$ terbukti.

Terakhir, $V(W) \subset V(Z)$ dan $X(A(x))_{\{-/W\}} = X(\exists zA(z))_{\{-/Z\}}$

<u>Bukti</u> :

- $V(W) \subset V(\Sigma(A(x)))$ ....(I).

  $V(Z) = V(\Sigma(\exists zA(z)))$ ....(II).

  Variabel proposisi yang muncul pada $A(x)$ adalah subformula dari variabel proposisi yang muncul pada $\exists zA(z)$.

  catatan :

  - Karena memenuhi syarat eigenvariabel maka variabel x tidak muncul pada sequent bawah sehingga x bebas dari z di $A(z)$.

- 2 buah variabel proposisi dalam $A(x)$ dan $A(z)$ dianggap mempunyai arti logika yang sama bila x bebas dari z di $A(z)$.

Jadi $V(A(x)) \subset V(\exists z A(z))$.

- $X(A(x))_{\{-/W\}} = X(A(x))_{\{-/\Sigma(A(x))\}}$ ....(I).

  $X(\exists z A(z))_{\{-/Z\}} = X(\exists z A(z))_{\{-/\Sigma(\exists z A(z))\}}$ ....(II).

  Dari (I) dan (II) didapat hasil yang sama sehingga terbukti

  $X(A(x))_{\{-/W\}} = X(\exists z A(z))_{\{-/Z\}}$

Jadi dengan *3)* didapat $V(C) \subset V(Z) \cap [V(X(\exists z A(z))_{\{-/Z\}}) \cup V(D)]$.

Sub kasus 12.2. *Z* memuat tampilan *X*.

Berikut dibuktikan bahwa :

1) $Z \to C$ terbukti.

2) $\Delta(X_{\{C/Z\}}) \to D$ terbukti.

3) $V(C) \subset V(Z) \cap [V(\Delta(X_{\{-/Z\}}) \cup V(D)]$.

Andaikan $W = Z_{\{X/X\}}$ dan $Z = \Sigma(X)$. Maka kita perhatikan sequent atas. Dengan mengggunakan hipotesa induksi terdapat sebuah formula *C* sedemikian sehingga :

1) $W \to C$ terbukti.

2) $\Delta(X_{\{C/W\}}) \to D$ terbukti.

3) $V(C) \subset V(W) \cap [V(\Delta(X_{\{-/W\}}) \cup V(D)]$.

Mengingat hubungan $W = Z_{\{X\ /\ X\}}$ dan $Z = \Sigma(X)$ sehingga kita mempunyai bentuk sebagai berikut :

Dengan menerapkan $(\exists \rightarrow)$ pada $W \rightarrow C$ kita dapat memperoleh $Z \rightarrow C$. Jadi dengan *1)* $Z \rightarrow C$ terbukti.

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Sigma(X) \rightarrow C}}{\Sigma(X) \rightarrow C}\,(\exists \rightarrow)$$

Kemudian, $\Delta(X_{\{C\,/\,Z\}}) \rightarrow D$ equivalen pada $\Delta(X_{\{C\,/\,W\}}) \rightarrow D$. Jadi dengan *2)* $\Delta(X_{\{C\,/\,Z\}}) \rightarrow D$ terbukti.

Terakhir, $V(W) = V(Z)$ dan $\Delta(X_{\{-\,/\,W\}}) = \Delta(X_{\{-\,/\,Z\}})$.

<u>Bukti</u> :

- $V(W) = V(\Sigma(X))$ ....(I).

  $V(Z) = V(\Sigma(X))$ ....(II).

  Formula yang muncul pada (I) muncul juga pada (II) begitupun sebaliknya sehingga $V(W) = V(Z)$.

- $\Delta(X_{\{-\,/\,W\}}) = \Delta(X_{\{-\,/\,\Sigma(X)\}}$ ....(I).

  $\Delta(X_{\{-\,/\,Z\}}) = \Delta(X_{\{-\,/\,\Sigma(X)\}}$..(II).

  Tampak jelas bahwa $\Delta(X_{\{-\,/\,W\}}) = \Delta(X_{\{-\,/\,Z\}})$.

Jadi dengan *3)* didapat $V(C) \subset V(Z) \cap [V(\Delta(X_{\{-\,/\,Z\}})) \cup V(D)]$.

Sub kasus 12.3. Z memuat tampilan Δ.

Berikut dibuktikan bahwa :

1) $Z \rightarrow C$ terbukti.

