BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Struktur aljabar merupakan suatu himpunan tidak kosong yang dilengkapi dengan aksioma dan suatu operasi biner. Teori grup dan ring merupakan konsep yang memegang peranan penting dalam struktur aljabar karena dapat membentuk suatu konsep baru yang disebut modul.

Modul merupakan generalisasi dari ruang vektor. Gagasan pokok yang mendasari tentang ruang vektor adalah grup abelian dan lapangan. Secara sederhana, suatu himpunan tidak kosong V disebut ruang vector atas lapangan jika V adalah grup abelian terhadap penjumlahan yang memenuhi operasi pergandaan skalar terhadap lapangan.

Sementara, gagasan pokok yang mendasari tentang teori modul adalah grup abelian dan ring dengan elemen satuan . Suatu himpunan tidak kosong M disebut modul atas ring jika M adalah grup abelian terhadap penjumlahan yang memenuhi operasi pergandaan skalar terhadap ring.

Dari definisi di atas, selanjutnya dapat diperoleh suatu konsep baru dari modul, yaitu modul sederhana. Suatu modul M yang hanya memiliki modul bagian $\langle 0 \rangle$ dan M sendiri disebut modul sederhana. Tidak semua modul merupakan modul sederhana, tetapi terdapat modul yang merupakan jumlahan langsung dari modul- modul bagian sederhana yang disebut modul semi sederhana.

Dalam tugas akhir ini akan dibahas lebih lanjut sifat-sifat dari modul semi sederhana.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas dapat dikemukakan rumusan masalah yang akan disajikan dalam tugas akhir ini adalah bagaimana sifat-sifat yang terkait dengan modul semi sederhana yang dibentuk dari jumlahan langsung modul sederhana.

1.3 Pembatasan Masalah

Dalam tugas akhir ini modul kanan dan modul kiri hanya dipandang sebagai modul dan ring yang digunakan adalah ring komutatif. Selanjutnya pada bab III hanya akan membahas tentang modul bagian maksimal dan minimal, modul sederhana dan modul semi sederhana. Pembahasan disini menekankan pada pembuktian teorema-teorema, lema-lema dan sifat dari modul semi sederhana yang dikonstruksi dari modul sederhana.

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan tugas akhir ini adalah mengkaji lebih dalam tentang dasar teori modul, khususnya modul semi sederhana yang dikonstruksi dari modul sederhana dan sifat sifat dari modul semi sederhana itu sendiri.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan tugas akhir ini meliputi tiga bab. Bab I merupakan bab pendahuluan. Bab II berisi dasar teori yang merupakan teori penunnjang dari materi pembahasan. Dalam tugas akhir ini teori penunjangnya meliputi teori tentang grup, ring dan modul. Bab III merupakan bab pembahasan dari tugas akhir ini yang meliputi teori tentang modul bagian maksimal dan modul bagian minimal, modul sederhana dan modul semi sederhana. Bab IV merupakan penutup yang berisi tentang hasil yang diperoleh dari pembahasan.

BAB II

TEORI PENUNJANG

Pada bab II ini akan dibahas beberapa teori penunjang yang akan digunakan sebagai dasar dalam membahas modul semi sederhana pada bab III. Materi tersebut antara lain tentang pemetaan, grup, ring dan modul.

2.1 Pemetaan

Berikut ini akan diberikan definisi pemetaan serta contoh yang memperjelas definisi tersebut. Sebelum diberikan definisi dari pemetaan terlebih dahulu akan diberikan definisi produk *Cartesian* seperti di bawah ini.

Definisi 2.1.1

Untuk dua himpunan tidak kosong S dan T, produk *Cartesian* $S \times T$ adalah himpunan semua pasangan terurut (s, t) dari elemen-elemen di $s \in S$ dan $t \in T$, yaitu

$$S \times T = \{(s, t) | s \in S \text{ dan } t \in T\}.$$

Contoh 2.1.1

Jika $S = \{1, 2\}$ dan $T = \{3, 4, 5\}$, maka

$$S \times T = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$$

$$T \times S = \{(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 2)\}$$

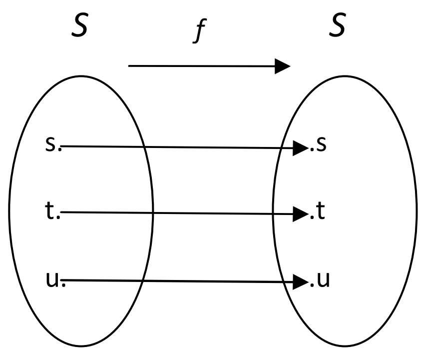
Dari contoh diatas terlihat bahwa $S \times T$ dan $T \times S$ memiliki urutan orde yang jelas berbeda.

