KENDALI LQR DISKRIT UNTUK SISTEM TRANSMISI DATA DENGAN SUMBER JARINGAN TUNGGAL

Dita Anies Munawwaroh[1], Sutrisno[2]
[1,2]Jurusan Matematika FSM Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Tembalang Semarang
[1]*dita.anies.m@gmail.com*, [2]*tresno.math@undip.ac.id*

Abstract. In this research discussed about control of data transmission systems with a single network source. Linier quadratic regulator (LQR) control with discrete time is used to control the systems. The linier quadratic regulator (LQR) control is optimal control with quadratic objective function and has linear constrains. The control has aim to optimizing the acceptance rate of data transmission. The data transmission systems have a single network source, can receive 100 % the entering data, although have time delay.

Keywords : linier quadratic regulator control, data transmission systems, single network source, time delay.

1. PENDAHULUAN

Selama abad 20, kunci dari teknologi adalah informasi, proses dan distribusi [1]. Diantara perkembangan tersebut, dapat dilihat adanya penemuan jaringan telepon, penemuan radio dan televisi, kelahiran dan perkembangan jaringan komputer, serta diluncurkannya satelit komunikasi. Sebagai hasil dari cepatnya perkembangan teknologi tersebut, juga dibutuhkan dan dituntut suatu kemampuan untuk segera menyimpan, mengirim, menyimpan, dan memproses segala infromasi yang sifatnya mudah hilang.

Pengertian komunikasi data adalah bagian dari telekomunikasi yang berhubungan dengan pemindahan data atau infromasi diantara piranti dalam bentuk digital melalui media komunikasi data. Terdapat 3 unsur dalam model komunikasi yaitu, sumber data, media komunikasi, dan penerima.

Permasalahan pada jaringan komunikasi yang terhubung adalah perambatan data pada jaringan yang membutuhkan waktu yang panjang. Padahal, data tersebut harus sampai pada penerima sesuai dengan waktu yang dibutuhkan (ketepatan waktu). Sehingga, sistem transmisi data membutuhkan perencanaan dan pengendalian.

Perencanaan dimaksudkan untuk membentuk sistem transmisi data yang dapat menjaga agar proses aliran data dari sumber *(source)* menuju ke tempat penerima *(receiver)* dapat berlangsung dengan lancer, efektif, dan efisien. Sedangkan, pengendalian dimaksudkan agar sistem transmisi data yang telah dijalankan dapat berlangsung optimal.

Berikut ini adalah penelitian yang mendasari munculnya penelitian ini, yaitu [2] membahas tentang penentuan kendali pada masalah pergudangan dengan menggunakan linier kuadratik kontrol dengan input referensi, kemudian [3], [4] membahas tentang penentuan kendali pada masalah pergudangan dengan menggunakan regulator linier kuadratik, dan [5] membahas tentang penentuan kendali pada masalah transmisi data dengan sumber jaringan tunggal, tetapi diasumsikan bahwa hanya ρ data yang sampai pada penerima *(receiver)*, dengan $0<\rho<1$.

[1] digunakan sebagai dasar untuk menggambarkan proses sistem transmisi data pada jaringan. Selanjutnya, proses penyelesaian dengan menggunakan teknik kendali regulator linier kuadratik digunakan teori pendukung dari, [6], [7] dan [8]. Sedangkan untuk penyelesaian

secara aljabar matriks digunakan teori pendukung dari [6].

Dengan demikian, pada penelitian ini penulis akan mengemukakan tentang penyelesaian kendali masalah sistem transmisi data dengan sumber jaringan tunggal, dan diasumsikan bawa data akan diterima 100 % kepada penerima *(receiver)*, dengan kata lain, $\rho = 1$.

2. PEMBAHASAN

2.1 Sistem Transmisi Data pada Jaringan Tunggal

Berikut ini dibeikan ilustrasi dari proses komunikasi, yaitu sumber *(source)* membangkitkan data yang akan ditransmisikan, kemudian pengirim *(transmitter)* memindah dan menandai data dengan cara yang sama seperti menghasilkan sinyal - sinyal elektromagnetik yang dapat ditransmisikan melewati beberapa sistem transmisi data yang berurutan, selanjutnya sistem transmisi adalah berapa jalur transmisi tunggal atau jaringan kompleks yang akan menghubungkan sumber dan tujuan. Data yang dikirim akan sampai pada penerima *(receiver)* dalam bentuk sinyal-sinyal dan menggabungkannnya dalam bentuk tertentu yang akan ditangkap oleh tujuan *(destination)*.

