BARISAN SIMBOL DAN UKURAN INVARIAN FUNGSI MONOTON SEPOTONG-SEPOTONG KONTINU

Rinurwati
Jurusan Matematika FMIPA-ITS
Jl. Arif Rahman Hakim
Surabaya 60111

Abstract. Let g $[0,1] \rightarrow [0,1]$ is piecewise continuous monotone function. In this paper we going to construct g-invariant measure from piecewise continuous monotone function g using minus symbol sequences and plus symbol sequences. This space is generalization from invariant measure piecewise linear transformation.

Keywords: piecewise monotone function, minus symbol sequences, plus symbol sequences, *g*-invariant measure.

1. PENDAHULUAN

Fungsi monoton sepotong-sepotong kontinu g mempunyai ukuran invarian kontinu mutlak terhadap ukuran Lebesgue yang ekstensinya dijamin oleh penelitian Lasota dan Yorke [4]. Berdasarkan kenyataan ini Kopf [2] mengkontruksi ukuran g-invarian kontinu mutlak terhadap ukuran Lebesgue tanpa barisan simbol. Kemudian penyajiannya diperbaiki sendiri oleh Kopf [3] dengan menggunakan barisan simbol. Penelitian Kopf [3] ini direview oleh Rinurwati menjadi Tesisnya [5] dengan cara melengkapi lemma dan bukti-buktinya. Dalam paper ini dikonstruksi ukuran g-invarian kontinu mutlak terhadap ukuran Lebesgue dengan g adalah fungsi monoton sepotong-sepotong kontinu.

2. TEORI DASAR

Konsep dasar yang digunakan dalam pembahasan dirujuk dari [6] dan [7]. Pengertian-pengertian itu adalah ruang ukuran, dan ukuran kontinu mutlak.

2.1 Ruang Ukuran

Definisi 2.1[7] *Diberikan X himpunan sebarang,* $\neq$. $-$ *didefinisikan sebagai koleksi himpunan bagian - himpunan bagian X yang memenuhi tiga syarat berikut :*

(i)
(ii) *Jika B maka* \
(iii) *Jika untuk* ≥ 1 *maka* ∞

Selanjutnya pasangan (X,) disebut ruang terukur.

Definisi 2.2 [7] *Diberikan X himpunan sebarang,* $\neq$. $=$ $-$ *himpunan bagian-himpunan bagian X. Ukuran pada (X,) adalah fungsi* $\rightarrow$ *yang memenuhi :*

(i) $( ) = 0$
(ii) $(\; ^{\infty} \;) =$ $\sum^{\infty}$ $( )$ *dengan* $\{ \; | \; =$ $1, 2, 3, ...\}$ *adalah barisan anggota-anggota yang merupakan himpunan bagian-himpunan bagian X yang sepasang-sepasang saling asing.*

Selanjutnya triple (X, , m) disebut ruang ukuran dengan (X,) ruang terukur dan m ukuran pada (X,). Triple (X, , m) disebut ruang probabilitas atau ruang ukuran ternormalisir jika m(X) = 1. Kemudian m disebut ukuran probabilitas pada (X,).

2.2 Ukuran Kontinu Mutlak

Definisi 2.3 [6] *Diberikan suatu ukuran pada (X,) dan f fungsi terukur nonnegatif pada X. Didefinisikan* $\rightarrow$ *dengan*

$( )$

Jadi v adalah fungsi himpunan terdefinisi pada **,** *v terjumlah terbilang dan merupakan suatu ukuran.*

Definisi 2.4[7] *Diberikan (X,) ruang terukur dan , ukuran-ukuran probabilitas pada (X,). dikatakan kontinu mutlak terhadap v ditulis*

$( ) = 0$ *untuk semua*

maka $( ) = 0$.

3. UKURAN INVARIAN FUNGSI MONOTON SEPOTONG-SEPOTONG KONTINU

Eksistensi ukuran *g*-invarian kontinu mutlak terhadap ukuran Lesbegue fungsi monoton sepotong-sepotong kontinu *g* dijamin oleh Lasota dan Yorke [4].

Berdasarkan kenyataan di atas, berikut ini dikonstruksi ukuran *g*-invarian tersebut dengan menggunakan barisan simbol, dengan terlebih dahulu dibahas pengertian fungsi monoton sepotong-sepotong kontinu**,** barisan simbol, *g*-ekspansi, dan matriks fundamental yang merupakan generalisasi penelitian Rinurwati [5].

