

PERSAMAAN UMUM JUMLAH *EDGE* DAN *TITIK* PADA *CYCLE EXTENSION CUBIC GRAPH*

Mohamad Ibnu Hambali¹, Wamiliana², Fitriani³
^{1,2,3}Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung

Abstract. In this research we will discuss about cycle extension $Ext_C(G)$ of cubic graph. The cubic graphs used are the cubic graph with $n(V(G)) = 8$ and $k = 3, l_i = 2, 4, 6, \dots, s$; k is the length of the cycle C and l_i is the number of vertices or points on $Ext_C(G)$ that located between x_i and x_{i+1} . The construction process for determining the $Ext_C(G)$ use six operations which are M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 , dan M_6 . The result of M_1 process on $Ext_C(G)$ is a non Hamiltonian cycle while the results of M_2, M_3, M_4, M_5 , and M_6 are Hamiltonian cycles. We also show that the number of vertices on the $Ext_C(G)$ is $n(V(Ext_C(G))) = n(V(G)) + 2k l_i$, and the number of edges on the $Ext_C(G)$ is $n(E(Ext_C(G))) = n(E(G)) + 3k$.

keywords: cycle extension, cubic graph, Hamiltonian circuit

1. PENDAHULUAN

Dalam teori graf dikenal beberapa macam sirkuit (*cycle*) diantaranya sirkuit Euler dan sirkuit Hamiltonian. Dalam penelitian ini akan dikaji lebih jauh tentang sirkuit yang diperluas dari suatu graf G , dengan G adalah graf kubik dengan jumlah vertex pada G adalah 4, 6, 8. Selanjutnya, hasil dari perluasan sirkuit pada graf G digabung dengan graf G yang dilambangkan dengan $Ext_C(G)$.

Pada penelitian ini, masalah dibatasi pada graf kubik dengan $n(V(G)) = 8$ dan $k = 3, l_i = 2, 4, 6, \dots, s$. dengan k adalah bilangan bulat yang menotasikan panjang dari sirkuit C dan l_i adalah banyaknya titik di $Ext_C(G)$ antara x_i dan x_{i+1} yang bernilai bilangan genap.

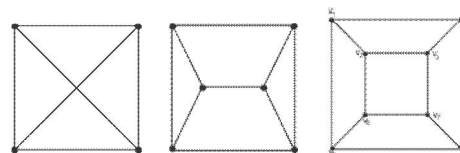
Penelitian ini bertujuan untuk menentukan persamaan umum penambahan jumlah *edge* dan *titik* di $Ext_C(G)$ dan mencari persamaan umum jumlah *edge* dan *titik* di $Ext_C(G)$ pada graf kubik yang diperluas dengan $k = 3, l_i = 2, 4, 6, \dots, s$ dimana k adalah bilangan bulat yang menotasikan panjang dari sirkuit C dan l_i adalah banyaknya titik di $Ext_C(G)$ antara x_i dan

x_{i+1} yang bernilai bilangan genap. Jenis graf yang digunakan dalam penelitian ini adalah graf kubik dengan jumlah vertex 4, 6 dan 8.

2. PEMBAHASAN

2.1 Graf Kubik (*Cubic Graph*)

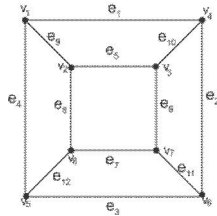
Graf Kubik (*cubic graph*) adalah graf teratur yang berderajat tiga atau graf teratur-3 [1]. Contoh graf kubik dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 2.1 Contoh Graf Kubik

Suatu graf dikatakan Graf Hamiltonian (*Hamiltonian graph*) apabila graf tersebut mempunyai sirkuit Hamiltonian sedangkan sirkuit Hamiltonian adalah sirkuit yang melalui tiap titik di dalam graf tepat satu kali, kecuali titik asal (sekaligus titik akhir) yang dilalui dua kali[1].

Contoh sirkuit Hamiltonian dapat dilihat dalam gambar berikut.



Gambar 2.2 Graf yang memiliki sirkuit Hamiltonian

Salah satu sirkuit Hamiltonian pada Gambar 2.2 adalah $v_1, e_9, v_2, e_8, v_3, e_{12}, v_5, e_3, v_6, e_2, v_4, e_1, v_1$.

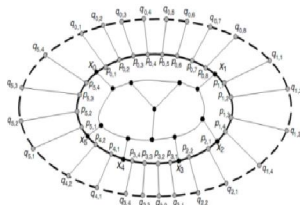
Suatu graf G dan $C = \langle x_0, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_0 \rangle$ merupakan sirkuit dari G dengan $k \geq 3$, k merupakan bilangan bulat yang menotasikan panjang dari sirkuit C . Perluasan sirkuit dari G sekitar C dinotasikan dengan $Ext_C(G)$.

$$V(Ext_C(G)) = \bigcup_{0 \leq i \leq k-1} \{p_{i,j}, q_{i,j} | \forall 1 \leq j \leq l_i\} \cup V(G)$$

$$E(Ext_C(G)) = (E(G) - E(C)) \cup \bigcup_{0 \leq i \leq k-1} \{(p_{i,j}, q_{i,j}) | \forall 1 \leq j \leq l_i\} \cup \bigcup_{0 \leq i \leq k-1} \{(x_i, p_{i,1}), (p_{i,l_i}, x_{i+1})\} \cup \{(p_{i,j}, p_{i,j+1}) | \forall 1 \leq j \leq l_i - 1\} \cup \bigcup_{0 \leq i \leq k-1} \{(q_{i,j}, q_{i,j+1}) | \forall 1 \leq j \leq l_i - 1\} \cup \{q_{i,l_i}, q_{i+1,1}\}$$

dengan l_i adalah bernilai genap untuk semua i .

Sirkuit yang terbentuk dari gabungan titik $\bigcup_{0 \leq i \leq k-1} \{q_{i,j} | \forall 1 \leq j \leq l_i\}$ adalah perluasan sirkuit dari C yang dinotasikan \mathcal{O}_C .



Gambar 2.3 $Ext_C(G)$

Keterangan:

l_i adalah banyaknya titik di $Ext_C(G)$

antara x_i dan x_{i+1} yang bernilai bilangan genap.

$p_{i,j}$ adalah suatu titik di $Ext_C(G)$ antara x_i dan x_{i+1} .

$q_{i,j}$ adalah suatu titik di $Ext_C(G)$ yang adjacent ke $p_{i,j}$.

$V(Ext_C(G))$ adalah titik perluasan sirkuit dari G sekitar C .

$E(Ext_C(G))$ adalah sisi perluasan sirkuit dari G sekitar C .

Pengertian penggantian sirkuit diberikan sebagai berikut. H merupakan sirkuit dari graf G , H_C^s dinotasikan sebagai sirkuit di $Ext_C(G)$ yang diperoleh dari H dengan mengganti semua (x_j, x_{j+1}) di $E(H) \cap E(C)$ dengan $(x_j, p_{j,1}, p_{j,2}, \dots, p_{j,l_j}, x_{j+1})$.

Ω_H dinotasikan sebagai sirkuit yang diperoleh dari \mathcal{O}_C dengan mengganti setiap

$$\bigcup_{0 \leq i \leq k-1} \{q_{i,j} | \forall 1 \leq j \leq l_i\} = \langle q_{i,1}, q_{i,2}, \dots, q_{i,l_i} \rangle$$

dengan $\langle q_{i,1}, p_{i,1}, p_{i,2}, q_{i,2}, q_{i,3}, p_{i,3}, \dots, p_{i,l_i}, q_{i,l_i} \rangle$ jika $\langle p_{i,1}, p_{i,2}, \dots, p_{i,l_i} \rangle$ bukan suatu path di H_C^s [2].

Penambahan sirkuit H di G merupakan suatu sirkuit di $Ext_C(G)$, dengan beberapa sisi $e = (x_i, x_{i+1})$ di C . Dalam penambahan sirkuit ini digunakan enam operasi, yakni sebagai berikut:

1. $M_1(H, e, j)$
2. $M_2(H, e)$
3. $M_i(H, x)$ untuk $3 \leq i \leq 6$

Notasi berikut ini akan digunakan pada M_2, M_3, M_4, M_5 dan M_6

$$\Omega_{q_i} = \langle q_{i,1}, p_{i,1}, p_{i,2}, q_{i,2}, q_{i,3}, p_{i,3}, \dots, p_{i,l_i}, q_{i,l_i} \rangle$$

$$\Omega_{p_i} = \langle p_{i,1}, q_{i,1}, q_{i,2}, p_{i,2}, p_{i,3}, q_{i,3}, \dots, q_{i,l_i}, p_{i,l_i} \rangle$$

[2].

