MODUL BERSUPLEMEN UTAMA SEBAGAI GENERALISASI DARI MODUL BERSUPLEMEN

Fitriani
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung
Jl. Prof.Dr. Soemantri Brojonegoro No.1 Bandar Lampung

Abstract An *R*-module *M* is called supplemented if every submodule of *M* has a supplement in M. Principally supplemented modules are defined as generalizations of lifting, principally lifting and supplemented modules. In this paper, we will characterize principally supplemented modules as a generalization of supplemented module respect to duo module and distributive module.

Keywords: supplemented module, principally supplemented module, duo module, distributive module.

1. PENDAHULUAN

Modul merupakan salah satu struktur aljabar yang merupakan perumuman dari ruang vektor. Salah satu jenis modul adalah modul bersuplemen. Modul bersuplemen telah didiskusikan oleh banyak peneliti dalam berbagai literatur. Modul ini mempunyai peranan penting, diantaranya adalah dalam karakterisasi modul *semiperfect* dan ring.

Dalam kaitannya dengan penentuan amplop proyektif, Azumaya [1] telah memperkenalkan generalisasi amplop proyektif dalam karakterisasi modul *semiperfect.*

Selanjutnya, pada tahun 2005, Bilhan menginvestigasi salah satu jenis modul bersuplemen, yaitu *amply fws* (*finitely weak supplemented*) *module* dan sifat-sifatnya. Selain itu, Wang and Ding [2] pada tahun 2006 mengemukakan generalisasi modul bersuplemen untuk menentukan karakterisasi modul *semiperfect* dan ring.

Dalam perkembangannya, modul bersuplemen utama adalah salah satu jenis modul bersuplemen yang merupakan perumuman dari *lifting modules*, *principally lifting modules* dan modul bersuplemen. Acar and Harmaci [3] pada tahun 2010 telah menginvestigasi beberapa sifat penting dari modul ini. Selain itu, mereka juga menghasilkan karakterisasi baru dari ring *semiperfect* menggunakan modul bersuplemen utama.

Dalam penelitian ini akan diuraikan beberapa sifat dari modul bersuplemen yang masih berlaku pada modul bersuplemen utama terkait dengan modul duo dan modul distributif.Sifat dan karakterisasi modul bersuplemen dikaji dari [4] dan [5], sedangkan beberapa sifat dari modul bersuplemen utama dikaji dari [3].

2. PEMBAHASAN

2.1 Modul Bersuplemen

Diberikan R- modul M. Suplemen dari suatu submodul M didefinisikan sebagai berikut. Misalkan M adalah R-modul dan U, V submodul M. Submodul V dikatakan suplemen dari U di M jika V minimal terhadap himpunan submodul-submodul L dari M yang memenuhi $U + L = M$. Jadi, $V = \min \{L \mid U + L = M\}$ [4]. Dengan kata lain, V adalah suplemen dari U di M jika $U + V = M$ dan untuk setiap L submodul M dengan $U + L = M$, berakibat $V \subseteq L$.

Misalkan M adalah R-modul dan S submodul M. Submodul kecil di R-modul M didefinisikan sebagai berikut. Submodul S dikatakan submodul kecil di M, ditulis $S << M$ dengan $M \neq S + T$, untuk setiap submodul sejati T dari M [5]. Sifat dan karakterisasi suplemen suatu modul dalam kaitannya dengan submodul kecil diberikan dalam proposisi berikut.

Proposisi 2.1[5] *Diberikan U, V merupakan submodul dari R-modul M. Submodul V merupakan suplemen dari U di M jika dan hanya jika U + V = M dan $U \cap V$ merupakan submodul kecil di V (yaitu $U \cap V \ll V$.*

Bukti:

Diketahui V suplemen dari U di M dan $X \subseteq V$ yang memenuhi $(U \cap V) + X = V$.

Akan ditunjukkan $X = V$.

Perhatikan bahwa

$M = V + U = (U \cap V) + X + U = U + X$.

Berdasarkan keminimalan V, diperoleh $V \subseteq X$. Karena X merupakan submodul V, maka $X = V$. Akibatnya, $U \cap V$ merupakan submodul kecil di V. Sebaliknya, diketahui $U + V = M$ dan $U \cap V \ll V$. Akan ditunjukkan V merupakan suplemen dari U di M, yaitu V minimal terhadap submodul-submodul L dari M yang meme nuhi $U + L = M$. Misal $Y \subseteq V$ yang memenuhi $U + Y = M$. Akibatnya,

$V = M \cap V = (U + Y) \cap V = (U \cap V) + Y$.

