PERLUASAN HARNACK DAN SIFAT CAUCHY INTEGRAL HENSTOCK-DUNFORD PADA RUANG EUCLIDE $\mathbb{R}^n$

Solikhin
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP
Jl. Prof. H. Soedarto, S. H, Tembalang, Semarang
e-mail : soli_erf@yahoo.com

Abstract. In this paper we study Henstock-Dunford integral on the Euclidean space $\mathbb{R}^n$. We discuss some properties of the integrable. We prove the Harnack Extension theorems and the Cauchy extension theorems for Henstock-Dunford integral on the Euclidean space $\mathbb{R}^n$.

Keyword : Henstock-Dunford integral, Harnack extension and Cauchy extension.

1. PENDAHULUAN

Sejak diperkenalkan oleh Ralph Henstock pada tahun 1960-an, yang merupakan pengintlakan dari integral Riemann, integral Henstock telah mengalami perkembangan baik dari segi teori maupun aplikasinya [1], [4], [6]. berdasarkan kajian tentang integral Henstock banyak sifat-sifat yang telah diungkap baik dalam ruang real $\mathbb{R}$ [2], [7] maupun ruang Euclide $\mathbb{R}^n$ [5].

Dunford mendefinisikan integralnya pada fungsi terukur lemah f dari $\mathbb{R}^n$ ke ruang Banach X (X^* ruang dualnya) dan untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi bernilai real $x^* f$ terintegral Lebesgue. Integral ini dikenal dengan integral Dunford [10]. Kajian integral Dunford telah diperluas ke dalam integral tipe Riemann (integral Henstock) pada ruang $\mathbb{R}$, yaitu dengan mendefinisikan fungsi bernilai realnya $x^* f$ terintegral Henstock. Hasilnya dikenal dengan integral Henstock-Dunford pada ruang $\mathbb{R}$ [3]. Penelitian selanjutnya, integral Henstock-Dunford pada ruang $\mathbb{R}$ digeneralisasi ke dalam ruang Euclide $\mathbb{R}^n$ [9]. Pembahasannya meliputi sifat-sifat sederhana dan beberapa teorema kekonvergenan [9].

Berdasarkan uraian tersebut, penulis akan meneliti sifat-sifat lebih lanjut dari integral Henstock-Dunford pada ruang Euclide $\mathbb{R}^n$. Sifat-sifat ini digeneralisasi dari integral Henstock pada ruang real $\mathbb{R}$.

2. INTEGRAL HENSTOCK-DUNFORD PADA RUANG EUCLIDE $\mathbb{R}^n$

Pada tulisan ini, dibahas definisi integral Henstock-Dunford pada ruang Euclide $\mathbb{R}^n$, sifat-sifat sederhana, dan fungsi primitifnya mengacu pada [9].

Definisi 2.1 [9] *Diberikan X ruang Banach dan X^* ruang dualnya, volume-α pada $\mathbb{R}^n$ dan sel $E \subset \mathbb{R}^n$. Fungsi $f : E \to X$ dikatakan terintegral Henstock -Dunford pada E jika untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi $x^* f$ terintegral Henstock pada E dan untuk setiap sel $A \subset E$ terdapat vektor $x^{**}_{(f,A,\alpha)} \in X^{**}$ sehingga*

$$x^{**}_{(f,A,\alpha)}\left(x^*\right) = (H)\int_A x^* f \, .$$

Selanjutnya vektor $x^{**}_{(f,A,\alpha)} \in X^{**}$ di atas disebut nilai integral Henstock-Dunford fungsi f pada A dan ditulis

$$x^{**}_{(f,A,\alpha)} = (HD)\int_A f \, .$$

Jika f terintegral Henstock-Dunford pada E, ditulis $f \in HD(E,\alpha)$.

Teorema 2.2 [9] *Jika $f \in HD(E,\alpha)$ maka $f \in HD(A,\alpha)$ untuk setiap sel bagian $A \subset E$.*

Bukti :

Jelas berdasarkan definisi. ■

Definisi 2.3 [9] *Diberikan* $f \in HD(E,\alpha)$ *dan* $\mathcal{J}(E)$ *koleksi semua sel bagian di dalam* E. *Fungsi* $F : \mathcal{J}(E) \to X$ *dengan rumus*

$$F(A) = x^{**}_{(f,A,\alpha)} = (HD)\int_A f$$

dan $F(\varnothing) = 0$, *untuk setiap* $A \in \mathcal{J}(E)$ *disebut fungsi primitif-HD fungsi* f.