2) $X(\Delta_{\{C/Z\}}) \rightarrow D$ terbukti.

3) $V(C) \subset V(Z) \cap [V(X(\Delta_{\{-/Z\}}) \cup V(D)]$.

Andaikan $W = Z_{\{\Delta/\Delta\}}$ dan $Z = \Sigma(\Delta)$. Maka kita perhatikan sequent atas. Dengan mengggunakan hipotesa induksi terdapat sebuah formula C sedemikian sehingga :

1) $W \rightarrow C$ terbukti.

2) $X(\Delta)_{\{C/W\}} \rightarrow D$ terbukti.

3) $V(C) \subset V(W) \cap [V(X(\Delta_{\{-/W\}}) \cup V(D)]$.

Mengingat hubungan $W = Z_{\{\Delta/\Delta\}}$ dan $Z = \Sigma(\Delta)$ sehingga kita mempunyai bentuk sebagai berikut :

Dengan menerapkan $(\exists \rightarrow)$ pada $W \rightarrow C$ kita dapat memperoleh $Z \rightarrow C$. Jadi dengan *1)* $Z \rightarrow C$ terbukti.

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Sigma(\Delta) \rightarrow C}}{\Sigma(\Delta) \rightarrow C}(\exists \rightarrow)$$

Kemudian, $X(\Delta_{\{C/Z\}}) \rightarrow D$ equivalen pada $X(\Delta_{\{C/W\}}) \rightarrow D$. Jadi dengan *2)* $X(\Delta_{\{C/Z\}}) \rightarrow D$ terbukti.

Terakhir, $V(W) = V(Z)$ dan $X(\Delta_{\{-/W\}}) = X(\Delta_{\{-/Z\}})$.

<u>Bukti</u> :

- $V(W) = V(\Sigma(\Delta))$ ....(I).

  $V(Z) = V(\Sigma(\Delta))$ ....(II).

  Formula yang muncul pada (I) muncul juga pada (II) begitupun sebaliknya sehingga $V(W) = V(Z)$.

- $X(\Delta_{\{-/W\}}) = X(\Delta_{\{-/\Sigma(\Delta)\}}$ ....(I).

  $X(\Delta_{\{-/Z\}}) = X(\Delta_{\{-/\Sigma(\Delta)\}}$ ....(II).

  Tampak jelas bahwa $X(\Delta_{\{-/W\}}) = X(\Delta_{\{-/Z\}})$.

Jadi dengan *3)* didapat $V(C) \subset V(Z) \cap [V(X(\Delta_{\{-/Z\}}) \cup V(D)]$.

Kasus 13. Aturan terakhir adalah $(\rightarrow \forall)$. Pada kasus ini $U \rightarrow D$ adalah bentuk $X \rightarrow \forall z A(z)$ dan aturan terakhir mempunyai bentuk sebagai berikut :

$$\frac{X \rightarrow A(x)}{X \rightarrow \forall z A(z)} (\rightarrow \forall)$$

Andaikan *Z* adalah kemunculan struktur extensional maksimal di dalam *U*.

Berikut dibuktikan bahwa :

1) $Z \rightarrow C$ terbukti.

2) $X_{\{C/Z\}} \rightarrow \forall z A(z)$ terbukti.

3) $V(C) \subset V(Z) \cap [V(X_{\{-/Z\}}) \cup V(\forall z A(z))]$.

Maka kita perhatikan sequent atas. Dengan menggunakan hipotesa induksi terdapat sebuah formula *C* sedemikian sehingga :

1) $Z \rightarrow C$ terbukti.

2) $X_{\{C/Z\}} \rightarrow A(x)$ terbukti.

3) $V(C) \subset V(Z) \cap [V(X_{\{-/Z\}}) \cup V(A(x))]$.

Sekarang, dengan menerapkan $(\rightarrow \forall)$ pada $X_{\{C/Z\}} \rightarrow A(x)$ kita mendapatkan $X_{\{C/Z\}} \rightarrow \forall z A(z)$. Jadi dengan *2)* sequent ini terbukti.

$$\frac{\dfrac{\vdots}{X_{\{C/Z\}} \to A(x)}}{X_{\{C/Z\}} \to \forall z A(z)} (\to \forall)$$

Kemudian, $V(\ A(x)\ ) \subset V(\forall z A(z))$.

