MULTIPLISITAS SIKEL DARI GRAF TOTAL PADA GRAF SIKEL, GRAF *PATH* DAN GRAF KIPAS

SKRIPSI

Oleh :

NUR DIAN PRAMITASARI

J2A 009 064

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN MATEMATIKA

UNIVERSITAS DIPONEGORO

SEMARANG

2013

MULTIPLISITAS SIKEL DARI GRAF TOTAL PADA GRAF SIKEL, GRAF *PATH* DAN GRAF KIPAS

NUR DIAN PRAMITASARI

J2A 009 064

Skripsi

Diajukan Sebagai Syarat untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains

Pada

Jurusan Matematika

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN MATEMATIKA

UNIVERSITAS DIPONEGORO

SEMARANG

2013

HALAMAN PENGESAHAN

Judul	:	Multiplisitas Sikel dari Graf Total pada Graf Sikel, Graf *Path*, dan Graf Kipas
Nama	:	Nur Dian Pramitasari
NIM	:	J2A 009 064

Telah diujikan pada sidang Tugas Akhir tanggal 29 Juli 2013.

dan dinyatakan **lulus** pada tanggal 2 Agustus 2013.

Semarang, 2 Agustus 2013

Mengetahui,
a.n. Ketua Jurusan Matematika
Sekretaris Jurusan
FSM UNDIP,

Suryoto, S.Si, M.Si
NIP. 196807141994031004

Panitia Penguji Tugas Akhir
Ketua,

Drs. Solichin Zaki, M.Kom
NIP. 195312191979031001

HALAMAN PENGESAHAN

Judul	:	Multiplisitas Sikel dari Graf Total pada Graf Sikel, Graf *Path*, dan Graf Kipas
Nama	:	Nur Dian Pramitasari
NIM	:	J2A 009 064

Telah diujikan pada sidang Tugas Akhir tanggal 29 Juli 2013.

Semarang, 1 Agustus 2013

Pembimbing Utama	Pembimbing Anggota
Farikhin, S.Si, M.Si, Ph.D	Drs. Bayu Surarso, M.Sc, Ph.D
NIP 19731220200012 100 1	NIP 19631105198803 100 1

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyusun tugas akhir ini.

Tugas akhir yang berjudul **“Multiplisitas Sikel dari Graf Total pada Graf Sikel, Graf *Path*, dan Graf Kipas ”** ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Diponegoro Semarang.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada yang terhormat :

1. Drs. Solikhin Zaki, M.Kom selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Matematika UNDIP.
2. Farikhin, S.Si, M.Si, Ph.D selaku dosen pembimbing I yang dengan sabar membimbing dan mengarahkan penulis hingga selesainya penyusunan Tugas Akhir ini.
3. Drs. Bayu Surarso, M.Sc, Ph.D selaku dosen pembimbing II yang dengan sabar membimbing dan mengarahkan penulis hingga selesainya penyusunan Tugas Akhir ini.
4. Semua pihak yang telah memberikan dukungan serta bantuan kepada penulis dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.

Penulis menyadari bahwa Tugas Akhir ini masih jauh dari sempurna. Untuk itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang bersifat membangun demi kesempurnaan Tugas Akhir ini. Semoga Tugas Akhir ini bisa membawa manfaat bagi penulis sendiri khususnya dan bagi pembaca pada umumnya.

Semarang,   Juli 2013

Penulis

ABSTRAK

Diberikan graf G dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Graf total dari graf G dinotasikan dengan $T(G)$ didefinisikan sebagai himpunan titik dari $T(G)$ adalah $V(G) \cup U(G)$, dengan $U(G)$ adalah himpunan titik yang diperoleh dari penambahan satu titik di setiap sisi $e = v_i v_j$ pada graf G. Sedangkan multiplisitas sikel dari graf total pada graf G adalah jumlah maksimal sikel sisi yang disjoin dari graf total pada graf G. Dalam tugas akhir ini, dipelajari tentang multiplisitas sikel dari graf total pada graf C_n, P_n, dan dibahas tentang multiplisitas sikel dari graf total pada graf F_n. Hasil penelitian ini, telah diketahui bahwa multiplisitas sikel dari graf total pada graf C_n adalah $n + 1$ dan multiplisitas sikel dari graf total pada graf P_n is $n - 1$. Selanjutnya, telah dibuktikan multiplisitas sikel dari graf total pada graf F_n adalah $\left[\frac{n^2 + 17n - 18}{6}\right]$ untuk n ganjil atau $\left[\frac{n^2 + 16n - 18}{6}\right]$ untuk n genap, dengan n adalah titik pada graf G.

Kata Kunci : multiplisitas sikel, graf total, graf sikel, graf *path*, graf kipas.