Model dalam penelitian ini diasumsikan bahwa sumber data *(source)* tunggal akan siap mengirimkan data secara terus menerus, bergantung terhadap waktu. Sumber data akan menerima sinyal dari pengontrol setelah waktu tunggu T_1, selanjutnya sumber data akan mengirim sejumlah data yang dibutuhkan dalam waktu tunggu T_2. Diasumsikan bahwa data yang dibutuhkan akan sampai seutuhnya (100 %) kepada penerima *(receiver)*.

2.2 Pemodelan Matematika

Dalam memodelkan sistem transmisi data akan diberikan variabel-variabel yang berpengaruh dalam sistem, yaitu T adalah periode pendiskritan, kT adalah periode sampling, dengan $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Kemudian, RTT adalah waktu perjalanan data *(Round Trip Time)* , dimana $RTT = T_1 + T_2$. Untuk selanjutnya, RTT diasumsikan adalah pergandaan dari periode pendikritan dan n_{RTT} suatu integer poistif, dengan kata lain $RTT = n_{RTT} \times T$.

Selanjutnya, $u(kT)$ adalah jumlah data yang dibutuhkan pada saat kT, $y(kT)$ adalah jumlah data yang ada pada simpul jaringan, y_d adalah kapasitas maksimal data yang dapat ditampung pada simpul jaringan, $d_{\max}$ adalah jumlah maksimum permintaan data, dan $h(kT)$ adalah jumlah barang yang telah dikirim kepada penerima pada saat kT. Dengan kata lain,

$$0 \le h(kT) \le d(kT) \le d_{\max}.$$

Berikut ini akan dijelaskan cara menentukan jumlah data yang tersedia dalam simpul jaringan $x(kT)$, dengan kata lain, adalah data yang sedang dalam masa tunggu untuk dikirim kepada penerima *(receiver)*. Diasumsikan kebutuhan data dipesan pada saat kT = 0, maka

$$y(kT) = \sum_{j=0}^{k-1-n_{RTT}} u(jT) - \sum_{j=0}^{k-1} h(jT).$$

Didefinisikan

$$\mathbf{x}(kT) = \left[x_1(kT) \quad x_2(kT) \quad \ldots \quad x_n(kT) \right]$$

adalah vektor state dengan $x_1(kT)$ menyatakan data dalam masa tunggu disimpang jaringan pada saat kT, sedangkan $x_i(kT)$ menyatakan banyaknya data yang dipesan pada saat $(k - n + i - 1)$, dengan $n = n_{RTT} + 1$.

Sehingga, dapat dibentuk persamaan ruang keadaan dan persamaan keluaran dalam sistem diskrit LTI, sebagai berikut.

$$\mathbf{x}\left[(k+1)k\right] = \mathbf{Gx}(kT) + \mathbf{H}u(kT) + \mathbf{v}h(kT),$$
$$y(kT) = \mathbf{C}^T \mathbf{x}(kT), \tag{2.1}$$

dengan G adalah matriks keadaan berukuran $n \times n$, dan H,v,C adalah vector, berukuran $n \times 1$. Bentuk vektor-matriks adalah :

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (2.2)$$

Tujuan dari masalah optimal linier kuadratik adalah menentukan aturan kendali yang membawa state awal $\mathbf{x}_0 = 0$ menuju ke $\mathbf{x}(kT) = \mathbf{x}_d$ tak nol, dengan $k = \infty$. Dibentuk indeks performansi yang bersesuaian dengan persamaan ruang keadaan dan persaman keluaran tersebut adalah

$$J(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ u^2(kT) + w\left[y_d - y(kT) \right]^2 \right\}. \quad (2.3)$$

Indeks performansi yang digunakan untuk Persamaan (2.3) adalah indeks performansi yang berbentuk fungsi biaya. Fungsi biaya yang dimaksudkan disini adalah biaya yang timbul selama proses transmisi data. Sedangkan, adanya konstanta positif w sebagai konstanta pembobotan yang mempengaruhi error dari data dalam masa tunggu, dan data yang terkirim.