3.1 Fungsi Monoton Sepotong-sepotong Kontinu

Definisi 3.1[3] *Fungsi* $: \rightarrow$ *dengan I=[0,1] disebut fungsi monoton sepotong-sepotong kontinu jika terdapat bilangan asli* ≥ 2 *terdapat bilangan real* $, \ldots ,$ *dengan* $0 = \; < \; < \; <$ $< \; = 1$ *serta untuk i = 1, …, N terdapat bilangan real dengan* $| \; | > 1$ *sehingga*

$$( ) = \quad +$$

$$< \quad <$$

Interval ($,$ *) disebut interval penuh jika* $+ \; , \; + \; \{0,1\}$.

Dalam hal ini $, \ldots ,$ *disebut titik-titik partisi fungsi g.*

Jika *g : I* → fungsi monoton sepotong-sepotong kontinu dengan titik-titik partisi $, \ldots ,$ maka *N* tidak perlu minimal. Nilai *g( )* dapat dipilih sebarang dalam *I* untuk *j = 1, …. , N-1.*

Definisi 3.2[3] *Diberikan g : I* → *fungsi monoton sepotong-sepotong kontinu dengan titik-titik partisi* $, \ldots ,$. *Didefinisikan*

$$( ) = \qquad ( ) = \; ( )$$

untuk semua .

Untuk ≥ 2, *menyatakan komposisi k kali dari g, yaitu* $= \quad \ldots$ *sebanyak k komposisi. Untuk dan* ≥ 0 *didefinisikan*

$= \{ \quad | \; ( ) \quad \}$ *dan* $= \{ \; ( )| \quad \}$.

3.2 Barisan Simbol

Lemma 3.1[3] *Diberikan g : I* → *fungsi monoton sepotong-sepotong kontinu dengan titik-titik partisi* $, \ldots ,$.

(i) *Untuk setiap* $(0, \;]$ *dan* ≥ 0 *terdapat* $( ) > 0$ *dan* $\{1, \ldots , \; \}$ *sehingga*

$$- \; ( ), \qquad , \quad .$$

(ii) *Untuk setiap* $[0, \;)$ *dan* ≥ 0 *terdapat* $( ) > 0$ *dan* $\{1, \ldots , \; \}$ *sehingga*

$$, \; + \; ( ) \qquad , \quad .$$

Untuk setiap didefinisikan barisan tak hingga $= (\; (0), \; (1), \ldots)$ dan $= (\; (0), \; (1), \ldots)$ bilangan-bilangan bulat $( ), \; ( ) \; \{1, \ldots , \; \}$ sebagai berikut :

Definisi 3.3[3] *Diberikan g : I* → *fungsi monoton sepotong-sepotong kontinu dengan titik-titik partisi* $, \ldots ,$. *Untuk* $(0,1]$ *suku ke-k barisan* $=$ $(\; (0), \; (1), \ldots)$ *didefinisikan dengan*

$( ) = ($ $=$ *pada Lemma 3.1 (i)) jika dan hanya jika*

$$< \; ( ) < \qquad ,$$

$$< \qquad - \; ( ), \qquad (1)$$

$( ) = ($ $=$ *pada Lemma 3.1 (ii)) jika dan hanya jika*

$$< \; ( ) < \qquad ,$$

$$< \qquad , \; + \; ( ) \qquad (2)$$

Barisan dan masing-masing disebut barisan simbol minus dan barisan simbol *plus titik x dan tak tergantung pada nilai untuk j = 1, …. , N-1*

Tanpa mengurangi keumuman diasumsikan *(0), (1)* $\{0,1\}$. Hal ini dapat dicapai dengan cara memperluas dan mentransformasikan interval *I* dengan transformasi affin yang sesuai. Dengan cara demikian barisan simbol dan , $1 \leq \quad \leq \quad - 1$ sisanya tak berubah.