Berdasarkan Definisi 2.3 maka fungsi F merupakan fungsi aditif.

Teorema 2.4 [9] *Jika* $f \in HD(E,\alpha)$ *dengan* F *sebagai primitif-HDnya maka* F *merupakan fungsi aditif pada* E.

Bukti :

Fungsi $f \in HD(E,\alpha)$ berarti untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi $x^* f$ terintegral Henstock pada E dan untuk setiap sel $A \subset E$ dan sel $B \subset E$ dengan $\mu_\alpha(A \cap B) = 0$ berturut-turut terdapat vektor $x^{**}_{(f,A,\alpha)} \in X^{**}$ dan $x^{**}_{(f,B,\alpha)} \in X^{**}$ sehingga

$$x^{**}_{(f,A,\alpha)}(x^*) = (H)\int_A x^* f \quad \text{dan}$$

$$x^{**}_{(f,B,\alpha)}(x^*) = (H)\int_B x^* f .$$

Dengan demikian diperoleh

$$\begin{aligned} x^{**}_{(f,A,\alpha)}(x^*) + x^{**}_{(f,B,\alpha)}(x^*) &= \\ &(H)\int_A x^* f + (H)\int_B x^* f \\ &= (H)\int_{A\cup B} x^* f \\ &= x^{**}_{(f,A\cup B,\alpha)}(x^*) \end{aligned}$$

untuk setiap $x^* \in X^*$.

Jadi

$$x^{**}_{(f,A,\alpha)} + x^{**}_{(f,B,\alpha)} = x^{**}_{(f,A\cup B,\alpha)} \quad \text{atau}$$

$F(A) + F(B) = F(A \cup B)$. ■

Akibat 2.5 [9] *Jika* $f \in HD(E,\alpha)$ *dengan* F *sebagai primitif-HDnya dan* $E_1, E_2, ..., E_p$ *sel-sel di dalam* E *yang tidak saling tumpang-tindih dan* $E = \bigcup_{i=1}^{p} E_i$ *maka*

$$F(E) = \sum_{i=1}^{p} F(E_i) = \sum_{i=1}^{p} x^{**}_{(f,E_i,\alpha)} .$$

Bukti :

Karena $f \in HD(E,\alpha)$ dengan F sebagai primitif-HDnya, $E = \bigcup_{i=1}^{p} E_i$ dengan $E_i^0 \cap E_j^0 = \varnothing$ untuk setiap $i \neq j$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} F(E) &= F\left(\bigcup_{i=1}^{p} E_i\right) \\ &= x^{**}_{\left(f,\bigcup_{i=1}^{p} E_i,\alpha\right)} \\ &= x^{**}_{(f,E_1,\alpha)} + x^{**}_{(f,E_2,\alpha)} + ... + x^{**}_{(f,E_p,\alpha)} \\ &= F(E_1) + F(E_2) + ... + F(E_p) \\ &= \sum_{i=1}^{p} F(E_i) \\ &= \sum_{i=1}^{p} x^{**}_{(f,E_i,\alpha)} . \ ■ \end{aligned}$$

Selanjutnya berdasarkan Definisi 2.1 maka integral Henstock-Dunford pada E dapat dinyatakan seperti dalam teorema berikut.

Teorema 2.6 [9] *Fungsi* $f \in HD(E,\alpha)$ *jika dan hanya jika terdapat fungsi aditif* $F : \mathcal{J}(E) \to X$ *sehingga untuk setiap bilangan* $\varepsilon > 0$ *dan* $x^* \in X^*$ *terdapat fungsi positif* δ *pada* E *sehingga jika* $A \subset E$ *sel dan* $\mathcal{D} = \{(D_i, \bar{x}_i) : i = 1,2,...,p\}$ *partisi Perron* δ*-fine pada* A *berlaku*

$$\left|\sum_{i=1}^{p} x^*\left(f(\bar{x}_i)\alpha(D_i) - F(D_i)\right)\right| < \varepsilon \ \text{atau}$$

$$\left|\sum_{i=1}^{p} x^* f(\bar{x}_i)\alpha(D_i) - x^* F(D_i)\right| < \varepsilon . \ ■$$

3. PERLUASAN HARNACK DAN SIFAT CAUCHY

Berikut ini dibahas perluasan Harnack dan Sifat Cauchy integral Henstock-Dunford pada ruang Euclide $\mathbb{R}^n$.