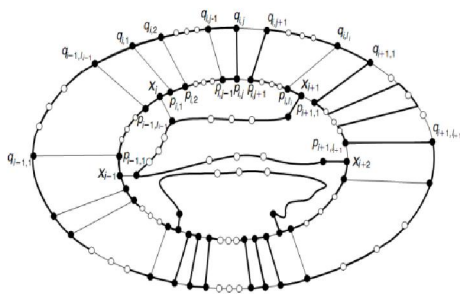
Selanjutnya, H merupakan suatu sirkuit di G yang berisi sisi e . Operasi M_1 digunakan untuk mengkonstruksi suatu

sirkuit di $Ext_G(G) \setminus \{(p_{i,j}, p_{i,j+1}), (q_{i,j}, q_{i,j+1})\}$ untuk beberapa $1 \leq j \leq l_i - 1$. Q merupakan $path$ $\Omega_H \setminus \{(q_{i,j}, q_{i,j+1})\}$ dan P adalah $path$ $H_G^* \setminus \{(p_{i,j}, p_{i,j+1})\}$

Definisi

$$M_1(H, e, j) = (p_{i,j}, P, p_{i,j+1}, q_{i,j+1}, Q, q_{i,j}, p_{i,j}) \quad [2].$$

Ilustrasi dari operasi M_1 diberikan dalam gambar berikut.



Gambar 2.4 Ilustrasi dari Operasi M_1

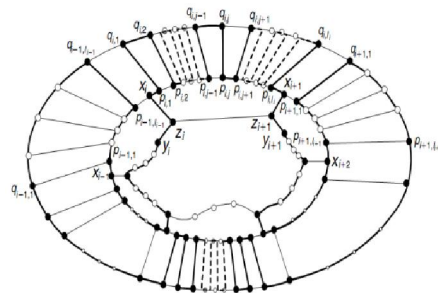
Selanjutnya operasi M_2 dijelaskan sebagai berikut. Misal z_i dan z_{i+1} adjacent di G dan H adalah suatu sirkuit Hamiltonian di G yang berisi $(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$ sebagai suatu subpath. Operasi $M_2(H, e)$ digunakan untuk mengkonstruksi suatu sirkuit Hamiltonian di $Ext_G(G) \setminus \{(q_{i-1,l_i-1}, q_{i,1}), (q_{i,l_i}, q_{i+1,1})\}$. Y_i adalah neighborhood yang unik dari z_i yang berbeda diantara x_i dan z_{i+1} , dan y_{i+1} adalah neighborhood yang unik dari z_{i+1} yang berbeda diantara x_{i+1} dan z_i . G adalah graf kubik, $(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$ adalah suatu subpath dari H, dan $(y_i, z_i, z_{i+1}, y_{i+1})$ adalah subpath dari H di G. $(q_{i-1,l_i-1}, q_{i,1}, \dots, q_{i,l_i}, q_{i+1,1})$ adalah subpath dari Ω_H dan $(p_{i-1,l_i-1}, x_i, p_{i,1}, p_{i,2}, \dots, p_{i,l_i}, x_{i+1}, p_{i+1,1})$ adalah subpath dari H_G^* . Sehingga, diperoleh suatu path P dari H_G^* dengan mengganti $(p_{i-1,l_i-1}, x_i, p_{i,1}, p_{i,2}, \dots, p_{i,l_i}, x_{i+1}, p_{i+1,1})$ dengan $(x_i, p_{i,1}, \Omega_{p_i}, p_{i,l_i}, x_{i+1})$ dan mengganti (z_i, z_{i+1}) dengan (z_i, x_i) dan

(z_{i+1}, x_{i+1}) . Selanjutnya, hapus $(q_{i-1,l_i-1}, q_{i,1}, \dots, q_{i,l_i}, q_{i+1,1})$ dari Ω_H sehingga hasil penghapusan dari Ω_H merupakan suatu path Q.

Definisikan

$$M_2(H, e) = (p_{i-1,l_i-1}, q_{i-1,l_i-1}, Q, q_{i+1,1}, p_{i+1,1}, P, p_{i-1,l_i-1}) \quad [2]$$

Proses operasi M_2 dapat dilihat pada gambar berikut :



Gambar 2.5 Ilustrasi dari Operasi M_2

Misal H adalah sirkuit Hamiltonian dari $G \setminus \{x_{i+1}\}$. Didefinisikan operasi $M_3(H, x_{i+1})$ untuk mengkonstruksi sirkuit (cycle) Hamiltonian dari $Ext_G(G) \setminus \{p_{i,j}\}$ dimana j ganjil, dan $M_4(H, x_{i+1})$ untuk mengkonstruksi sirkuit Hamiltonian dari $Ext_G(G) \setminus \{q_{i,j}\}$ dengan j genap.

Ketika x_{i+1} tidak ada di H, (x_{i-1}, x_i, z_i) dan $(x_{i+2}, x_{i+1}, z_{i+1})$ adalah subpath dari H, maka

$(q_{i,1}, \Omega_{q_i}, q_{i,l_i}, q_{i+1,1}, \Omega_{q_{i+1}}, q_{i+1,l_{i+1}})$ adalah subpath dari Ω_H .

Q = $\Omega_H - (q_{i,1}, \Omega_{q_i}, q_{i,l_i}, q_{i+1,1}, \Omega_{q_{i+1}}, q_{i+1,l_{i+1}}, q_{i+1,l_{i+1}}, q_{i+2,1})$
 Q adalah path dari $q_{i+2,1}$ ke $q_{i,1}$. P = $H_G^* - (x_{i+2}, p_{i+2,1})$. P adalah path dari x_{i+2} ke $p_{i+2,1}$.

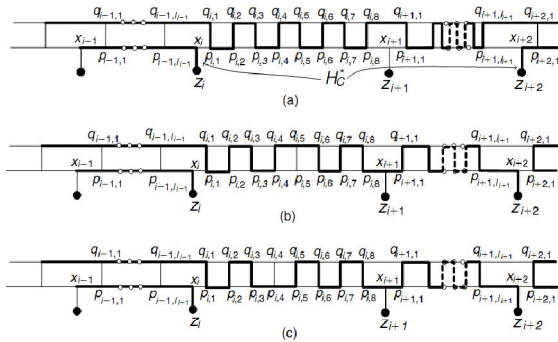
Didefinisikan

$$M_3(H, e) = \langle p_{i+2,1}, q_{i+2,1}, Q, q_{i,1}, p_{i,1}, p_{i,2}, q_{i,2}, \dots, p_{i,j-1}, q_{i,j-1}, q_{i,j}, q_{i,j+1}, p_{i,j+1}, p_{i,j+2}, q_{i,j+2}, \dots, q_{i,l_i}, p_{i,l_i}, x_{i+1}, p_{i+1,1}, \Omega_{p_{i+1}}, p_{i+1,l_{i+1}}, x_{i+2}, P, p_{i+2,1} \rangle$$

$M_4(H, e) = \langle p_{i+2,1}, q_{i+2,1}, Q, q_{i,1}, p_{i,1}, p_{i,2},$

$$\begin{aligned}
 & q_{i,2}, \dots, q_{i,j-1}, p_{i,j-1}, p_{i,j}, p_{i,j+1} \\
 & q_{i,j+1}, q_{i,j+2}, p_{i,j+2}, \dots, p_{i,l_i}, x_{i+1}, \\
 & p_{i+1,1}, \Omega_{p_{i+1}}, p_{i+1,l_{i+2}}, x_{i+2}, P, \\
 & p_{i+2,1} \geq [2].
 \end{aligned}$$

Proses operasi M_3 dan M_4 dapat dilihat pada Gambar 6 berikut :



Gambar 2.6 Ilustrasi dari Operasi M_3 dan M_4

Operasi M_5 dan M_6 dijelaskan sebagai berikut. Misal H adalah sirkuit Hamiltonian dari $G \setminus \{x_i\}$. Definisikan operasi $M_5 (H, x_i)$ untuk mengkonstruksi suatu sirkuit Hamiltonian dari $Ext_G(G) \setminus \{p_{i,j}\}$ dengan j genap dan operasi $M_6 (H, x_i)$ untuk mengkonstruksi suatu sirkuit (*cycle*) Hamiltonian dari $Ext_G(G) \setminus \{q_{i,j}\}$ dengan j ganjil.

