ESSENTIALLY SMALL RIEMANN SUMS
FUNGSI TERINTEGRAL HENSTOCK-DUNFORD PADA [*a,b*]

Solikhin[1], Sumanto[2], Siti Khabibah[3]
[1,2,3]Jurusan Matematika FSM Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Semarang 50275
[1]*solikhin@live.undip.ac.id,* [2]*khabibah_ku@yahoo.co.id*

Abstract. In this paper we study Henstock-Dunford integral on [*a,b*]. We discuss some properties of the integrable. We shall define essentially small Riemann sums (ESRS) and show that it is necessary and sufficient condition for function to be Henstock-Dunford integral on [*a,b*].

Keywords : Henstock-Dunford integral and Essentially small Riemann sums

1. PENDAHULUAN

Generalisasi dari integral Riemann salah satunya yang menarik banyak dikaji adalah integral Henstock. Integral Henstock didefinisikan atas partisi Perron δ-fine pada interval tertutup $[a,b]$. Integral ini mencakup integral Riemann dan integral Lebesgue yang ekuivalen dengan integral McShane [1, 2].

Integral Henstock telah mengalami perkembangan baik dari segi teori maupun terapannya dalam bidang matematika sendiri atau bidang ilmu lain [3, 4, 5]. Berdasarkan kajian tentang integral Henstock banyak sifat-sifat yang telah diungkap baik dalam ruang real R [1, 2], ruang Banach [6] maupun ruang Euclide R^n [7]. Bahkan kajian tentang integral ini juga banyak dikombinasikan dengan integral lain, salah satunya adalah integral Henstock-Dunford [8].

Integral Dunford didefinisikan oleh fungsi terukur lemah pada ruang real R [6]. Diberikan X ruang Banach dan $X^* = \left\{ x^* \middle| x^* : X \to R \text{ linear kontinu} \right\}$ ruang dualnya (dual pertama) dengan $X^{**} = \left\{ x^{**} \middle| x^{**} : X^* \to R \text{ linear kontinu} \right\}$ dual kedua serta $[a,b] \subset R$. Fungsi terukur lemah $f : [a,b] \to X$ dikatakan terintegral Dunford pada $[a,b]$ jika untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi bernilai real $x^* f : [a,b] \to R$ terintegral Lebesgue pada $[a,b]$ dan untuk setiap himpunan terukur $A \subset [a,b]$ terdapat vektor $x^{**}_{(f,A)} \in X^{**}$ sehingga

$$x^{**}_{(f,A)}\left(x^*\right) = \left(H\right)\int_A x^* f = \left(H\right)\int_a^b x^* f \chi_A \,.$$

Integral Dunford kemudian diperluas ke dalam integral tipe Riemann, yaitu untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi bernilai real $x^* f : [a,b] \to R$ terintegral Henstock. Integral ini dinamakan integral Henstock-Dunford [8]. Integral jenis ini juga berhasil digeneralisasi ke dalam ruang Euclide R^n [9].

Berdasarkan hasil kajian integral Henstock-Dunford mengenai sifat-sifat sederhana dan fungsi primitifnya [8], dan kajian sifat-sifat lebih lanjut dari integral Henstock-Dunford pada ruang R, [6, 10] maka berdasarkan [11, 12] akan dikaji sifat Essentially small Riemann sums (ESRS) fungsi terintegral Henstock-Dunford pada $[a,b]$.

2. INTEGRAL HENSTOCK-DUNFORD PADA [*a,b*]

Pada tulisan ini, dibahas definisi integral Henstock-Dunford pada [*a,b*], sifat-sifat sederhana, dan fungsi primitifnya yang mengacu pada [8].