ABSTRACT

Let G be a graph with vertex set $V\ (G)$ and edge set $E\ (G)$. The total graph of G, denoted by T(G) is defined as the vertex set of $T(G)$ is $V(G) \cup\ U(G)$, with $U(G)$ is the vertex set obtained by addition of a vertex to each edge $e = v_i v_j$ in G. The cycle multiplicity of graph total of graph G is defined as maximum number of edge disjoint cycles in G. In this paper, we discuss the cycle multiplicity of total graph of C_n, P_n, and will be discuss the cycle multiplicity of total graph of F_n. It has been known that the cycle multiplicity of total graph of n-cycle is $n + 1$, cycle multiplicity of total graph of P_n graph is $n - 1$. We show a partern for cycle multiplicity of total graph of fan graph is $\left[\frac{n^2 + 17n - 18}{6}\right]$ if n odd or $\left[\frac{n^2 + 16n - 18}{6}\right]$ if n even, with n is vertex of G.

Keywords: cycle multiplycity, total graph, cycle graph, path graph, fan graph.

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR SIMBOL

G	: Graf
$T(G)$	: Total graf dari G
$V(G)$	: Himpunan titik graf G
$E(G)$	: Himpunan sisi graf G
$U(G)$	: Himpunan titik pada graf total G
v_i	: Titik ke i
e_i	: Sisi ke i
u_i	: Titik ke i
$e = v_i v_j$	: sisi yang menghubungkan v_i ke v_j
C_n	: Graf sikel dengan n titik
P_n	: Graf *path* dengan n titik
F_n	: Graf kipas dengan n titik
K_n	: Graf komplit dengan n titik
N_n	: Graf Nol dengan n titik
S_i	: Himpunan sikel sisi yang disjoin
$\|S_i\|$	: Kardinalitas S_i
$CM(G)$	: Notasi untuk Multiplisitas sikel (*Cycle Multiplicity*) dari graf G
$CM\ [T(C_n)]$	: Notasi untuk Multiplisitas sikel dari total graf pada graf sikel
$CM\ [T(P_n)]$	: Notasi untuk Multiplisitas sikel dari total graf pada graf *path*
$CM\ [T(F_n)]$	: Notasi untuk Multiplisitas sikel dari total graf pada graf kipas
$\leq$	: Kurang dari atau sama dengan

[ ]	: Bilangan bulat terbesar
■	: Tanda akhir pembuktian

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika dikenal sebagai *Mother of Science*, karena matematika merupakan salah satu cabang ilmu pengetahuan yang mempunyai kelebihan dibandingkan cabang – cabang ilmu lainnya. Selain itu matematika juga mempunyai banyak manfaat, karena banyak permasalahan dalam kehidupan yang dapat diselesaikan dengan menggunakan konsep – konsep matematika. Dengan berkembangnya zaman dan kemajuan teknologi, maka matematika ikut pula berkembang. Diantara banyaknya bagian matematika yang terus berkembang, yang menarik untuk dikaji lebih lanjut adalah teori graf.

Secara umum graf G adalah himpunan tak-kosong yang berhingga dari objek – objek yang disebut titik (*vertex*) bersama dengan himpunan pasangan tak-terurut yaitu sisi (*edge*). Himpunan titik G dinotasikan dengan *V (G)*, sedangkan himpunan sisi dinotasikan dengan *E (G)* [2].

Menurut catatan sejarah, masalah jembatan Konigsberg adalah masalah yang pertama kali menggunakan graf (1736). Oleh karena itu, Euler (1707-1782) menjadi Bapak dari Teori Graf sebagaimana topologi ketika dia merumuskan mengenai masalah terkenal yang takterpecahkan di atas [5]. Peristiwa itulah yang menjadi tombak sejarah munculnya Teori Graf dan terus berkembang sampai sekarang karena kajiannya berhubungan dengan pemecahan masalah sehari – hari.

Meskipun masalah graf telah banyak diteliti oleh para ahli matematika, tetapi penelitian tentang multiplisitas sikel dari suatu graf belum banyak dilakukan orang, begitu juga multiplisitas sikel dari graf total tertentu. Multiplisitas sikel dari graf G adalah banyaknya sikel sisi yang disjoin di graf G yang dinotasikan dengan $CM(G)$ [3].

Pada tugas akhir ini akan dibahas tentang multiplisitas sikel dari graf total pada graf sikel C_n, graf *path* P_n, dan graf kipas F_n berdasarkan [1].

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam tugas akhir ini adalah sebagai berikut :

1. Bagaimana mendapatkan multiplisitas sikel dari graf total pada graf sikel C_n ?
2. Bagaimana mendapatkan multiplisitas sikel dari graf total pada graf *path* P_n ?
3. Bagaimana mendapatkan multiplisitas sikel dari graf total pada graf kipas F_n ?

1.3 Pembatasan Masalah

Permasalahan dalam tugas akhir ini hanya dibatasi pada multiplisitas sikel dari graf total pada graf sederhana, berhingga, dan tidak berarah.