$Q =$

$$\begin{aligned}
 & \Omega_H - (q_{i-2,l_{i-2}}, q_{i-1,1}, \Omega_{q_{i-1}}, \\
 & q_{i-1,l_{i-1}}, q_{i,1}, \Omega_{q_i}, q_{i,l_i})
 \end{aligned}$$

Q adalah suatu *path* dari q_{i,l_i} ke $q_{i-2,l_{i-2}}$

$P = H_C^* - (x_{i-1}, p_{i-2,l_{i-2}})$. P adalah *path* dari $p_{i-2,l_{i-2}}$ ke x_{i-1}

Definisikan

$$M_5(H,x) = <$$

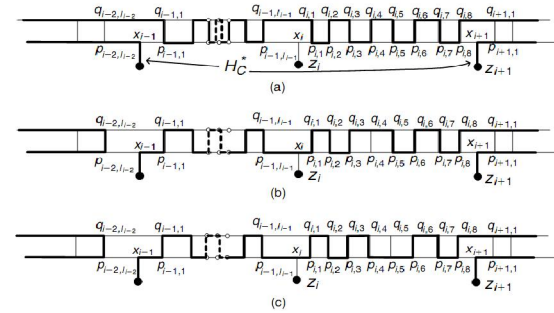
$$\begin{aligned}
 & x_{i-1}, p_{i-1,1}, \Omega_{p_{i-1}}, p_{i-1,l_{i-1}}, x_i, \\
 & p_{i,1}, q_{i,1}, q_{i,2}, p_{i,2}, p_{i,3}, \dots, p_{i,j-1}, \\
 & q_{i,j-1}, q_{i,j}, q_{i,j+1}, p_{i,j+1}, p_{i,j+2}, \\
 & q_{i,j+2}, \dots, q_{i,l_i}, Q, q_{i-2,l_{i-2}}, p_{i-2,l_{i-2}}, \\
 & P, x_{i-1} >
 \end{aligned}$$

$$M_6(H,x) =$$

$$< x_{i-1}, p_{i-1,1}, \Omega_{p_{i-1}}, p_{i-1,l_{i-1}},$$

$$\begin{aligned}
 & x_i, p_{i,1}, q_{i,1}, q_{i,2}, p_{i,2}, p_{i,3}, \dots, q_{i,j-1}, \\
 & p_{i,j-1}, p_{i,j}, p_{i,j+1}, q_{i,j+1}, q_{i,j+2}, \\
 & p_{i,j+2}, \dots, q_{i,l_i}, Q, q_{i-2,l_{i-2}}, \\
 & p_{i-2,l_{i-2}}, P, x_{i-1} > [2]
 \end{aligned}$$

Proses operasi M_5 dan M_6 dapat dilihat pada gambar berikut.



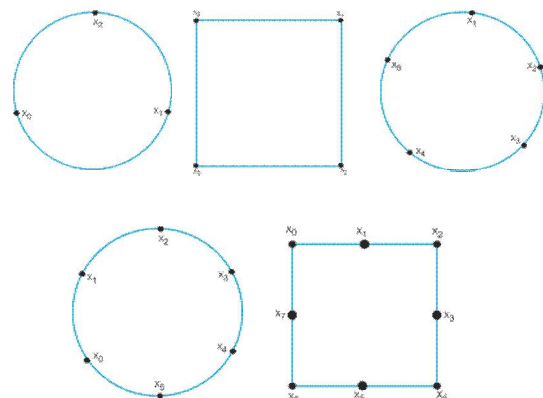
Gambar 2.7 Ilustrasi dari Operasi M_5 dan M_6

2.2 Langkah-Langkah Dalam Penelitian

Langkah-langkah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menggambarkan graf G dengan n ($V(G) = 4, 6, 8$), lalu diambil sirkuit (*cycle*) dari graf G dengan nilai $k = 3$ dan $l_i = 2, 4, 6, \dots, 5$.
2. Mencari persamaan umum penambahan jumlah *edge* dan *titik* pada sirkuit (*cycles*) dari graf kubik G yang diperluas dengan nilai $k = 3$ dan $l_i = 2, 4, 6, \dots, 5$.
3. Menentukan persamaan umum jumlah sisi dan titik di $Ext_G(G)$.
4. Penarikan kesimpulan.

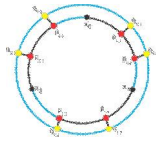
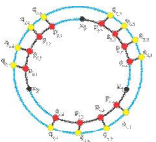
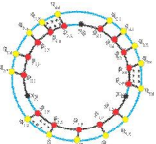
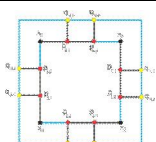
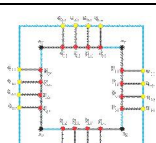
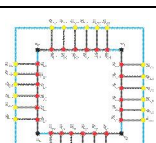
2.3 Cycle Extension Pada Graf Kubik

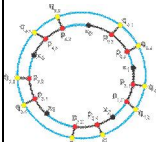
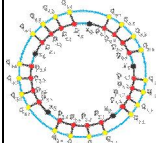
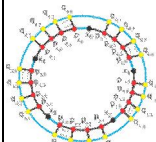
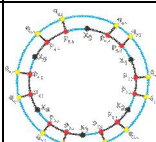
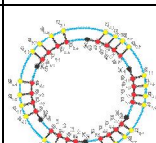
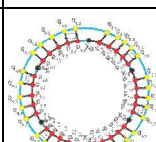
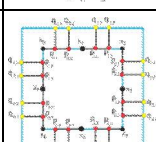
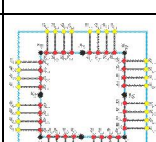
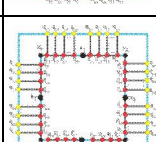


Gambar 2.8 Sirkuit dari C dengan $k = 3$, $k = 4$, $k = 5$, $k = 6$ dan $k = 8$

Sirkuit dari C pada Gambar 8, dapat diperluas dengan nilai $k = 3$, $l_i = 2, 4, 6, \dots, s$ sehingga sirkuit C akan mengalami penambahan titik dan sisi pada graf kubik. Berikut tabel penambahan titik dan sisi pada graf kubik tersebut.

Tabel 2. 1 Bentuk $Ext_C(G)$ pada graf kubik.

k	l_i	Bentuk $Ext_C(G)$	Penambahan titik di $Ext_C(G)$	Penambahan edge di $Ext_C(G)$
3	2		12	18
3	4		24	36
3	6		36	54
4	2		16	24
4	4		32	48
4	6		48	72

5	2		20	30
5	4		40	60
5	6		60	90
6	2		24	36
6	4		48	72
6	6		72	108
8	2		32	48
8	4		64	96
8	6		96	144

Pada Tabel 2.1, penambahan titik pada $Ext_C(G)$ ditunjukkan dengan titik berwarna merah dan kuning, sedangkan penambahan *edge* pada $Ext_C(G)$ berwarna hitam dan biru (terluar). Dari Tabel 1 dapat dilihat bahwa untuk nilai

suatu k yang sama maka penambahan titik dan sisi membentuk suatu aritmatika yang memiliki selisih yang sama.

Jika perhitungan penambahan *titik* dan *edge* tersebut dilakukan terus menerus dengan nilai k yang sama dan nilai $l_i \geq 6$, ternyata masih memiliki beda yang sama sesuai dengan pola yang terlihat pada Tabel 1, sehingga persamaan umum penambahan *titik* dan *edge* pada graf kubik dengan $n(V(G)) = 4, 6, 8$ dan $k = 3, l_i = 2$ dapat ditentukan perumusannya menggunakan konsep aritmatika dengan cara mengetahui pola penambahan titik dan sisi yang sesuai.

2.4 Penambahan Titik dan Edge Pada Cycle Extension Graf Kubik

Untuk menentukan rumus umum penambahan titik dan sisi pada $Ext_C(G)$, terlebih dahulu dilakukan penentuan pola aritmatika yang sesuai dengan penambahan titik dan sisi pada $Ext_C(G)$ tersebut.