Definisi 2.1 [8] *Diberikan X ruang Banach dan X^* ruang dualnya (dual pertama) dengan X^{**} dual kedua , serta interval tertutup $[a,b] \subset R$. Fungsi $f : [a,b] \to X$ dikatakan terintegral*

Henstock-Dunford pada $[a,b]$ *jika untuk setiap* $x^* \in X^*$ *fungsi bernilai real* $x^* f:[a,b] \to R$ *terintegral Henstock pada* $[a,b]$ *dan untuk setiap interval tertutup* $A \subset [a,b]$ *terdapat vektor* $x^{**}_{(f,A)} \in X^{**}$ *sehingga*

$$x^{**}_{(f,A)}(x^*) = (H)\int_A x^* f\ .$$

Selanjutnya vektor $x^{**}_{(f,A)} \in X^{**}$ *di atas disebut nilai integral Henstock-Dunford pada* A *atas fungsi* f *dan ditulis*

$$x^{**}_{(f,A)} = (HD)\int_A f\ .$$

Jika f terintegral Henstock-Dunford pada $[a,b]$, ditulis $f \in HD[a,b]$.

Teorema 2.2 [8] *Jika* $f \in HD[a,b]$ *maka vektor* $x^{**}_{(f,A)} \in X^{**}$ *pada Definisi 2.1. adalah tunggal.*

Bukti:

Diberikan sebarang interval tertutup $A \subset [a,b]$. Andaikan terdapat vektor $x^{**}_{1(f,A)} \in X^{**}$ dan $x^{**}_{2(f,A)} \in X^{**}$ sehingga

$$x^{**}_{1(f,A)}(x^*) = (H)\int_A x^* f \text{ dan}$$

$$x^{**}_{2(f,A)}(x^*) = (H)\int_A x^* f\ .$$

Oleh karena itu

$$x^{**}_{1(f,A)}(x^*) - x^{**}_{2(f,A)}(x^*) = (H)\int_A x^* f - (H)\int_A x^* f$$

$$= 0,$$

untuk setiap $x^* \in X^*$.

Jadi $x^{**}_{1(f,A)} = x^{**}_{2(f,A)}$. ■

Teorema 2.3. [8] *Jika* $f \in HD[a,b]$ *maka* $f \in HD(A)$ *untuk setiap interval tertutup* $A \subset [a,b]$.

Bukti:

Jelas menurut definisi. ■

Jika $A = [c,d] \subset [a,b]$ maka simbol $\alpha(A)$ dalam tulisan ini dimaksudkan sebagai $\alpha(A) = |d-c|$,panjang interval tertutup A.

Contoh 2.4. Didefinisikan fungsi $f:[a,b] \to X$ oleh

$$f(x) = c\ ,$$

untuk setiap $x \in [a,b]$ dan suatu konstanta $c \in X$, maka f terintegral Henstock-Dunford pada $[a,b]$ dengan nilai integralnya adalah $c\alpha(A)$ untuk setiap interval tertutup $A \subset [a,b]$.

Diberikan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ dan $x^* \in X^*$ maka dapat ditemukan fungsi positif δ pada $[a,b]$ sehingga jika $A \subset [a,b]$ interval tertutup dan $\mathcal{D} = \{(D,x)\}$ sebarang partisi Perron $\delta-$fine pada A berlaku

$$\begin{aligned} \left|\mathcal{D}\sum \left(x^* f\right)(x)\alpha(D) - x^{**}_{(f,A)}(x^*)\right| &= \left|\mathcal{D}\sum x^* c\alpha(D) - x^* c\alpha(A)\right| \\ &= \left|x^* c\left(\mathcal{D}\sum \alpha(D) - \alpha(A)\right)\right| = 0 \\ &< \varepsilon\ . \end{aligned}$$

Jadi $x^* f$ terintegral Henstock pada $[a,b]$ dan untuk setiap interval tertutup $A \subset [a,b]$ di atas terdapat vektor $x^{**}_{(f,A)} \in X^{**}$ sehingga

$$\begin{aligned} x^{**}_{(f,A)}(x^*) &= (H)\int_A x^* f \\ &= (H)\int_A x^*(c) \\ &= x^* c\alpha(A) \end{aligned}$$

Jadi $f \in HD[a,b]$ dan nilai integralnya adalah $c\alpha(A)$ untuk setiap interval tertutup $A \subset [a,b]$. ■

Teorema 2.5 (Kriteria Cauchy) *Fungsi* $f \in HD[a,b]$ *jika dan hanya jika untuk setiap bilangan* $\varepsilon > 0$ *terdapat fungsi positif* δ *pada* $[a,b]$ *sehingga jika* $A \subset [a,b]$ *interval tertutup dan* $\mathcal{D} = \{(D,x)\}$ *dan* $\mathcal{P} = \{(P,y)\}$ *masing-masing partisi Perron* δ*-fine pada* A *berlaku*

$$\left|\mathcal{D}\sum x^* f(x)\alpha(D) - \mathcal{P}\sum x^* f(y)\alpha(P)\right| < \varepsilon$$

untuk setiap $x^* \in X^*$.