Selanjutnya, digunakan Kendali Regulator Linier Kuadratik – Steady State yang bertujuan menentukan aturan kendali yang membawa state awal taknol menuju ke suatu state nol. Akan didefinisikan variable baru sebagai berikut :

$$\tilde{\mathbf{x}}(kT) = \mathbf{x}(kT) - \mathbf{x}_{ss} = \mathbf{x}(kT) - \mathbf{x}_d;$$
$$\tilde{y}(kT) = y(kT) - y_{ss} = y(kT) - y_d;$$
$$\tilde{u}(kT) = u(kT) - u_{ss} = u(kT).$$
$$(2.4)$$

Sehingga, diperoleh persamaan ruang keadaan dan persamaan keluaran dengan menggunakan variable baru yang didefinisikan pada Persamaan (2.4), sebagai berikut :

$$\tilde{\mathbf{x}}\left[(k+1)k\right] = \mathbf{G}\tilde{\mathbf{x}}(kT) + \mathbf{H}\tilde{u}(kT) + \mathbf{v}h(kT), \qquad (2.5)$$

$$\tilde{y}(kT) = \mathbf{C}^T \tilde{\mathbf{x}}(kT), \qquad (2.6),$$

dengan **G**, **H,** **v** dan **C** sesuai pada Persamaan (2.2).

Selanjutnya, dapat digunakan bentuk penyelesaian masalah pada Regulator Linier Kuadratik untuk mencari $\tilde{u}(kT)$ yang meminimalkan indeks perfromansi baru, yaitu:

$$J(\tilde{u}) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} [\tilde{\mathbf{x}}^T(kT)\mathbf{Q}\tilde{\mathbf{x}}(kT) + \tilde{u}^T(kT)\mathbf{R}\tilde{u}(kT)] \qquad (2.7)$$

2.3 Penyelesaian Masalah Regulator Linier Kuadratik-Steady State

Tujuan dari penyelesaian pada masalah regulator linier kuadratik steady state adalah menentukan matriks kendali umpan balik yaitu $\mathbf{K}(kT)$, sedemikian sehingga sistem tersebut stabil. Berikut ini diberikan Teorema mengenai kendali umpan balik.

Teorema 2.1. [6] *Misalkan Persamaan (2.1) merepresentasikan sistem diskrit LTI, diberikan kendali*

$$\tilde{u}(kT) = -\mathbf{K}(kT)\tilde{\mathbf{x}}(kT), \qquad (2.8)$$

dengan $\mathbf{K}(kT)$ *adalah matriks umpan balik, maka nilai eigen dari* $\mathbf{G}-\mathbf{HK}$ *dapat diletakkan pada bidang kompleks yang bersesuaian, dengan memilih matriks* $\mathbf{K}(kT)$ *yang sesuai jika hanya jika (2.1) terkendali penuh. Dan memungkinkan pula memilik* $\mathbf{K}(kT)$ *sedemikian sehingga sistem kontrol tertutup stabil, jika hanya jika (2.1) dapat distabilkan.*

Persamaan Riccati digunakan untuk mendapatkan vektor kendali optimal $\tilde{u}(kT)$. Di asumsikan bahwa

$$\lambda(kT) = \mathbf{P}(kT)\tilde{\mathbf{x}}(kT), \qquad (2.9)$$

dengan **P** adalah matriks simetris, dengan kata lain, $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}$, dan $\mathbf{P} \geq 0$. Selanjutnyam dilakukan proses operasi matriks hingga diperoleh matriks **P** dan **K** adalah

$$\mathbf{P} = \mathbf{G}^T\mathbf{P}\left[\mathbf{I} + \mathbf{H}\mathbf{H}^T\mathbf{P}\right]^{-1}\mathbf{H} + \mathbf{Q}. \quad (2.10)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{H}^T\mathbf{P}\left[\mathbf{I} + \mathbf{H}\mathbf{H}^T\mathbf{P}\right]^{-1}\mathbf{G}. \quad (2.11)$$