Berikut tabel pola aritmatika penambahan *titik* dan *edge* pada $Ext_C(G)$ yang sesuai sebagai berikut :

Tabel 2.2 Pola Aritmatika Penambahan Titik dan Sisi di $Ext_C(G)$

k	l_i	Pola Penambahan titik di $Ext_C(G)$	Pola Penambahan edge di $Ext_C(G)$
3	2	$12 = 2 \cdot 3 \cdot 2$	$18 = 3 \cdot 3 \cdot 2$
	4	$24 = 2 \cdot 3 \cdot 4$	$36 = 3 \cdot 3 \cdot 4$
	6	$36 = 2 \cdot 3 \cdot 6$	$54 = 3 \cdot 3 \cdot 6$
4	2	$16 = 2 \cdot 4 \cdot 2$	$24 = 3 \cdot 4 \cdot 2$
	4	$32 = 2 \cdot 4 \cdot 4$	$48 = 3 \cdot 4 \cdot 4$
	6	$48 = 2 \cdot 4 \cdot 6$	$72 = 3 \cdot 4 \cdot 6$
5	2	$20 = 2 \cdot 5 \cdot 2$	$30 = 3 \cdot 5 \cdot 2$
	4	$40 = 2 \cdot 5 \cdot 4$	$60 = 3 \cdot 5 \cdot 4$
	6	$60 = 2 \cdot 5 \cdot 6$	$90 = 3 \cdot 5 \cdot 6$
6	2	$24 = 2 \cdot 6 \cdot 2$	$36 = 3 \cdot 6 \cdot 2$
	4	$48 = 2 \cdot 6 \cdot 4$	$72 = 3 \cdot 6 \cdot 4$
	6	$72 = 2 \cdot 6 \cdot 6$	$108 = 3 \cdot 6 \cdot 6$

8	2	$32 = 2 \cdot 8 \cdot 2$	$48 = 3 \cdot 8 \cdot 2$
	4	$64 = 2 \cdot 8 \cdot 4$	$96 = 3 \cdot 8 \cdot 4$
	6	$96 = 2 \cdot 8 \cdot 6$	$144 = 3 \cdot 8 \cdot 6$
Rumus Umum		$2 k l_i$	$3 k l_i$

2.5 Jumlah Titik dan Edge Pada Cycle Extension Graf Kubik

Penambahan titik dan sisi pada suatu sirkuit dari suatu graf kubik, mengakibatkan $n(V(G))$ dan $n(E(G))$ berubah menjadi $n(V(Ext_C(G)))$ dan $n(E(Ext_C(G)))$. Secara logika, jumlah titik tambahan dan jumlah sisi tambahan pada graf kubik diasumsikan bahwa $n(V(Ext_C(G))) = n(V(G)) +$ penambahan titik pada C di $G = n(V(G)) + 2 k l_i$ dan $n(E(Ext_C(G))) = n(E(G)) +$ penambahan *edge* pada *cycle* C di $G = n(E(G)) + 3 k l_i$

Untuk menentukan kebenaran dugaan rumus umum jumlah *titik extension* dan *edge extension* pada $Ext_C(G)$ tersebut, maka perlu dilakukan penentuan pola aritmatika yang sesuai dengan jumlah *titik* dan *edge* pada $Ext_C(G)$ tersebut. Penentuan pola aritmatika yang sesuai dengan jumlah *titik* dan *edge* di $Ext_C(G)$ graf kubik dapat dilihat seperti tabel berikut.

Tabel 2.3 Pola aritmatika titik extension dan edge extension graf kubik

$n(V(G))$ $n(E(G))$	k	l_i	Pola $n(V(Ext_C(G)))$	Pola $n(E(Ext_C(G)))$
4	3	2	$16 = 4 + 12$	$24 = 6 + 18$
		4	$28 = 4 + 24$	$42 = 6 + 36$
		6	$40 = 4 + 36$	$60 = 6 + 54$
	4	2	$20 = 4 + 16$	$30 = 6 + 24$
		4	$36 = 4 + 32$	$54 = 6 + 48$
		6	$52 = 4 + 48$	$78 = 6 + 72$
6	3	2	$18 = 6 + 12$	$27 = 9 + 18$
		4	$30 = 6 + 24$	$45 = 9 + 36$
		6	$42 = 6 + 36$	$63 = 9 + 54$
	4	2	$22 = 6 + 16$	$33 = 9 + 24$
		4	$38 = 6 + 32$	$57 = 9 + 48$

6	6	54 = 6 + 48	81 = 9 + 72
	5	26 = 6 + 20	39 = 9 + 30
	4	46 = 6 + 40	69 = 9 + 60
9	6	66 = 6 + 60	99 = 9 + 90
	2	30 = 6 + 24	45 = 9 + 36
	4	54 = 6 + 48	81 = 9 + 72
8	4	24 = 8 + 16	36 = 12 + 24
	4	40 = 8 + 32	60 = 12 + 48
	6	56 = 8 + 48	84 = 12 + 72
12	2	32 = 8 + 24	48 = 12 + 36
	4	56 = 8 + 48	84 = 12 + 72
	6	80 = 8 + 72	120 = 12 + 108
8	2	40 = 8 + 32	60 = 12 + 48
	4	72 = 8 + 64	108 = 12 + 96
	6	104 = 8 + 96	156 = 12 + 144
Rumus Umum		$n(V(G)) + 2k l_i$	$n(E(G)) + 3k l_i$

2.6 Operasi Penambahan Sirkuit Pada Graf Kubik

Pada penambahan sirkuit graf kubik, ada 6 operasi yang berlaku untuk merekonstruksi suatu sirkuit yakni operasi $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5,$ dan M_6 . Adapun 6 operasi pada penambahan sirkuit graf kubik sebagai berikut:

Operasi M_1

Misalkan $n(V(G)) = 4, k = 3$ dan $l_i = 2$. H merupakan sirkuit di G yang berisi edge, $e = (x_i, x_{i+1}) = (x_0, x_1)$. Ambil sirkuit H dari graf G, misal $H = (x_0, x_1, x_3, x_0)$ dan Sirkuit $C = (x_0, x_1, x_2, x_0)$. $E(H) = \{(x_0, x_1), (x_1, x_3), (x_0, x_3)\}$ dan

$E(C) = \{(x_0, x_1), (x_1, x_2), (x_0, x_2)\}$ maka $E(H) \cap E(C) = \{(x_0, x_1)\}$ sehingga

$$H_C^* = (x_0, p_{0,1}, p_{0,2}, x_1, x_3, x_0) \text{ dan } \Omega_H = (q_{0,1}, q_{0,2}, q_{1,1}, p_{1,1}, p_{1,2}, q_{1,2}, q_{2,1}, p_{2,1}, p_{2,2}, q_{2,2}, q_{0,1})$$

karena $(p_{0,1}, p_{0,2})$ merupakan path di H_C^* maka $(p_{0,1}, p_{0,2})$ tidak ada didalam Ω_H .

$$Q = path \Omega_H \setminus \{(q_{i,j}, q_{i,j+1})\}; 1 \leq j \leq l_i - 1; l_i = 2$$

$$= \{(q_{0,1}, q_{0,2}), (q_{0,2}, q_{1,1}), (q_{1,1}, p_{1,1}), (p_{1,1}, p_{1,2}), (p_{1,2}, q_{1,2}), (q_{1,2}, q_{2,1}), (q_{2,1}, p_{2,1}), (p_{2,1}, p_{2,2}), (p_{2,2}, q_{2,2}), (q_{2,2}, q_{0,1})\} - \{(q_{0,1}, q_{0,2})\}$$

$$= \{(q_{0,2}, q_{1,1}), (q_{1,1}, p_{1,1}), (p_{1,1}, p_{1,2}), (p_{1,2}, q_{1,2}), (q_{1,2}, q_{2,1}), (q_{2,1}, p_{2,1}), (p_{2,1}, p_{2,2}), (p_{2,2}, q_{2,2}), (q_{2,2}, q_{0,1})\}$$

$$P = path H_C^* \setminus \{(p_{i,j}, p_{i,j+1})\}; 1 \leq j \leq l_i - 1; l_i = 2$$

$$= \{(x_0, p_{0,1}), (p_{0,1}, p_{0,2}), (p_{0,2}, x_1), (x_1, x_3), (x_3, x_0)\} - \{(p_{0,1}, p_{0,2})\}$$

$$= \{(x_0, p_{0,1}), (p_{0,2}, x_1), (x_1, x_3), (x_3, x_0)\}$$

$$M_1(H, e, j) = M_1(H, (x_i, x_{i+1}), j)$$

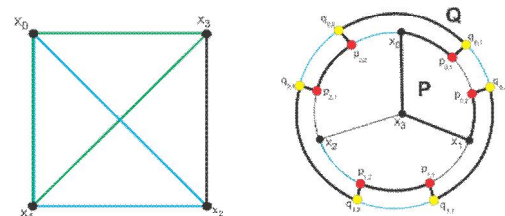
$$= M_1(H, (x_0, x_1), 1)$$

$$= (p_{i,j}, P, p_{i,j+1}, q_{i,j+1}, Q, q_{i,j}, p_{i,j})$$

$$= (p_{0,1}, P, p_{0,1+1}, q_{0,1+1}, Q, q_{0,1}, p_{0,1})$$

$$= (p_{0,1}, P, p_{0,2}, q_{0,2}, Q, q_{0,1}, p_{0,1})$$

Sketsa gambar Operasi M_1 dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 2.9 Graf dengan $n(V(G)) = 4, k = 3$ dan $l_i = 2$ dan M_1

Operasi M_2

Misal $i = 1$ sehingga $z_i = z_1$ dan $z_{i+1} = z_2$ adjacent di G dan H adalah suatu sirkuit Hamiltonian (Hamiltonian cycle) di G, $H = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_0)$ dan

$$\Omega_{p1} = \langle p_{1,1}, q_{1,1}, q_{1,2}, p_{1,2}, p_{1,3}, q_{1,3}, q_{1,4}, p_{1,4}, p_{1,5}, q_{1,5}, q_{1,6}, p_{1,6} \rangle$$