1.4 Tujuan Penulisan

Adapun tujuan dari penulisan tugas akhir ini sebagai berikut :

1. Mempelajari multiplisitas sikel dari graf total pada graf sikel C_n .
2. Mempelajari multiplisitas sikel dari graf total pada graf *path* P_n .
3. Menentukan multiplisitas sikel dari graf total pada graf kipas F_n .

1.5 Metode Penulisan

Metode yang digunakan penulis dalam penyusunan tugas akhir ini adalah metode tinjauan pustaka (*Study Literature*), yaitu dengan memahami beberapa jurnal mengenai graf dan pustaka-pustaka lain yang melandasi teori tentang graf seperti tertera dalam daftar pustaka. Terlebih dahulu penulis akan menjabarkan materi-materi dasar yang berkaitan dengan graf, seperti pengertian graf dan definisi-definisi yang berkaitan dengan graf. Penulis juga akan memberikan pengertian mengenai multiplisitas sikel dari graf total. Selanjutnya, menentukan multiplisitas sikel dari graf total pada graf sikel C_n,graf *path* P_n, dan graf kipas F_n.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan tugas akhir ini meliputi empat bab, yaitu pendahuluan, teori penunjang, pembahasan dan penutup.

Bab I merupakan pendahuluan yang mencakup latar belakang, rumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan penulisan, metode penulisan dan sistematika penulisan.

Bab II merupakan teori – teori penunjang yang terdiri dari penjelasan mengenai pengertian graf, adjacent dan incident, graf terhubung, multiplisitas sikel, graf sikel C_n , graf *path* P_n, dan graf kipas F_n, serta teori – teori lain yang berkaitan.

Bab III merupakan pembahasan tentang bagaimana mendapatkan multiplisitas sikel dari graf total pada graf sikel C_n , graf *path* P_n, dan graf kipas F_n, serta bagaimana membuktikan yang telah diperoleh.

Bab VI merupakan penutup yang berisi kesimpulan dari penulisan karya tulis ini, dan juga saran yang diberikan sebagai pertimbangan bagi penulis selanjutnya.

BAB II

TEORI PENUNJANG

2.1 Pengertian Graf

Teori graf merupakan pokok bahasan yang sudah tua usianya namun memiliki banyak terapan sampai saat ini. Graf digunakan untuk mempresentasikan objek – objek diskrit dan hubungan antara objek – objek tersebut. Graf menggambarkan struktur tersebut dalam beberapa objek yang dinyatakan dengan noktah, bulatan, sedangkan hubungan antara objek dinyatakan dengan garis. Secara sistematis, graf didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.1.1 [2]

Graf *G* adalah himpunan tak-kosong yang berhingga dari objek – objek yang disebut titik (*vertex*) bersama dengan himpunan pasangan tak-terurut (yang mungkin kosong) dari titik – titik berbeda di *G* yang disebut sisi (*edge*). Himpunan titik dari *G* dinotasikan *V (G)*, sedangkan himpunan sisi dinotasikan dengan *E (G)*.

Banyaknya unsur di *V* disebut derajat (*order*) dari *G* dan dilambangkan dengan *p(G)* dan banyaknya unsur di *E* disebut ukuran (*size*) dari *G* dan dilambangkan dengan *q(G*), jika graf yang dibicarakan hanya graf *G*, maka *order* dan *size* dari *G* tersebut cukup ditulis *p* dan *q* [2]. Dengan kata lain, Graf *G* adalah himpunan tak-kosong *V(G)* yang berhingga dari objek – objek yaitu titik dengan himpunan pasangan tak-terurut *E(G*) dari objek – objek yang disebut sisi.

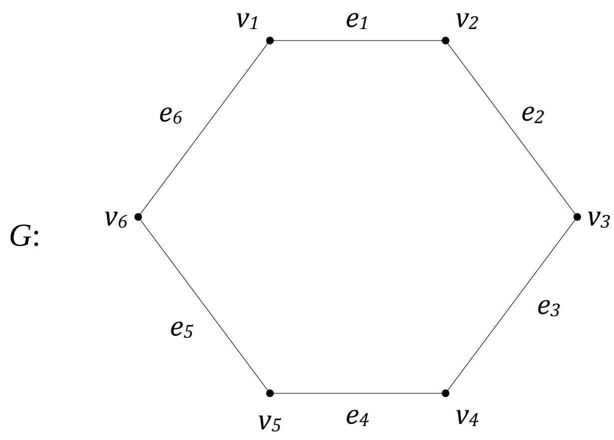
Contoh 2.1.1:

Perhatikan graf G yang memuat titik *V(G*) dan himpunan sisi *E(G)* seperti berikut ini :

V(G) = $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$

E(G)= $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$

Graf *G* tersebut secara lebih jelas dapat digambar sebagai berikut.



Gambar 2.1 Graf G_1

Graf G_1 mempunyai 6 titik sehingga *order* G_1 adalah p = 6. Graf G_1 mempunyai 6 sisi sehingga *size* graf G_1 adalah q = 6.

