BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

Kata topologi berasal dari bahasa yunani yaitu topos yang artinya “tempat” dan logos yang artinya “ilmu” merupakan cabang matematika yang bersangkutan dengan tata ruang. Kata topologi digunakan baik untuk cabang matematika dan untuk keluarga himpunan dengan beberapa sifat yang digunakan untuk menentukan ruang topologi, objek dasar dari topologi.

Topologi merupakan salah satu bidang kajian dalam matematika. Beberapa sifat dari ruang topologi X bergantung kepada distribusi dari himpunan-himpunan terbuka dalam ruang topologi tersebut. Ruang topologi X disebut ruang Hausdorff atau ruang topologi terpisah jika setiap pasangan titik yang berbeda a dan b di X masing-masing termasuk ke dalam himpunan-himpunan terbuka yang *disjoint*.

Dalam tugas akhir ini akan diberikan sifat yang harus dipenuhi pada suatu himpunan dalam ruang Hausdorff agar himpunan tersebut dikatakan kompak.

1.2. Permasalahan

Berdasarkan uraian di atas permasalahan yang diambil dalam tugas akhir ini adalah bagaimana sifat himpunan kompak dalam ruang Hausdorff (ruang topologi terpisah) ?

1.3. Pembatasan Masalah

Dari permasalahan yang dihadapi tersebut akan dikaji atau dipelajari bagaimana sifat himpunan-himpunan kompak dalam ruang Hausdorff (ruang topologi terpisah) meliputi definisi-definisi, teorema serta bukti-bukti yang terkait dengan materi tersebut.

1.4. Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan dari tugas akhir ini adalah dapat mempelajari tentang sifat himpunan kompak dalam ruang Hausdorff (ruang topologi terpisah).

1.5. Sistematika Penulisan

Di dalam penyusunan tugas akhir ini secara keseluruhan terdiri dari 4 bab yang dilengkapi oleh kata pengantar, daftar isi, daftar lampiran dan lampiran-lampiran yang mendukung. Secara garis besar, sistematika pembahasan pada tugas akhir ini adalah sebagai berikut : Bab I Pendahuluan, pada bab ini dikemukakan tentang latar belakang masalah pembuatan tugas akhir, perumusan masalah yang dihadapi di dalam menyusun tugas akhir, pembatasan masalah tugas akhir, tujuan tugas akhir dan sistematika pembahasan laporan tugas akhir yang menerangkan sekilas dari isi tiap bab yang terdapat pada laporan tugas akhir ini. Bab II Materi Penunjang, pada bab ini dibahas mengenai materi yang terkait dengan teori himpunan dan ruang topologi. Bab III Pembahasan, pada bab ini dibahas mengenai bagaimana sifat himpunan kompak dalam ruang Hausdorff (ruang topologi terpisah). Bab IV Penutup, bab ini merupakan bab akhir laporan yang memuat kesimpulan dari seluruh proses penyelesaian tugas akhir ini. Selain itu juga dimuat mengenai saran-saran penulis untuk mengembangkan sistem pendukung keputusan dalam tugas akhir ini.

BAB II

MATERI PENUNJANG

Untuk mempermudah pemahaman pada bab selanjutnya, pada bab ini akan dibahas beberapa definisi, teorema dan contoh yang mendukung materi pokok. Bab ini terdiri dari dua subbab yaitu himpunan dan ruang topologi. Adapun untuk himpunan terdiri dari lima subbab yaitu : himpunan dan elemen, himpunan bagian (*subse*t) dan *superset*, himpunan universal dan himpunan kosong, kelas, dan operasi-operasi pada himpunan. Sedangkan untuk ruang topologi terdiri dari 6 subbab yaitu : definisi ruang topologi, titik limit, himpunan tertutup, penutup dari himpunan, (tititk interior, titik eksterior, batas) dan (persekitaran dan sistem persekitaran).

2.1 Teori Himpunan

Himpunan adalah suatu konsep yang terdapat dan selalu ada di dalam semua cabang matematika. Secara intuitif, suatu himpunan adalah sesuatu yang didefinisikan dengan tepat atau suatu kumpulan dari obyek-obyek, dan biasanya dinotasikan oleh huruf besar $A, B, X, Y, \ldots$ Obyek-obyek yang terdapat di dalam suatu himpunan disebut elemen-elemen dan biasanya dinotasikan dengan huruf kecil $a, b, x, y, \ldots$

Pernyataan “p adalah elemen dari A” atau “p termasuk di dalam A” dinotasikan oleh “$p \in A$”. Negasi dari “$p \in A$ ditulis “$p \notin A$” dan ini berarti “p bukan elemen A” atau “p tidak termasuk di dalam A”.

2.1.1 Himpunan, Elemen (unsur)

Ada dua cara untuk menyatakan suatu himpunan yaitu

(a) Bila mungkin semua elemennya ditulis (cara Roster), misalnya $A = \{a, e, i, u, o\}$ yaitu suatu himpunan A yang elemennya huruf vokal $(a, e, i, u, dan\ o)$.

elemen yang satu dengan yang lainnya dipisahkan oleh tanda "koma" dan dituliskan di antara dua kurung kurawal {}.

(b) Menyatakan suatu himpunan dengan notasi pembentuk himpunan (cara Rule).

Contoh: $B = \{x | x\ bilangan\ bulat, x > 0\}$dibaca "$B$ adalah himpunan dari x sedemikian hingga x adalah bilangan bulat dan x adalah lebih dari nol", yaitu bahwa B adalah himpunan semua bilangan bulat positif".

Huruf x menyatakan sebarang elemen dari B, garis tegak " $|$ " dibaca "sedemikian hingga", dan koma (,) sebagai "dan".

Contoh 2.1.1.1

Himpunan B tersebut di muka dapat ditulis $B = \{1,2,3, \ldots.\}$

Catatan : $-6 \notin B, 3 \in B,$ dan $\pi \notin B$.

Contoh 2.1.1.2

Misalkan $\mathbb{R}$ = himpunan semua bilangan riil dengan a dan $b \in \mathbb{R}$ dan $a < b$. Berikut ini didefinisikan.