Definisi 2.1.2

Jika S dan T adalah dua himpunan tidak kosong, maka pemetaan f dari S ke T ditulis $f: S \to T$ adalah himpunan bagian dari $S \times T$ dimana untuk setiap $s \in S$ terdapat dengan tunggal $t \in T$, $(s, t) \in f$, hal ini dapat ditulis dengan $f(s) = t$.

Contoh 2.1.2

1. Misalkan S sebarang himpunan tidak kosong. Diberikan $f = \{(s, s) | s \in S\} \subseteq S \times S$. Pemetaan $f: S \to S$ didefinisikan oleh $f(s) = s$ untuk setiap $s \in S$. Pemetaan $f: S \to S$ dapat ditunjukan dengan diagram Venn berikut:



2. Misalkan $S = \{-2, 1, 2\}$ dan $T = \{1, 4, 9\}$. Didefinisikan $f(s) = s^2$. Himpunan f diberikan oleh $f = \{(-2,4), (1, 1), (2, 4)\} \subseteq S \times S$ merupakan pemetaan dari S ke T karena untuk setiap $s \in S$ terdapat dengan tunggal $t \in T$ sedemikian sehingga $(s, t) \in f$.

2.2 Grup

Operasi-operasi dasar dalam objek aljabar seperti penjumlahan, pengurangan dan perkalian merupakan contoh dari operasi biner pada semua himpunan bilangan riil. Sedangkan operasi pembagian bukan merupakan operasi biner karena pembagian dengan bilangan nol tidak didefinisikan. Adapun pengertian mengenai operasi biner akan dijelaskan dalam definisi berikut.

Definisi 2.2.1

Misalkan $S \neq \emptyset$ maka operasi biner $*$ pada S adalah pemetaan $*: S \times S \rightarrow S$ dimana untuk setiap $(a, b) \in S \times S$ terdapat dengan tunggal $c \in S$ sehingga $*(a, b) = c$, selanjutnya ditulis dengan $a * b = c \in S$.

Contoh 2.2.1

Misal $A = \{ a = 2k, b = 2m \mid k, m \in Z\}$ himpunan semua bilangan asli genap terhadap operasi penjumlahan. Akan ditunjukan bahwa operasi penjumlahan dua bilangan asli genap pada A adalah operasi biner.

Misal $\forall a, b \in A$, dengan $a = 2k$ dan $b = 2m$ dimana $k, m \in Z$. Maka $a + b = 2k + 2m = 2(k + m) \in A$.

Definisi 2.2.2

Grup G adalah himpunan tidak kosong G yang dilengkapi dengan operasi biner $*$ sedemikian sehingga memenuhi kondisi berikut:

1. Operasi biner $*$ bersifat asosiatif, artinya $\forall x, y, z \; di \; G$, maka $x * (y * z) = (x * y) * z$.

2. Terdapat e di G sedemikian sehingga $x * e = e * x = x$ untuk semua $x \in G$. Selanjutnya e disebut elemen identitas dari G.
3. Untuk semua $x \in G$, terdapat $y \in G$ sedemikian sehinggga $x * y = y * x = e$. Selanjutnya y disebut invers dari x dan ditulis dengan notasi x^{-1}.

Contoh 2.2.2

1. Himpunan semua bilangan bulat $\mathbb{Z}$ merupakan grup terhadap operasi penjumlahan.
2. Himpunan semua bilangan komplek $\mathbb{C}$ merupakan grup terhadap operasi penjumlahan.
3. Misalkan $G = \{1, -1, i, -i\}$ himpunan bilangan-bilangan komplek. Karena G memenuhi aksioma grup terhadap pergandaan, maka $(G,\cdot)$ merupakan grup pergandaan.