Teorema 3.1 [3], [5], [8] (Ekstensi Harnack) *Diberikan* X *ruang Banach dan* X^* *ruang dualnya, volume-*α *pada*

$\mathbb{R}^n$, *sel* $E \subset \mathbb{R}^n$, *dan fungsi* $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. *Himpunan* G *merupakan himpunan tertutup di dalam* E *dan* $\{E_i\}$ $i = 1, 2, 3, ...$ *barisan himpunan sederhana yang tidak saling tumpang-tindih dengan* $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = E - G$. *Jika* $f \in HD(G, \alpha)$ *dan* $f \in HD(E_i, \alpha)$ *untuk setiap* $i \in \mathbb{N}$ *dengan*

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} (H) \int_{E_i} x^* f \right| < \infty$$

untuk setiap $x^* \in X^*$ *maka* $f \in HD(E, \alpha)$ *dan*

$$(HD) \int_A f = (HD) \int_E f \chi_G + \sum_{i=1}^{\infty} (HD) \int_{E_i} f .$$

Bukti :

Diberikan bilangan $\varepsilon > 0$ sebarang. Karena $f \in HD(G, \alpha)$ maka terdapat fungsi positif δ_0 pada G sehingga untuk setiap partisi Perron δ_0-fine $\mathcal{D}_0 = \{(D, \overline{x})\}$ pada G berlaku

$$\left| (\mathcal{D}_0) \sum x^* f(\overline{x}) \alpha(D) - (H) \int_G x^* f \right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

untuk setiap $x^* \in X^*$.

Karena $f \in HD(E_i, \alpha)$ untuk setiap i maka untuk bilangan $\varepsilon > 0$ di atas dan $x^* \in X^*$ terdapat fungsi positif δ_i pada E_i sehingga untuk setiap partisi Perron δ_i-fine $\mathcal{D}_i = \{(D, \overline{x})\}$ pada E_i berlaku

$$\left| (\mathcal{D}_i) \sum x^* f(\overline{x}) \alpha(D) - (H) \int_{E_i} x^* f \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Kemudian, karena diketahui

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} (H) \int_{E_i} x^* f \right| < \infty$$

maka untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ di atas terdapat bilangan asli n sehingga untuk $i > N$ berlaku

$$\left| \sum_{i>N} (H) \int_{E_i} x^* f \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dibentuk fungsi positif δ pada E dengan rumus

$$\delta(\overline{x}) = \begin{cases} \min\{\delta_0(\overline{x}), \delta_1(\overline{x}), ..., \delta_N(\overline{x})\}, \\ \qquad \overline{x} \in G \cup \left(\bigcup_{i=1}^{N} E_i \right) \\ \min\{\delta_0(\overline{x}), \delta_{N+k}(\overline{x})\}, \\ \qquad \overline{x} \in \bigcup_{i=N+k}^{\infty} E_i,\ k = 1, 2, ... \end{cases}$$

Dengan demikian untuk setiap partisi Perron δ-fine $\mathcal{D} = \{(D, \overline{x})\}$ pada E diperoleh

$$\begin{aligned} &\left| (\mathcal{D}) \sum x^* f(\overline{x}) \alpha(D) - \left((H) \int_G x^* f + \sum_{i>N} (H) \int_{E_i} x^* f \right) \right| \\ &\leq \left| (\mathcal{D}_0) \sum x^* f(\overline{x}) \alpha(D) - (H) \int_{E_i} x^* f \right| \\ &+ \left| \sum_{i=1}^{n_0} (\mathcal{D}_i) \sum x^* f(\overline{x}) \alpha(D) - \sum_{i<N} (H) \int_{E_i} x^* f \right| \\ &+ \left| \sum_{i>n_0} (H) \int_{E_i} x^* f \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon . \end{aligned}$$