<u>Bukti</u> :

Himpunan variabel proposisi yang muncul pada $A(x)$ adalah subformula dari himpunan variabel proposisi yang muncul pada $\forall z A(z)$.

catatan :

- Karena memenuhi syarat eigenvariabel maka variabel x tidak muncul pada sequent bawah sehingga x bebas dari z di $A(z)$.
- 2 buah variabel proposisi dalam $A(x)$ dan $A(z)$ dianggap mempunyai arti logika yang sama bila x bebas dari z di $A(z)$.

Jadi $V(\ A(x)) \subset V(\forall z A(z))$.

Jadi dengan *3)* didapat $V(C) \subset V(Z) \cap [V(X_{\{-/Z\}}) \cup V(\forall z A(z))]$.

Kasus 14. Aturan terakhir adalah $(\forall \to)$. Pada kasus ini $U \to D$ adalah bentuk $X; \forall z A(z); \Delta \to D$ dan aturan terakhir adalah bentuk berikut :

$$\frac{X; A(t); \Delta \to D}{X; \forall z A(z); \Delta \to D} (\forall \to)$$

Andaikan Z adalah sebuah kemunculan struktur extensional maksimal dalam $X; \forall z A(z); \Delta$.

Sub kasus 14.1. Z memuat tampilan $\forall z A(z)$.

Berikut dibuktikan bahwa :

1) $Z \to C$ terbukti.

2) $X(\forall z A(z))_{\{C/Z\}} \to D$ terbukti.

3) $V(C) \subset V(Z) \cap [V(X(\forall z A(z))_{\{-/Z\}}) \cup V(D)]$.

Andaikan $W = Z_{\{A(t)/\forall z A(z)\}}$ dan $Z = \Sigma(\forall z A(z))$. Maka kita perhatikan sequent atas. Dengan mengggunakan hipotesa induksi terdapat sebuah formula C sedemikian sehingga :

1) $W \to C$ terbukti.

2) $X(A(t))_{\{C/W\}} \to D$ terbukti.

3) $V(C) \subset V(W) \cap [V(X(A(t))_{\{-/W\}}) \cup V(D)]$.

Mengingat hubungan $W = Z_{\{A(t)/\forall z A(z)\}}$ dan $Z = \Sigma(\forall z A(z))$ sehingga kita mempunyai bentuk sebagai berikut :

Dengan menerapkan $(\forall \to)$ pada $W \to C$ kita dapat memperoleh $Z \to C$. Jadi dengan *1)* $Z \to C$ terbukti.

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Sigma(A(t)) \to C}}{\Sigma(\forall z A(z)) \to C}(\forall \to)$$

Kemudian, $X(\forall z A(z))_{\{C/Z\}} \to D$ equivalen pada $X(A(t))_{\{C/W\}} \to D$. Jadi dengan *2)* $X(\forall z A(z))_{\{C/Z\}} \to D$ terbukti.

Kemudian, $V(A(t)) \subset V(\forall z A(z))$.

<u>Bukti</u> :

Himpunan variabel proposisi yang muncul pada $A(t)$ adalah subformula dari himpunan variabel proposisi yang muncul pada $\forall z A(z)$.

catatan : 2 buah variabel proposisi dalam $A(t)$ dan $A(z)$ dianggap mempunyai arti logika yang sama bila *t* bebas dari *z* di $A(z)$.

Jadi $V(\, A(t)\,) \subset V(\forall z A(z))$.

Jadi dengan *3)* didapat $V\,(\, C\,) \subset V\,(\, Z\,) \cap [V\,(\, X(\forall z A(z))_{\{-/Z\}}) \cup V\,(\, D\,)]$.

Sub kasus 14.2. *Z* memuat tampilan *X*.

Berikut dibuktikan bahwa :

1) $Z \rightarrow C$ terbukti.

2) $\Delta(X_{\{C/Z\}}) \rightarrow D$ terbukti.

3) $V\,(\, C\,) \subset V\,(\, Z\,) \cap [V\,(\Delta(X_{\{-/Z\}}) \cup V\,(\, D\,)]$.

Andaikan $W = Z_{\{X/X\}}$ dan $Z = \Sigma(X)$. Maka kita perhatikan sequent atas. Dengan mengggunakan hipotesa induksi terdapat sebuah formula *C* sedemikian sehingga :

1) $W \rightarrow C$ terbukti.

2) $\Delta(X_{\{C/W\}}) \rightarrow D$ terbukti.

3) $V\,(\, C\,) \subset V\,(\, W\,) \cap [V\,(\Delta(X_{\{-/W\}}) \cup V\,(\, D\,)]$.