3.3 -Ekspansi

Diberikan *:I →* fungsi monoton sepotong-sepotong kontinu dengan titik-titik partisi s , … , s . Dengan pengertian barisan simbol dan didefinisikan barisan orbit $= (\quad (0), \quad (1), \dots)$ dan $= (\quad (0), \quad (1), \dots)$ bilangan-bilangan real $(\ ),\ (\ )$ dengan cara sebagai berikut :

Definisi 3.4[3] *Diberikan :I → fungsi monoton sepotong-sepotong kontinu dengan titik-titik partisi , … , , , dan masing-masing disebut barisan simbol minus dan barisan simbol plus titik x.*

Untuk $(0,1]$ *didefinisikan*

$(0) =$ *dan* $(\ + 1) = \ _{(\ )} + \ _{(\ )}$

$\geq 0.$ (3)

Untuk $[0,1)$ *didefinisikan*

$(0) =$ *dan* $(\ + 1) = \ _{(\ )} + \ _{(\ )}$

$\geq 0.$ (4)

Teorema 3.1[3] *Diberikan :I → fungsi monoton sepotong-sepotong kontinu dengan titik-titik partisi , … , , , dan masing-masing barisan simbol minus dan barisan simbol plus titik x. Untuk setiap* ≥ 0, *barisan orbit dan ditentukan oleh barisan simbol dan dengan hubungan sebagai berikut:*

$$(\ ) = - \sum \frac{(\ )}{\Pi \quad (\ )}$$

untuk semua $(0,1]$ (5)

dan

$$(\ ) = - \sum \frac{(\ )}{\Pi \quad (\ )}$$

untuk semua $[0,1)$ (6)

3.4 Matriks Fundamental

Lemma 3.2[3] *Diberikan :I → fungsi monoton sepotong-sepotong kontinu dengan titik-titik partisi , … , , Untuk i=1,2,…,N dan merupakan bilangan real sehingga* $\neq 1$. *Pernyataan berikut ekuivalen :*

(1) *Interseksi diagonal y = x dengan garis* $= \quad +$ *bertepatan untuk i=1,…,N, yaitu terdapat bilangan real r sehingga* $= (1 - \quad)$ *untuk i=1,…,N.*

(2) *Vektor-vektor dan*

bergantung linear.

(3) $= (\quad)$ *untuk* $1 \leq \ , \ \leq$

Diberikan 1 fungsi indikator himpunan *A* yaitu :

$$1\ (\ ) = \begin{cases} 1 & , \\ 0 & , \end{cases}$$

Untuk *i=1,2,…,N,* $(0,1)$ dan $\{-, +\}$ didefinisikan bilangan-bilangan real $(\ )$ dengan

$$(\ ) = \quad (0, \ )1_{\{\ \}} \quad (\ )$$

$(\ , \ )$ diberikan oleh

$$(\ , \ ) = \begin{cases} 1 & , \quad < \\ \ _{(\ )} & , \quad \geq \end{cases}$$

(7)

Dengan menggunakan persamaan (3) sampai dengan persamaan (6) diperoleh

$$(\ ) = \quad (0, \ )1_{\{\ \}} \quad (\ )$$

$$= - \qquad (8)$$

Selanjutnya dengan Lemma 3.2 diperoleh
$\sum \quad (\quad -1) \quad (\,) = 1$ (9)

Definisi 3.5[3] *Diberikan : → fungsi monoton sepotong-sepotong kontinu dengan titik-titik partisi , … , . Matriks M=($_{,}$) berukuran Nx(N–1) didefinisikan dengan*

$$_{,} = \quad (\,) - \quad (\,)$$

untuk 1 ≤ ≤ dan 1 ≤ ≤ -1 (10)

disebut matriks fundamental fungsi monoton sepotong-sepotong kontinu dengan titik-titik partisi , … , . Matriks fundamental *M* secara lengkap ditentukan oleh barisan simbol dan untuk *j = 1, … , N-1.*

Teorema 3.2[3] *Diberikan : → fungsi monoton sepotong-sepotong kontinu dengan titik-titik partisi , … , , Jika M=($_{,}$) matriks fundamental yang didefinisikan dengan*

$$_{,} = \quad (0, \;)1_{\{\,\}}(\quad (\,)) - \sum \quad (0, \;)1_{\{\,\}}(\quad (\,)) \qquad (11)$$