Hal ini berarti $x^* f$ terintegral Henstock pada E dan untuk setiap sel $A \subset E$ terdapat vektor $x^{**}_{(f,A,\alpha)} \in X^{**}$ sehingga

$$x^{**}_{(f,A,\alpha)}(x^*) = (H) \int_G x^* f + \sum_{i=1}^{\infty} (H) \int_{E_i} x^* f .$$

Dengan kata lain $f \in HD(E, \alpha)$ dan

$$x^{**}_{(f,A,\alpha)}(x^*) = (H) \int_G x^* f + \sum_{i=1}^{\infty} (H) \int_{E_i} x^* f$$

Untuk setiap $x^* \in X^*$.

Jadi untuk setiap $x^* \in X^*$ diperoleh

$$x^{**}_{(f,A,\alpha)} = (HD) \int_E f \chi_G + \sum_{i=1}^{\infty} (HD) \int_{E_i} f .$$

Ekuivalen

$$\left(HD\right)\int_{A} f = \left(HD\right)\int_{E} f\chi_G + \sum_{i=1}^{\infty}\left(HD\right)\int_{E_i} f . \blacksquare$$

Teorema 3.2 [5], [8] (Sifat Cauchy) *Diberikan X ruang Banach dan X^* ruang dualnya, volume-α pada $\mathbb{R}^n$, dan sel $E \subset \mathbb{R}^n$. Jika $f \in HD(E^{'},\alpha)$ untuk setiap $E^{'} \subset E^0$ dan*

$$\lim_{E^{'}\to E}\left(HD\right)\int_{E^{'}} f = \sum_{i=1}^{\infty}\left(HD\right)\int_{E_i} f$$

ada maka $f \in HD(E,\alpha)$ dan

$$\left(HD\right)\int_{A} f = \sum_{i=1}^{\infty}\left(HD\right)\int_{E_i} f .$$

Bukti :

Diberikan bilangan $\varepsilon > 0$ sebarang dan $x^* \in X^*$. Karena $f \in HD(E^{'},\alpha)$ untuk setiap $E^{'} \subset E^0$ maka terdapat fungsi positif $\delta^{'}$ pada $E^{'}$ sehingga untuk setiap partisi Perron $\delta^{'}$-fine $\mathcal{D}^{'} = \left\{\left(D,\bar{x}\right)\right\}$ pada $E^{'}$ berlaku

$$\left|\left(\mathcal{D}^{'}\right)\sum x^* f(\bar{x})\alpha(D) - \left(H\right)\int_{E^{'}} x^* f\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Diketahui bahwa

$$\lim_{E^{'}\to E}\left(HD\right)\int_{E^{'}} f = \sum_{i=1}^{\infty}\left(HD\right)\int_{E_i} f$$

ada, berarti untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ dan $x^* \in X^*$ di atas terdapat bilangan $\eta > 0$ sehingga untuk $E^{'} \subset E^0$ dengan $\alpha\left(E - E^{'}\right) < \eta$ berlaku

$$\left|\left(H\right)\int_{E^{'}} x^* f - \sum_{i=1}^{\infty}\left(H\right)\int_{E_i} x^* f\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Untuk sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ dan $x^* \in X^*$ di atas, dibentuk fungsi δ pada E dengan rumus

$$\delta(\bar{x}) = \begin{cases} \min\left\{\delta^{'}(\bar{x})\right\}, & \bar{x} \in E^{'} \\ \min\left\{\delta^{'}(\bar{x}), \dfrac{\varepsilon}{3\left|x^* f(\bar{x})\right| + 1}\right\}, & \bar{x} \notin E^{'} \end{cases}$$

.