Mengingat hubungan $W = Z_{\{X/X\}}$ dan $Z = \Sigma(X)$ sehingga kita mempunyai bentuk sebagai berikut :

Dengan menerapkan $(\forall \rightarrow)$ pada $W \rightarrow C$ kita dapat memperoleh $Z \rightarrow C$. Jadi dengan *1)* $Z \rightarrow C$ terbukti.

$$\cfrac{\cfrac{\vdots}{\Sigma(X) \rightarrow C}}{\Sigma(X) \rightarrow C}\,(\forall \rightarrow)$$

Kemudian, $\Delta(X_{\{C/Z\}}) \rightarrow D$ equivalen pada $\Delta(X_{\{C/W\}}) \rightarrow D$. Jadi dengan *2)* $\Delta(X_{\{C/Z\}}) \rightarrow D$ terbukti.

Terakhir, $V(W) = V(Z)$ dan $\Delta(X_{\{-/W\}}) = \Delta(X_{\{-/Z\}})$.

<u>Bukti</u> :

- $V(W) = V(\Sigma(X))$ ....(I).

  $V(Z) = V(\Sigma(X))$ ....(II).

  Formula yang muncul pada (I) muncul juga pada (II) begitupun sebaliknya sehingga $V(W) = V(Z)$.

- $\Delta(X_{\{-/W\}}) = \Delta(X_{\{-/\Sigma(X)\}})$ ....(I).

  $\Delta(X_{\{-/Z\}}) = \Delta(X_{\{-/\Sigma(X)\}})$ ....(II).

  Tampak jelas bahwa $\Delta(X_{\{-/W\}}) = \Delta(X_{\{-/Z\}})$.

Jadi dengan *3)* didapat $V(C) \subset V(Z) \cap [V(\Delta(X_{\{-/Z\}}) \cup V(D)]$.

Sub kasus 14.3. *Z* memuat tampilan Δ.

Berikut dibuktikan bahwa :

1) $Z \rightarrow C$ terbukti.

2) $X(\Delta_{\{C/Z\}}) \rightarrow D$ terbukti.

3) $V(C) \subset V(Z) \cap [V(X(\Delta_{\{-/Z\}}) \cup V(D)]$.

Andaikan $W = Z_{\{\Delta / \Delta\}}$ dan $Z = \Sigma(\Delta)$. Maka kita perhatikan sequent atas. Dengan mengggunakan hipotesa induksi terdapat sebuah formula C sedemikian sehingga :

1) $W \to C$ terbukti.

2) $X(\Delta)_{\{C / W\}} \to D$ terbukti.

3) $V(C) \subset V(W) \cap [V(X(\Delta_{\{- / W\}}) \cup V(D)]$.

Mengingat hubungan $W = Z_{\{\Delta / \Delta\}}$ dan $Z = \Sigma(\Delta)$ sehingga kita mempunyai bentuk sebagai berikut :

Dengan menerapkan $(\forall \to)$ pada $W \to C$ kita dapat memperoleh $Z \to C$. Jadi dengan *1)* $Z \to C$ terbukti.

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Sigma(\Delta) \to C}}{\Sigma(\Delta) \to C}(\forall \to)$$

Kemudian, $X(\Delta_{\{C / Z\}}) \to D$ equivalen pada $X(\Delta_{\{C / W\}}) \to D$. Jadi dengan *2)* $X(\Delta_{\{C / Z\}}) \to D$ terbukti.

Terakhir, $V(W) = V(Z)$ dan $X(\Delta_{\{- / W\}}) = X(\Delta_{\{- / Z\}})$.

<u>Bukti</u> :

- $V(W) = V(\Sigma(\Delta))$ ....(I).

  $V(Z) = V(\Sigma(\Delta))$ ....(II).

  Formula yang muncul pada (I) muncul juga pada (II) begitupun sebaliknya sehingga $V(W) = V(Z)$.

- $X(\Delta_{\{- / W\}}) = X(\Delta_{\{- / \Sigma(\Delta)\}}$ ....(I).

  $X(\Delta_{\{- / Z\}}) = X(\Delta_{\{- / \Sigma(\Delta)\}}$ ....(II).

  Tampak jelas bahwa $X(\Delta_{\{- / W\}}) = X(\Delta_{\{- / Z\}})$.

Jadi dengan *3)* didapat $V(C) \subset V(Z) \cap [V(X(\Delta_{\{-/Z\}}) \cup V(D)]$.