Definisi 2.2.3

Diberikan grup G dengan operasi biner $*$. Grup G disebut grup komutatif atau grup abelian jika $\forall x, y\ di\ G$ berlaku $x * y = y * x$.

Contoh 2.2.3

1. Himpunan semua bilangan bulat $\mathbb{Z}$ merupakan grup abelian terhadap operasi penjumlahan.
2. Himpunan semua bilangan komplek adalah grup abelian pada operasi penjumlahan.

Definisi 2.2.4

Misalkan G adalah grup terhadap operasi biner. Diberikan $H \subseteq G, H \neq \emptyset$ disebut grup bagian G jika H terhadap operasi $*$ juga membentuk sebuah grup.

Teorema 2.2.5

Misalkan G grup dengan operasi biner. Diberikan $H \subseteq G$ adalah grup bagian G jika dan hanya jika memenuhi kondisi dibawah ini:

1) H tidak kosong
2) $x \in H$ dan $y \in H$ maka $xy^{-1} \in H$.

Bukti **:**

Misalkan H grup bagian G, jelas bahwa H tidak kosong karena H mempunyai elemen identitas sehingga $e \in H$ (karena H juga merupakan grup). Ambil sebarang $x, y \in H$, karena H grup bagian maka terdapat invers $y^{-1} \in H$ sehingga $xy^{-1} \in H$.

Sebaliknya, misalkan H tidak kosong dan memenuhi setiap $x, y \in H$, maka $xy^{-1} \in H$. Selanjutnya akan ditunjukan H grup bagian G.

1. Sifat assosiatif pada H diturunkan dari sifat assosiatif dari G.
2. Karena H tidak kosong maka terdapat $x \in H$, berdasarkan 2), $x^{-1} \in H$ sehingga $xx^{-1} = e \in H$. Jadi H memuat elemen identitas.
3. Jika $y \in H$ dan karena $e \in H$ maka $ey^{-1} = y^{-1} \in H$. Jadi setiap elemen H mempunyai invers di H.

4. Untuk setiap $x, y \in H$ maka $y^{-1} \in H$ sehingga $x(y^{-1})^{-1} = xy \in H.$ Jadi H tertutup.

Dari aksioma di atas, H memenuhi aksioma grup. Karena H adalah grup, maka H grup bagian G.

Contoh 2.2.5

Misalkan $G = \mathbb{Z}_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$ grup terhadap operasi penjumlahan. Diambil $H = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\} \subseteq G$. Dengan operasi penjumlahan tersebut pada H, akan diperoleh hasil sebagaimana pada tabel berikut:

+	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$

Dari tabel diatas diketahui bahwa himpunan bagian H tertutup terhadap operasi penjumlahan, memiliki elemen identitas dan memiliki invers untuk tiap-tiap elemen. Karena H memenuhi definisi grup, maka H adalah grup bagian G terhadap operasi penjumlahan.

Definisi 2.2.6

Diberikan G suatu grup. Untuk suatu $a \in G$, dimana $H = \{ x \in G | x = a^n$ untuk $n \in \mathbb{Z}\}$ adalah grup bagian G dan disebut grup bagian yang dibangkitkan oleh a dan dinotasikan dengan $\langle a \rangle$. K grup bagian G disebut grup bagian siklik jika terdapat elemen b di G sedemikian hingga $K = \langle b \rangle = \{ y \in G | y = b^n$ untuk $n \in \mathbb{Z}\}$. Selanjutnya G adalah grup siklik jika terdapat elemen $a \in G$ sedemikian sehingga $G = \langle a \rangle$.

Diberikan grup $(G,\cdot)$ maka jika $a \in G$ yang dimaksud dengan a^n untuk setiap $n \in G$ adalah

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{sebanyak\ a\ faktor}$$

Sementara jika $(G,+)$ maka

$$a^n = a + a + \cdots + a = n \cdot a$$

$$n \cdot a = a + a + \cdots + a \text{ untuk } n > 0$$

$$= (-a) + (-a) + \cdots + (-a) \text{ untuk } n < 0.$$

Contoh 2.2.6

1. $(\{i, -i, 1, -1\},\cdot)$ merupakan grup siklik berorde 4 yang dibangkitkan oleh i terhadap operasi pergandaan, karena $i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i$.
2. Misalkan perkalian bilangan bulat yang dibangun oleh 1 karena $1.1 = 1$, $2.1 = 2, \ldots, n.1 = n$. Jadi $\langle 1 \rangle$ adalah elemen pembangkit dari perkalian bilangan bulat terhadap operasi penjumlahan.