Diambil sebarang partisi Perron δ-fine $\mathcal{D} = \mathcal{D}^{'} \cup \mathcal{D}^{''} = \left\{\left(D,\bar{x}\right)\right\}$ pada E, dengan $\mathcal{D}^{'}$ dan $\mathcal{D}^{''}$ berturut-turut partisi yang terkait dengan $\bar{x} \in E^{'}$ dan $\bar{x} \notin E^{'}$.
Dengan demikian diperoleh

$$\left|\left(\mathcal{D}\right)\sum x^* f(\bar{x})\alpha(D) - \sum_{i=1}^{\infty}\left(H\right)\int_{E_i} x^* f\right| =$$

$$\left|\left(\mathcal{D}^{'} \cup \mathcal{D}^{''}\right)\sum x^* f(\bar{x})\alpha(D) - \sum_{i=1}^{\infty}\left(H\right)\int_{E_i} x^* f\right|$$

$$\leq \left|\left(\mathcal{D}^{'}\right)\sum_{\bar{x}\in E^{'}} x^* f(\bar{x})\alpha(D) - \left(H\right)\int_{E^{'}} x^* f\right|$$

$$+\left|\left(H\right)\int_{E^{'}} x^* f - \sum_{i=1}^{\infty}\left(H\right)\int_{E_i} x^* f\right|$$

$$+\left|\left(\mathcal{D}^{''}\right)\sum_{\bar{x}\notin E^{'}} x^* f(\bar{x})\alpha(D)\right|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \left(\mathcal{D}^{''}\right)\left|x^* f(\bar{x})\right|\sum_{\bar{x}\notin E^{'}}\alpha(D)$$

$$\leq \frac{2\varepsilon}{3} + \left|x^* f(\bar{x})\right|\frac{\varepsilon}{3\left|x^* f(\bar{x})\right| + 1}$$

$$< \varepsilon .$$

Hal ini berarti $x^* f$ terintegral Henstock pada E dan untuk setiap sel $A \subset E$ terdapat vektor $x^{**}_{(f,A,\alpha)} \in X^{**}$ sehingga

$$x^{**}_{(f,A,\alpha)}(x^*) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(H\right)\int_{E_i} x^* f .$$

Jadi $f \in HD(E,\alpha)$ dan

$$\left(H\right)\int_{A} x^* f = \sum_{i=1}^{\infty}\left(H\right)\int_{E_i} x^* f .$$

Jadi untuk setiap $x^* \in X^*$ diperoleh

$$\left(HD\right)\int_{A} f = \sum_{i=1}^{\infty}\left(HD\right)\int_{E_i} f . \blacksquare$$

4. PENUTUP

Dari pembahasan di muka diperoleh kesimpulan bahwa perluasan Harnack dan sifat Cauchy pada integral Henstock dapat digeneralisasi untuk integral Henstock-Dunford pada ruang Euclide $\mathbb{R}^n$. Untuk penelitian lebih lanjut, dapat dikaji mengenai sifat-sifat smal Riemann sums fungsi terintegral Henstock-Dunford pada ruang Euclide $\mathbb{R}^n$.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1] Boccuto, A., Skvortsov, A.V. (2004), Henstock-Kurzweil Type Integration of Riesz-Space-Valued Functions and Applications to Walsh Series, *Real Analysis Echange*, 29(1): 419-439.

[2] Gordon, R.A. (1994), *The Integral of lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock,* Mathematical Society, USA.

[3] Guoju, Ye., Tianqing, An. (2001), On Henstock-Dunford and Henstock-Pettis Integrals, *IJMMS*, 25(7): 467-478.

[4] Heikkila, S. (2011), Monotone Convergence Theorems for Henstock-Kurzweil Integrable Functions and Applications, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 377(1): 286-295.

[5] Indrati, Ch. R. (2002), *Integral Henstock-Kurzweil di dalam Ruang Euclide Berdimensi-n, Disertasi*, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.

[6] Indrati, Ch.R., Surodjo, Budi. (2000), *Aplikasi Integral Henstock-Kurzweil pada Medan Vektor*, Lembaga Penelitian UGM, Yogyakarta.

[7] Lee P.Y. (1989), *Lanzhou Lectures on Henstock Integration*, World Scientific, Singapore.

[8] Rahman, Hairur. (2005), *Integral Henstock-Pettis pada ruang Euclide* $\mathbb{R}^n$, Tesis, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.

[9] Saifullah. (2003), *Integral Henstock-Dunford pada Ruang Euclide* $\mathbb{R}^n$, Tesis, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.

[10] Schwabik, S., Guoju, Ye. (2004), *Topics in Banach Space Integration*, Manuscrip in Preparation.