Interval terbuka dari a sampai $b = (a, b) = \{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}$

Interval tertutup dari a sampai $b = [a, b] = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\}$

Interval terbuka-tertutup dari a sampai $b = (a, b] = \{x \in \mathbb{R}: a < x \leq b\}$

Interval tertutup-terbuka dari a sampai $b = [a, b) = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x < b\}$

Interval terbuka-tertutup dan tertutup-terbuka disebut juga interval setengah terbuka.

Dua himpunan A dan B dikatakan sama, ditulis $A = B$, bila A dan B mempunyai elemen-elemen yang sama, yaitu bila setiap elemen dari A termasuk di dalam B dan setiap elemen B termasuk di dalam A. Negasi dari $A = B$ adalah $A \neq B$.

Contoh 2.1.1.3

Misal $E = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $F = \{2,1\}$ dan $G = \{1,2,2,1\}$, maka $E = F = G$.

Suatu himpunan disebut terhingga (*finite*), bila himpunan tersebut memuat n elemen yang berbeda, di mana n sebarang bilangan bulat positif, yang lainnya disebut himpunan tak hingga (*infinite*). Himpunan yang memuat tepat satu anggota disebut himpunan singelton *(singleton)*.

2.1.2 Subset, Superset

Himpunan A disebut subset dari B ditulis $A \subseteq B$ bila dan hanya bila setiap elemen dari A terdapat di dalam B, atau B adalah superset dari A ditulis $B \supseteq A$ bila $x \in A$ maka $x \in B$. Dapat dikatakan juga bahwa A termuat di dalam

B atau "B memuat A". Negasi dari $A \subseteq B$ ditulis $A \nsubseteq B$ atau $B \nsupseteq A$ dan dinyatakan bahwa "ada $x \in A$ sedemikian hingga $x \notin B$".

Contoh 2.1.2.1

Misal diketahui $A = \{1,3,5,7,...\}, B = \{5,10,15,20,...\}$

$C = \{x|x \; prima, x > 2\}$= $\{3,5,7,11,...\}$

$C \subseteq A$, karena setiap bilangan prima yang lebih dari 2 adalah ganjil. Tetapi $B \nsubseteq A$, karena $10 \in B$, sedangkan $10 \notin A$.

Contoh 2.1.2.2

Misal N adalah himpunan semua bilangan bulat positif,

Z adalah himpunan semua bilangan bulat

Q adalah himpunan semua bilangan rasional

R adalah himpunan semua bilangan riil

Maka $N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$.

Definisi 2.1.2.1

Dua himpunan A dan B adalah sama bila dan hanya bila $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$. Dalam hal $A \subseteq B$ tetapi $A \neq B$ dan $A \neq \emptyset$, dikatakan bahwa A adalah himpunan bagian murni dari B atau B memuat A dan biasanya ditulis $A \subset B$.

Teorema 2.1.2.2

Bila A, B dan C sebarang himpunan maka :

(i) $A \subseteq A$

(ii) Bila $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$ maka $A \subseteq C$

2.1.3 Himpunan Universal dan Himpunan Kosong

Dalam teori himpunan, semua himpunan dibentuk oleh himpunan bagian-himpunan bagian dari suatu himpunan tetap. Himpunan tetap seperti itu disebut himpunan universal atau semesta pembicaraan dan di dalam tugas akhir ini himpunan universal dinotasikan dengan U. Ada pula suatu himpunan yang tidak mempunyai elemen, dan himpunan ini disebut himpunan kosong, yang diberi notasi $\emptyset$ atau { }, yang merupakan himpunan terhingga dan merupakan himpunan bagian dari setiap himpunan. Jadi untuk sebarang himpunan $A, \emptyset \subseteq A \subseteq U$.

Contoh 2.1.3.1

Misal dipunyai $x^2 + 1 = 0$, jika semestanya himpunan semua bilangan real maka persamaam tersebut tidak mempunyai penyelesaian tetapi jika semestanya himpunan semua bilangan komplek persamaan tersebut mempunyai penyelesaian.

Contoh 2.1.3.2

Bila $A = \{x | x^2 = 4, x\ ganjil\}$ maka A adalah himpunan kosong, atau $A = \emptyset$.

Contoh 2.1.3.3

Bila $B = \{\emptyset\}$, maka $B \neq \emptyset$, karena B berisi satu anggota.

2.1.4 Kelas

Terdapat suatu himpunan yang elemen-elemennya adalah himpunan misalnya himpunan garis, garis sendiri merupakan himpunan dari tititk-titik. Himpunan yang elemennya terdiri dari himpunan-himpunan disebut kelas.

Contoh 2.1.4.1

Elemen dari kelas $\{\{2,3\},\{2\},\{5,6\}\}$ adalah himpunan-himpunan $\{2,3\},\{2\}$, dan $\{5,6\}$.

Contoh 2.1.4.2

Misalkan A adalah suatu himpunan. Himpunan kuasa dari A, ditulis $\mathcal{P}(A)$ atau 2^A adalah kelas dari semua himpunan bagian dari A. Jadi, bila $A = \{a, b, c\}$, maka $\mathcal{P}(A) = \{A, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \emptyset\}$ Umumnya, bila A terhingga dengan n elemen di dalamnya, maka $\mathcal{P}(A)$ mempunyai 2^n anggota.

2.1.5 Operasi-operasi pada himpunan

Gabungan dari dua himpunan A dan B, ditulis $A \cup B$, adalah himpunan dari semua elemen yang termasuk ke dalam A atau B, yaitu

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \; atau \; x \in B\}$$

Irisan dari dua himpunan A dan B, ditulis $A \cap B$, adalah himpunan yang elemen-elemennya termasuk di dalam A dan B, yaitu $A \cap B = \{x \mid x \in A\ dan\ x \in B\}$

Bila $A \cap B = \emptyset$, yaitu bila A dan B tak mempunyai elemen persekutuan, maka A dan B tak mempunyai elemen persekutuan, maka A dan B disebut lepas (disjoint) atau tak beririsan. $\mathcal{A}$ adalah kelas dari himpunan-himpunan disebut kelas lepas (disjoint) dari himpunan-himpunan, bila tiap-tiap pasangan himpunan-himpunan yang berbeda di dalam $\mathcal{A}$ adalah lepas.