Bukti:

(Syarat Perlu) Diketahui $f \in HD[a,b]$. Jadi untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi $x^* f$ terintegral Henstock pada $[a,b]$ dan untuk setiap interval tertutup $A \subset [a,b]$ terdapat vektor $x^{**}_{(f,A)} \in X^{**}$ sehingga

$$x^{**}_{(f,A)}(x^*) = (H)\int_A x^* f .$$

Diberikan bilangan $\varepsilon > 0$ sebarang dan $x^* \in X^*$ maka terdapat fungsi positif δ pada $[a,b]$ sehingga untuk interval tertutup $A \subset [a,b]$ dan $\mathscr{D} = \{(D,x)\}$ dan $\mathscr{P} = \{(P,y)\}$ masing-masing partisi Perron δ-fine pada A berlaku

$$\left| x^{**}_{(f,A)}(x^*) - \mathscr{D}\sum x^* f(x)\alpha(D) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dan

$$\left| x^{**}_{(f,A)}(x^*) - \mathscr{P}\sum x^* f(y)\alpha(P) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dengan demikian diperoleh

$$\begin{aligned}
&\left| \mathscr{D}\sum x^* f(x)\alpha(D) - \mathscr{P}\sum x^* f(y)\alpha(P) \right| \\
&\le \left| \mathscr{D}\sum x^* f(x)\alpha(D) - x^{**}_{(f,A)}(x^*) \right| \\
&\quad + \left| x^{**}_{(f,A)}(x^*) - \mathscr{P}\sum x^* f(y)\alpha(P) \right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .
\end{aligned}$$

(Syarat cukup) Diberikan bilangan $\varepsilon > 0$ sebarang dan $x^* \in X^*$ maka terdapat fungsi positif δ pada $[a,b]$ sehingga untuk interval tertutup $A \subset [a,b]$ dan $\mathscr{D} = \{(D,x)\}$ dan $\mathscr{P} = \{(P,y)\}$ masing-masing partisi Perron δ-fine pada A berlaku

$$\left| \mathscr{D}\sum x^* f(x)\alpha(D) - \mathscr{P}\sum x^* f(y)\alpha(P) \right| < \varepsilon .$$

Diambil $\varepsilon = 1$ terdapat fungsi positif δ_1 pada $[a,b]$ dengan sifat di atas.

Diambil $\varepsilon = \frac{1}{2}$ terdapat fungsi positif δ_2 pada $[a,b]$ dengan $\delta_2 \le \delta_1$ dan memenuhi sifat di atas.

Diambil $\varepsilon = \frac{1}{n}$ terdapat fungsi positif δ_n pada $[a,b]$ dengan $\delta_n \le \delta_{n-1} \le ... \le \delta_2 \le \delta_1$ dan memenuhi sifat di atas.

Untuk $\forall\, n \in \mathbb{N}$ dan $x^* \in X^*$ didefinisikan

$$S_n = \mathscr{D}_n \sum x^* f(x)\alpha(D),$$

dengan jumlahan Riemann diambil atas partisi Perron δ_n – fine $\mathscr{D}_n = \{(D,x)\}$ pada A.

Diambil sebarang $m, n \in \mathbb{N}$ dengan $m \ge n$, maka untuk setiap partisi Perron δ_m – fine pada A merupakan partisi Perron δ_n – fine pada A.