Definisi 2.1.2 [2]

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi pada graf G, maka u dan v adalah titik yang terhubung langsung ($adjacent$), sementara itu u dan e, serta dengan v dan e adalah titik yang terkait langsung ($incident$). Untuk selanjutnya, sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = uv$.

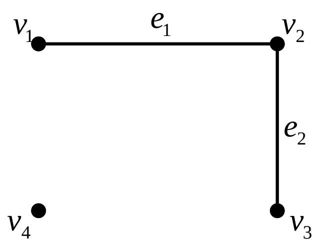
Contoh 2.1.2

Dari Gambar 2.1 di atas, titik v_1 dan e_1 serta e_1 dan v_2 adalah *incident* (terkait langsung) dan titik $v_1$dan v_2 adalah *adjacent* (terhubung langsung).

Definisi 2.1.3 [2]

Derajat dari suatu titik v pada graf *G* adalah banyak sisi pada graf *G* yang terkait langsung dengan titik v. Derajat suatu titik v di *G* dinotasikan dengan $deg_G v$. Suatu titik berderajat 0 disebut suatu titik terisolasi dan titik yang berderajat 1 disebut titik ujung.

Contoh 2.1.3



Gambar 2.2 Graf G_2

Dari Gambar 2.2 titik v_1 dan v_3 mempunyai derajat 1, $deg_G(v_1) = 1$ dan $deg_G(v_3) = 1$, titik v_2 mempunyai derajat 2, $deg_G(v_2) = 2$ dan titik v_4 mempunyai derajat 0, $deg_G(v_4) = 0$. Titik v_1 dan titik v_3 disebut titik ujung. Sedangkan titik v_4 disebut titik terisolasi.

Definisi 2.1.4 [9]

Suatu *walk* (jalan) yang panjangnya k dalam graf G adalah urutan k sisi G yang berbentuk.

$$uv, vw, wx, ..., yz$$

Walk ini dinotasikan dengan *uv, vw, wx,..., yz* dan disebut *walk* antara *u* ke z. Semua sisi dalam *walk* tidak perlu berbeda (boleh sama).

Definisi 2.1.5 [9]

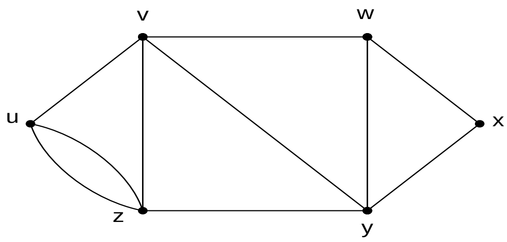
Jika semua sisi (tetapi tidak perlu semua titik) suatu *walk* berbeda, maka *walk* itu disebut *trail*. Jika semua titiknya berbeda, maka *trail* itu disebut *path*. Panjang *path* adalah banyak sisi dalam *path* tersebut.

Definisi 2.1.6 [9]

Suatu *walk* (jalan) tertutup dalam graf G merupakan urutan sisi G berbentuk *uv*, *vw*, *wx*, ..., *yz*, *zu*. Jika semua sisinya berbeda, maka *walk* itu disebut *trail* tertutup (*closed trail*). Jika titik-titiknya juga berbeda maka *trail* itu disebut sikel (*cycle*).

Contoh 2.1.4

Berikut ini adalah contoh graf yang memuat *walk, trail,* dan *path.*



Gambar 2.3 Graf G_3

(i) *uvwxywvzy* adalah *walk* yang panjangnya 8 antara *u* dan *y*, yang memuat sisi *vw* dua kali, titik *v*, *w*, dan *y* dua kali.

(ii) *Walk vzywxy* adalah *trail* yang bukan *path* (karena titik *y* ada dua).

(iii) *Walk vwxyz* tidak ada titik yang diulang, karena itu merupakan *path*.

(iv) *Walk* tertutup *uvwyvzu* adalah *trail* tertutup yang bukan merupakan sikel (karena titik *v* muncul dua kali)

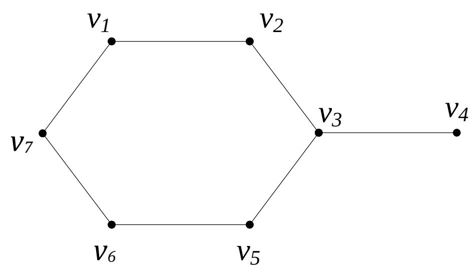
(v) *Trail* tertutup *vwxyv* dan *vwxyzv* semuanya adalah sikel.