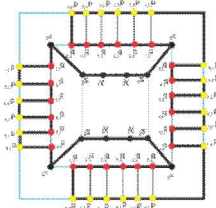
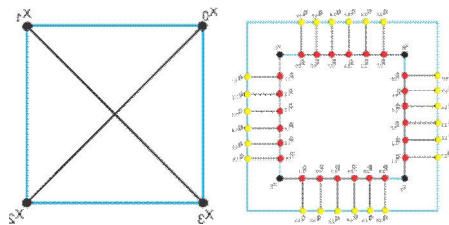
sehingga

$$\begin{aligned} Path P &= \langle x_i, p_{i,1}, \Omega_{p1}, p_{i,l_i}, x_{i+1} \rangle \\ &= \langle x_1, p_{1,1}, \Omega_{p1}, p_{1,l_1}, x_{1+1} \rangle \\ &= \langle x_1, p_{1,1}, q_{1,1}, q_{1,2}, p_{1,2}, q_{1,3}, q_{1,4}, p_{1,4}, p_{1,5}, q_{1,5}, q_{1,6}, p_{1,6}, x_2 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q &= \langle q_{0,1}, q_{0,2}, q_{0,3}, q_{0,4}, q_{0,5}, q_{0,6}, p_{0,1}, p_{0,2}, p_{0,3}, p_{0,4}, p_{0,5}, p_{0,6}, x_0, q_{2,1}, q_{2,2}, q_{2,3}, q_{2,4}, q_{2,5}, q_{2,6}, p_{2,1}, p_{2,2}, p_{2,3}, p_{2,4}, p_{2,5}, p_{2,6}, x_3, q_{3,1}, q_{3,2}, q_{3,3}, q_{3,4}, q_{3,5}, q_{3,6}, p_{3,1}, p_{3,2}, p_{3,3}, p_{3,4}, p_{3,5}, p_{3,6}, q_{0,1} \rangle \end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} M_2(H, \varepsilon) &= \langle p_{i-1,l_{i-1}}, q_{i-1,l_{i-1}}, Q, q_{i+1,1}, p_{i+1,1}, P, p_{i-1,l_{i-1}} \rangle \\ &= \langle p_{1-1,l_{1-1}}, q_{1-1,l_{1-1}}, Q, q_{1+1,1}, p_{1+1,1}, P, p_{1-1,l_{1-1}} \rangle \\ &= \langle p_{0,6}, q_{0,6}, Q, q_{2,1}, p_{2,1}, P, p_{0,6} \rangle \end{aligned}$$



Gambar 2.9 Graf dengan $n(V(G)) = 4$, $k = 4$ dan $l_i = 6$ dan M_2

Operasi M_3 dan M_4

H adalah sirkuit (cycle) Hamiltonian dari $G \setminus \{x_{i+1}\}$. Misal $H = \langle x_0, x_1, x_2, x_3, x_0 \rangle$ dan $C = \langle x_0, x_1, x_2, x_3, x_0 \rangle$ sehingga $H_C^s = \langle x_0, p_{0,1}, p_{0,2}, p_{0,3}, p_{0,4}, p_{0,5}, p_{0,6}, x_1, p_{1,1}, p_{1,2}, p_{1,3}, p_{1,4}, p_{1,5}, p_{1,6}, x_2, p_{2,1}, p_{2,2}, p_{2,3}, p_{2,4}, p_{2,5}, p_{2,6}, x_3 \rangle$

$$p_{3,1}, p_{3,2}, p_{3,3}, p_{3,4}, p_{3,5}, p_{3,6}, x_0 \rangle$$

dan

$$\begin{aligned} \Omega_H &= \langle q_{0,1}, q_{0,2}, q_{0,3}, q_{0,4}, q_{0,5}, q_{0,6}, q_{1,1}, q_{1,2}, q_{1,3}, q_{1,4}, q_{1,5}, q_{1,6}, q_{2,1}, q_{2,2}, q_{2,3}, q_{2,4}, q_{2,5}, q_{2,6}, q_{3,1}, q_{3,2}, q_{3,3}, q_{3,4}, q_{3,5}, q_{3,6}, q_{0,1} \rangle \end{aligned}$$

Ambil $i = 1$, $j = 3$ untuk M_3 , $j = 4$ untuk M_4 , dan $l_i = 6$, maka ketika $x_{1+1} = x_2$ tidak ada di H,

$\langle x_{1-1}, x_1, z_1 \rangle = \langle x_0, x_1, z_1 \rangle$ dan $\langle x_{1+3}, x_{1+2}, z_{1+2} \rangle = \langle x_3, z_3 \rangle$ adalah *subpath* dari H, karena x_4 tidak ada di G maka x_4 dihilangkan dari *subpath* di H.

$\langle q_{1,1}, \Omega_{q1}, q_{1,l_1}, q_{1+1,1}, \Omega_{q_{1+1}}, q_{1+1,l_{1+1}} \rangle$ adalah *subpath* dari Ω_H .

$$\begin{aligned} \Omega_{q1} &= \langle q_{1,1}, p_{1,1}, p_{1,2}, q_{1,2}, q_{1,3}, p_{1,3}, p_{1,4}, q_{1,4}, q_{1,5}, p_{1,5}, p_{1,6}, q_{1,6}, q_{2,1}, p_{2,1}, p_{2,2}, q_{2,2}, q_{2,3}, p_{2,3}, p_{2,4}, q_{2,4}, q_{2,5}, p_{2,5}, p_{2,6}, q_{2,6}, p_{1,1}, q_{1,1}, q_{1,2}, p_{1,2}, p_{1,3}, q_{1,3}, q_{1,4}, p_{1,4}, p_{1,5}, q_{1,5}, q_{1,6}, p_{1,6}, p_{2,1}, q_{2,1}, q_{2,2}, p_{2,2}, p_{2,3}, q_{2,3}, q_{2,4}, p_{2,4}, p_{2,5}, q_{2,5}, q_{2,6}, p_{2,6} \rangle \end{aligned}$$

Q adalah *path* dari $q_{1+2,1}$ ke $q_{1,1}$ sehingga

$$\begin{aligned} Q &= \Omega_H - \langle q_{1,1}, \Omega_{q_2}, q_{1,l_1}, q_{1+1,1}, \Omega_{q_{1+1}}, q_{1+1,l_{1+1}}, q_{1+2,1} \rangle \\ &= \Omega_H - \langle q_{1,1}, \Omega_{q_2}, q_{1,6}, q_{2,1}, \Omega_{q_2}, q_{2,l_2}, q_{3,1} \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \langle q_{0,1}, q_{0,2}, q_{0,3}, q_{0,4}, q_{0,5}, q_{0,6}, q_{1,1}, q_{1,2}, q_{1,3}, q_{1,4}, q_{1,5}, q_{1,6}, q_{2,1}, q_{2,2}, q_{2,3}, q_{2,4}, q_{2,5}, q_{2,6}, q_{3,1}, q_{3,2}, q_{3,3}, q_{3,4}, q_{3,5}, q_{3,6}, q_{0,1} \rangle - \langle q_{1,1}, q_{1,1}, p_{1,1}, p_{1,2}, q_{1,2}, q_{1,3}, p_{1,3}, q_{1,4}, p_{1,4}, p_{1,5}, q_{1,5}, q_{1,6}, p_{1,6}, q_{1,6}, q_{2,1}, q_{2,1}, p_{2,1}, p_{2,2}, q_{2,2}, q_{2,3}, p_{2,3}, q_{2,4}, p_{2,4}, p_{2,5}, q_{2,5}, q_{2,6}, p_{2,6}, q_{3,1} \rangle \\ &= \langle q_{0,1}, q_{0,2}, q_{0,3}, q_{0,4}, q_{0,5}, q_{0,6}, q_{1,1}, p_{1,1}, p_{1,2}, p_{1,3}, p_{1,4}, p_{1,5}, p_{1,6}, p_{2,1}, p_{2,2}, p_{2,3}, p_{2,4}, p_{2,5}, p_{2,6}, q_{3,1}, q_{3,2}, q_{3,3}, q_{3,4}, q_{3,5}, q_{3,6}, q_{0,1} \rangle \end{aligned}$$