Berdasarkan hipotesis, $U \cap V \ll V$. Oleh karena itu, diperoleh $Y = V$. Jadi, terbukti bahwa V merupakan suplemen U di M. ■

Karakterisasi lain dari suplemen suatu modul disajikan dalam proposisi berikut.

Proposisi 2.2 [5] *Misalkan M adalah R-modul dan $X \ll M$. Jika $X \subseteq A \subseteq M$ dan A suplemen di M, maka $X \ll A$.*

Bukti:

Misalkan $X + Y = A$ untuk suatu Y submodul dari A. Karena A suplemen di M, maka terdapat K submodul dari M yang memenuhi $M = K + A$ dan $K \cap A \ll A$. Jadi, $M = K + A = K + X + Y$. Karena $X \ll M$, maka diperoleh $K + Y = M$. Dengan menggunakan hukum modular, diperoleh $A = (A \cap K) + Y$ yang berakibat $A = Y$. Oleh karena itu, terbukti bahwa $X \ll A$. ■

Pada $\mathbf{Z}$ yang dipandang sebagai $\mathbf{Z}$-modul, setiap submodul sejati yang tak nol tidak mempunyai suplemen. Dapat diperhatikan bahwa $U + V \neq \mathbf{Z}$, untuk setiap U dan V submodul sejati dari $\mathbf{Z}$ sebagai $\mathbf{Z}$-modul. Hal ini mendasari pendefinisian suatu modul yang setiap submodul sejatinya yang tak nol mempunyai suplemen di dalam modul yang dinamakan dengan modul bersuplemen. Salah satu contoh dari modul bersuplemen adalah modul semi sederhana.

Jumlahan berhingga dari modul bersuplemen juga merupakan modul bersuplemen. Sebelum membuktikan hal tersebut, akan dibuktikan Lemma berikut ini.

Lemma 2.3 [5] *Misalkan M adalah R-modul, M_1, U submodul di M, dengan M_1 merupakan modul bersuplemen. Jika $M_1 + U$ memiliki suplemen di M, maka U juga memiliki suplemen di M.*

Bukti:

Misalkan X adalah suplemen dari $M_1 + U$ di M. Oleh karena itu, $M_1 + U + X = M$ dan $(M_1 + U) \cap X \ll X$. Selanjutnya, karena $(X + U) \cap M_1$ merupakan submodul di M_1 dan diketahui bahwa M_1 merupakan modul bersuplemen, maka $(X + U) \cap M_1$ memiliki suplemen di M_1, katakan Y. Oleh karena itu,

$$[(X + U) \cap M_1] + Y = M_1 \text{dan}$$
$$[(X + U) \cap M_1] \cap Y \ll Y.$$

Akan ditunjukkan Y merupakan suplemen dari $X + U$ di M, yaitu

$$X + U + Y = M \text{dan } Y \cap (X + U) \ll Y.$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} M &= X + U + M_1 \\ &= X + U + [(X + U) \cap M_1] + Y \\ &= X + U + Y. \end{aligned}$$

Jadi, diperoleh $X + U + Y = M$.

Selanjutnya,

$Y \cap (X + U) = Y \cap [(X + U) \cap M_1] \ll Y$.

Oleh karena itu, Y merupakan suplemen dari $X + U$ di M.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $X + Y$ merupakan suplemen dari Udi M. Sebelumnya telah diuraikan bahwa $X + U + Y = M$.

Perhatikan bahwa

$$(X + Y) \cap U \subset [X \cap (Y + U)] + [Y \cap (X + U)]$$

Hal ini berakibat $(X+Y)\cap U \ll X+Y$. Jadi, terbukti U memiliki suplemen di M, yaitu $X+Y$. ■

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa jumlahan dari modul bersuplemen merupakan modul bersuplemen dalam Teorema berikut.

Teorema 2.4 [5] *Diberikan M adalah R-modul. Jika $M = M_1 + M_2$, dengan M_1 dan M_2 merupakan modul bersuplemen, maka M merupakan modul bersuplemen.*

Bukti:

Diketahui $M = M_1 + M_2$, dengan M_1 dan M_2 merupakan modul bersuplemen. Akan ditunjukkan M merupakan modul bersuplemen.