Komplemen relatif dari himpunan B terhadap himpunan A, atau selisih A dan B, ditulis "$A - B$", adalah himpunan yang elemen-elemennya termasuk A tetapi tidak termasuk di B, yaitu

$$A - B = \{x \mid x \in A\ dan\ x \notin B\}$$

Dapat diketahui bahwa $A - B$ dan B adalah lepas, yaitu $(A - B) \cap B = \emptyset$

Komplemen absolut atau disebut komplemen dari suatu himpunan A, ditulis A^c adalah himpunan yang elemen-elemennya bukan elemen dari A, yaitu

$$A^c = \{x \mid x \in U\ dan\ x \notin A\}$$

Dapat dikatakan pula bahwa A^c adalah selisih U dan A.

Teorema 2.1.5.1

Untuk setiap $A, B, C \subseteq U$ berlaku hukum-hukum aljabar himpunan sebagai berikut:

1. $a. A \cup A = A$ $b. A \cap A = A$	Hukum sama kuat
2. $a. (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $b. (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	Hukum Asosiatif
3. $a. A \cup B = B \cup A$ $b. A \cap B = B \cap A$	Hukum Komutatif
4. $a. A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $b. A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap B)$	Hukum Distributif
5. $a. A \cup \emptyset = A$ $b. A \cap U = A$ $c. A \cup U = U$ $d. A \cap \emptyset = \emptyset$	Hukum Identitas
6. a. $A \cup A^C = U$ b. $A \cap A^C = \emptyset$ c. $(A^C) = A$ d. $U^C = \emptyset, \emptyset^C = U$	Hukum komplemen
7. a. $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ b. $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$	Hukum De Morgan

Catatan:

Tiap-tiap hukum di muka analogi dengan hukum-hukum logika.

Misalnya, $A \cap B = \{x \mid x \in A\, dan\, x \in B\} = \{x \mid x \in Bdan\, x \in A\} = B \cap A$. Pernyataan majemuk "$p$ dan q" ditulis "$p \wedge q$" adalah equivalen logis dengan "q dan p" yaitu "$q \wedge p$".

Teorema 2.1.5.2

Diberikan himpunan A dan $B, A \subseteq B$ bila dan hanya bila

(i) $A \cap B = A$

(ii) $A \cup B = B$

(iii) $B^C \subseteq A^C$

(iv) $A \cap B^C = \emptyset$

(v) $B \cup A^C = U$

2.2 Ruang Topologi

2.2.1 Topologi dan Ruang Topologi

Dalam subbab ini dibahas mengenai topologi dan ruang topologi yang merupakan dasar dari pembahasan berikutnya. Untuk lebih jelas diberikan definisi-definisi dan teorema yang mendukung dalam topologi sebagai berikut:

Definisi 2.2.1.1

Misal X adalah suatu himpunan tidak kosong. Suatu kelas τ yang anggotanya himpunan bagian-himpunan bagian dari X disebut topologi pada X, bila dan hanya bila τ memenuhi ketiga aksioma berikut :

$[0_1]$ X dan $\emptyset$ termasuk dalam τ

$[0_2]$ Gabungan dari himpunan-himpunan anggota dari τ adalah anggota τ

$[0_3]$ Irisan dari dua himpunan anggota τ adalah anggota τ.

Anggota-anggota dari τ disebut himpunan-himpunan terbuka, dan X bersama τ yaitu (X, τ) disebut ruang topologi.

Catatan :

Untuk penulisan ruang topologi (X, τ) secara umum cukup ditulis dengan X kecuali topologinya ingin ditonjolkan.

Contoh-contoh topologi

Contoh 2.2.1.1

Topologi biasa *(usual topology)* pada himpunan semua bilangan riil $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ = Himpunan semua bilangan riil

τ: $\{G \subseteq \mathbb{R} \mid \forall\, x \in G, \exists\, \delta > 0\ shg\ (x-\delta, x+\delta) \subseteq G\}$

Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{R}, \tau)$ adalah ruang topologi disebut topologi biasa (*usual* topologi).

1. $\emptyset \in \tau$ karena, jika $x \in \emptyset$, $maka$ $\exists\, \delta > 0$ sehingga $(x-\delta, x+\delta) \subseteq \emptyset$, implikasi ini bernilai benar sebab antisidennya bernilai salah. Dimana $\mathbb{R} \in \tau$ sebab $\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, \delta > 0\ (x-\delta, x+\delta) \subseteq \mathbb{R}$.
2. $\{G_i | i \in I, G_i \in \tau\}$ akan ditunjukkan $\bigcup_{i \in I} G_i \in \tau$.

Ambil sebarang $x \in \bigcup_{i \in I} G_i \Rightarrow x \in G_i$ untuk suatu $i \in I \Rightarrow \exists\, \delta > 0$ sehingga $(x - \delta, x + \delta) \subseteq G_i$.

Jadi $(x - \delta, x + \delta) \subseteq G_i \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$.

Jadi $\bigcup_{i \in I} G_i \in \tau$.

3. Jika $G_1, G_2 \in \tau$ maka $G_1 \cap G_2 \in \tau$ sebab untuk sebarang $x \in G_1 \cap G_2$

   $x \in G_1 \Rightarrow \exists\, \delta_1 > 0$ sehingga $(x - \delta_1, x + \delta_1) \subseteq G_1$.

   $x \in G_2 \Rightarrow \exists\, \delta_2 > 0$ sehingga $(x - \delta_2, x + \delta_2) \subseteq G_2$.

   $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) \Rightarrow (x - \delta, x + \delta) \subseteq (x - \delta_1, x + \delta_1) \subseteq G_1$.

   $(x - \delta, x + \delta) \subseteq (x - \delta_2, x + \delta_2) \subseteq G_2$.

   Jadi $(x - \delta, x + \delta) \subseteq G_1 \cap G_2$.