Akibatnya untuk setiap partisi Perron δ_m – fine $\mathscr{D}_m = \{(D,x)\}$ pada A dan sebarang partisi Perron δ_n – fine $\mathscr{D}_n = \{(D,x)\}$ pada A berlaku

$$\left| S_m - S_n \right| = \left| \mathscr{D}_m \sum x^* f(x)\alpha(D) - \mathscr{D}_n \sum x^* f(x)\alpha(D) \right| < \frac{1}{n}.$$

Berdasarkan sifat Archimedean [13], diberikan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ maka terdapat bilangan asli n_0 sehingga $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Selanjutnya jika $m, n \ge n_0$ maka diperoleh

$$\left| S_m - S_n \right| < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Hal ini berarti $\{S_n\}$ barisan Cauchy di R. Karena R lengkap berarti untuk setiap barisan Cauchy di dalamnya adalah konvergen, yaitu untuk setiap $x^* \in X^*$ dan $A \subset [a,b]$ di atas terdapat bilangan $x^{**}_{(f,A)}(x^*) = S \in R$ sehingga $\lim_{n\to\infty} S_n = S$.

Dengan demikian untuk sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ di atas terdapat bilangan asli n_0^* dan jika $n \ge n_0^*$ berlaku

$$\left| S_n - S \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Diambil

$$\delta(x) = \min\left\{\delta_{n_0}(x), \delta_{n_0^*}(x) \,\middle|\, x \in [a,b]\right\}$$

Diperoleh δ fungsi positif pada $[a,b]$.

Selanjutnya untuk setiap $\mathcal{P} = \{(P,x)\}$ partisi Perron $\delta-$fine pada A berlaku

$$\left|\mathcal{P}\sum x^* f(x)\alpha(P) - S\right|$$
$$\leq \left|\mathcal{P}\sum x^* f(x)\alpha(P) - S_{n_0^*}\right| + \left|S_{n_0^*} - S\right|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Hal ini berarti untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi $x^* f$ terintegral Henstock pada $[a,b]$ dan terdapat vektor $x^{**}_{(f,A)} \in X^{**}$ sehingga

$$x^{**}_{(f,A)}(x^*) = S = (H)\int_A x^* f .$$

Dengan kata lain, $f \in HD[a,b]$. ■

Definisi 2.6 [8] *Diberikan $f \in HD[a,b]$ dan $\mathcal{J}(E)$ koleksi semua interval tertutup di dalam $[a,b]$. Fungsi $F : \mathcal{J}(E) \to X$ dengan rumus*

$$F(A) = x^{**}_{(f,A)} = (HD)\int_A f$$

dan $F(\varnothing) = 0$, untuk setiap $A \in \mathcal{J}(E)$ disebut fungsi primitif-HD fungsi f.

Contoh 2.7 Didefinisikan fungsi $f : [a,b] \to X$ oleh

$$f(x) = c ,$$

untuk setiap $x \in [a,b]$ dan suatu konstanta $c \in X$, maka untuk setiap interval tertutup $A \subset [a,b]$ fungsi primitif-HD fungsi f adalah $F(A) = c\alpha(A)$.

Berdasarkan Contoh 2.4 telah dibuktikan bahwa fungsi konstan $f(x) = c$ terintegral Henstock-Dunford pada $[a,b]$. Hal ini berarti untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ dan $x^* \in X^*$ terdapat fungsi positif δ pada $[a,b]$ dan jika $A \subset [a,b]$ interval tertutup terdapat vektor $x^{**}_{(f,A)} \in X^{**}$ sehingga

$$x^{**}_{(f,A)}(x^*) = (H)\int_A x^* f$$
$$= (H)\int_A x^*(c)$$
$$= x^* c\alpha(A).$$

Jadi untuk setiap $x^* \in X^*$ dan $A \subset [a,b]$ interval tertutup berlaku

$$x^{**}_{(f,A)}(x^*) = x^* c\alpha(A) .$$

Jadi $F(A) = x^{**}_{(f,A)} = \int_A f = c\alpha(A)$. ■

Berdasarkan Definisi 2.6. maka fungsi F merupakan fungsi aditif.