Untuk 1 ≤ ≤ dan 1 ≤ ≤ -1, maka sistem

$$_{,} = 0 \qquad 1 \le \; \le$$

mempunyai penyelesaian nontrivial real

$$=$$

Lemma 3.3[3] *Diberikan : → fungsi monoton sepotong-sepotong kontinu dengan titik-titik partisi , … , , Jika G = ($_{,}$) matriks N x (N-1) yang didefinisikan dengan*

$$_{,} = \quad (0, \; -1)\, 1_{\{\,\}}(\quad (\,)) - \quad (0, \; -1)1_{\{\,\}}(\quad (\,)) \qquad (12)$$

Untuk 1≤ ≤ dan 1≤ ≤ -1, *dan*

$= \qquad$ *merupakan (N–1)- Vektor real, maka pernyataan berikut ekuivalen:*

(1) $= 0$

(2) $= 0$

(3) $\sum \quad \sum \quad (0, \; - 1)1_{\{\,\dots\,\}}(\quad (\,)) - \sum \quad (0, \; -1)\; 1_{\{\,\dots\,\}}(\quad (\,)) =$ *, untuk t = 1, …, N-1*

(4) $\sum \quad \sum \quad (0, \; - 1)1_{\{\,\dots\,\}}(\quad (\,)) - \sum \quad (0, \; -1)1_{\{\,\dots\,\}}(\quad (\,))) = -$ *, untuk t = 1, …, N-1*

3.5 Ukuran -Invarian Kontinu Mutlak

Definisi 3.6[3] *Diberikan : → fungsi monoton sepotong-sepotong kontinu dengan titik-titik partisi* $0 < \; < \; < \,..< \; < 1$
Untuk didefinisikan

$$(\,) = \{ \; |1 \le \; \le \;, \quad , \quad < \; < \;, \quad (\quad) = \; \}$$

Definisi 3.7[3] *Diberikan : → fungsi monoton sepotong-sepotong kontinu dengan titik-titik partisi* $0 < \; < \; <..< \; < 1$ *dan merupakan ruang semua fungsi bernilai real, terukur dan terintegral Lebesgue pada I. Operator* → *didefinisikan dengan*

$$(\,) = \frac{}{} \quad (\,) \quad ([\;,\;]) \quad ,$$

disebut operator Ruelle-Perron-Frobenius yang berkaitan dengan .
Fungsi disebut -invarian jika h merupakan titik tetap operator Ruelle-Perron-Frobenius , yaitu h(x) = h(x) atau jika persamaan Ruelle-Perron-Frobenius

$$\sum_{(\ )} \frac{}{|\ \ |} (\ \ ) = (\ \ ) \qquad (13)$$

berlaku untuk hampir semua x terhadap ukuran Lebesgue .
Fungsi disebut -invarian jika dan hanya jika ukuran kontinu mutlak dv = h d -invarian, yaitu v(B) = v(( )) untuk setiap himpunan terukur B I.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Motivasi [1]

Pandang *(x) = 4x (1 – x) , x* $[0,1] =$

Didefinisikan : $\rightarrow$ dengan

$, x \quad , \quad h(x) = — \int_{([\ ,\ ])} (\ )$

$$(\ ) = \frac{1}{\overline{\overline{(1-\ )}}}$$

Didefinisikan ukuran $\rightarrow$ dengan $(\ ) = \int (\ )$, $=$ $-$aljabar himpunan bagian-himpunan bagian *X*, *X* sebarang himpunan dan *X* ≠
Akan ditunjukkan bahwa :

(i) $([0,1]) = 1$

(ii) $(\ ) = (\ )$

Sehingga

(i) $([0,1]) = \int (\ )$

$$= \lim_{\rightarrow} (\ ) + \lim_{\rightarrow} (\ )$$

$$\lim_{\rightarrow} \frac{1}{\overline{\overline{(1-\ )}}} = \lim_{\rightarrow} \frac{1}{\pi} (1-2\ )|$$

$$= \frac{1}{\ } \lim_{\rightarrow} \ 0 \ (1-2\ ) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{\rightarrow} \int \frac{}{\overline{\overline{(\ \ )}}} = \lim_{\rightarrow} - (1 - 2\ )|$$

$$= -\lim_{\rightarrow} (\ (1-2\ ) - \ 0)$$

$$= -(\pi - -) = -$$

Jadi $([0,1]) = 1$. Karena $([0,1]) = 1$ maka merupakan ukuran probabililtas, sehingga $(\ ) = \frac{}{\overline{\overline{(\ \ )}}}$ fungsi densitas.