3.1.2. Bukti Teorema 3.1 Untuk Logika Predikat $\mathbf{L_0R_+}$

Kemudian kita akan mempertimbangkan bukti dari teorema 3.1 di atas untuk logika predikat $\mathbf{L_0R_+}$. Di sini hanya dijabarkan bukti untuk logika predikat $\mathbf{L_0R_+}$ untuk aturan (I – *con*). Untuk kasus–kasus yang lain sama dengan bukti untuk logika predikat $\mathbf{L_0RW_+}$, maka tidak dijabarkan lagi.

Kasus 15. Aturan terakhir adalah (I – *con*). Disini $U \to D$ adalah bentuk dari $\Gamma(X) \to D$ dan bentuk aturan terakhirnya adalah sebagai berikut :

$$\frac{\Gamma(X;X) \to D}{\Gamma(X) \to D}(I - con)$$

Sekarang, andaikan Z adalah kemunculan struktur yang extensional maksimal dalam $\Gamma(X)$.

Sub kasus 15.1. Z memuat sebuah kemunculan struktur terluar dan kemunculan struktur dalam X.

Catatan bahwa disini X harus menjadi sebuah multiset dari bentuk $X_1;X_2$. sedemikian sehingga $Z = Y\,;X_1$ dan kesimpulan terakhirnya dapat ditulis ke dalam bentuk berikut :

$$\frac{\Gamma(Y;X_1;X_1;X_2;X_2) \to D}{\Gamma(Y;X_1;X_2) \to D}(I - con)$$

Berikut dibuktikan bahwa :

1) $Y; X_1 \to C$ terbukti.

2) $\Gamma(C; X_2) \to D$ terbukti.

3) $V(C) \subset V(Y; X_1) \cap [V(\Gamma(Y; X_1; X_2)_{\{-/Y;X_1\}}) \cup V(D)]$.

Andaikan $W = Z_{\{X_1;X_1/X_1\}} = Y; X_1; X_1$. Kemudian perhatikan sequent atas. Dengan menggunakan hipotesa induksi terdapat sebuah formula *C* sedemikian sehingga :

1) $W \to C$ terbukti.

2) $\Gamma(Y; X_1; X_1; X_2; X_2)_{\{C/W\}} \to D$ terbukti.

3) $V(C) \subset V(W) \cap [V(\Gamma(Y; X_1; X_1; X_2; X_2)_{\{-/W\}}) \cup V(D)]$.

Sekarang misalkan kembali $W = Z_{\{X_1;X_1/X_1\}} = Y; X_1; X_1$ kemudian kita mempunyai bentuk sebagai berikut :

Pertama, dengan *1)* dan dengan menerapkan $(I - con)$ pada $W \to C$, kita dapat mendapatkan bukti dari $Z \to C$ sebagai berikut :

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{Y; X_1; X_1 \to C}}{Y; X_1 \to C}(I - con)$$

Kemudian, dengan menerapkan $(I - con)$ pada sequent $\Gamma(Y; X_1; X_1; X_2; X_2)_{\{C/W\}} \to D$ kita dapat memperoleh $\Gamma(Y; X_1; X_2)_{\{C/Z\}} \to D$. Jadi dengan *2)* kita dapat memperoleh bukti dari $\Gamma(Y; X_1; X_2)_{\{C/Y;X_1\}} \to D$ sebagai berikut :

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma(C; X_2; X_2) \to D}}{\Gamma(C; X_2) \to D}(I - con)$$

Terakhir, $V(W) = V(Z)$ dan $V(\Gamma(Y;X_1;X_1;X_2;X_2)_{\{-/W\}} = V(\Gamma(Y;X_1;X_2)_{\{-/Z\}}$.

Bukti :

- $V (W) = V (Y ; X_1 ; X_1)$ ……………..………………………………….(I).

  $V (Z) = V (Y ; X_1)$ ……………..…………………..…………………..(II).

  Formula yang muncul pada (I) muncul juga pada (II) begitupun sebaliknya sehingga $V(W) = V(Z)$.

- $V(\Gamma(Y;X_1;X_1;X_2;X_2)_{\{-/W\}}) = V(\Gamma(Y;X_1;X_1;X_2;X_2)_{\{-/Y;X_1;X_1\}}) = V(\Gamma(X_2;X_2))$ ..…...……………………………………...…………..(I).