Contoh 2.2.1.2

Misalkan $X = \{a, b, c, d, e\}. \tau_1, \tau_2, dan\, \tau_3$ masing-masing himpunan bagian dari 2^x. Manakah yang merupakan topologi pada X, bila

$\tau_1 = \{ X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$.

$\tau_2 = \{ X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, \}\}$.

$\tau_3 = \{ X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, d, e, \}\}$.

Jawab :

τ_1 adalah topologi pada X, karena memenuhi ketiga sifat (aksioma) diatas.

τ_2 bukan topologi pada X, karena himpunan $\{a\}$ dan $\{b, c, d\}$ merupakan elemen τ_2 tetapi $\{a\} \cup \{b, c, d\} = \{a, b, c, d\} \notin \tau_2$.

τ_3 bukan topologi pada X, karena himpunan $\{a, c, d\}$ dan $\{a, b, d, e\}$ merupakan elemen τ_3 tetapi $\{a, c, d\} \cap \{a, b, d, e\} = \{a, d\} \notin \tau_3$.

Contoh 2.2.1.3

Misal D adalah kelas dari semua himpunan bagian dari X, atau $D = 2^x$. Maka D adalah topologi pada X, karena memenuhi $[0_1]$, $[0_2]$, $[0_3]$. D disebut *topologi diskrit*, dan (X, D) disebut *ruang topologi diskrit*, atau secara singkat disebut *ruang diskrit*.

Contoh 2.2.1.4

Dari aksioma $[0_1]$, suatu topologi pada X harus memuat himpunan X dan $\emptyset$. Kelas $Y = \{X, \emptyset\}$ yang hanya memuat X dan $\emptyset$ adalah topologi pada X.

$Y = \{X, \emptyset\}$ disebut *topologi indiskrit*, dan (X, Y) disebut *ruang topologi indiskrit* atau *ruang indiskrit*.

Contoh 2.2.1.5.

Diberikan himpunan tak hingga X, topologi τ pada X didefinisikan dengan $A \subseteq X$, $A \in \tau$ jika hanya jika $A = \emptyset$ atau A^C = berhingga. Akan ditunjukkan bahwa τ topologi pada X:

(i) X dan $\emptyset$ termasuk dalam τ.

Bukti :

Dari **Definisi 2.2.1.1** sudah diketahui bahwa X dan $\emptyset$ termasuk dalam τ.

(ii) Gabungan dari himpunan-himpunan anggota dari τ adalah anggota τ.

Bukti :

Diketahui bahwa $A, B \ \in \tau$

$A \in \tau$ maka $A \ = \ \emptyset$ atau A^C = berhingga

$B \in \tau$ maka $B = \emptyset$ atau B^C = berhingga, selanjutnya

$A \cup B = \emptyset$ atau $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

Karena A^Cdan B^C berhingga maka $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ juga berhingga

jadi $A \cup B \in \tau$.

(iii) Irisan dari dua himpunan anggota τ adalah anggota τ.

Bukti :

Diketahui bahwa $A, B \ \in \tau$

$A \ \in \tau$ maka $A = \emptyset$ atau A^C = berhingga, selanjutnya

$B \ \in \tau$ maka $B = \emptyset$ atau $B^C = A^C \cup B^C$

Karena A^Cdan B^C berhingga maka $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ juga berhingga

jadi $A \cap B \in \tau$.

Maka topologi τ tersebut disebut topologi kofinit.

Teorema 2.2.1.2

Jika $\tau_1 \ dan \, \tau_2$ topologi pada X maka irisan $\tau_1 \cap \tau_2$ juga merupakan topologi pada X.

[01]. $X, \emptyset \in \tau_1 \cap \tau_2$, karena $X, \emptyset \ \in \tau_1$ dan $X, \emptyset \in \tau_2$.

[03]. Bila $G, H \in \tau_1 \cap \tau_2$, maka $G, H \in \tau_1$, dan $G, H \in \tau_2$. Karena τ_1 dan τ_2 topologi pada $X, G \cap H \in \tau_1$ dan $G \cap H \in \tau_2$ jadi $G \cap H \in \tau_1 \cap \tau_2$.

[02]. Bila $G, H \in \tau_1 \cap \tau_2$, maka $G, H \in \tau_1$ dan $G, H \in \tau_2$ karena τ_1 dan τ_2 topologi pada X, maka $G \cup H \in \tau_1, dan\ G \cup H \in \tau_2$, jadi $G \cup H \in \tau_1 \cap \tau_2$.

Dalam **contoh 2.2.1.6** berikut ditunjukkan bahwa gabungan dari topologi-topologi belum tentu topologi.

Contoh 2.2.1.6.

Diberikan topologi pada $X = \{a, b, c\}$ dengan Kelas-kelas τ_1 = $\{X, \emptyset, \{a\}\}$ dan τ_2 = $\{X, \emptyset, \{b\}\}$

Diketahui bahwa $\tau_1 \cup \tau_2$ = $\{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}\}$ bukan topologi pada X, karena $\{a\}, \{b\} \in \tau_1 \cup \tau_2$, tetapi $\{a\} \cup \{b\}$ = $\{a, b\} \notin \tau_1 \cup \tau_2$.

Bila G adalah himpunan terbuka yang memuat titik $p \in X$, maka G disebut lingkungan terbuka dari p atau persekitaran terbuka dari p, dan G tanpa p yaitu $G - \{p\}$ disebut persekitaran terbuka terhapuskan dari p.

2.2.2 Titik Limit (A')

Misal X adalah ruang topologi. Suatu titik $p \in X$ disebut titik limit dari himpunan $A \subseteq X$ bila dan hanya bila setiap himpunan terbuka G yang memuat p, memuat suatu titik anggota A yang berbeda dengan p, atau “bila G terbuka, $p \in G$, maka $(G - \{p\}) \cap A \neq \emptyset$).

Himpunan dari titik-titik limit dari A ditulis A' dan disebut *set derive* dari A.

Contoh 2.2.2.1

$X = \{a, b, c, d, e\}$ dengan $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$

dan $A = \{a, b, c\} \subset X$.