(ii) $(\ ) = — \int_{([\ ,\ ])} (\ )$

$$= — \frac{1}{\overline{\overline{(1-\ )}}}$$

$$= — \frac{1}{\overline{\overline{(1-\ )}}} +$$

$$— \int \frac{}{\overline{\overline{(\ \ )}}}$$

$$= — \lim_{\rightarrow} \frac{1}{\overline{\overline{(1-\ )}}}$$

$$+ — \lim_{\rightarrow} \int \frac{}{\overline{\overline{(\ \ )}}}$$

$$= — \frac{1}{\ } \lim_{\rightarrow} (1-2\ )|$$

$$+ — - \lim_{\rightarrow} (1-2\ )|$$

$$= — \frac{1}{\ } \sqrt{1-\ } - \ 1$$

$$+ — \frac{1}{\ } (-1) - \frac{1}{\ } (-\sqrt{1-\ })$$

$$= — - \sqrt{1-\ } + — - \sqrt{1-\ }$$

$$= \frac{1}{2 \ \overline{\overline{(1-\ )}}} + \frac{1}{2 \ \overline{\overline{(1-\ )}}}$$

$$= \frac{1}{\overline{\overline{(1-\ )}}} = (\ )$$

yaitu *h* -invarian.

Termotivasi oleh fungsi konstan *h* di atas yang merupakan contoh paling sederhana ukuran -invarian untuk dikontruksi ukuran -invarian kontinu mutlak terhadap ukuran Lebesgue untuk semua fungsi monoton sepotong-sepotong kontinu *:I* $\rightarrow$ dengan titik-titik partisi $, \ldots ,$. Kontruksi itu sebagai berikut :

Teorema 4.1[3] *Diberikan :I* $\rightarrow$ *fungsi monoton sepotong-sepotong kontinu dengan titik-titik partisi 0* $< \ < \ <$ < 1, *dan M menyatakan matriks fundamental , serta adalah penyelesaian nontrivial dari M* $= 0$.

Untuk $(0,1)$ *dan* $\{-,+\}$, *Jika menyataan fungsi bernilai real pada I yang diberikan dengan*

$$(\ ) = \quad (0, \ )1_{[\ , \ (\ )}(\ ) \tag{14}$$

maka fungsi bernilai real, terukur, dan terintegral Lebesgue yang didefinisikan dengan

$$(\ ) = \quad (\ ) - \quad (\ )$$

$$U \tag{15}$$

Adalah -invarian.

Bukti :
Sebelum sampai pada bukti Teorema 4.1 ini, diperlukan pendahuluan berikut.
Diambil sebarang $1 \leq \ \leq \ - 1$.

Untuk , jika

$$(\ ) = \begin{cases} -\frac{1}{\ }1_{(\ (\ ), \ ]}(\ ), & > 0 \\ \frac{1}{\ }1_{(\ , \ (\ )]}(\ ), & < 0 \end{cases}$$

dan

$$(\ ) = \begin{cases} \frac{1}{\ }1_{(\ , \ (\ )]}(\ ), & > 0 \\ -\frac{1}{\ }1_{(\ (\ ), \ ]}(\ ), & < 0 \end{cases}$$

maka

$$\frac{1}{| \ |} - \quad (\ ) - \quad (\ ) = \quad \frac{1}{_{(\ )}| \ |}$$

untuk hampir semua terhadap ukuran Lebesgue .

Jika

$$= \begin{cases} \frac{1 - \ _{-}(1)}{\ }, & > 0 \\ \frac{- \ _{-}(1)}{\ }, & < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{_{+}(1)}{_{+1}}, & _{+1} > 0 \\ \frac{_{+}(1)}{_{+1}}, & < 0 \end{cases}$$

maka

$$\Sigma \quad \frac{}{| \ |} + \Sigma \quad - \quad = 1$$

Jadi untuk $= 1, \dots, \quad - 1$ dan $\alpha \quad \{-, +\}$ diperoleh

$$(\ ) + \quad = \frac{_{, \ (\ )} \ (\ ) \quad (\ )}{(\ )} \tag{16}$$

untuk hampir semua terhadap ukuran Lebesgue .