  $V(\Gamma(Y;X_1;X_2)_{\{-/Z\}}) = V(\Gamma(Y;X_1;X_2)_{\{-/Y;X_1\}}) = V(\Gamma(X_2))$ ……………………….………………………………….(II).

  Formula yang muncul pada (I) muncul juga pada (II) begitupun sebaliknya sehingga $V(\Gamma(Y;X_1;X_1;X_2;X_2)_{\{-/W\}} = V(\Gamma(Y;X_1;X_2)_{\{-/Z\}}$.

Jadi dengan *3)* didapat $V(C) \subset V(Y;X_1) \cap [V(\Gamma(Y;X_1;X_2)_{\{-/Y;X_1\}}) \cup V(D)]$.

Sub kasus 15.2. *Z* memuat tampilan *X* tetapi $Z \neq X$.

Catatan bahwa disini *X* harus menjadi sebuah multiset dari bentuk *X*. Sedemikian sehingga *Z* = *X* dan kesimpulan terakhirnya dapat ditulis ke dalam bentuk berikut

$$\frac{\Gamma(X;X) \rightarrow D}{\Gamma(X) \rightarrow D}(I - con)$$

Berikut dibuktikan bahwa :

1) $X \rightarrow C$ terbukti.

2) $\Gamma(X)_{\{C/X\}} \rightarrow D$ terbukti.

3) $V(C) \subset V(X) \cap [V(\Gamma(X)_{\{-/X\}}) \cup V(D)]$.

Andaikan $W = Z_{\{X;X/X\}} = X;X$. Maka kita perhatikan sequent atas. Dengan menggunakan hipotesa induksi terdapat sebuah formula C sedemikian sehingga :

1) $W \to C$ terbukti.

2) $\Gamma(X;X)_{\{C/W\}} \to D$ terbukti.

3) $V(C) \subset V(W) \cap [V(\Gamma(X;X)_{\{-/W\}}) \cup V(D)]$.

Sekarang misalkan kembali $W = Z_{\{X;X/X\}} = X;X$ kemudian kita mempunyai bentuk sebagai berikut :

Pertama, dengan *1)* dan dengan menerapkan $(I-con)$ pada $W \to C$, kita dapat mendapatkan bukti dari $Z \to C$ sebagai berikut :

$$\frac{\dfrac{\vdots}{X;X \to C}}{X \to C}(I-con)$$

Kemudian, karena di pihak lain $\Gamma(X;X)_{\{C/W\}}$ = $\Gamma(X)_{\{C/Z\}}$ kita dapat memperoleh $\Gamma(X)_{\{C/Z\}} \to D$. Jadi dengan *2)* kita dapat memperoleh bukti dari $\Gamma(X)_{\{C/Z\}} \to D$.

Terakhir, $V(W) = V(Z)$ dan $V(\Gamma(X;X)_{\{-/W\}})$ = $V(\Gamma(X)_{\{-/Z\}})$.

<u>Bukti</u> :

- $V(W) = V(X;X)$ …………………………………………………….(I).

  $V(Z) = V(X)$ ………………………………..…………………..(II).

  Formula yang muncul pada (I) muncul juga pada (II) begitupun sebaliknya sehingga $V(W) = V(Z)$.

- $V(\Gamma(X;X)_{\{-/W\}})$ = $V(\Gamma(X;X)_{\{-/X;X\}})$ ..…...……………………..(I).

  $V(\Gamma(X)_{\{-/Z\}})$ = $V(\Gamma(X)_{\{-/X\}})$ …………………….…………….(II).

Formula yang muncul pada (I) muncul juga pada (II) begitupun sebaliknya sehingga $V(\Gamma(X;X)_{\{-/W\}})$ = $V(\Gamma(X)_{\{-/Z\}})$.

Jadi dengan *3),* $V(C) \subset V(X) \cap [V(\Gamma(X)_{\{-/X\}}) \cup V(D)]$.

Sub kasus 15.3. *Z* adalah sebuah kemunculan struktur dalam *X*.

Catatan bahwa disini *X* harus menjadi sebuah multiset dari bentuk X_1 ; X_2. sedemikian sehingga $Z = X_1$ dan kesimpulan terakhirnya dapat ditulis ke dalam bentuk berikut :

$$\frac{\Gamma(X_1;X_1;X_2;X_2) \to D}{\Gamma(X_1;X_2) \to D}(I-con)$$

Berikut dibuktikan bahwa :

1) $X_1 \to C$ terbukti.

2) $\Gamma(X_1;X_2)_{\{C/X_1\}} \to D$ terbukti.