Untuk mencari matriks **P** akan digunakan iterasi matriks, yang bertujuan agar setiap elemen pada matriks **P** dapat dinyatakan dalam dua variabel yaitu p_{11} dan w. Suatu matriks simetris **P** berbentuk

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \ldots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \ldots & p_{2n} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \ldots & p_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \ldots & p_{nn} \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

Iterasi diteruskan hingga seluruh elemen terganti, sehingga diperoleh pola pada matriks **P** adalah sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{11}-w & p_{11}-2w & \ldots & p_{11}-(n-1)w \\ p_{12} & p_{11}-w & p_{11}-2w & \ldots & p_{11}-(n-1)w \\ p_{13} & p_{23} & p_{11}-2w & \ldots & p_{11}-(n-1)w \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ p_{1n} & p_{2n} & p_{3n} & \ldots & p_{11}-(n-1)w \end{bmatrix}, (2.13)$$

dengan

$$p_{11} = nw + 1 - \frac{1}{p_{11} - (n-1)w + 1}. \quad (2.14)$$

Persamaan (14) mempunyai akar,

$$p_{11}^{\pm} = \frac{\sqrt{w}\left[(2n-1)\sqrt{w} \pm \sqrt{w+4}\right]}{2}. \quad (2.15)$$

Selanjutnya, diperoleh matriks **K** yaitu

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix}\alpha, \quad (2.16)$$

dengan,

$$\alpha = \frac{\sqrt{w(w+4)} - w}{2}. \quad (2.17)$$

Akhirnya, dihasilkan

$$\begin{aligned} u(kT) &= \alpha\left\{y_d - y(kT) - \sum_{j=1}^{n-1} u\left[(k-j)T\right]\right\} \\ &= \alpha\left\{y_d - y(kT) - \sum_{j=n_p-1}^{k-1} u(jT)\right\}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

2.4 Analisis Kestabilan

Kestabilan sistem diskrit LTI dapat dianalisis dengan melihat nilai eigen dari sistem tersebut. Selanjutnya, akan dicari nilai eigen yang bersesuaian dengan matriks **G-HK**, yaitu $z = \mu_1, z = \mu_2, \ldots, z = \mu_{n-1}, z = \mu_n$ yang berasal dari persamaan karakteristik

$$\left|z\mathbf{I} - (\mathbf{G\text{-}HK})\right| = 0, \quad (2.19)$$

dengan **I** adalah matriks Identitas. Ekspansi laplace digunakan untuk mencari hasil dari Persamaan (2.19) sebagai berikut.

$$\left|z\mathbf{I} - (\mathbf{G\text{-}HK})\right| = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} z-1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & z & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 \\ \alpha & \alpha & \alpha & \ldots & z+\alpha \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (z-1)\begin{vmatrix} z & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & -1 \\ \alpha & \alpha & \ldots & \alpha \end{vmatrix}$$

$$+\alpha\begin{vmatrix} -1 & 0 & \ldots & 0 \\ z & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (z-1)z^{n-3}\begin{vmatrix} z & -1 \\ \alpha & z+\alpha \end{vmatrix}$$

$$+\alpha z^{n-3}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ z & -1 \end{vmatrix} = 0$$

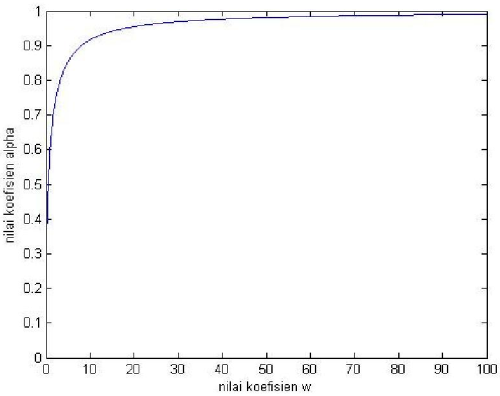
$$\Leftrightarrow z^{n-1}\left[z - (1-\alpha)\right] = 0. \quad (2.20)$$

Diperhatikan Persamaan (2.20) bahwa nilai eigen yang dihasilkan adalah $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{n-1} = 0$ dan $\mu_n = \alpha - 1$. Suatu sistem diskrit dikatakan stabil jika modulus dari nilai eigen kurang dari satu. Sehingga kestabilan sistem (2.1) bergnatung pada nilai α, yaitu

$$|\mu_n| < 1$$
$$\Leftrightarrow |1-\alpha| < 1$$
$$\Leftrightarrow 0 < \alpha < 2.$$

Jadi, sistem (2.1) akan stabil jika memiliki $0 < \alpha < 2$.