3. Misalkan G adalah grup terhadap operasi penjumlahan. Untuk suatu $g \in G$, grup $(G, +)$ adalah siklik bila $G = \{ng | n \in \mathbb{Z}\}$.

Definisi 2.2.7

Misalkan H adalah grup bagian dari G dan $a \in G$. Himpunan semua elemen ah dengan $h \in H$ disebut koset kiri dari H dan ditulis dengan aH. Jadi $aH = \{ah | h \in H\}$. Demikian juga dapat dibentuk $Ha = \{ha | h \in H\}$ dinamakan koset kanan dari grup bagian H.

Bila operasi biner disajikan dalam jumlahan maka

koset kiri adalah

$$a + H = \{a + h | h \in H\}$$

koset kanan adalah

$$H + a = \{h + a | h \in H\}.$$

Contoh 2.2.7

Diambil $H = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\} \subseteq G = \mathbb{Z}_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$. Akan dibentuk suatu koset terhadap operasi penjumlahan. Koset dari H adalah H dan $1 + H$, yaitu:

$$\bar{\bar{0}} = \bar{0} + H = \bar{2} + H = \bar{4} + H = \bar{6} + H$$

$$= \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$$

$$\bar{\bar{0}} = \bar{\bar{2}} = \bar{\bar{4}} = \bar{\bar{6}} = H.$$

$\bar{\bar{1}} = \bar{1} + H = \bar{3} + H = \bar{5} + H = \bar{7} + H$

$= \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}$

$\bar{\bar{1}} = \bar{\bar{3}} = \bar{\bar{5}} = \bar{7} = 1 + H.$

Definisi 2.2.8

Diberikan H grup bagian grup G, H disebut grup bagian normal dari G jika $xHx^{-1} = H$ untuk semua $x \in G$.

Definisi di atas dapat ditulis dalam bentuk $xH = Hx$, jadi syarat perlu dan cukup agar H grup bagian normal dari G adalah koset kiri dari H sekaligus koset kanan dari H.

Contoh 2.2.8

1. Diberikan suatu grup abelian G. Karena setiap grup bagian dari G merupakan grup abelian, grup bagian G merupakan grup bagian normal karena koset kiri dari grup bagian G juga sekaligus koset kanan.
2. Diambil $H = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\} \subseteq G = \mathbb{Z}_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$. Akan dibentuk suatu koset kanan dan kiri terhadap operasi penjumlahan. Koset kiri dari H adalah H dan $1 + H$. Koset kanan dari H adalah H dan $H + 1$. Karena penjumlahan koset tersebut bersifat komutatif yaitu $1 + H = H + 1$, maka H merupakan grup normal.

H grup bagian normal dari grup G. Diberikan $G/_H = \{aH | a \in G\}$ yang memuat koset-koset H di G. Didefinisikan operasi biner $G/_H$ dengan

$$(aH)(bH) = (ab)H$$

untuk semua $a, b\ a \in G$. Pendefinisian tersebut merupakan *well defined*. Selanjutnya grup $G/_H$ yang memuat koset-koset H di G disebut grup kuosen atau grup faktor G oleh H.

2.3 Ring

Berikut ini akan diberikan definisi dari ring beserta sifat-sifat yang berlaku pada ring.

Definisi 2.3.1

Suatu ring $\langle R, +, \cdot \rangle$ adalah himpunan tidak kosong R yang dilengkapi dengan dua operasi biner yang disajikan dengan tanda jumlahan " $+$ " dan tanda pergandaan " $\cdot$ " yang memenuhi aksioma-aksioma di bawah ini :

1. $\langle R, + \rangle$ merupakan grup komutatif
2. terhadap operasi pergandaan memenuhi sifat asosiatif
3. memenuhi hukum distributif kiri dan hukum distributif kanan, yaitu: untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku $a.(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ dan $(a + b).c = a \cdot c + b \cdot c$.