Definisi 2.1.7 [9]

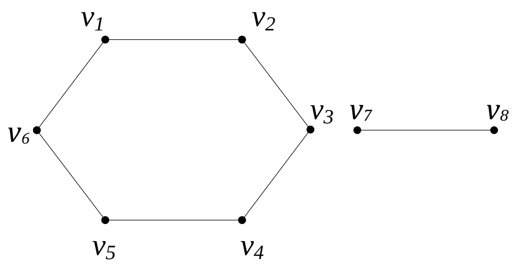
Graf *G* dikatakan terhubung (*connected*) jika untuk setiap dua titik *v* dan *w* di *G,* terdapat *path* yang menghubungkan kedua titik tersebut. Graf *G* dikatakan tidak terhubung (*disconnected*) jika ada pasangan titik di *G* yang tidak mempunyai *path*.

Contoh 2.1.5

Berikut adalah contoh graf terhubung dan tidak terhubung.



G_7



G_8

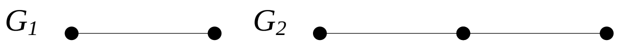
Gambar 2.4 Graf G_7 merupakan graf terhubung dan G_8 merupakan graf tidak terhubung

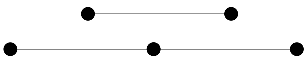
2.2 Operasi – operasi pada Graf

Definisi 2.2.1 [2]

Gabungan (*union*) dari G_1 dan G_2, ditulis $G = G_1 \cup G_2$ adalah graf dengan $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$. Jika graf G terdiri atas n kali graf H, $n > 2$, maka ditulis $G = nH$.

Contoh 2.2.1



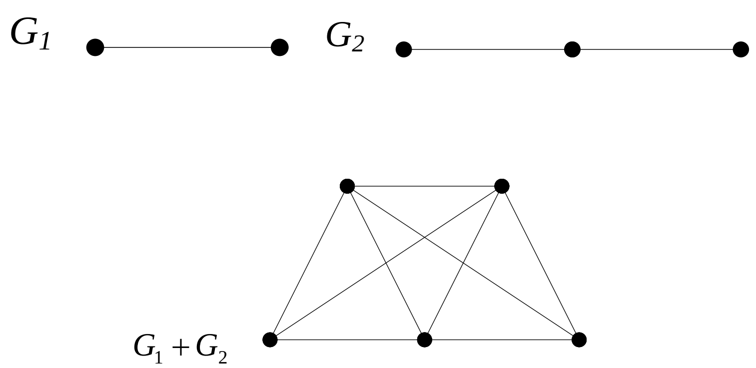
$G_1 \cup G_2$ 

Gambar 2.5 Graf $G_1 \cup G_2$

Definisi 2.2.2 [2]

Penjumlahan dari G_1 dan G_2 ditulis dengan $G = G_1 + G_2$ adalah graf dengan $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv | u \in V(G_1)$ dan $v \in V(G_2)\}$.

Contoh 2.2.2

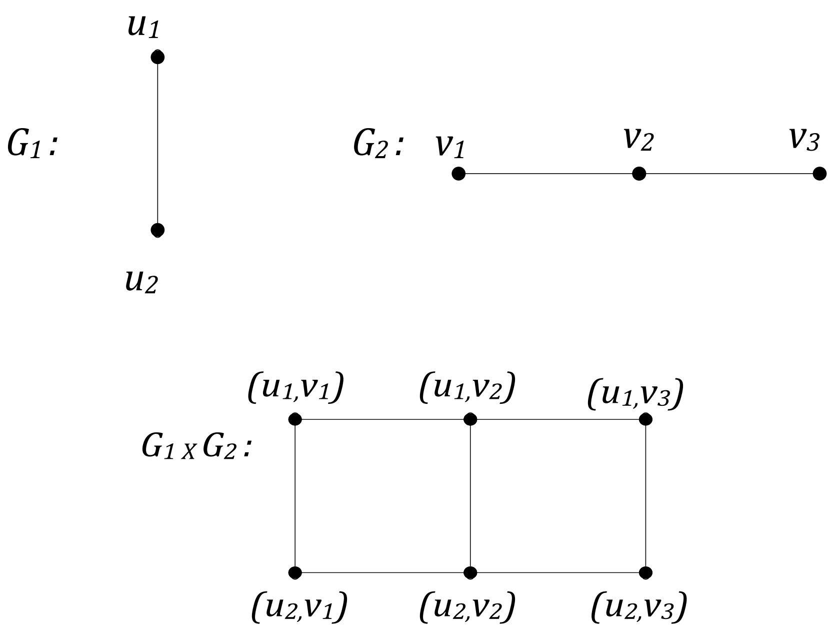


Gambar 2.6 Graf $G_1 + G_2$

Definisi 2.2.3[2]

Perkalian kartesius dari G_1 dan G_2 ditulis $G = G_1 \times G_2$ adalah graf dengan $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$ dan dua titik (v_1, v_2) dan (u_1, u_2) dari G terhubung langsung (*adjacent*) jika hanya jika $u_1 = v_1$ dan $u_2 v_2 \in E(G_2)$ atau $u_2 = v_2$ dan $u_1 v_1 \in E(G_1)$.