Jika diberikan

$$= \begin{cases} \frac{1}{| \ |}, & > 0 \\ \frac{1}{| \ |}, & < 0 \end{cases}$$

maka diperoleh

$$\Sigma \quad _{(\ )}\frac{}{| \ |}1_{[\ , \ (\ ))}(\ ) =$$
$$_{(\ )} + \frac{}{(\ )}1_{[\ , \ (\ ))}(\ ) -$$
$$\Sigma \quad (\ ) - \quad (\ ) \ 1_{\{ \ ,\dots, \ \}} \quad (\ ) \tag{17}$$

untuk $(0,1), \alpha \quad \{-, +\}, \quad \geq 0$ dan untuk hampir semua terhadap ukuran Lebesgue .

Pernyataan

$$(\ ) = - \quad (\ , \ ) \quad _{(\ )}$$

Teorema 3.1 bersama rumus

$$-\frac{(\ )}{(\ )} = \ _{(\ )} + \Sigma \quad (\quad - \quad)1_{\{ \ ,\dots, \ \}}(\quad (\ ))$$

menghasilkan

$$(\ ) = -\Sigma \quad (\ , \ ) - \quad _{(\ )} \quad _{(\ )} +$$
$$\Sigma \quad - \ _{-} \ 1_{\{ \ ,\dots, \ \}} \quad (\ )$$
$$= \Sigma \quad \frac{}{\Pi \quad _{(\ )}} - \quad _{(\ )} \quad _{(\ )} +$$
$$\Sigma \quad (\quad - \quad)1_{\{ \ ,\dots, \ \}} \quad (\ )$$
$$= \Sigma \quad \frac{}{\Pi \quad _{(\ )}} \quad _{(\ )} +$$
$$\Sigma \quad - \quad 1_{\{ \ ,\dots, \ \}} \quad (\ )$$
$$= \Sigma \quad (\ , \ - 1) \quad _{(\ )} + \Sigma \quad (\ , \ - 1)$$
$$\Sigma \quad (\quad - \quad)1_{\{ \ ,\dots, \ \}}(\quad (\ ))$$

Jadi

$\sum \quad (, \quad -1) \quad _{( )} =$

$( ) - \sum \quad (, \quad -1)$

$\sum \quad - \quad 1_{\{ \quad ,\ldots, \quad \}} \quad ( )$ (18)

untuk γ $(0,1)$ dan α $\{-,+\}$, ≥ 0.

Sekarang bukti teoremanya yaitu ditunjukkan

$$\frac{1}{| \quad |}_{( )} \quad (\quad) = \quad ( )$$

berlaku untuk hampir semua terhadap ukuran Lebesgue .

Dengan (16), (17) dan (18) disimpulkan

$\sum \quad _{( )} \overline{| \quad |} \quad (\quad) =$

$\sum \quad _{( )} \overline{| \quad |} \sum \quad (0, \quad) 1_{[\ , \quad (\quad))} (\quad)$

$= \sum \quad (0, \quad) \sum \quad _{( )} \overline{| \quad |} 1_{[\ , \quad (\quad))} (\quad)$

$= \sum \quad (0, \quad)[\quad _{(\quad)} + \frac{}{(\quad)} 1_{[\ , \quad (\quad))} (\ )$

$- \quad (\ ) - \quad (\ ) \ 1_{\{ \quad ,\ldots, \quad \}} (\quad (\quad +1))]$

$= \quad (0, \quad -1) \quad _{( )} + \quad (0, \quad -1)$

$\frac{1}{( )} 1_{[\ , \quad (\quad))} (\ ) - \quad (0, \quad -1)$

$(\ ) - \quad (\ ) \ 1_{\{ \quad ,\ldots, \quad \}} \quad (\quad +1)$

Jadi

$\sum \quad (0, \quad -1) \quad _{( )} =$

$(0,0) \sum \quad (1, \quad -1) \quad _{( )}$ (19)

Selanjutnya

$$\frac{1}{| \quad |}_{( )} \quad (\quad)$$

$= \quad (0,0) \quad (1, \quad -1) \quad _{( )}$

$+ \quad (0, \quad) 1_{[\ , \quad (\quad))} (\ ) - \quad (0, \quad -1)$

$(\ ) - \quad (\ ) \ 1_{\{ \quad ,\ldots, \quad \}} \quad (\ )$

$= \frac{(1)}{( )} +$

$\sum \quad (0, \quad) 1_{[\ , \quad (\quad))} (\ ) - \quad (0,0) 1_{[\ , \quad (\ ))} (\ )$