Perhatikan bahwa $b \in X$ adalah titik limit dari A, karena himpunan-himpunan terbuka yang memuat b yaitu X dan $\{b, c, d, e\}$ masing-masing memuat titik dari A yang berbeda dengan b yaitu c. Tetapi titik $a \in X$ bukan titik limit dari A, karena himpunan terbuka $\{a\}$, tidak memuat titik dari A yang berbeda dengan a. Dengan cara yang sama d dan e adalah titik limit dari A sedangkan c bukan titik limit dari A. Jadi $A' = \{b, d, e\}$ yang disebut *set derive* dari A.

Contoh 2.2.2.2

Misal X ruang topologi indiskrit yaitu (X, Y) dengan $Y = \{X, \emptyset\}$. Maka X adalah himpunan terbuka yang memuat sebarang $p \in X$. Jadi p adalah titik limit dari setiap himpunan bagian dari X, kecuali himpunan kosong $\emptyset$ dan himpunan $\{p\}$. Jadi, himpunan dari titik-titik limit dari $A \subset X$ yaitu A' adalah:

$$A' = \begin{cases} \phi, \text{ bila } A = \phi \\ \{p\}^c = X - \{p\}, \text{ bila } A = \{p\} \\ X, \text{ bila } A \text{ memuat dua titik atau lebih} \end{cases}$$

Bukti :

- $A = \emptyset$ untuk $\forall\, p \in X$

  $A \cap X - \{p\} = \emptyset$

  $A' = \emptyset$

- $A = \{p\}, p \in X$

  $A \cap X - \{p\} = \emptyset$ jadi p bukan titik limit A

  $q \in X$, $q \neq p$

  $A \cap X - \{q\} = \{p\} \neq \emptyset$

  Jadi $\forall$ q $\in$X, q$\neq$ p merupakan titik limit A

  $A = \{p\}$ $A' = X - \{p\}$

- Jika A memuat dua atau lebih elemen X

  Misal $p, q \in A$

  $\forall\, r \in X$ maka $A \cap X - \{r\} \neq \emptyset$

  sebab jika $r = p$, $q \in A \cap X - \{r\}$

  $r = q, \quad p \in A \cap X - \{r\}$

  $r \neq p, r \neq q$ maka p, q $A \cap X - \{r\}$

  jadi $\forall\, r \in X$ merupakan titik limit A

  jadi $A' = X$.

2.2.3 Himpunan tertutup

Misal X adalah ruang topologi. Himpunan bagian A dari X disebut himpunan tertutup bila dan hanya bila A^C adalah himpunan terbuka.

Contoh 2.2.3.1.

Diberikan himpunan $X = \{a, b, c, d, e\}$ dengan kelas $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$ himpunan bagian-himpunan bagian *tertutup* dari X adalah $\{\emptyset, X, \{b, c, d, e\}, \{a, b, e\}, \{b, e\}, \{a\}\}$ adalah komplemen – komplemen dari himpunan bagian terbuka dan tertutup dari X, sedangkan $\{a, b\}$ bukan himpunan bagian terbuka dan bukan himpunan bagian tertutup dari X.

Contoh 2.2.3.2.

Misal X adalah ruang diskrit yaitu setiap himpunan bagian dari X adalah terbuka. Maka setiap himpunan bagian dari X adalah juga tertutup, karena komplemennya selalu terbuka. Dengan kata lain, setiap himpunan bagian dari X adalah terbuka dan tertutup.

Diketahui bahwa $A^{CC} = A$, untuk setiap himpunan bagian A dari X, maka diperoleh proposisi berikut:

Teorema 2.2.3.1

Dalam ruang topologi X, himpunan bagian A dari X adalah terbuka bila dan hanya bila komplemennya tertutup.

Aksioma $[0_1]$, $[0_2]$, dan $[0_3]$ dari ruang topologi dan hukum De Morgan memberikan teorema berikut :

Teorema 2.2.3.2

Bila X ruang topologi, maka kelas dari himpunan bagian-himpunan bagian tertutup dari X memilki sifat-sifat berikut :

(i) X dan $\emptyset$ adalah himpunan himpunan tertutup

(ii) Irisan dari himpunan-himpunan tertutup adalah tertutup

(iii) Gabungan dari dua himpunan tertutup adalah tertutup

Bukti:

Misal X adalah ruang topologi dan C = kelas himpunan bagian tertutup dari X memiliki sifat:

(i) X dan $\emptyset$ adalah anggota C

Sebab $X = \emptyset^C$ sehingga $\emptyset = X^C$ dimna $\emptyset$ dan X terbuka.

(ii) $A, B \in C$ maka $A \cap B \in C$,

A, B tertutup $\Rightarrow A^C$ terbuka $\in \tau$

$\Rightarrow B^C$ terbuka $\in \tau$

Jadi $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ terbuka maka $A \cap B$ tertutup

(iii) $A, B \in C$ maka $A \cup B \in C$

A, B tertutup $\Rightarrow A^C$ terbuka $\in \tau$

$\Rightarrow B^C$ terbuka $\in \tau$

Jadi $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ terbuka maka $A \cup B$ tertutup

2.2.4 Penutup dari Himpunan

Misal A himpunan bagian dari ruang topologi X. Penutup dari A, ditulis $\bar{A}$ atau A^{-} adalah irisan dari semua himpunan tertutup yang memuat A. Dengan kata lain, bila $\{F_i | i \in I\}$ adalah kelas dari semua himpunan bagian tertutup dari X yang memuat A, maka $\bar{A} = \cap_i F_i$. Dapat diketahui bahwa $\bar{A}$ adalah tertutup, karena $\bar{A}$ adalah irisan dari himpunan-himpunan tertutup. Selanjutnya juga, $\bar{A}$ adalah superset tertutup terkecil dari A, dengan demikian, bila F adalah himpunan tertutup yang memuat A, maka $A \subseteq \bar{A} \subseteq F$.