Diperhatikan Persamaan (2.17) secara grafis dapat dilihat nilai α untuk sistem pada Persamaan (2.1) adalah



Gambar 2.1 Hubungan antara w terhadap α

Dari Gambar 2.1. dapat dilihat bahwa untuk sebarang nilai w, maka $0 < \alpha < 1$. Dengan demikian, dapat dipastikan sistem akan selalu stabil asimtotik.

2.5 Sifat-sifat dari Sistem Transmisi Data dengan Sumber Jaringan Tunggal

Berikut ini akan dijelaskan sifat-sifat dari model sistem transmisi data dengan sumber jaringan tunggal. Teorema pertama mendefinisikan bahwa jumlah data yang ada pada simpul jaringan tidak akan melebihi kapasitas maksimal pada simpul tersebut.

Teorema 2.2. *Jika Persamaan (2.18) diaplikasikan pada sistem diskrit LTI pada Persamaan (2.1), maka jumlah data yang berada di simpul jaringan akan selalu memenuhi* $\forall_{k\geq 0} y(kT) \leq y_d$.

Bukti. Misalkan serangkaian data membutuhkan waktu tunggu selama RTT, sehingga pada saat $kT \leq RTT$ simpul jaringan dalam keadaan kosong. Induksi matematika digunakan untuk membuktikan teorema di atas. Diberikan persamaan

$$u(mT) = \alpha\left\{ y_d - y(mT) - \sum_{j=n_{RTT}-1}^{m-1} u(jT) \right\}, \quad (2.21)$$

lalu disubstitusikan persamaan

$$y(mT) = \sum_{j=0}^{m-1-n_{RTT}} u(jT) - \sum_{j=0}^{m-1} h(jT), \quad (2.22)$$

sehingga diperoleh

$$u(mT) = \alpha\left\{ y_d - \sum_{j=0}^{m-1} u(jT) + \sum_{j=0}^{m-1} h(jT) \right\}. \quad (2.23)$$

Untuk $m = 1$, diperoleh

$$u(1T) = \alpha\{ y_d - u(0T) + h(0T) \}$$
$$\Leftrightarrow u(0T) + h(0T) = y_d - \frac{1}{\alpha} u(1T).$$

Akibatnya, diperoleh

$$y(1T) = u(0T) - h(0T) \leq y_d.$$

Selanjutnya diberikan sebarang integer positif m, andaikan berlaku $y(mT) \leq y_d$, maka akan dibuktikan bahwa untuk $m+1$ akan berlaku juga $y[(m+1)T] \leq y_d$.

Untuk $m+1$, diperoleh

$$y[(m+1)T] = y(mT) + u[(m-n_{RTT})T] - h(mT). \quad (2.24)$$

Kemudian substitusikan Persamaan (2.23) ke dalam Persamaan (2.24), sehingga diperoleh

$$y[(m+1)T] = y_d - (1-\alpha)[y_d - y(mT)] - \alpha \sum_{j=m-n_{RTT}}^{m-1} h(jT) - h(mT). \quad (2.25)$$

Dikarenakan pada Persamaan (2.17) diperoleh bahwa $\alpha \in (0,1)$ dan $h(kT)$ selalu bernilai non-negatif, akibatnya Persamaan (2.25) akan berlaku

$$y[(m+1)T] \leq y_d - (1-\alpha)[y_d - y(mT)] \quad (2.26)$$

Selanjutnya, karena untuk sebarang integer m, dengan $m \geq n_{RTT}+1$, berlaku $y(mT) \leq y_d$, akibatnya Persamaan (2.26) akan berlaku juga $y[(m+1)T] \leq y_d$.