Ketika x_2 tidak ada di H maka

$$\langle p_{1,1}, p_{1,2}, p_{1,3}, p_{1,4}, p_{1,5}, p_{1,6}, p_{2,1}, p_{2,2}, p_{2,3}, p_{2,4}, p_{2,5}, p_{2,6} \rangle$$

tidak ada di H, sehingga

$$Q = \langle q_{0,1}, q_{0,2}, q_{0,3}, q_{0,4}, q_{0,5}, q_{0,6}, q_{1,1}, q_{3,1}, q_{3,2}, q_{3,3}, q_{3,4}, q_{3,5}, q_{3,6}, q_{0,1} \rangle$$

$$= \langle q_{3,1}, q_{3,2}, q_{3,3}, q_{3,4}, q_{3,5}, q_{3,6}, q_{0,1}, q_{0,2}, q_{0,3}, q_{0,4}, q_{0,5}, q_{0,6}, q_{1,1} \rangle$$

$$= \{ (q_{3,1}, q_{3,2}), (q_{3,2}, q_{3,3}), (q_{3,3}, q_{3,4}), (q_{3,4}, q_{3,5}), (q_{3,5}, q_{3,6}), (q_{3,6}, q_{0,1}), (q_{0,1}, q_{0,2}), (q_{0,2}, q_{0,3}), (q_{0,3}, q_{0,4}), (q_{0,4}, q_{0,5}), (q_{0,5}, q_{0,6}), (q_{0,6}, q_{1,1}) \}$$

P adalah path dari x_{1+2} ke $p_{1+2,1}$ sehingga

$$P = H_C^* - (x_{1+2}, p_{1+2,1})$$

$$= \langle x_0, p_{0,1}, p_{0,2}, p_{0,3}, p_{0,4}, p_{0,5}, p_{0,6}, x_1, p_{1,1}, p_{1,2}, p_{1,3}, p_{1,4}, p_{1,5}, p_{1,6}, x_2, p_{2,1}, p_{2,2}, p_{2,3}, p_{2,4}, p_{2,5}, p_{2,6}, x_3, p_{3,1}, p_{3,2}, p_{3,3}, p_{3,4}, p_{3,5}, p_{3,6}, x_0 \rangle$$

$$- (x_{1+2}, p_{1+2,1})$$

$$= \langle x_0, p_{0,1}, p_{0,2}, p_{0,3}, p_{0,4}, p_{0,5}, p_{0,6}, x_1, p_{1,1}, p_{1,2}, p_{1,3}, p_{1,4}, p_{1,5}, p_{1,6}, x_2, p_{2,1}, p_{2,2}, p_{2,3}, p_{2,4}, p_{2,5}, p_{2,6}, p_{3,2}, p_{3,3}, p_{3,4}, p_{3,5}, p_{3,6}, x_0 \rangle$$

$$P = \langle x_0, p_{0,1}, p_{0,2}, p_{0,3}, p_{0,4}, p_{0,5}, p_{0,6}, x_1, p_{1,1}, p_{1,2}, p_{1,3}, p_{1,4}, p_{1,5}, p_{1,6}, x_2, p_{2,1}, p_{2,2}, p_{2,3}, p_{2,4}, p_{2,5}, p_{2,6}, p_{3,2}, p_{3,3}, p_{3,4}, p_{3,5}, p_{3,6}, x_0 \rangle$$

ketika x_2 tidak ada di H, maka $\langle x_0, x_1, z_1 \rangle$ dan $\langle x_3, z_3 \rangle$ subpath dari H dan $\langle p_{1,1}, p_{1,2}, p_{1,3}, p_{1,4}, p_{1,5}, p_{1,6}, p_{2,1}, p_{2,2}, p_{2,3}, p_{2,4}, p_{2,5}, p_{2,6} \rangle$ tidak ada di H juga, sehingga

$$P = \langle x_0, p_{0,1}, p_{0,2}, p_{0,3}, p_{0,4}, p_{0,5}, p_{0,6}, x_1, p_{3,2}, p_{3,3}, p_{3,4}, p_{3,5}, p_{3,6}, x_0 \rangle$$

$$= \langle p_{3,2}, p_{3,3}, p_{3,4}, p_{3,5}, p_{3,6}, x_0, p_{0,1}, p_{0,2}, p_{0,3}, p_{0,4}, p_{0,5}, p_{0,6}, x_1 \rangle$$

$$= \langle p_{3,2}, p_{3,3}, p_{3,4}, p_{3,5}, p_{3,6}, x_0, p_{0,1}, p_{0,2}, p_{0,3}, p_{0,4}, p_{0,5}, p_{0,6}, x_1, z_1, x_3, z_3 \rangle$$

$$M_3(H, e) = \langle p_{1+2,1}, q_{1+2,1}, Q, q_{1,1}, p_{1,1}, p_{1,2}, q_{1,2}, q_{1,3}, q_{1,3+1}, p_{1,3+1}, p_{1,3+2}, q_{1,3+2}, q_{1,6}, p_{1,1,2}, x_{1+1}, p_{1+1,1}, \Omega_{p_{1+1}}, p_{1+1,1,2+1}, x_{1+2}, P, p_{1+2,1} \rangle$$

$$= \langle p_{3,1}, q_{3,1}, Q, q_{1,1}, p_{1,1}, p_{1,2}, q_{1,2}, q_{1,3}, q_{1,4}, p_{1,4}, p_{1,5}, q_{1,5}, q_{1,6}, p_{1,6}, x_2, p_{2,1}, \Omega_{p_2}, p_{2,6}, x_3, P, p_{3,1} \rangle$$

$$= \langle p_{3,1}, q_{3,1}, q_{3,1}, q_{3,2}, q_{3,3}, q_{3,4}, q_{3,5}, q_{3,6}, q_{0,1}, q_{0,2}, q_{0,3}, q_{0,4}, q_{0,5}, q_{0,6}, q_{1,1}, q_{1,1}, p_{1,1}, p_{1,2}, q_{1,2}, q_{1,3}, q_{1,4}, p_{1,4}, p_{1,5}, q_{1,5}, q_{1,6}, p_{1,6}, x_2, p_{2,1}, p_{2,1}, q_{2,1}, q_{2,2}, p_{2,2}, p_{2,3}, q_{2,3}, q_{2,4}, p_{2,4}, p_{2,5}, q_{2,5}, q_{2,6}, p_{2,6}, p_{2,6}, x_3, p_{3,2}, p_{3,3}, p_{3,4}, p_{3,5}, p_{3,6}, x_0, p_{0,1}, p_{0,2}, p_{0,3}, p_{0,4}, p_{0,5}, p_{0,6}, x_1, z_1, x_3, z_3, p_{3,1} \rangle$$

$$= \langle p_{3,1}, q_{3,1}, q_{3,2}, q_{3,3}, q_{3,4}, q_{3,5}, q_{3,6}, q_{0,1}, q_{0,2}, q_{0,3}, q_{0,4}, q_{0,5}, q_{0,6}, q_{1,1}, p_{1,1}, p_{1,2}, q_{1,2}, q_{1,3}, q_{1,4}, p_{1,4}, p_{1,5}, q_{1,5}, q_{1,6}, p_{1,6}, x_2, p_{2,1}, q_{2,1}, q_{2,2}, p_{2,2}, p_{2,3}, q_{2,3}, q_{2,4}, p_{2,4}, p_{2,5}, q_{2,5}, q_{2,6}, p_{2,6}, x_3, z_3, z_1, x_1, p_{0,1}, p_{0,2}, p_{0,3}, p_{0,4}, p_{0,5}, p_{0,6}, x_0, p_{3,2}, p_{3,3}, p_{3,4}, p_{3,5}, p_{3,6}, p_{3,1} \rangle$$

$M_4(H, e)$

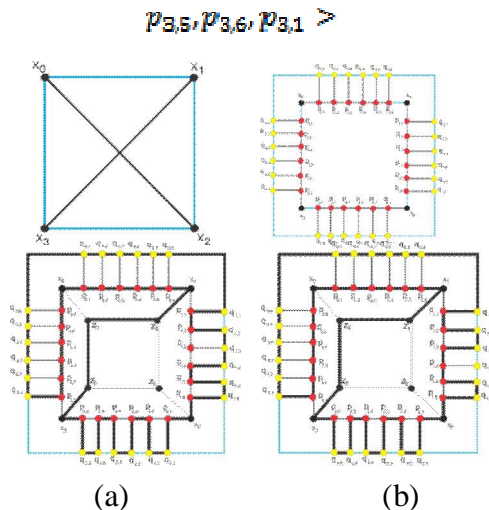
$$= \langle p_{1+2,1}, q_{1+2,1}, Q, q_{1,1}, p_{1,1}, p_{1,2}, q_{1,2}, q_{1,4-1}, p_{1,4-1}, p_{1,4}, p_{1,4+1}, q_{1,4+1}, q_{1,4+2}, p_{1,4+2}, x_{1+1}, p_{1+1,1}, \Omega_{p_{1+1}}, p_{1+1,1,2+1}, x_{1+2}, P, p_{1+2,1} \rangle$$