3) $V(C) \subset V(X_1) \cap [V(\Gamma(X_1;X_2)_{\{-/X_1\}}) \cup V(D)]$.

Andaikan $W = Z_{\{X_1;X_1/X_1\}} = X_1;X_1$. Kemudian perhatikan sequent atas. Dengan menggunakan hipotesa induksi terdapat sebuah formula *C* sebagai berikut :

1) $W \to C$ terbukti.

2) $\Gamma(X_1;X_1;X_2;X_2)_{\{C/W\}} \to D$ terbukti.

3) $V(C) \subset V(W) \cap [V(\Gamma(X_1;X_1;X_2;X_2)_{\{-/W\}}) \cup V(D)]$.

Sekarang misalkan kembali $W = Z_{\{X_1;X_1/X_1\}} = X_1;X_1$ kemudian kita mempunyai bentuk sebagai berikut :

Pertama, dengan *1)* dan dengan menerapkan $(I-con)$ pada $W \to C$, kita dapat mendapatkan bukti dari $Z \to C$ sebagai berikut :

$$\cfrac{\cfrac{\vdots}{X_1; X_1 \to C}}{X_1 \to C}\,(I - con)$$

Kemudian, dengan menerapkan $(I - con)$ pada sequent $\Gamma(X_1; X_1; X_2; X_2)_{\{C/W\}} \to D$ kita dapat memperoleh $\Gamma(X_1; X_2)_{\{C/Z\}} \to D$. Jadi dengan *2)* kita dapat memperoleh bukti dari $\Gamma(X_1; X_2)_{\{C/Z\}} \to D$ sebagai berikut :

$$\cfrac{\cfrac{\vdots}{\Gamma(C; X_2; X_2) \to D}}{\Gamma(C; X_2) \to D}\,(I - con)$$

Terakhir, $V(W) = V(Z)$ dan $V(\Gamma(X_1; X_1; X_2; X_2)_{\{-/W\}}) = V(\Gamma(X_1; X_2)_{\{-/Z\}})$.

<u>Bukti</u> :

- $V(W) = V(X_1 ; X_1)$ …………………………………………………….(I).

  $V(Z) = V(X_1)$ …………………………………..…………………..(II).

  Formula yang muncul pada (I) muncul juga pada (II) begitupun sebaliknya sehingga $V(W) = V(Z)$.

- $V(\Gamma(X_1; X_1; X_2; X_2)_{\{-/W\}}) = V(\Gamma(X_1; X_1; X_2; X_2)_{\{-/X_1;X_1\}}) = V(\Gamma(X_2; X_2))$ ………………………………………………………..(I).

  $V(\Gamma(X_1; X_2)_{\{-/Z\}}) = V(\Gamma(X_1; X_2)_{\{-/X_1\}}) = V(\Gamma(X_2))$ ……………….(II).

  Formula yang muncul pada (I) muncul juga pada (II) begitupun sebaliknya sehingga $V(\Gamma(X_1; X_1; X_2; X_2)_{\{-/W\}}) = V(\Gamma(X_1; X_2)_{\{-/Z\}})$.

Jadi dengan *3)*, $V(C) \subset V(X_1) \cap [V(\Gamma(X_1; X_2)_{\{-/X_1\}}) \cup V(D)]$.

Sub kasus 15.4. *Z* adalah kemunculan struktur terluar dari *X*.

Berikut dibuktikan bahwa :

1) $Z \to C$ terbukti.

2) $\Gamma(X)_{\{C/Z\}} \to D$ terbukti.

3) $V(C) \subset V(Z) \cap [V(\Gamma(X,Y)_{\{-/Z\}}) \cup V(D)]$.

Andaikan ini terdiri dari sequent atas. Dengan menggunakan hipotesa induksi terdapat sebuah formula *C* sebagai berikut :

1) $Z \to C$ terbukti.

2) $\Gamma(X)_{\{C/Z\}} \to D$ terbukti.

3) $V(C) \subset V(Z) \cap [V(\Gamma(X)_{\{-/Z\}}) \cup V(D)]$.

Kemudian dengan *2)* dan dengan menerapkan (*E* – *weak*) pada $\Gamma(X)_{\{C/Z\}} \to D$, kita mendapatkan bukti $\Gamma(X,Y)_{\{C/Z\}} \to D$.