Akibat 2.8 [8] *Jika $f \in HD[a,b]$ dengan F sebagai primitif-HDnya dan $E_1, E_2, ..., E_p$ interval-interval tertutup di dalam $[a,b]$ yang tidak saling tumpang-tindih dan $[a,b] = \bigcup_{i=1}^{p} E_i$ maka*

$$F([a,b]) = \sum_{i=1}^{p} F(E_i) = \sum_{i=1}^{p} x^{**}_{(f,E_i)} .$$

Bukti:

Karena $f \in HD(E,\alpha)$ dengan F sebagai primitif-HDnya, $E = \bigcup_{i=1}^{p} E_i$ dengan $E_i^0 \cap E_j^0 = \varnothing$ untuk setiap $i \neq j$ maka diperoleh

$$F(E) = F\left(\bigcup_{i=1}^{p} E_i\right)$$
$$= x^{**}_{\left(f, \bigcup_{i=1}^{p} E_i, \alpha\right)}$$
$$= x^{**}_{(f,E_1,\alpha)} + x^{**}_{(f,E_2,\alpha)} + ... + x^{**}_{(f,E_p,\alpha)}$$
$$= F(E_1) + F(E_2) + ... + F(E_p)$$
$$= \sum_{i=1}^{p} F(E_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{p} x^{**}_{(f,E_i,\alpha)} . \blacksquare$$

Selanjutnya berdasarkan Definisi 2.1 dan Definisi 2.6 maka integral Henstock-Dunford pada $[a,b]$ dapat dinyatakan seperti dalam teorema berikut.

Teorema 2.9 [8] *Fungsi $f \in HD[a,b]$ jika dan hanya jika terdapat fungsi aditif F pada $[a,b]$ sehingga untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ dan $x^* \in X^*$ terdapat fungsi positif δ pada $[a,b]$ dan jika $A \subset [a,b]$ interval tertutup dan*

$\mathcal{D}=\{(D,x)\}$ *partisi Perron δ-fine pada A berlaku*

$$\left|\mathcal{D}\sum x^* f(x)\alpha(D)-x^*F(D)\right|<\varepsilon\,. \blacksquare$$

Teorema 2.10 (Lemma Henstock) *Fungsi $f\in HD[a,b]$ dengan fungsi primitif F,* yaitu *untuk setiap bilangan $\varepsilon>0$ dan $x^*\in X^*$ terdapat fungsi positif δ pada $[a,b]$ sehingga jika $A\subset[a,b]$ interval tertutup dan $\mathcal{D}=\{(D,x)\}$ partisi Perron δ-fine pada A berlaku*

$$\left|\mathcal{D}\sum x^* f(x)\alpha(D)-x^*F(D)\right|<\varepsilon$$

maka untuk setiap jumlahan bagian $\sum_1$ dari $\mathcal{D}\sum$ berlaku

$$\left|\mathcal{D}\sum\nolimits_1 x^* f(x)\alpha(D)-x^*F(D)\right|<\varepsilon\,. \blacksquare$$

3. ESSENTIALLY SMALL RIEMANN SUMS

Berikut ini akan ditunjukkan bahwa syarat perlu dan cukup suatu fungsi terintegral Henstock-Dunford pada [*a*,*b*], yaitu memenuhi sifat essentially small Riemann sums pada [*a*,*b*].

Sifat Essentially small Riemann sums menyatakan bahwa fungsi yang terintegral Henstock-Dunford pada $[a,b]$ dapat didekati dengan fungsi terintegral Lebesgue pada $[a,b]$. Sifat ini memperlemah syarat fungsi terintegral Lebesgue di dalam sifat functionally small Riemann sums yang merupakan fungsi non negatif [11,12].

Definisi 3.1 *Diberikan $f:[a,b]\to X$ fungsi terukur pada $[a,b]$. Fungsi f dikatakan mempunyai sifat essentially small Riemann sums pada $[a,b]$, ditulis $f\in ESRS[a,b]$, jika untuk setiap bilangan $\varepsilon>0$, $x^*\in X^*$, dan interval tertutup $A\subset[a,b]$ terdapat fungsi x^*g terintegral Lebesgue pada $[a,b]$ dan terdapat fungsi positif δ pada $[a,b]$ sehingga jika $\mathcal{D}=\{(D,x)\}$ partisi Perron δ-fine pada A berlaku*

$$\left|\mathcal{D}\sum_{x^*f(x)\neq x^*g(x)} x^* f(x)\alpha(D)\right|<\varepsilon\,.$$