Diberikan sebarang submodul U di M. Akan ditunjukkan U memliki suplemen di M.

Berdasarkan hipotesis, $M = M_1 + M_2$. Oleh karena itu, untuk sebarang submodul U di M, berlaku $M_1 + M_2 + U = M$. Karena M_1 merupakan modul bersuplemen, maka berdasarkan Lemma 2.3, $M_2 + U$ memiliki suplemen di M. Selanjutnya, dengan cara yang sama, karena M_2 merupakan modul bersuplemen, maka berdasarkan Lemma 2.3, U memiliki suplemen di M. Jadi, dapat disimpulkan bahwa setiap submodul di M memiliki suplemen di M. Sehingga, terbukti M merupakan modul bersuplemen.

Sebagai akibat langsung dari Teorema 2.4, diperoleh bahwa jumlahan berhingga dari modul bersuplemen juga merupakan modul bersuplemen sebagai berikut.

Akibat 2.5 *Diberikan M adalahR-modul. Jika $M = M_1 + M_2 + \cdots + M_k$, dengan M_1,M_2,…, M_k merupakan modul bersuplemen, maka M merupakan modul bersuplemen.*

2.2. Modul Bersuplemen Utama

Sebelum membahas pengertian modul bersuplemen utama, diberikan Lemma berikut.

Lemma 2.6 [3] *Diberikan R-modul M dan N,L submodul di M. Pernyataan berikut ekuivalen.*

(1) $M = N + L$ dan $N \cap L \ll L$.

(2) $M = N + L$ dan untuk setiap submodul sejati K dari L, $M \neq N + K$.

Bukti:

(1)⇒(2) Misalkan N dan K merupakan submodul di M, dengan $M = N + K$. Oleh karena itu, $L = (L \cap N) + K$.

Berdasarkan (1) $N \cap L \ll L$. Akibatnya, diperoleh $L = K$. Jadi, dapat disimpulkan bahwa, untuk setiap submodul sejati K di L, berlaku $M \neq N + K$.

(2)⇒ (1) Jika $L = (L \cap N) + K$ dengan K submodul di L, maka $M = N + L = N + K$. Berdasarkan (2), diperoleh $K = L$. Hal ini membuktikan bahwa $(L \cap N)$ merupakan submodul kecil di L. ■

Misalkan M merupakan R-modul dan N submodul siklik di M. Submodul L dikatakan suplemen utama dari N di M jika L memenuhi kondisi pada Lemma 3.1 dan M dikatakan modul bersuplemen utama jika setiap submodul sikliknya memiliki suplemen utama di M [3].

Berdasarkan definisi ini, jelas bahwa setiap modul bersuplemen merupakan modul bersuplemen utama. Tetapi, tidak sebaliknya. Tidak semua modul bersuplemen utama merupakan modul bersuplemen. Sebagai contoh, $\mathbb{Q}$ yang dipandang sebagai $\mathbb{Z}$-modul merupakan modul bersuplemen utama, tetapi bukan merupakan modul bersuplemen.

Tidak seperti modul bersuplemen, jumlahan langsung berhingga dari modul bersuplemen utama belum tentu merupakan modul bersuplemen utama. Dalam hal ini, terdapat kelas modul tertentu yaitu modul duo dan modul distributif yang memenuhi sifat setiap jumlahan dari modul bersuplemen utamajuga merupakan modul bersuplemen utama.

Sebelum membahas pengertian modul duo, berikut ini akan diuraikan mengenai salah satu jenis submodul, yaitu submodul *fully* invariant. Misalkan R Ring dan M merupakan R-modul kanan. Submodul N dari M disebut *fully invariant* jika f (N) termuat di N, untuk setiap R-endomorfisma f dari M. Jika $S = End(M_R)$ merupakan ring R-endomorfisma dari M, maka M adalah S-modul kiri dan R-modul kanan atau M merupakan bimodul [5]. Oleh karena itu, N merupakan submodul *fully invariant* jika dan hanya jika N adalah sub-bimodul dari M. Jelas bahwa 0 dan M merupakan submodul *fully invariant* dari M.