$- \sum \quad (0, \quad -1)$

$(\ ) + \quad - \quad (\ ) - \quad 1_{\{ \quad ,\ldots, \quad \}} \quad (\ )$

$= \quad (\ ) - \frac{1_{[\ , \quad (\ )} (\ ) - \quad (1)}{( )} -$

$(0, \quad -1) \quad (\ ) + \quad - \quad (\ )$

$-$

$1_{\{ \quad ,\ldots, \quad \}} \quad (\ )$

$= \quad (\ ) - (\quad (\ ) + \quad) - \quad (0, \quad -1)$

$(\ ) + \quad - \quad (\ ) - \quad 1_{\{ \quad ,\ldots, \quad \}} \quad (\ )$

Untuk α $\{-,+\}$ dan untuk hampir semua terhadap ukuran Lebesgue .

Dengan $= \ _{+}(\ ) + \ _{+} - \ _{-}(\ ) - \ _{-}$ $(1 \leq \quad \leq \quad -1)$ diperoleh hubungan (11) dengan menggunakan (19) dan pernyataan (4) Lemma 3.3 :

$$\frac{1}{| \quad |}_{( )} \quad (\quad) =$$

$\sum \quad _{( )} \overline{| \quad |} \sum \quad (\quad (\quad) - \quad (\quad))$

$= \sum \quad \sum \quad _{( )} \overline{| \quad |} \quad (\quad) - \quad (\quad)$

$= \quad \frac{1}{| \quad |}_{( )} \quad (\quad) - \quad \frac{1}{| \quad |}_{( )} \quad (\quad)$

$= \sum \quad (\ ) - \quad (\ ) \ - \sum$

$- \sum \quad \sum \quad \sum \quad (0, \quad -$

$1) 1_{\{ \quad ,\ldots, \quad \}} \quad (\ ) \ -$

$\sum_{\geq 1} \ _{-} (0, \quad -1) 1_{\{ \ +1,\ldots, \quad \}} \ _{+} (\ )$

$= \sum \quad (\ ) - \quad (\ ) \ - \sum \quad +$

$\sum$

$= \sum \quad _{+}(\ ) - \ _{-}(\ )$

$= \quad (\ )$, untuk hampir semua (20)

Untuk γ (0,1) dan α {−, +}, misalkan R menyataan fungsi bernilai real pada *I* yang diberikan oleh

$$( ) = (0,)1_{[(,)}( )$$

(21)

Selanjutnya diperoleh ( ) + ( ) = ∑ (0,) (22)

untuk hampir semua terhadap ukuran Lebesgue .

Dari ekuivalensi (3) dan (4) dalam Teorema 4.1 diperoleh :

$$[(0,) - (0,)] = 0$$

$$[( ) + ( ) - ( ) + ( ) = 0$$

$$[( ) + ( )$$

$$= [( ) - ( )]$$

untuk hampir semua terhadap ukuran Lebesgue dan

$$= [( ) - ( )]$$

untuk (23)

adalah representasi lain fungsi -invarian . Dengan catatan bahwa mempunyai variasi terbatas karena setiap fungsi dapat ditulis sebagai selisih dua fungsi monoton.

4.1 Titik Partisi Tambahan

Diberikan *:I →* fungsi monoton sepotong-sepotong kontinu dengan titik-titik partisi ,…, sehingga 0 = < < . < < = 1, sebarang titik di dalam *I* sehingga < < dengan 1 ≤ ≤ dan * : *I* → fungsi monoton sepotong-sepotong kontinu dengan titik-titik partisi , …, , , , … , sehingga **(x)* = *(x)* untuk semua \{0, , ,… , , , ,… , , 1} yaitu * berbeda dengan dengan titik partisi tambahan .

Sekarang diselidiki hubungan antara matriks fundamental M dari dan matriks fundamental M* dari * dan antara vektor-vektor dan * masing-masing dengan *M* = 0 dan *M** * = *0.* Akan ditunjukkan bahwa dua sistem ini yaitu (*I,* *)* dan (*I,* **)* mempunyai fungsi invarian yang sama.