Contoh 2.2.3



Gambar 2.7 Graf $G_1 \times G_2$

2.3 Fungsi Bilangan Bulat Terbesar

Fungsi bilangan bulat terbesar “[]” memiliki daerah asal/domain adalah himpunan semua bilangan real dan daerah hasil/range adalah himpunan bilangan bulat.

Definisi 2.3 [8]

Untuk suatu bilangan real x, $[x]$ adalah suatu bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x, yaitu $[x]$ adalah bilangan bulat tunggal yang memenuhi $x - 1 < [x] \leq x$.

Contoh 2.3

a. $[-1{,}2] = -2$, b. $[1{,}2] = 1$

Pada contoh (a) di atas berdasarkan definisi dapat dijelaskan sebagai berikut $-2{,}2 < [-1{,}2] \leq -1{,}2$, maka $[-1{,}2]$ = - 2. Sedangkan contoh (b) berdasarkan definisi dapat dijelaskan sebagai berikut $0{,}2 < [1{,}2] \leq 1{,}2$, maka $[1{,}2]$ = 1.

2.4 Jenis-jenis Graf

Berdasarkan sifatnya graf dapat dikelompokkan menjadi beberapa kategori (jenis) bergantung pada sudut pandang pengelompokannya. Pengelompokan graf dapat dipandang berdasarkan ada tidaknya sisi ganda, berdasarkan banyak titik, atau berdasarkan orientasi arah pada sisi.

Berdasarkan ada tidaknya sisi ganda pada suatu graf, maka secara umum graf dapat digolongkan menjadi 2 jenis :

2.4.1 Graf sederhana (*simple graph)*

Definisi 2.4.1 [7]

Graf sederhana adalah graf yang tidak mengandung sisi ganda maupun *loop*.

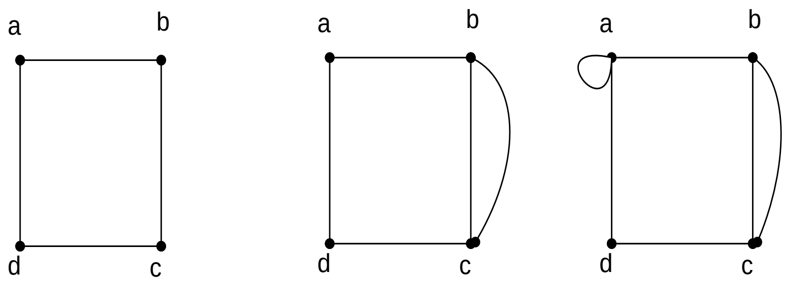
2.4.2 Graf tak sederhana (*unsimple graph*)

Definisi 2.4.2 [7]

Graf tak sederhana adalah graf yang mengandung sisi ganda atau *loop*. Ada dua macam graf tak-sederhana, yaitu graf ganda (*multigraph*) dan graf semu (*pseudograph*). Graf ganda adalah graf yang mengandung sisi ganda. Graf semu adalah graf yang mengandung sisi ganda dan *loop*.

Contoh 2.4.1

Berikut adalah contoh graf berdasarkan ada tidaknya sisi ganda.



(a) **(b)** **(c)**

Gambar 2.8 (a) Graf sederhana , (b) Graf Ganda, dan (c) Graf semu

Berdasarkan banyak titik pada suatu graf, maka secara umum graf dapat dikelompokkan menjadi dua jenis:

2.4.3 Graf berhingga

Definisi 2.4.3 [7]

Graf berhingga adalah graf yang banyak titiknya berhingga.

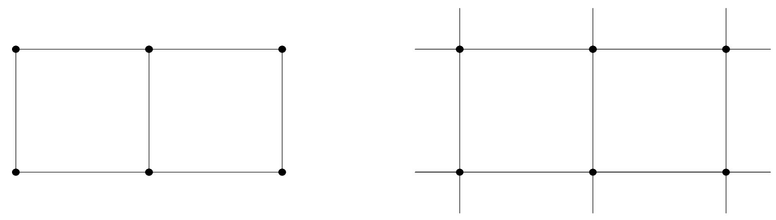
2.4.4 Graf tak-berhingga

Definisi 2.4.4 [7]

Graf tak-berhingga adalah graf yang banyak titiknya tak berhingga.

Contoh 2.4.2

Berikut adalah contoh graf berdasarkan banyaknya titik.



(a) **(b)**

Gambar 2.9 (a) Graf berhingga (b) Graf tak berhingga

Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka secara umum graf dikelompokkan menjadi dua jenis:

2.4.5 Graf tak berarah

Definisi 2.4.5 [7]

Graf tak-berarah adalah graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah. Pada graf tak berarah, urutan pasangan titik yang dihubungkan oleh sisi tidak diperhatikan . Jadi $v_j v_k = v_k v_j$ adalah sisi yang sama.