Teorema 3.2 *Jika fungsi $f\in HD[a,b]$ maka $f\in ESRS[a,b]$.*

Bukti:

Diketahui $f\in HD[a,b]$ berarti untuk setiap bilangan $\varepsilon>0$, $x^*\in X^*$, dan interval tertutup $A\subset[a,b]$ terdapat fungsi positif δ pada $[a,b]$ sehingga jika $\mathcal{D}=\{(D,x)\}$ partisi Perron δ-fine pada A berlaku

$$\left|\mathcal{D}\sum x^* f(x)\alpha(D)-(H)\int_A x^*f\right|<\varepsilon\,.$$

Menurut Teorema [11] karena $f\in HD[a,b]$ maka $f\in FSRS[a,b]$, yaitu untuk setiap bilangan $\varepsilon>0$, $x^*\in X^*$, dan interval tertutup $A\subset[a,b]$ terdapat fungsi non negatif x^*h terintegral Lebesgue pada $[a,b]$ dan terdapat fungsi positif δ pada $[a,b]$ sehingga jika $\mathcal{D}=\{(D,x)\}$ partisi Perron δ-fine pada A berlaku

$$\left|\mathcal{D}\sum_{|x^*f(x)|>x^*h(x)} x^* f(x)\alpha(D)\right|<\varepsilon\,.$$

Didefinisikan fungsi x^*g oleh

$$x^*g(x)=\begin{cases} x^*f(x), \text{ jika } \left|x^*f(x)\right|\le x^*h(x)\\ 0 \qquad\quad, \text{ jika } \left|x^*f(x)\right|> x^*h(x)\end{cases}$$

untuk setiap $x\in[a,b]$.

Diperoleh fungsi x^*g terintegral Lebesgue pada $[a,b]$. Akibatnya untuk setiap bilangan $\varepsilon>0$, $x^*\in X^*$, dan interval tertutup $A\subset[a,b]$ di atas dan sebarang $\mathcal{D}=\{(D,x)\}$ partisi Perron δ-fine pada A berlaku

$$\left|\mathcal{D}\sum_{x^*f(x)\neq x^*g(x)} x^* f(x)\alpha(D)\right|$$

$$= \left| \mathcal{D} \sum_{x^* f(x) > x^* h(x)} x^* f(x)\alpha(D) \right| < \varepsilon \,.$$

Jadi $f \in ESRS[a,b]$. ■

Teorema 3.3 *Jika fungsi* $f \in ESRS[a,b]$ *maka* $f \in HD[a,b]$.

Bukti:

Diketahui $f \in ESRS[a,b]$, berarti untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$, $x^* \in X^*$, dan interval tertutup $A \subset [a,b]$ terdapat fungsi $x^* g$ terintegral Lebesgue pada $[a,b]$ dan terdapat fungsi positif δ_* pada $[a,b]$ sehingga jika $\mathcal{D}_* = \{(D,x)\}$ partisi Perron δ_*-fine pada A berlaku

$$\left| \mathcal{D}_* \sum_{x^* f(x) \neq x^* g(x)} x^* f(x)\alpha(D) \right| < \varepsilon \,.$$

Fungsi $x^* g$ terintegral Lebesgue pada $[a,b]$ maka terdapat fungsi positif δ^* pada $[a,b]$ sehingga jika $\mathcal{D}_1^*$ dan $\mathcal{D}_2^*$ partisi Perron δ^*-fine pada A berlaku

$$\left| \mathcal{D}_1^* \sum x^* f(x)\alpha(D) - \mathcal{D}_2^* \sum x^* f(x)\alpha(D) \right| < \varepsilon$$

untuk setiap $x^* \in X^*$ dan interval tertutup $A \subset [a,b]$ di atas.

Diambil fungsi positif δ pada $[a,b]$ dengan

$$\delta(x) = \min \{\delta_*(x), \delta^*(x)\},$$

untuk setiap $x \in [a,b]$.