Contoh 2.3.1

1. Himpunan semua bilangan bulat $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ terhadap operasi penjumlahan merupakan grup komutatif dan terhadap operasi pergandaan bersifat asosiatif. Selanjutnya $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ memenuhi hukum distributif kiri dan kanan. Karena memenuhi aksioma ring, maka $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ merupakan ring.
2. Himpunan semua bilangan riil $\mathbb{R}$ merupakan ring terhadap operasi terhadap penjumlahan dan pergandaan.

Definisi 2.3.2

Jika di dalam ring R terdapat elemen identitas terhadap operasi pergandaan maka R disebut ring dengan elemen satuan. Jika di dalam ring R operasi pergandaan memenuhi sifat komutatif maka R disebut ring komutatif.

Contoh 2.3.2

1. Diberikan $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ merupakan ring dengan eleman satuan yaitu $1 \in Z$. Karena memenuhi sifat komutatif, $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ juga merupakan ring komutatif sebab dengan mengambil $m, n \in \mathbb{Z}$, maka $m \cdot n = n \cdot m$.
2. Jika R ring komutatif dengan elemen satuan dan misalkan $M_n(R)$ adalah himpunan semua matriks bertipe $n \times n$ dengan unsur anggota-anggota dari R. Operasi jumlahan dan pergandaan pada $M_n(R)$ adalah operasi penjumlahan dan pergandaan pada matriks. Maka $\langle M_n(R), +, \cdot \rangle$ merupakan ring dengan elemen satuan tetapi tidak komutatif.

Definisi 2.3.3

Misalkan $\langle R, +, \cdot \rangle$ adalah ring dan S himpunan bagian R, S disebut ring bagian dari ring R jika $\langle S, +, \cdot \rangle$ merupakan ring.

Teorema 2.3.4

Jika $\langle R, +, \cdot \rangle$ adalah ring dan S himpunan bagian R, maka S merupakan ring bagian R jika dan hanya jika kondisi berikut ini terpenuhi:

1. S tidak kosong
2. $x \in S$ dan $y \in S$ maka $x + y \in S$ dan $xy \in S$
3. $x \in S$ maka $-x \in S$

Contoh 2.3.4

Ring $\mathbb{Z}$ adalah ring bagian dari $\mathbb{Q}$, ring $\mathbb{Q}$ adalah ring bagian dari $\mathbb{R}$, dan ring $\mathbb{R}$ adalah ring bagian dari $\mathbb{C}$.

Definisi 2.3.5

Diberikan suatu ring $\langle F, +, \cdot \rangle$. Ring $\langle F, +, \cdot \rangle$ disebut lapangan jika mempunyai elemen satuan dan setiap elemen tidak nol memiliki invers pergandaan yang bersifat komutatif.

Contoh 2.3.5

1. $\mathbb{R}$ dan $\mathbb{Q}$ merupakan lapangan.
2. $\mathbb{Z}_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ merupakan lapangan.

Definisi 2.3.6

Diberikan ring R dan $I \subseteq R$, maka I disebut ideal dari ring R jika memenuhi aksioma-aksioma berikut ini:

1. I ring bagian dari R
2. $x \in I, r \in R$ maka $xr \in I$ dan $rx \in I$.

Contoh 2.3.6

Misal diambil $\mathbb{Z}$ himpunan semua bilangan bulat, maka $E = \{2k | k \in \mathbb{Z}\}$ merupakan ideal dari $\mathbb{Z}$.

Teorema 2.3.7

Jika R ring komutatif dan $a \in R$, maka $aR = \{ar \mid r \in R\}$ ideal dari R.

Bukti :

Untuk setiap $ar, as \in aR$

1. $ar - as = a(r - s) \in aR$
2. $(ar)(as) = a(ars) \in aR$
3. $(ar)s = a(rs) \in aR$

   $s(ar) = a(sr) \in aR, \forall ar \in aR, s \in R.$

Definisi 2.3.8

Suatu ideal I dari ring R dengan $I \neq R$ disebut ideal maksimal jika dipenuhi untuk setiap ideal N dengan $I \subseteq N$ maka berlaku $I = N$ dan $N \neq R$.