Interval (,) dinyatakan dengan simbol dan interval (,) dengan simbol . Jadi barisan simbol dan terhadap transformasi * adalah barisan atas abjad {1, … , −1, , , + 1, … , } dengan (0) = dan (0) = dan matriks fundamental *M** dari * ditentukan sesuai dengan (1.0). Dengan catatan bahwa = = .

Matriks fundamental

= (,) ,…, − , , , ,…, ; ,…, − , , ,…,

Fungsi * memenuhi

, = , untuk = 1, … , −1, + 1, … , dan untuk = 1, … , −1, , − 1

(24)

dan

, + , = ,

Untuk = 1, … , −1, , − 1 (25)

Dengan matriks fundamental

M = (,) ,…, ; ,…., fungsi didefinisikan oleh barisan simbol dan terhadap transformasi * seperti (10).

Dengan catatan bahwa (25) berakibat

∑ , = 0 jika dan hanya jika

, = − ,

Dari pembicaraan di atas diperoleh lemma berikut.

Lemma 3.4[3] *Jika Diberikan :I →* *fungsi monoton sepotong-sepotong kontinu dengan titik-titik partisi ,…, sehingga* 0 = < < < < = 1 *dan* * *fungsi monoton sepotong-sepotong kontinu berbeda dengan dengan titik partisi tambahan* (,) *dengan 1 ≤ ≤ , maka setiap (N-1)-vektor*

=

dengan = 0 *bersesuaian dengan N-vektor.*

=

dengan = 0 dan sebaliknya.

Jika ( ) { ,…, } untuk semua ≥ 1 persesuaian antara dan diberikan oleh hubungan

= − ∑ , = − ∑ (,)

= untuk *j = 1, …, N-1*

Jika ( ) { ,…, } untuk semua ≥ 1 dan jika minimal dengan sifat ini dan ( ) = , maka persesuaian antara dan diberikan oleh hubungan

= , = − ,

= − | (0, − 1|

= untuk *j = 1, …, N-1; j =*

Untuk dua vektor bersesuaian dan masing-masing dengan fungsi -invarian dan fungsi *-invarian berimpit hampir dimana-mana pada *I* terhadap ukuran Lebesgue .

5. KESIMPULAN

Dari pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa jika diberikan fungsi monoton sepotong-sepotong kontinu *: I* → dengan titik-titik partisi ,…, dan N tidak perlu minimal, nilai-nilai ( ) dapat dipilih sebarang dalam *I* untuk *j = 1, …, N-1* maka berlaku :

a) Barisan simbol dan tidak bergantung pada nilai ( ) untuk *j = 1, …, N-1*
b) Matriks fundamental *M* secara lengkap ditentukan oleh barisan dan untuk *j = 1, …, N-1*
c) Konstruksi ukura -invarian kontinu mutlak hanya dapat dibangun dengan dan untuk *j = 1, …, N-1,* simetri terhadap titik-titik partisi dan bergantung pada nilai-nilai ( ) untuk *j = 1, …, N-1*
d) Penambahan satu titik partisi pada *I* berakibat ukuran matriks fundamental *M* bertambah tetapi tidak mengubah fungsi -invarian kontinu mutlak sistem *(I, S).*

6. DAFTAR PUSTAKA

[1] Grossman, S. dan Thomae, S., (1977), *Invariant Distributions and Stationary Correlation Functions of One-Dimensional Discrete Processes,* Z. Naturforsch, 32a, 1353-1363.

[2] Kopf, C., (1990), *Invariant Measures for Piecewise Linear Transformations of the Interval,* Applied mathematics and Computation.

[3] Kopf, C., (1995), *Symbol Sequences and Invariant Measures for Piecewise Linear Transformations of the Interval,* Preprint, Dept. of Mathematics, University of Innsbruck, Austria.

[4] Lasota, A. dan Yorke, J., (1973), *On The Existence of Invariant Measures for Piecewise Monotonic Transformations,* Trans. Amer. Math. Soc. 186 : 481-488.

[5] Rinurwati, (1999), *Barisan Simbol dan Ukuran Invarian Transformasi Linear Sepotong-Sepotong,* Tesis, Jurusan Matematika FMIPA-UGM.

[6] Royden, H.L., (1989), *Real Analisis,* The Macmilan Publishing Company, New York.
[7] Walters, P., (1982), *An Itroduction to Ergodic Theory,* Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York.