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma(X)_{\{C/Z\}} \to D}}{\Gamma(X,Y)_{\{C/Z\}} \to D}(E - weak)$$

Dengan *3)* didapat $V(C) \subset V(Z) \cap [V(\Gamma(X,Y)_{\{-/Z\}}) \cup V(D)]$.

3.1.3. Teorema Interpolasi Untuk Logika Predikat L_oRW_+ dan L_oR_+

Dengan terbuktinya teorema yang mempunyai bentuk yang lebih umum (Teorema 3.1) untuk logika predikat L_oRW_+ dan L_oR_+, kita dapat dengan mudah membuktikan bahwa teorema interpolasi berlaku untuk logika predikat L_oRW_+ dan L_oR_+.

Teorema akibat (Teorema 3.2) *Andaikan* $A \rightarrow D$ *terbukti (dalam logika predikat* $\boldsymbol{L_oRW_+}$ *atau* $\boldsymbol{L_oR_+}$ *). Maka terdapat sebuah formula C sedemikian sehingga formula* $A \rightarrow C$ *dan formula* $C \rightarrow D$ *keduanya terbukti dan* $V(C) \subset V(A) \cap V(D)$.

Bukti :

Berikut dibuktikan bahwa :

1) $A \rightarrow C$ terbukti.

2) $C \rightarrow D$ terbukti.

3) $V(C) \subset V(A) \cap V(D)]$.

Misalkan bahwa $A \rightarrow D$ adalah sequent yang terbukti. Misalkan juga A adalah kemunculan struktur yang extensional maksimal dalam *A* itu sendiri. Berdasarkan teorema 3.1 dengan mengambil *U* = *A*, perhatikan bahwa karena *U* = *A*, maka *Z* = *A*. Maka dalam *A* terdapat formula *C* sedemikian sehingga :

1) $Z \rightarrow C$ terbukti.

2) $U_{\{C\,/\,Z\}} \rightarrow D$ terbukti.

3) $V(C) \subset V(Z) \cap [V(U_{\{-\,/\,Z\}}) \cup V(D)]$.

Mengingat hubungan *U* = *A* dan *Z* = *A*, maka dengan *1)* didapat bukti bahwa $A \rightarrow C$. Selanjutnya dengan *2)* $U_{\{C\,/\,Z\}} = A_{\{C\,/\,A\}} = C$ sehingga $C \rightarrow D$ terbukti. Jadi dengan *3)* $V(C) \subset V(A) \cap V(D)]$.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan sebelumnya, diperoleh kesimpulan:

Dengan adanya teorema yang bentuknya lebih umum dari teorema interpolasi (teorema 3.1), maka terbukti bahwa teorema interpolasi berlaku untuk logika predikat L_oRW_+ dan L_oR_+.

4.2 Saran

Telah dibuktikan bahwa teorema interpolasi berlaku untuk logika predikat L_oRW_+ dan L_oR_+, maka untuk selanjutnya dapat dipelajari apakah logika predikat L_oRW_+ dan L_oR_+ memenuhi sifat-sifat lain seperti Prinsip Maksimova.

DAFTAR PUSTAKA

Surarso, B. 1995. *A Study of Noncommutative substructural logics*. Master Thesis, Hiroshima University.

Troelstra, A.S. and Schwichtenberg, H. 2000. *Basic Proof Theory, Second Edition*. Madrid. Cambrige University Press.

Surarso, B. 1998. *A Proof-Theoritical Investigation on Intuitionistic Substructural Logics.* Thesis, The Graduate School of Engineering of Hiroshima University. Japan.

Surarso, B. 2004. *Gentzen-type system for logic BB'I and its noncommutative standard extension,* Journal of Sciences & Mathematics (JSM) Vol. 12, No. 3, Fakultas MIPA UNIVERSITAS DIPONEGORO, Semarang.

Surarso, B. 2004. *Interpolation Theorem for Noncommutative Standard Extension of Logic BB'I*, Jurnal Matematika dan Komputer (JMK) Vol. 7, No. 2, Fakultas MIPA UNIVERSITAS DIPONEGORO, Semarang.

http://en.wikipedia.org/wiki/Gentzen's_consistency_proof (2008) .

http://answer.com/topic/formula/formula_mathematical logic (2008) .

http://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_induction (2008) .

http://planetmath.org/encyclopedia/Subformula.html. (2008) .

http://en.wikipedia.org/wiki/Relevant_Logic. (2008) .

http://en.wikipedia.org/wiki/Predicate_Language. (2008) .

http://en.wikipedia.org/wiki/Propositional_Language. (2008) .