Terbukti bahwa suatu integer positif $m+1$ akan berlaku $y[(m+1)T] \leq y_d$. Pembuktian teorema selesai, dan terbukti bahwa untuk setiap $k \geq 0$ akan berlaku $y(kT) \leq y_d$. ■

Selanjutnya, teorema kedua akan menjamin bahwa jumlah data yang berada di simpul jaringan akan selalu dapat memenuhi kebutuhan data yang diperlukan oleh penerima *(receiver)*.

Teorema 2.3. *Jika Persamaan (2.18) diaplikasikan pada sistem diskrit LTI pada Persamaan (1) dan kapasitas maksimal pada simpul jaringan memenuhi,*

$$y_d > d_{\max}\left[n_{RTT} + \frac{1}{\alpha}\right],$$

maka jumlah data yang berada pada simpul jaringan akan selalu positif tegas (strictly positve) untuk sebarang $k \geq n_{RTT} + 1$.

Bukti:

Misalkan serangkaian data membutuhkan waktu tunggu selama RTT, dengan $RTT = n_{RTT}T$. Sehingga, setelah waktu tunggu terlewati, simpul jaringan akan terisi dengan serangkaian data yang telah dipanggil, dengan kata lain $y\left[\left(k = n_{RTT} + 1\right)T\right] > 0$. Akan dibuktikan teorema di atas berlaku untuk sebarang m, dengan $m \geq n_{RTT} + 1$. Pembuktian teorema di atas menggunakan induksi matematika.

Diperhatikan kembali Persamaan (2.23), saat $m = 0$, maka $u(0T) = \alpha y_d$, sehingga untuk $m = 1$, diperoleh $y(1T) = \alpha y_d - h(0T)$. Karena diasumsikan bahwa $0 \leq h(kT) \leq d_{\max}$, maka $y(1T) \geq \alpha y_d - d_{\max}$. Telah diketahui bahwa $y_d > d_{\max}\left(n_{RTT} + \frac{1}{\alpha}\right)$ yang akan menjamin bahwa akan selalu berlaku $y(1T) \geq 0$.

Selanjutnya, diberikan sebarang integer positif m, andaikan berlaku $y(mT) > 0$, maka harus dibuktikan bahwa untuk sebarang integer $m+1$ akan berlaku $y\left[(m+1)T\right] > 0$. Diperhatikan Persamaan (2.25) dengan $\alpha \in (0,1)$, maka berlaku

$$y\left[(m+1)T\right] \geq \alpha\left[y_d - \sum_{j=m-n_{RTT}}^{m-1} h(jT) - \frac{1}{\alpha}h(mT)\right]. \qquad (2.27)$$

Karena diasumsikan bahwa $0 \leq h(kT) \leq d_{\max}$, akibatnya dari Persamaan (2.27) akan berlaku

$$y\left[(m+1)T\right] \geq \alpha\left[y_d - d_{\max}.n_{RTT} - \frac{1}{\alpha}d_{\max}\right]. \qquad (2.28)$$

Telah diketahui bahwa $y_d > d_{\max}\left(n_{RTT} + \frac{1}{\alpha}\right)$, sehingga menjamin bahwa $y\left[(m+1)T\right] > 0$.

Jadi, terbukti bahwa untuk sebarang integer positif $m+1$ akan berlaku $y\left[(m+1)T\right] > 0$. Pembuktian secara induksi matematika selesai, dan terbukti bahwa jumlah barang yang berada di simpul jaringan akan selalu positif tegas *(stricly positive)* untuk setiap $k \geq n_{RTT} + 1$.■

Teorema terakhir akan menjamin bahwa jumlah data yang dibutuhkan oleh penerima akan selalu bernilai non-negatif dan terbatas.

Teorema 2.4. *Jika Persamaan (2.18) diaplikasikan pada sistem diskrit LTI pada Persamaan (2.1), maka jumlah data yang dibutuhkan akan selalu non-negatif dan terbatas, yaitu*

$\forall_{k \geq 0}\, 0 \leq u(kT) \leq \max\left(\alpha y_d, d_{\max}\right)$.

Bukti

Induksi matematika akan digunakan untuk membuktikan Teorema 2.4. Diperhatikan kembali Persamaan (2.23), selanjutnya, untuk sebarang integer $m = 1$, akan dibuktikan bahwa

$0 \leq u(1T) \leq \max\left(\alpha y_d, d_{\max}\right)$.