Berdasarkan hal tersebut, himpunan A adalah tertutup bila dan hanya bila $A = \bar{A}$, dan diperoleh pernyataan berikut :

Teorema 2.2.4.1

Bila $\bar{A}$ penutup dari himpunan A, maka

(i) $\bar{A}$ adalah tertutup

(ii) Bila F superset tertutup dari A, maka $A \subseteq \bar{A} \subseteq F$; dan

(iii) A adalah tertutup bila dan hanya bila $A = \bar{A}$

Bukti :

(i) $\bar{A} = \bigcap_{i \in I} F_i$, Fi himpunan tertutup memuat A, karena irisan dari himpunan tertutup adalah tertutup maka $\bar{A}$ tertutup.

(ii) $\bar{A} \subseteq F$, $\bar{A}$ tertutup, $A \subseteq Fi \; \forall \, I \; jadi \; \bar{A} \subseteq \bar{A}$

(iii) Jika A tertutup $A \subseteq A, A \subseteq \bar{A} \subseteq A$ jadi $A = \bar{A}$.

Contoh 2.2.4.1

Diberikan himpunan $X = \{a, b, c, d, e\}$ dan $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$ dengan kelas himpunan tertutup dari X adalah $\{\emptyset, X, \{b, c, d, e\}, \{a, b, e\}, \{b, e\}, \{a\}\}$.

Dari definisi diatas diperoleh

$\{\overline{b}\} = \{b, e\}, \{\overline{a, c}\} = X, \{\overline{b, d}\} = \{b, c, d, e\}$.

Contoh 2.2.4.2

Misal X adalah ruang topologi kofinit, yaitu komplemen dari himpunan-himpunan terbuka. Maka himpunan-himpunan tertutup dari topologi tersebut adalah himpunan bagian - himpunan bagian terhingga dari X dengan X. Jadi bila $A \subseteq X$ terhingga, penutup $\bar{A}$ adalah A sendiri, karena A tertutup. Sebaliknya, bila $A \subseteq X$ tak hingga, maka X adalah superset tertutup dari A; jadi $\bar{A}$ adalah X. Selanjutnya, untuk suatu A himpunan bagian dari ruang kofinit X, maka $\bar{A}$ =

$$\overline{A} = \begin{cases} A \text{ bila } A \text{ terhingga} \\ X \text{ bila } A \text{ tak hingga} \end{cases}$$

Penutup dari suatu himpunan dapat dinyatakan dengan pengertian dari titik-titik limit dari himpunan tersebut sebagai berikut :

Teorema 2.2.4.2

Diberikan ruang topologi X jika $A \subseteq X$, maka

$\bar{A} = \{x \in X | setiap\ persekitaran\ x\ beririsan\ dengan\ A\}$.

Bukti :

Andaikan $\bar{A} \neq \{x \in X | setiap\ persekitaran\ x\ beririsan\ dengan\ A\}$ dan ini berarti terdapat $x \in \bar{A}$ yang mana terdapat persekitaran X yang tidak beririsan dengan A.

Misal : V_x persekitaran terbuka dari X dan tidak beririsan dengan A. Ini berarti $V_x \cap A = \emptyset$ sehingga $A \subseteq V_x{}^c$ tertutup. Jadi $V_x{}^c$ merupakan himpunan tertutup yang memuat A.

Dari definisi $\bar{A}$ (irisan semua himpunan tertutup yang memuat A) maka pasti memuat A atau $\bar{A} \subseteq V_x{}^c$. Jadi didapatkan $x \in \bar{A} \subseteq V_x{}^c$ sedangkan $x \in V_x$ berarti $x \notin V_x{}^c$.

Merupakan kontradiksi jadi pengandaian salah

Jadi $\bar{A} = \{x \in X | setiap\ persekitaran\ xberirisan\ dengan\ A\}$.

Teorema 2.2.4.3

Bila A himpunan bagian dari ruang topologi X, maka penutup dari A adalah gabungan dari A dengan A', yaitu $\bar{A} = A \cup A'$ dimana $A' =$ himpunan semua titik limit dari $A \subseteq X$.

Bukti :

Ambil sebarang $x \in \bar{A}$ (menurut **Teorema 2.2.4.2** diatas) setiap persekitaran x beririsan dengan A maka $x \in A$ atau jika $x \notin A$, maka x titik limit A ($x \in A'$)

Jadi $x \in A \cup A'$ maka $\bar{A} \subseteq A \cup A'$.

Jika $x \in A \cup A'$ maka setiap persekitaran x beririsan dengan A sehingga

$A \cup A' \subseteq \bar{A}$ jadi $\bar{A} = A \cup A'$.

Teorema 2.2.4.4

Misal X ruang topologi, $A \subseteq X$ tertutup jika hanya jika A memuat semua titik limit A dengan kata lain A tertutup jika hanya jika $A' \subseteq A$.

Bukti :

Dari **teorema 2.2.4.1 point (iii)** dan **teorema 2.2.4.3** diatas diperoleh :

Untuk A tertutup jika hanya jika $A = \bar{A} = A \cup A'$

$A = A \cup A'$ jika hanya jika $A' \subseteq A$.

Contoh 2.2.4.3

Diberikan himpunan semua bilangan rasional Q. Di dalam topologi biasa untuk $\mathbb{R}$, setiap bilangan real $a \in \mathbb{R}$ adalah titik limit dari Q sebab $\forall\, a \in \mathbb{R}, \forall\, \delta > 0$, $N\delta\,(a) \cap Q - a \neq \emptyset$ berarti $Q' = \mathbb{R}, \bar{Q} = Q \cup Q' = Q \cup \mathbb{R}$ maka $\bar{Q} = Q \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$. Jadi penutup dari Q adalah himpunan semua bilangan real $\mathbb{R}$, yaitu $\bar{Q} = \mathbb{R}$.

Definisi 2.2.4.5

Himpunan bagian A dari ruang topologi X disebut padat *(dense)* dalam $B \subseteq X$, bila B termasuk dalam penutup A, yaitu $B \subseteq \bar{A}$. Khususnya, A adalah padat dalam X atau himpunan bagian padat dari X bila dan hanya bila $\bar{A} = X$.