$M_4(H, e)$

$$= \langle p_{3,1}, q_{3,1}, Q, q_{1,1}, p_{1,1}, p_{1,2}, q_{1,2}, q_{1,3}, p_{1,3}, p_{1,4}, p_{1,5}, q_{1,5}, q_{1,6}, p_{1,6}, x_2, p_{2,1}, \Omega_{p_2}, p_{2,1,2}, x_3, P, p_{3,1} \rangle$$

$$= \langle p_{3,1}, q_{3,1}, q_{3,1}, q_{3,2}, q_{3,3}, q_{3,4}, q_{3,5}, q_{3,6}, q_{0,1}, q_{0,2}, q_{0,3}, q_{0,4}, q_{0,5}, q_{0,6}, q_{1,1}, q_{1,1}, p_{1,1}, p_{1,2}, q_{1,2}, q_{1,3}, p_{1,3}, p_{1,4}, p_{1,5}, q_{1,5}, q_{1,6}, p_{1,6}, x_2, p_{2,1}, p_{2,1}, q_{2,1}, q_{2,2}, p_{2,2}, p_{2,3}, q_{2,3}, q_{2,4}, p_{2,4}, p_{2,5}, q_{2,5}, q_{2,6}, p_{2,6}, p_{2,6}, x_3, x_0, p_{0,1}, p_{0,2}, p_{0,3}, p_{0,4}, p_{0,5}, p_{0,6}, x_1, p_{1,1}, p_{1,2}, p_{1,3}, p_{1,4}, p_{1,5}, p_{1,6}, p_{3,2}, p_{3,3}, p_{3,4}, p_{3,5}, p_{3,6}, x_0, p_{3,1} \rangle$$

$$= \langle p_{3,1}, q_{3,1}, q_{3,2}, q_{3,3}, q_{3,4}, q_{3,5}, q_{3,6}, q_{0,1}, q_{0,2}, q_{0,3}, q_{0,4}, q_{0,5}, q_{0,6}, q_{1,1}, p_{1,1}, p_{1,2}, q_{1,2}, q_{1,3}, p_{1,3}, p_{1,4}, p_{1,5}, q_{1,5}, q_{1,6}, p_{1,6}, x_2, p_{2,1}, q_{2,1}, q_{2,2}, p_{2,2}, p_{2,3}, q_{2,3}, q_{2,4}, p_{2,4}, p_{2,5}, q_{2,5}, q_{2,6}, p_{2,6}, p_{2,6}, x_3, z_3, z_1, x_1, x_0, p_{0,1}, p_{0,2}, p_{0,3}, p_{0,4}, p_{0,5}, p_{0,6}, p_{3,2}, p_{3,3}, p_{3,4}, p_{3,5}, p_{3,6}, p_{3,1} \rangle$$



Gambar 2.10 Graf dengan $n(V(G)) = 4$, $k = 4$ dan $l_i = 6$ dan (a) M_3 dan (b) M_4

Operasi M_5 dan M_6

Ambil $i = 1$, $j = 4$ untuk M_5 , $j = 3$ untuk M_6 , dan $l_i = 6$, sehingga

H adalah sirkuit (cycle) Hamiltonian dari

$$G \setminus \{x_1\}.$$

Misal $H = \langle x_0, x_1, x_2, x_3, x_0 \rangle$ dan

$C = \langle x_0, x_1, x_2, x_3, x_0 \rangle$ sehingga

$$H_C^* = \langle x_0, p_{0,1}, p_{0,2}, p_{0,3}, p_{0,4}, p_{0,5}, p_{0,6}, x_1, p_{1,1}, p_{1,2}, p_{1,3}, p_{1,4}, p_{1,5}, p_{1,6}, x_2, p_{2,1}, p_{2,2}, p_{2,3}, p_{2,4}, p_{2,5}, p_{2,6}, x_3, p_{3,1}, p_{3,2}, p_{3,3}, p_{3,4}, p_{3,5}, p_{3,6}, x_0 \rangle$$

dan

$$\Omega_H = \langle q_{0,1}, q_{0,2}, q_{0,3}, q_{0,4}, q_{0,5}, q_{0,6}, q_{1,1}, q_{1,2}, q_{1,3}, q_{1,4}, q_{1,5}, q_{1,6}, q_{2,1}, q_{2,2}, q_{2,3}, q_{2,4}, q_{2,5}, q_{2,6}, q_{3,1}, q_{3,2}, q_{3,3}, q_{3,4}, q_{3,5}, q_{3,6}, q_{0,1} \rangle.$$

$$\Omega_{q_0} = \langle q_{0,1}, p_{0,1}, p_{0,2}, q_{0,2}, q_{0,3}, p_{0,3}, p_{0,4}, q_{0,4}, q_{0,5}, p_{0,5}, p_{0,6}, q_{0,6} \rangle$$

$$\Omega_{q_1} = \langle q_{1,1}, p_{1,1}, p_{1,2}, q_{1,2}, q_{1,3}, p_{1,3}, p_{1,4}, q_{1,4}, q_{1,5}, p_{1,5}, p_{1,6}, q_{1,6} \rangle$$

$$\Omega_{p_0} = \langle p_{0,1}, q_{0,1}, q_{0,2}, p_{0,2}, p_{0,3}, q_{0,3}, q_{0,4}, p_{0,4}, p_{0,5}, q_{0,5}, q_{0,6}, p_{0,6} \rangle$$

Ketika $x_i = x_1$ tidak ada di H maka,

$$\langle p_{0,1}, p_{0,2}, p_{0,3}, p_{0,4}, p_{0,5}, p_{0,6}, x_1, p_{1,1}, p_{1,2}, p_{1,3}, p_{1,4}, p_{1,5}, p_{1,6} \rangle$$

tidak ada di H dan $\langle x_3, x_2, x_0, z_2, z_3, z_0 \rangle$ subpath dari H sehingga

$$H_C^* = \langle x_0, x_2, p_{2,1}, p_{2,2}, p_{2,3}, p_{2,4}, p_{2,5}, p_{2,6}, x_3, p_{3,1}, p_{3,2}, p_{3,3}, p_{3,4}, p_{3,5}, p_{3,6}, x_0 \rangle$$

$$\Omega_H = \langle q_{2,1}, q_{2,2}, q_{2,3}, q_{2,4}, q_{2,5}, q_{2,6}, q_{3,1}, q_{3,2}, q_{3,3}, q_{3,4}, q_{3,5}, q_{3,6} \rangle.$$

$$\Omega_{q_0} = \langle q_{0,1}, q_{0,2}, q_{0,3}, q_{0,4}, q_{0,5}, q_{0,6} \rangle$$

$$\Omega_{q_1} = \langle q_{1,1}, q_{1,2}, q_{1,3}, q_{1,4}, q_{1,5}, q_{1,6} \rangle$$

Q adalah suatu path dari $q_{i,l_i} = q_{1,6}$ ke

$$q_{i-2,l_{i-2}} = q_{3,6}$$

$$Q = \Omega_H - (q_{i-2,l_{i-2}}, q_{i-1,1}, \Omega_{q_{i-1}}, q_{i-1,l_{i-1}}, q_{i,1}, \Omega_{q_i}, q_{i,l_i}) = \langle q_{2,1}, q_{2,2}, q_{2,3}, q_{2,4}, q_{2,5}, q_{2,6}, q_{3,1}, q_{3,2}, q_{3,3}, q_{3,4}, q_{3,5}, q_{3,6}, q_{0,1}, q_{3,6}, q_{0,1}, \Omega_{q_0}, q_{0,6}, q_{1,1}, \Omega_{q_1}, q_{1,6}, q_{1,6}, q_{2,1}, q_{2,2}, q_{2,3}, q_{2,4}, q_{2,5}, q_{2,6}, q_{3,1}, q_{3,2}, q_{3,3}, q_{3,4}, q_{3,5}, q_{3,6} \rangle$$