Akibatnya, untuk sebarang $\mathcal{D}_1$ dan $\mathcal{D}_2$ partisi Perron δ-fine pada A berlaku

$$\begin{aligned}
&\left| \mathcal{D}_1 \sum x^* f(x)\alpha(D) - \mathcal{D}_2 \sum x^* f(x)\alpha(D) \right| \\
&\le \left| \mathcal{D}_1 \sum_{x^* f(x) \neq x^* g(x)} x^* f(x)\alpha(D) \right| \\
&+ \left| \mathcal{D}_2 \sum_{x^* f(x) \neq x^* g(x)} x^* f(x)\alpha(D) \right| \\
&+ \left| \mathcal{D}_1 \sum_{x^* f(x) = x^* g(x)} x^* f(x)\alpha(D) \right| \\
&+ \left| \mathcal{D}_2 \sum_{x^* f(x) = x^* g(x)} x^* f(x)\alpha(D) \right| \\
&< \varepsilon + \varepsilon \\
&+ \left| \mathcal{D}_1 \sum x^* g(x)\alpha(D) - \mathcal{D}_2 \sum x^* g(x)\alpha(D) \right| \\
&< 3\varepsilon \,.
\end{aligned}$$

Menurut Kriteria Cauchy, $f \in HD[a,b]$.

Jadi $f \in HD[a,b]$. ■

Akibat 3.4 *Fungsi* $f \in HD[a,b]$ *jika dan hanya jika* $f \in ESRS[a,b]$. ■

Akibat 3.4 merupakan syarat perlu dan cukup suatu fungsi terukur terintegral Henstock-Dunford pada [*a*,*b*] , yaitu memenuhi sifat essentially small Riemann sums pada [*a*,*b*].

4. PENUTUP

Berdasarkan hasil pembahasan dapat disimpulkan bahwa syarat perlu dan cukup suatu fungsi terukur terintegral Henstock-Dunford pada [*a*,*b*] adalah fungsi tersebut bersifat essentially small Riemann sums pada [*a*,*b*] .

5. DAFTAR PUSTAKA

[1] Gordon, R.A., (1994), *The Integral of lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, Mathematical Society, USA.

[2] Lee P.Y., (1989), *Lanzhou Lectures on Henstock Integration*, World Scientific, Singapore.

[3] Boccuto, A., Skvortsov, A.V., (2004), Henstock-Kurzweil Type Integration of Riesz-Space-Valued Functions and Applications to Walsh Series, *Real Analysis Echange*, 29(1): 419-439.

[4] Heikkila, S., (2011), Monotone Convergence Theorems for Henstock-Kurzweil Integrable Functions and Applications, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 377(1): 286-295.

[5] Indrati, Ch.R., Budi Surodjo, (2000), *Aplikasi Integral Henstock-Kurzweil pada Medan Vektor*, Lembaga Penelitian UGM, Yogyakarta.

[6] Schwabik, S., Guoju, Ye. (2004), *Topics in Banach Space Integration*, Manuscrip in Preparation.

[7] Indrati, Ch. R. (2002), *Integral Henstock-Kurzweil di dalam Ruang Euclide Berdimensi-n, Disertasi*, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.

[8] Guoju, Ye., Tianqing, An., (2001), On Henstock-Dunford and Henstock-Pettis Integrals, *IJMMS*, 25(7): 467-478.

[9] Saifullah. (2003), *Integral Henstock-Dunford pada Ruang Euclide* $\mathbb{R}^n$, Tesis, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.

[10] Solikhin, Sumanto, Khabibah, (2013), Locally dan Globally Small Riemann Sums Fungsi Terintegral Henstock-Dunford pada [a,b], *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika*, 9 November 2013, A.8 halaman 55-64, ISBN 978–979-16353-9-4.

[11] Indrati, Ch.R., dkk. (2003), Convergence Theorems for The Henstock Integral Involving Small Riemann Sums, *Real Analysis Echange*, 29(1): 481-488.

[12] Solikhin, Sumanto, Khabibah, (2012), Functionally Small Riemann Sums Fungsi Terintegral Henstock-Dunford pada [a,b], *Jurnal Sains dan Matematika, 20(3):* -

[13] Bartle, R. & Sherbert, D. (1982), *Introduction to Real Analysis*, John Wiley & Sons, New York.