Contoh 2.2.4.4

Diberikan himpunan $X = \{a, b, c, d, e\}$ dengan kelas $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$ himpunan bagian-himpunan bagian tertutup dari X adalah $\{\emptyset, X, \{b, c, d, e\}, \{a, b, e\}, \{b, e\}, \{a\}\}$. Dapat diketahui bahwa $\{\overline{a, c}\} = X$ dan $\{\overline{b, d}\} = \{b, c, d, e\}$. Jadi himpunan $\{a, c\}$ adalah himpunan bagian padat dari X, tetapi himpunan $\{b, d\}$ bukan himpunan bagian padat dari X.

Teorema 2.2.4.5

Diberikan ruang topologi X dan $A, B \subseteq X$, maka memenuhi :

(i) $\overline{\emptyset} = \emptyset$

(ii) $A \subseteq \bar{A}$

(iii) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

(iv) $(\bar{A})^{-} = \bar{A}$

Bukti :

Untuk point (iii) dimana

$\bar{A} = A \cup A'$

$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$, $\overline{A \cup B} = (A \cup B) \cup (A \cup B)'$

$(A \cup B)' = A' \cup B'$

$\Rightarrow$ $x \in (A \cup B)'$ maka x adalah titik limit $A \cup B$

$\Rightarrow \forall 0_x, 0_x \cap (A \cup B) - \{x\} \neq \emptyset$

$\Rightarrow \forall 0_x, (0_x \cap A) \cup (0_x \cap B) - \{x\} \neq \emptyset$

$\Rightarrow \forall 0_x, (0_x \cap A - \{x\}) \cup (0_x \cap A - \{x\} \neq \emptyset$

$\Rightarrow 0_x \cap A - \{x] \neq \emptyset$ dan $0_x \cap B - \{x] \neq \emptyset$

$\Rightarrow x \in A' \cup x \in B'$

$\Rightarrow\ x \in A' \cup B'$

Jadi $(A \cup B)' \subseteq A' \cup B'$

$x \in A' \cup B'$ maka $x \in A'$ atau $x \in B'$

$\Rightarrow \forall 0_x, 0_x \cap A - \{x\} \neq \emptyset$ atau $\forall 0_x, 0_x \cap B - \{x\} \neq \emptyset$

$\Rightarrow \forall 0_x, (0_x \cap A - \{x\}) \cup (0_x \cap B - \{x\}) \neq \emptyset$

$\Rightarrow \forall 0_x, 0_x \cap (A \cup B) - \{x\} \neq \emptyset, x \in (A \cup B)'$

Jadi $A' \cup B' \subseteq (A \cup B)'$

Jadi $(A \cup B)' = A' \cup B'$

Jadi $\overline{A \cup B} = (A \cup B) \cup (A \cup B)'$

$= (A \cup B) \cup (A' \cup B')$

$= (A \cup A') \cup (B \cup B')$

$= \bar{A} \cup \bar{B}.$

2.2.5 Titik Interior, Eksterior dan Batas

2.2.5.1 Titik Interior

Misal A himpunan bagian dari ruang topologi X. titik $p \in X$ disebut titik interior dari A, bila p termasuk himpunan terbuka G himpunan bagian dari A, yaitu $p \in G \subseteq A$, G himpunan terbuka.

Himpunan dari titik-titik interior dari A, ditulis int(A), $\overset{0}{A}$ atau A^0disebut interior dari A.

Misal:

Diberikan $X = \{a, b, c, d, e\}, \tau : \{\emptyset, X, \{a, b, c\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{c\}\}$

$A = \{c, d, e\}$

$A^0 = \{c, d\}$

Interior dari A dapat dinyatakan sebagai berikut :

Teorema 2.2.5.1.1

Interior dari himpunan A adalah merupakan gabungan dari semua himpunan bagian terbuka dari A atau

A^0 : himpunan semua titik interior A : $\bigcup_{a \in A} G_a$

G_a : himpunan terbuka yang memuat a dan $G_a \subseteq A, a \in A$.

I : $\{G_a \mid G_a \in \tau, a \in G_a \subseteq A, a \in A\}$

Selanjutnya juga bahwa :

(i) A^0 adalah terbuka

(ii) A^0 himpunan bagian terbuka terbesar dari A; yaitu bila G himpunan bagian terbuka dari A maka $G \subseteq A^0 \subseteq A$; dan

(iii) A adalah terbuka bila dan hanya bila $A = A^0$

Bukti :

(i) A^0: $\bigcup_{a \in A} G_a$ karena G_a terbuka maka A^0 terbuka.

(ii) A^0 himpunan terbuka terbesar yang termuat dalam A, yaitu jika $G \subseteq A$ dan G terbuka , maka $G \subseteq A^0$.

(iii) A terbuka bila hanya bila $A = A^0$.

$\Leftarrow$ Jika $A = A^0$ maka A terbuka karena A^0 himpunan terbuka terbesar yang termuat dalam A.

$\Rightarrow$ Jelas $A^0 \subseteq A$ jika A terbuka maka $A \subseteq A^0$

Jadi $A = A^0$.

2.2.5.2 Titik Eksterior

Eksterior dari A ditulis eks (A), adalah interior dari komplemen A, yaitu $int\ (A^C)$. atau

$p \in X$ titik eksterior, $A \subseteq X$, jika p merupakan titik interior A^C.

Himpunan semua titik eksterior $A = Ext\ (A) = Int(A^C) = (A^C)^0$.

Contoh 2.2.5.2.1

A={c, d, e}

A^C={a, b}

$Ext\ (A) = Int\ (A^C) = \emptyset$

Contoh 2.2.5.2.2

$A = [1,2) \cup \{3\}$

$Ext\ (A) = Int\ (A^C)$

$A^C = (-\infty, 1) \cup [2,3) \cup (3, \infty)$

$Ext\ (A) = Int\ (A^C)$

= $(-\infty, 1) \cup (2,3) \cup (3, \infty)$.