Jika setiap submodul dari M merupakan submodul *fully invariant*, maka M disebut dengan modul duo [5].

Jika M merupakan dekomposisi dari modul bersuplemen utama dan juga merupakan modul duo, maka Mmerupakan modul bersuplemen utama seperti diberikan dalam Teorema berikut.

Teorema 2.7 [3] *Misalkan $M = M_1 \oplus M_2$ merupakan dekomposisi dari M dengan M_1 dan M_2 merupakan modul bersuplemen utama. Jika M merupakan modul duo, maka M juga merupakan modul bersuplemen utama.*

Bukti:

Misalkan $M = M_1 \oplus M_2$ merupakan modul duo dan mR adalah submodul siklik dari M. Karena M merupakan modul duo, maka mR adalah submodul *fully invariant*. Oleh karena itu, mR dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$mR = \big((mR) \cap M_1\big) \oplus \big((mR) \cap M_2\big).$$

Diberikan sebarang $m \in M$. Karena $M = M_1 \oplus M_2$, maka m dapat dinyatakan sebagai $m = m_1 + m_2$, untuk suatu $m_1 \in M_1$ dan $m_2 \in M_2$. Oleh karena itu, $m_1R = (mR) \cap M_1$dan $m_2R = (mR) \cap M_2$. Karena M_1 dan M_2 merupakan modul bersuplemen utama dan $m_1R = (mR) \cap M_1$ dan $m_2R = (mR) \cap M_2$ secara berturut-turut adalah submodul siklik dari M_1dan M_2, maka terdapat submodul X_1 di M_1 yang merupakan suplemen dari m_1R dan terdapat submodul X_2 di M_2yang merupakan suplemen dari m_2R, yaitu :

$m_1R + X_1 = M_1$, $m_1R \cap X_1 \ll X_1$

dan $m_2R + X_2 = M_2$, $m_2R \cap X_2 \ll X_2$.

Akibatnya,

$$\begin{aligned} M &= M_1 + M_2 = m_1R + X_1 + m_2R + X_2 \\ &= m_1R + m_2R + X_1 + X_2 = m_1R + m_2R + X_1 + X_2 = mR + X_1 + X_2 \end{aligned}$$

Selanjutnya, ditunjukkan

$mR + (X_1 + X_2) \ll X_1 + X_2$.

Oleh karena

$mR \cap (X_1 + X_2) = \big((mR) \cap M_1 + (mR) \cap M_2\big) \cap (X_1 + X_2)$

maka $mR \cap (X_1 + X_2)$ merupakan submodul di

$\big((mR) \cap M_1\big) \cap (X_1 + M_2) + \big((mR) \cap M_2\big) \cap (X_2 + M_1)$

Selain itu,

$\big((mR) \cap M_1\big) \cap (X_1 + M_2)=$

$m_1R \cap (X_1 + M_2) \leq X_1 \cap ((m_1R) + M_2) \leq (m_1R) \cap (X_1 + M_2)$

Akibatnya,

$(F_1R) \cap (X_1 + XX_2) = X_1 \cap ((m_1R) + M_2) = m_1R \cap X_1$

dengan cara yang sama, diperoleh:

$(m_2R) \cap (X_2 + M_1) = X_2 \cap ((m_2R) + M_1) = m_2R \cap X_2$

Oleh karena $m_1R \cap X_1$ merupakan submodul kecil di X_1 dan $m_2R \cap X_2$ mrupakan submodul kecil di X_2, maka $(m_1R \cap X_1) + (m_2R \cap X_2)$ merupakan submodul kecil di $X_1 + X_2$. Akibatnya, $mR + (X_1 + X_2)$ merupakan submodul kecil di $X_1 + X_2$. Jadi, terbukti bahwa setiap submodul kecil di M memiliki suplemen di M. Dengan kata lain, terbukti M merupakan modul bersuplemen utama. ■

Selain itu, jika M merupakan modul duo sekaligus merupakan modul bersuplemen utama, maka setiap hasil jumlah langsung dari M juga merupakan modul bersuplemen utama seperti dibuktikan sebagai berikut.