P adalah path dari $p_{i-2,l_{i-2}} = p_{3,6}$ ke

$$x_{1-1} = x_0$$

$$P =$$

$$H_C^* - \langle x_{i-1}, p_{i-2,l_{i-2}} \rangle = H_C^* - \langle x_0, p_{3,6} \rangle$$

$$= \langle x_0, x_2, p_{2,1}, p_{2,2}, p_{2,3}, p_{2,4}, p_{2,5}, p_{2,6}, x_3, p_{3,1}, p_{3,2}, p_{3,3}, p_{3,4}, p_{3,5}, p_{3,6}, x_0 \rangle$$

$$\langle x_0, p_{3,6} \rangle = \langle x_0, x_2, p_{2,1}, p_{2,2}, p_{2,3}, p_{2,4}, p_{2,5}, p_{2,6}, x_3, p_{3,1}, p_{3,2}, p_{3,3}, p_{3,4}, p_{3,5}, p_{3,6}, x_0 \rangle - \langle x_0, p_{3,6} \rangle$$

$$= \langle x_0, x_2, p_{2,1}, p_{2,2}, p_{2,3}, p_{2,4}, p_{2,5}, p_{2,6}, x_3, p_{3,1}, p_{3,2}, p_{3,3}, p_{3,4}, p_{3,5}, p_{3,6}, z_2, z_3, z_0, x_0 \rangle$$

$$M_5(H, x) = \langle x_{1-1}, p_{1-1,1}, \Omega_{p_{1-1}},$$

$$p_{1-1,l_{1-1}}, x_1, p_{1,1}, q_{1,1}, q_{1,2},$$

$$p_{1,2}, p_{1,3}, q_{1,4-1}, q_{1,4}, q_{1,4+1},$$

$$p_{1,4+1}, p_{1,4+2}, q_{1,4+2}, Q, q_{3,6},$$

$$p_{3,6}, P, x_{1-1} \rangle$$

$$= \langle x_0, p_{0,1}, \Omega_{p_0}, p_{0,6}, x_1, p_{1,1},$$

$$q_{1,1}, q_{1,2}, p_{1,2}, p_{1,3}, q_{1,3}, q_{1,4},$$

$$q_{1,5}, p_{1,5}, p_{1,6}, q_{1,6}, Q, q_{3,6}, p_{3,6}, P, x_0 \rangle$$

$$= \langle x_0, p_{0,1}, p_{0,1}, q_{0,1}, q_{0,2},$$

$$p_{0,2}, p_{0,3}, q_{0,3}, q_{0,4}, p_{0,4}, p_{0,5},$$

$$q_{0,5}, q_{0,6}, p_{0,6}, p_{0,6}, x_1, p_{1,1}, q_{1,1},$$

$$q_{1,2}, p_{1,2}, p_{1,3}, q_{1,3}, q_{1,4}, q_{1,5},$$

$$p_{1,5}, p_{1,6}, q_{1,6}, q_{1,6}, q_{2,1}, q_{2,2},$$

$$q_{2,3}, q_{2,4}, q_{2,5}, q_{2,6}, q_{3,1}, q_{3,2},$$

$$q_{3,3}, q_{3,4}, q_{3,5}, q_{3,6}, q_{3,6}, p_{3,6},$$

$$x_0, x_2, p_{2,1}, p_{2,2}, p_{2,3}, p_{2,4}, p_{2,5},$$

$$p_{2,6}, x_3, p_{3,1}, p_{3,2}, p_{3,3}, p_{3,4},$$

$$p_{3,5}, p_{3,6}, z_2, z_3, z_0, x_0, x_0 \rangle$$

$$= \langle x_0, p_{0,1}, q_{0,1}, q_{0,2}, p_{0,2},$$

$$p_{0,3}, q_{0,3}, q_{0,4}, p_{0,4}, p_{0,5}, q_{0,5},$$

$$q_{0,6}, p_{0,6}, x_1, p_{1,1}, q_{1,1}, q_{1,2},$$

$$p_{1,2}, p_{1,3}, q_{1,3}, q_{1,4}, q_{1,5}, p_{1,5},$$

$$p_{1,6}, q_{1,6}, q_{2,1}, q_{2,2}, q_{2,3}, q_{2,4},$$

$q_{2,5}, q_{2,6}, q_{3,1}, q_{3,2}, q_{3,3}, q_{3,4},$
 $q_{3,5}, q_{3,6}, p_{3,6}, x_0, x_2, p_{2,1},$
 $p_{2,2}, p_{2,3}, p_{2,4}, p_{2,5}, p_{2,6}, x_3,$
 $p_{3,1}, p_{3,2}, p_{3,3}, p_{3,4}, p_{3,5}, p_{3,6}, z_2,$
 $z_3, z_0, x_0 >$

$$M_6(H, x) = \langle x_{1-1}, p_{1-1,1}, \Omega_{p_{1-1}},$$

$$p_{1-1,1-1}, x_1, p_{1,1}, q_{1,1}, q_{1,2},$$

$$p_{1,2}, p_{1,3}, p_{1,3+1}, q_{1,3+1}, q_{1,3+2},$$

$$p_{1,3+2}, q_{1,l_1}, Q, q_{3,6},$$

$$p_{3,6}, P, x_{1-1} >$$

$$= \langle x_0, p_{0,1}, \Omega_{p_0}, p_{0,6}, x_1, p_{1,1},$$

$$q_{1,1}, q_{1,2}, p_{1,2}, p_{1,3}, p_{1,4}, q_{1,4},$$

$$q_{1,5}, p_{1,5}, q_{1,6}, Q, q_{3,6},$$

$$p_{3,6}, P, x_0 >$$

$$= \langle x_0, p_{0,1}, q_{0,1}, q_{0,2}, p_{0,2}, p_{0,3},$$

$$q_{0,3}, q_{0,4}, p_{0,4}, p_{0,5}, q_{0,5}, q_{0,6}, p_{0,6},$$

$$x_1, p_{1,1}, q_{1,1}, q_{1,2}, p_{1,2}, p_{1,3}, p_{1,4},$$

$$q_{1,4}, q_{1,5}, p_{1,5}, q_{1,6}, q_{2,1}, q_{2,2},$$

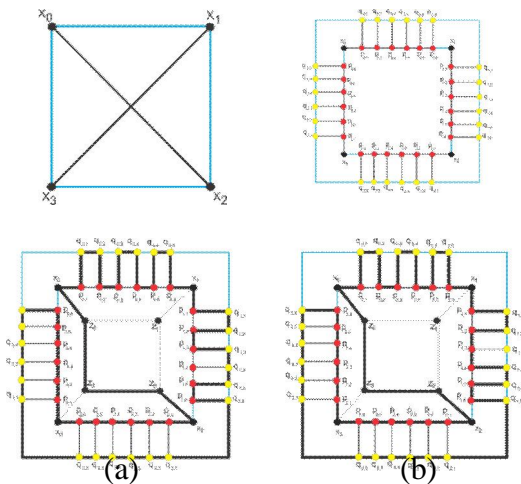
$$q_{2,3}, q_{2,4}, q_{2,5}, q_{2,6}, q_{3,1}, q_{3,2}, q_{3,3},$$

$$q_{3,4}, q_{3,5}, q_{3,6}, p_{3,6}, x_2, p_{2,1}, p_{2,2},$$

$$p_{2,3}, p_{2,4}, p_{2,5}, p_{2,6}, x_3, p_{3,1}, p_{3,2},$$

$$p_{3,3}, p_{3,4}, p_{3,5}, p_{3,6}, z_2,$$

$$z_3, z_0, x_0 >$$



Gambar 2.11 Graf dengan $n(V(G)) = 4$, $k = 4$ dan $l_i = 6$ dan (a) M_5 dan (b) M_6

3. PENUTUP

Dari penelitian yang telah dilakukan

pada Graf Kubik dengan $n(V(G)) = 4, 6, 8$, yang diperluas dengan $k = 3$ dan $l_i = 2, 4, 6, \dots, s$ maka dapat disimpulkan sebagai berikut: Persamaan umum jumlah titik pada cycle extension adalah

$$n(V(Ext_C(G))) = n(V(G)) + 2k l_i$$

Persamaan umum jumlah sisi pada cycle extension adalah

$$n(E(Ext_C(G))) = n(E(G)) + 3k l_i$$

Rekonstruksi sirkuit operasi M_1 pada cycle extension graf kubik menghasilkan suatu sirkuit yang tidak Hamiltonian dan rekonstruksi sirkuit pada operasi M_2, M_3, M_4, M_5 , dan M_6 pada cycle extension graf kubik menghasilkan suatu sirkuit Hamiltonian.

4. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Deo, N. (1989), *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*, Prentice Hall Inc, New York.
- [2] Hsu, Lih-Hsing and Lin, Cheng-Kuan. (2009), *Graph Theory and Interconnection Networks*, CRC Press, New York.
- [3] Munir, Rinaldi. (2005), *Matematika Diskrit*. Informatika, Bandung.
- [4] Siang, J. J. (2002), *Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer*. Andi, Yogyakarta.
- [5] Sjostrand, J. (2005), The Cover Pebbling Theorem. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 12 : 1-5
- [6] Teng, Y.H., Tan, J.J.M., Hsu, L.H. (2005), *Honeycomb Rectangular Disk*. Parallel Computing, 31
- [7] Wilson, J. R. and Jhon J. Watkins. (1990), *Graph an Introducing Approach*. Jhon Wiley and Sons, inc., New York.