Contoh 2.2.5.2.3

Dipunyai titik $X = \{a, b, c\}, \tau : \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}$

$A = \{b\}$

$A^0 = Int\ (A) = \emptyset$

$Ext\ (A) = Int\ (A^C) = Int\ \{a, c\} = \{a\}$

2.2.5.3 Batas

Batas dari A, ditulis $b(A)$, adalah himpunan dari titik-titik yang tidak termasuk interior dan tidak termasuk eksterior dari A.

Contoh 2.2.5.3.1:

$X = \{a, b, c, d\}, \tau : \{\emptyset, X, \{b, c\}, \{c, d\}, \{c\}, \{b, c, d\}\}$

A= $\{a, b, c\}$

A^0= $\{b, c\}$

$Ext\ (A) = Int\ (A^C)$ = $Int\ (\{d\}) = \emptyset$

$b(A)$ = $\{a, d\}$.

Contoh 2.2.5.3.2:

X = $\mathbb{R}$, τ = topologi biasa

A = $(1,2]\ \cup\ \{3\}$

A^0= $(1,2)$

$Ext\ (A)$ = $\{(-\infty, 1)\ \cup\ (2,3)\ \cup\ (3, \infty)\}$

$b(A)$ = {1,2,3}.

Berikut ini hubungan titik interior, titik eksterior, dan batas .

Teorema 2.2.5.3.1

Misal A himpunan bagian dari ruang topologi X. Maka penutup dari A adalah gabungan dari interior dan batas dari A, yaitu $\bar{A}$ = A^0 $\cup$ $b(A)$.

Contoh :

Diberikan a, b di $\mathbb{R}$ dan interval – interval A, B, C, D yaitu $[a, b], (a, b)$ $(a, b]$ dan $[a, b)$ dimana a dan b adalah titik-titik akhir.

$A =$ 

$\rightarrow [a,b]\ \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$

$Int\ (A) = (a,b)$

$B =$ 

$\rightarrow (a,b)\ \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\} = (a,b)$

$Int\ (B) = (a,b)$

$C =$ 

$\rightarrow (a,b]\ \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\} = (a,b)$

$Int\ (C) = (a,b)$

$D =$ 

$\rightarrow [a,b)\ \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\} = (a,b)$

$\mathrm{Int}\ (D) = (a,b)$

Jadi $Int\ (A) = Int\ (B) = Int\ (C) = Int(D) = (a,b)$

$b(A) = b(B) = b(C) = b(D) = \{a,b\}$,

$\bar{A} = A^0 \cup b(A) = [a,b]$

$\bar{B} = B^0 \cup b(B) = [a,b]$

$\bar{C} = C^0 \cup b(C) = [a,b]$

$\bar{D} = \mathrm{D}^0 \cup b(D) = [a,b]$

2.2.6 Persekitaran dan Sistem Persekitaran

Misal p adalah titik di ruang topologi X. Suatu himpunan bagian N dari X disebut persekitaran dari p jika dan hanya jika N adalah suatu superset dari himpunan terbuka G yang memuat p yaitu :

$p \in G \subseteq N$ dengan G himpunan terbuka

Kelas dari semua persekitaran dari $p \in X$, ditulis N_p, disebut sistem persekitaran dari p".

Contoh 2.2.6.1:

Misal diberikan himpuan $X = \{a, b, c, d\}$ dengan topologi τ : {∅, X, {b,c}, {c,d}, {c}, {b,c,d}} dan $c \in X$.

N_a= $\{X\}$

N_b = $\{X, \{b, c\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c\}\}$

N_c = $\{X, \{b, c\}, \{c\}, \{c, d\}, \{b, c, d\}, \{b, c, a\}, \{a, c\}\}$

Misal dipunyai himpunan $A = \{a, c, d\}$, A bukan merupakan persekitaran dari titik a, tetapi merupakan persekitaran dari titik c dan d karena memuat himpunan terbuka dari topologi tersebut.

$A = \{a, b\}$ bukan persekitaran karena $A \notin N_b$

$\{a, b, d\} \notin N_b$ bukan persekitaran karena tidak ada himpunan terbuka yang memuat b dalam himpunan $\{a, b, d\}$.

$\{a, c\} \in N_c$ merupakan persekitaran.

Jika N persekitaran p, maka $p \in Int\ (N)$.

Untuk suatu sistem persekitaran N_p dari suatu titik $p \in X$ ada 4 sifat yang dinyatakan dalam proposisi berikut, yang disebut aksioma persekitaran, seperti berikut :

Teorema 2.2.6.1.

Misalkan X adalah ruang topologi dan $p \in X$.

(i) $N_p \neq \emptyset$ dan p termasuk ke dalam tiap anggota N_p (jadi jika $A \in N_p$, maka $p \in A\}$

(ii) Irisan dari dua anggota N_p termasuk N_p.

Bukti :

Jika $A, B \in N_p$, $A \cap B \in N_p$

$A \in N_p \Rightarrow \exists\ G_1 \in \tau$ sehingga $p \in G_1 \subseteq$ A

B$\in N_p \Rightarrow \exists\ G_2 \in \tau$ sehingga $p \in G_2 \subseteq B$

$p \in G_1 \cap G2 \subseteq A \cap B$ dengan $G_1 \cap G_2 \in \tau$

jadi $A \cap B \in N_p$.

(iii) Setiap superset dari anggota N_p termasuk N_p.

(Jika $A \in N_p$ dan $A \subseteq B$ maka $B \in N_p$)

Bukti:

Misal $A \in N_p$ dan $A \subseteq B$, A$\in N_p \Rightarrow \exists$ himpunan terbuka G dimana $p \in G \subseteq A \subseteq B$. Jadi $B \in N_p$.

(iv) Tiap anggota $N \in N_p$ adalah superset dari anggota $G \in N_p$dengan G adalah persekitaran dari tiap-tiap titik dari G yaitu $G \in N_g$ untuk tiap $g \in G$.

Bukti :

$G \in N_g$, $\forall\ g \in G$ jika hanya jika G terbuka.

Jika $N \in N_p$ maka $\exists$ himpunan terbuka G sehingga $p \in G \subseteq N \Rightarrow N$ superset dari G maka $G \in N_p$ dan $G \in N_g$ untuk $\forall\ g \in G$.