Teorema 2.8 [3] *Misalkan M adalah modul duo. Jika M merupakan modul bersuplemen utama,maka setiap hasil* *jumlah langsung dari M merupakan modul bersuplemen utama.*

Bukti:

Misalkan $M = M_1 \oplus M_2$ dan $m \in M_1$. Dibentuk submodul siklik yang dibangun oleh *m*yaitu mR. Karena *M* merupakan modul bersuplemen utama, maka mR memeiliki suplemen di *M*, katakan *A*. Oleh karena itu, $mR + A = M$ dan $mR \cap A$ merupakan submodul kecil di *A*. Akan ditunjukkan M_1 merupakan modul bersuplemen utama. Dapat dilihat bahwa $mR + (M_1 \cap A) = M_1$dan $A = (A \cap M_1) \oplus (A \cap M_2)$. Akan ditunjukkan bahwa $mR + (M_1 \cap A)$ merupakan submodul kecil di $M_1 \cap A$. Andaikan terdapat *T* merupakan submodul dari $M_1 \cap A$ yang memenuhi kondisi $M_1 \cap A = (mR) \cap (M_1 \cap A) + T$. Akibatnya,
$A = mR \cap (M_1 \cap A) + T + (M_2 \cap A) = (mR \cap A) + T + (M_2 \cap A)$
Oleh karena $mR \cap A$ merupakan submodul kecil dari *A*, maka $T \oplus (M_2 \cap A) = A$. Akibatnya, $M_1 \cap A = T$. Hal ini membuktikan bahwa$mR + (M_1 \cap A)$ merupakan submodul kecil di $M_1 \cap A$. Jadi, dapat disimpulkan bahwa setiap hasil jumlah langsung dari *M* juga merupakan modul bersuplemen utama. ■

Selain modul duo, terdapat kelas modul lain yaitu modul distributif yang memenuhi kondisi pada Teorema 2.8 sebagai berikut.

Teorema 2.9 [3] *Misalkan M adalah modul distributif. Jika M merupakan modul bersuplemen utama, maka setiap hasil tambah langsung dari M merupakan modul bersuplemen utama.*

Bukti:

Misalkan $M = M_1 \oplus M_2$ dan $m \in M_1$. Dibentuk submodul siklik dari *M* yang dibangun oleh *m*, yaitu *mR*. Karena *M* merupakan modul bersuplemen utama, maka terdapat submodul *A* di *M* yang merupakan suplemen dari *mR*. Oleh karena itu, $mR + A = M$ dan $mR \cap A$ merupakan submodul kecil di *A*. Karena *M* merupakan modul distributif, maka $M_1 = (mR) + (M_1 \cap A)$ berakibat $mR \cap A$ merupakan submodul kecil di $M_1 \cap A$. Sehingga, terbukti bahwa setiap submodul siklik di M_1 memiliki suplemen. Dengan kata lain, terbukti bahwa setiap hasil jumlah langsung dari *M* merupakan modul bersuplemen utama.

3. PENUTUP

Modul bersuplemen tertutup terhadap jumlahan berhingga dan hasil jumlah langsung. Tidak seperti modul bersuplemen, jumlahan langsung berhingga dari modul bersuplemen utama belum tentu merupakan modul bersuplemen utama.

Dalam hal ini, terdapat kelas modul tertentu yaitu modul duo dan modul distributif yang memenuhi sifat setiap jumlahan dari modul bersuplemen utamajuga merupakan modul bersuplemen utama. Demikian halnya, pada kelas modul duo dan modul distributif, modul bersuplemen utama tertutup terhadap hasil jumlah langsung.

4. DAFTAR PUSTAKA

[1] G. Azumaya, (1993), Some characterizations of semiperfect rings and modules, *in Ring Theory*, edited by S.K. Jain and S. T. Rizvi, Proc. Biennial Ohio-Denison Conf., May 1992, World Scientific Publ., Singapore : 28-40.

[2] Y. Wang and N. Ding, (2006), Generalized supplemented modules, *Taiwanese J. Math*., 10(6):1589-1601.

[3] Acar, Ummahan., Harmanci,A., (2010), Principally Supplemented Module. *Albanian Journal of Mathematics* 4(3) : 79-88.

[4] Clark, J., Lomp, C., Vanaja, N., dan Wisbauer, R., (2006), *Lifting Modules (Supplement and Projectivity in Modul Theory)*, Birkhauser Verlag, Base Switzerland.

[5] Wisbauer, R., (1991), *Foundation of Module and Ring Theory,* Gordon and Breach, Philadelphia, USA