2.4.6 Graf berarah

Definisi 2.4.6 [7]

Graf berarah adalah graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah. Pada graf berarah (v_j, v_k) dan (v_k, v_j) menyatakan dua buah sisi yang berbeda, dengan kata lain $(v_j, v_k) \neq (v_k, v_j)$. Untuk sisi (v_j, v_k) titik v_j dinamakan titik asal (*initial verteks*) dan titik v_k dinamakan titik terminal (*terminal verteks*).

Contoh 2.4.3

Berikut adalah contoh graf berdasarkan orientasi arah pada sisi.

(a) **(b)**

Gambar 2.10 (a) Graf tak berarah dan (b) Graf berarah

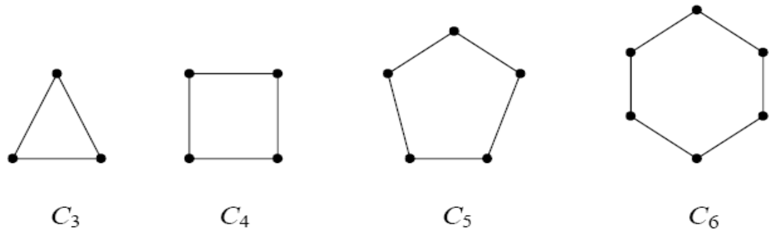
Terdapat beberapa jenis graf sederhana khusus. Berikut ini didefinisikan beberapa graf khusus yang sering ditemukan :

2.4.7 Graf Sikel (*Cycle Graph*)

Definisi 2.4.7 [9]

Graf sikel adalah graf yang terdiri dari sebuah sikel yang tunggal. Graf sikel dengan n titik, $n \geq 3$ dinotasikan dengan C_n. Graf sikel C_n setiap titiknya berderajat 2 .

Contoh 2.4.4



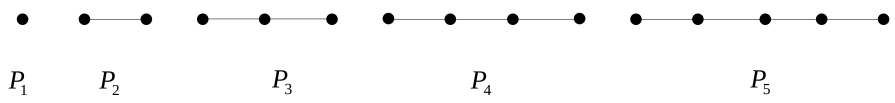
Gambar 2.11 Graf Sikel

2.4.8 Graf *Path*

Definisi 2.4.8 [9]

Graf *path* adalah graf yang terdiri dari *path* tunggal. Graf *path* dengan *n* titik dan *n-1* sisi dinotasikan dengan P_n .

Contoh 2.4.5



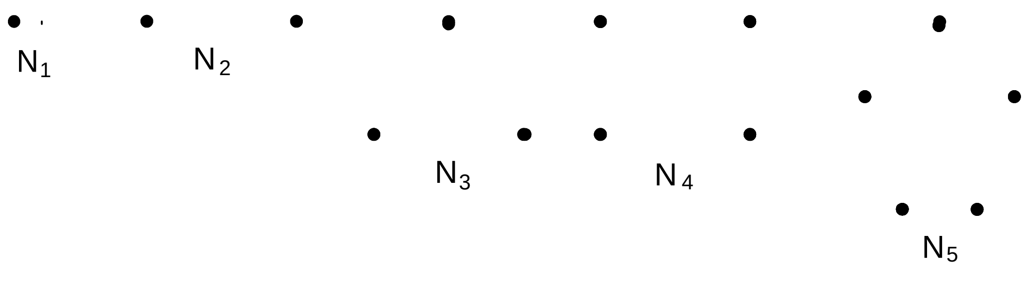
Gambar 2.12 Graf *Path*

2.4.9 Graf Nol

Definisi 2.4.9 [9]

Graf nol adalah graf yang tidak memiliki sisi. Graf nol bertitik n dinotasikan dengan N_n.

Contoh 2.4.6



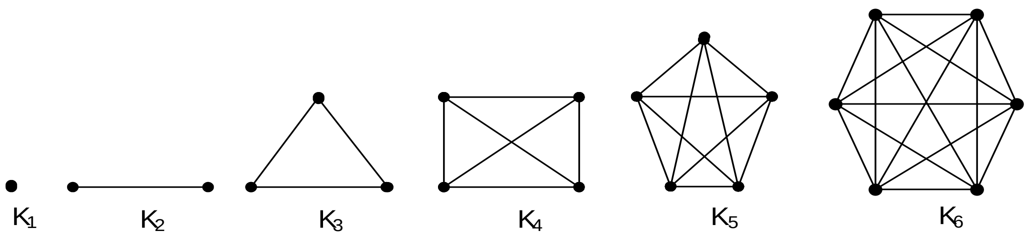
Gambar 2.13 Graf Nol

2.4.10 Graf Komplit (*Complete Graph*)

Definisi 2.4.10 [9]

Graf komplit dengan *n* titik dinotasikan K_n yaitu sebuah graf jika setiap titik adalah terhubung kepada setiap titik lainnya. Setiap titik pada K_n berderajat *n-1*.