Contoh 2.3.8

Jika $\mathbb{Z}$ himpunan semua bilangan bulat dan p bilangan prima maka $M = \{px | x \in Z\} = p\mathbb{Z}$ merupakan ideal maksimal.

2.4 Teori Modul

2.4.1 Modul

Berikut ini akan diberikan definisi dari modul beserta sifat-sifat yang berlaku pada modul.

Definisi 2.4.1.1

Misalkan R ring dengan elemen satuan dan M grup abelian terhadap penjumlahan, M disebut modul atas ring R jika untuk setiap $\lambda \in R,\ x \in M$ maka $\lambda x \in M$ memenuhi aksioma perkalian skalar berikut

1. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
2. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
3. $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$
4. $1x = x$.

Untuk setiap $x, y \in M$ dan $\lambda, \mu \in R$.

Contoh 2.4.1.1

1. Diberikan ring R didefinisikan

$$R^n = \underbrace{R \times \ldots \times R}_{n\ kali} = \{(r_1, r_2, \ldots, r_n) | r_1, r_2, \ldots, r_n \in R\}$$

Operasi penjumlahan pada R^n didefinisikan dengan

$$(r_1, r_2, \ldots, r_n) + (s_1, s_2, \ldots, s_n) = (r_1 + s_1, r_2 + s_2, \ldots, r_n + s_n)$$

Untuk semua $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ dan $(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in R^n$.

Dapat ditunjukan terhadap operasi penjumlahan R^n merupakan grup abelian.

Selanjutnya didefinisikan perkalian skalar pada R^n dengan

$$\lambda(r_1, r_2, \ldots, r_n) = (\lambda r_1, \lambda r_2, \ldots, \lambda r_n),$$

untuk setiap $(r_1, r_2, \ldots, r_n) \in R^n$ dan $\lambda \in R$. Maka R^n merupakan modul atas R.

2. Diberikan ring R dengan elemen satuan. Maka himpunan semua matrik berukuran $m \times n$, $M_{m \times n}(R)$, merupakan modul atas ring R dengan perkalian skalar pada matriks.

Definisi 2.4.2.2

Misalkan M modul atas ring R. Jika N adalah grup bagian M maka N adalah modul bagian atas ring R jika untuk setiap $\lambda \in R$ dan $x \in N$ maka $\lambda x \in N$.

Teorema 2.4.3.3

Misalkan M modul atas ring R. $N \subseteq M$ merupakan modul bagian dari M jika dan hanya jika:

1. $N \neq \emptyset$
2. $n + n' \in N$
3. $an \in N$

untuk semua $a \in R$ dan $n, n' \in N$.

Bukti :

Diberikan M modul atas ring R. Ambil N modul bagian dari M dengan $N \subseteq M$. Karena M grup, maka terdapat elemen identitas $e \in M$, dengan demikian setidaknya terdapat satu elemen $0 \in N$, sehingga $N \neq \emptyset$. Selanjutnya N grup bagian M, maka N tertutup pada operasi penjumlahan di M. Sifat pergandaan skalar dapat ditunjukan dengan mengambil $\lambda \in R$ dan $x \in N$ maka $\lambda x \in N$.

Sebaliknya akan ditunjukan N modul bagian M. Sifat tertutup dan tidak kosong ditunjukan oleh 1) dan 2). Untuk setiap $0 \in R$ dan $n \in N$ maka $an = 0 \in M$. Dengan demikian terdapat elemen identitas $0 \in N$. Dengan mengambil $a = -1 \in R$ dan $n \in N$ maka $an = -n \in M$, maka terdapat invers di N. Sementara sifat asosiatif dan komutatif pada N diwariskan dari M. Sementara itu dengan mengambil $\lambda \in R$ dan $x \in N$ maka $\lambda x \in N$ memenuhi sifat pergandaan skalar. Dengan demikian N modul bagian M.

Contoh 2.4.3.3

1. Diambil $\mathbb{Z}$ modul atas dirinya sendiri, maka $2\mathbb{Z}$ modul bagian dari $\mathbb{Z}$.
2. Diberikan R ring dengan elemen satuan adalah modul atas R sendiri. Jika S ideal R, maka S modul bagian R.
3. Diberikan $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$ modul atas $\mathbb{Z}$, $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ dan $\{\bar{0}, \bar{3}\}$ merupakan modul bagian $\mathbb{Z}_6$.