Saat $m = 0$, diperoleh $u(0T) = \alpha y_d$, sehingga didapatkan

$$u(1T) = \alpha\left[y_d - \alpha y_d + h(0T)\right].$$

Karena diasumsikan bahwa $0 \le h(kT) \le d_{\max}$, akibatnya

$$u(1T) \le \alpha y_d + d_{\max} \quad (2.29)$$

Dari Persamaan (2.29) dapat dikatakan bahwa $u(1T) \le \max(\alpha y_d, d_{\max})$, dan karena jumlah barang yang dipesan selalu non-negatif, maka terbukti bahwa $0 \le u(1T) \le \max(\alpha y_d, d_{\max})$.

Selanjutnya, diambil sebarang integer positif m, andaikan berlaku $0 \le u(mT) \le \max(\alpha y_d, d_{\max})$, maka akan dibuktikan bahwa untuk sebarang integer positif $m+1$ juga akan berlaku $0 \le u[(m+1)T] \le \max(\alpha y_d, d_{\max})$.

Diperhatikan kembali Persamaan (2.23), saat $m+1$, maka akan berlaku

$$u[(m+1)T] = u(mT) - \alpha u(mT) + \alpha h(mT), \quad (2.30)$$

Oleh karena telah diketahui bahwa untuk setiap m, akan berlaku $0 \le h(kT) \le d_{\max}$, $0 \le u(mT) \le \max(\alpha y_d, d_{\max})$, serta $\alpha \in (0,1)$, akibatnya terbukti bahwa $0 \le u[(m+1)T] \le \max(\alpha y_d, d_{\max})$.Pembuktian selesai dan terbukti bahwa untuk setiap $k \ge 0$ akan berlaku

$$0 \le u(kT) \le \max(\alpha y_d, d_{\max}) \ \blacksquare$$

3. PENUTUP

Berdasarkan hasil dari studi literatur, maka dapat diberikan kesimpulan bahwa sistem transmisi data dengan sumber jaringan tunggal dapat dibentuk menjadi persamaan ruang keadaan dan persamaan keluaran dalam bentuk sistem diskrit LTI. Selanjutnya, dari kedua persamaan tersebut dapat dicari kendali optimal sistem transmisi data, dengan menggunakan teknik kendali regulator linier kuadratik. Hasil kendali menjamin sistem transmisi data akan stabil asimtotik. Serta, sifat-sifat sistem yang telah dikendalikan memperlihatkan bahwa jumlah data yang berada pada simpul jaringan tidak akan melebihi kapasitas maksimal, jumlah data yang berada pada simpul jaringan juga dapat memenuhi seluruh pesanan data yang dibutuhkan oleh penerima *(receiver)*, dan jumlah data yang dikirim oleh sumber *(source)* akan selalu bernilai non-negatif dan terbatas.

4. DAFTAR PUSTAKA

[1] Ogata, K., (1995), Discrete Time Control Systems, *Prentice-Hall*.

[2] A.S. Tanenbaum, and D.J. Wetherall, (2010), Computer Networks, *Prentice-Hall*.

[3] Ignaciuk, P, and Bartoszewicz, (2013), Linear Quadratic Optimal Congestion Control Strategy for Connection-oriented Networks with Lossy Links, *IEEE Transaction Control Systems Technology*, 978-1-4799-2228-4/1.

[4] Munawwaroh, Dita Anies, dan Salmah, (2014), Tesis : *Kendali LQR Diskrit pada Sistem Pergudangan dengan Kebijakan Peninjauan Berkala*, *UGM*, Yogyakarta.

[5] Ignaciuk, P, and Bartoszewicz,(2010), Linear-Quadratic Optimal Control Strategy for Periodic-Review Inventory Systems, *Automatica*, 46 : 1982-1993.

[6] Kwakernaak, Huibert, (1972), Linier Optimal Control Systems, *John Wiley and Sons*, Canada.

[7] Mital, K.V., (1976), Optimization Methods in Operations Research and Systems Analysis, *Wiley Eastern Limited*, New Delhi.

[8] Olsder, G.J., (1994), Mathematical Systems Theory, *Delft*, The Netherlands.