Definisi 2.4.4.4

Misalkan R suatu ring. $M\ dan\ N$ modul atas ring R.

1. Pemetaan $\varphi : M \to N$ disebut homomorfisma modul atas ring R jika memenuhi
   a) $\varphi\ (x + y) = \varphi(x) + \varphi(y), untuk\ semua\ x, y \in M\ dan$
   b) $\varphi\ (rx) = r\varphi(x), untuk\ semua\ r \in R, x \in M.$
2. Homomorfisma modul atas ring R disebut isomorfisma dari modul atas ring R jika memenuhi sifat injektif dan surjektif. Modul $M\ dan\ N$ dikatakan isomorfis yang dinotasikan dengan $M \cong N$, jika terdapat isomorfisma modul atas ring R , $\varphi : M \to N$.
3. Jika $\varphi : M \to N$ adalah sebuah homomorfisma modul atas ring R. $ker\varphi = \{ m \in M \mid \varphi\ (m) = 0\}$ $(kernel\ dari\ \varphi)\ dan\ \varphi(M) = \{ n \in N \mid n = \varphi(m)$ untuk suatu $m \in M \}$.
4. Himpunan semua homomorfisma modul atas ring R dari M ke N dinotasikan dengan $Hom_R(M, N)$.

Teorema 2.4.5.5

Diberikan $M, N\ dan\ L$ modul atas ring R.

1. Pemetaan $\varphi : M \rightarrow N$ adalah homomorfisma modul atas ring R jika dan hanya jika $\varphi\,(rx + y) = r\varphi(x) + \varphi(y), untuk\ semua\ x, y \in M\ dan\ semua\ r \in R$.
2. Diberikan $\varphi, \psi\ elemen\ dari\ Hom_R(M, N)$, didefinisikan $\varphi + \psi$ dengan $(\varphi + \psi)(m) = \varphi(m) + \psi(m)$ untuk semua $m \in M$. Maka $\varphi + \psi \in Hom_R(M, N)$ dan $(Hom_R(M, N), +)$ merupakan grup abelian. Jika R adalah ring komutatif untuk $r \in R$ didefinisikan $r\varphi$ dengan $(r\varphi)(m) = r(\varphi(m))$ untuk semua $m \in M$. Maka $r\varphi \in Hom_R(M, N)$ dan suatu ring R pada grup abelian, $Hom_R(M, N)$ merupakan modul atas ring R.

2.4.2 Jumlahan Langsung Modul

Misalkan M suatu modul atas ring R dan $\{M_i\}_{i\in I}$ suatu keluarga modul bagian dari M, dalam hal ini dimungkinkan untuk $i \neq j$, tetapi $M_i = M_j$. Himpunan I disebut himpunan indeks, dengan I dapat merupakan himpunan berhingga atau tidak berhingga.

Hasil jumlahan modul bagian didefinisikan dengan

$$\sum_{i\in I} M_i = \{\sum_{i\in I} x_i \,|x_i \in M_i, hampir\ semua\ x_i = 0\}.$$

Hasil jumlahan $\sum_{i\in I} x_i$ merupakan hasil tambah hingga, karena hampir semua $x_i = 0$, karena terdapat $x_i \neq 0$ tetapi hanya sebanyak berhingga.

Dengan demikian, untuk setiap hasil tambah $\sum_{i\in I} x_i$ dan $\sum_{i\in I} y_i$ dan unsur $\alpha \in R$ berlaku:

$$\sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in I} y_i = \sum_{i\in I}(x_i + y_i) \in \sum_{i\in I} M_i$$

$$\alpha \sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I}(\alpha x_i) \in \sum_{i\in I} M_i$$

Hubungan ini menjadikan $\sum_{i\in I} M_i$ suatu modul bagian dari M. Selanjutnya, jika ditambahkan syarat bahwa semua penulisan hasil jumlahan $\sum_{i\in I} x_i$ tunggal, artinya jika $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I} x_i{}'$ hanya dipenuhi oleh $x_i = x_i{}'$ untuk semua $i \in I$, maka $\sum_{i\in I} M_i$ disebut hasil jumlahan langsung dan dituliskan dengan $\bigoplus_{i\in I} M_i$. Jadi

$$\bigoplus_{i\in I} M_{i=}\{\sum_{i\in I} x_i \mid x_i \in M_i, tunggal, hampir\ semua\ x_i = 0\}$$

Untuk mempermudah pengertian jumlahan langsung, diberikan definisi sebagai berikut.

Definisi 2.4.2.1

Jika M modul atas ring R dan $M_1, M_2, \dots, M_n$ modul-modul bagian M, maka M disebut jumlahan langsung (*dirrect sum*) $M_1, M_2, \dots, M_n$ jika setiap elemen $m \in M$ dapat dibentuk secara tunggal sebagai $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ dimana $m_1 \in M_1$ $m_2 \in M_2$, ..., $m_n \in M_n$.

Teorema 2.4.2.3

Misalkan M modul atas ring R dan $M_1, M_2, \dots, M_n$ modul-modul bagian dari M sedemikian hingga

1) $M = M_1 + \dots + M_n$, dan
2) $untuk\ 1 \leq i \leq n$,

$M_i \cap (M_1 + \cdots + M_{i-1} + M_{i+1} + \cdots + M_n) = \{0\}$.

Maka M isomorfik dengan $M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$ ($M \cong M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$).

Bukti :

$$f : M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n \rightarrow M$$

didefinisikan dengan

$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ akan ditunjukan f suatu isomorfisma.

1) f suatu homomorfisma

Ambil sebarang $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in M_1 \oplus M_2 \oplus M_n$ dan $\alpha \in R$.

- $f\big((x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2 \dots, y_n)\big) = f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$

$$= (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \dots + (x_n + y_n)$$

$$= (x_1 + x_2 + \dots + x_n) + (y_1 + y_2 + \cdots + y_n)$$

$$= f(x_1, x_2, \dots, x_n) + f(y_1, y_2 \dots, y_n)$$

- $f(\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n)) = f((\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n))$

$$= \alpha x_1 + \alpha x_2 + \cdots + \alpha x_n$$

$$= \alpha(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

$$= \alpha f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

2) Menunjukan f Surjektif.

Diberikan $M = M_1 + \dots + M_n$ untuk $\forall x \in M, \exists x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \dots, x_n \in M_n$ dengan

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

$$= f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Untuk semua $x \in M, \exists$ $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$ sehingga

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

$$= x.$$

Dengan demikian f surjektif.

3) Menunjukan f fungsi yang injektif.

Ambil $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $(y_1, y_2 \dots, y_n) \in M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$. Misalkan

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(y_1, y_2 \dots, y_n)$$

akan ditunjukan $x_1, x_2, \dots, x_n = y_1, y_2 \dots, y_n$.

Karena $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(y_1, y_2 \dots, y_n)$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$$

$$x_1 - y_1 = y_2 - x_2 + y_3 - x_3 + \cdots + y_n - x_n$$

maka didapat $x_1 - y_1 \in M_1$ dan $y_2 - x_2 + y_3 - x_3 + \cdots + y_n - x_n \in M_2 + M_3 + \cdots + M_n$.

Karena $x_1 - y_1 = y_2 - x_2 + y_3 - x_3 + \cdots + y_n - x_n$, maka

$x_1 - y_1 \in M_1 \cap (M_2 + \cdots + M_n)$.

Diperoleh $M_1 \cap M_2 + M_3 + \cdots + M_n = \{0\}$, sehingga

$x_1 - y_1 = 0$

$x_1 = y_1$.

Dengan cara yang sama

$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$

$$x_2 - y_2 = y_1 - x_1 + y_3 - x_3 + \cdots + y_n - x_n.$$

$x_2 - y_2 \in M_2$ dan $y_1 - x_1 + y_3 - x_3 + \cdots + y_n - x_n \in M_1 + M_3 + \cdots + M_n$.

Karena $M_2 \cap (M_1 + M_3 + \cdots + M_n) = \{0\}$, maka

$x_2 - y_2 = 0$

$x_2 = y_2$.

Dengan cara yang sama dapat ditunjukan $x_n = y_n$.

Dari sini diperoleh $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2 \dots, y_n)$. Dengan demikian f merupakan fungsi yang isomorfis. Jadi $M \cong M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$.