Contoh 2.4.7



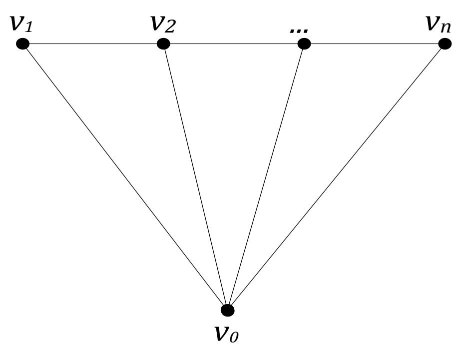
Gambar 2.14 Graf Komplit

2.4.11 Graf Kipas (*Fan Graph*)

Definisi 2.4.11 [4]

Graf kipas dibentuk dari penjumlahan graf komplit K_1 dan graf *path* P_n, yaitu $F_n = K_1 + P_n$. Dengan demikian graf kipas mempunyai $(n+1)$ titik dan $(2n-1)$ sisi.

Contoh 2.4.8



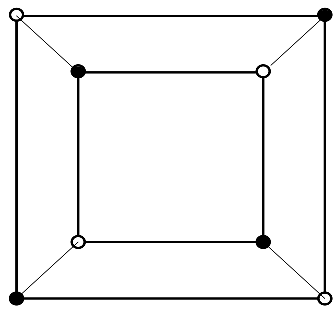
Gambar 2.15 Graf Kipas

2.4.12 Graf Bipartit (*Bipartite Graph*)

Definisi 2.4.12 [9]

Suatu graf yang himpunan titiknya dapat dipecah menjadi himpunan *A* dan *B* sedemikian hingga setiap sisi graf menghubungkan sebuah titik di A ke sebuah titik di B. Titik di A dibedakan dari titik di B dengan menggambarkan titik di A sebagai noktah (lingkaran kecil hitam) dan yang di B sebagai lingkaran kecil putih, sehingga setiap sisi *incident* dengan sebuah titik hitam dan sebuah titik putih.

Contoh 2.4.9



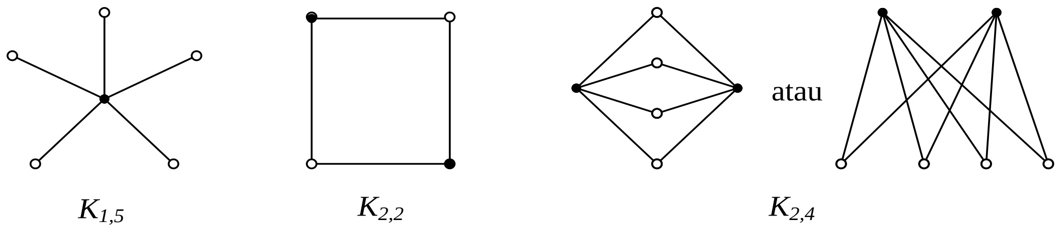
Gambar 2.16 Graf Bipartit

2.4.13 Graf Bipartit Komplit (*Complete Bipartite Graph*)

Definisi 2.4.13 [9]

Graf bipartit komplit adalah graf dimana setiap titik hitamnya dihubungkan dengan setiap titik putih dengan tepat satu sisi. Graf bipartit komplit dengan *m* titik hitam dan *n* titik putih dinotasikan sebagai $K_{m,n}$.

Contoh 2.4.10



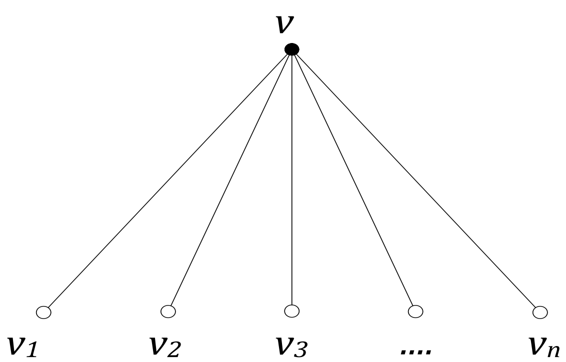
Gambar 2.17 Graf Bipartit Komplit

2.4.14 Graf Bintang (*Star Graph*)

Definisi 2.4.14 [9]

Graf bintang adalah graf bipartit komplit yang satu titik hitamnya dihubungkan dengan setiap titik putih dengan tepat satu sisi. Graf bipartit komplit dengan *m* titik hitam dan *n* titik putih dinotasikan sebagai $K_{m,n}$. Graf bipartit komplit yang berbentuk $K_{1,n}$ disebut graf bintang.

Contoh 2.4.11



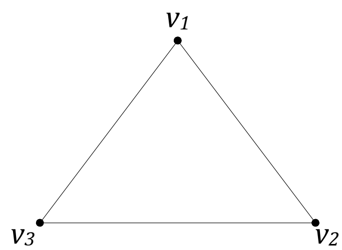
Gambar 2.18 Graf Bintang

2.5 Multiplisitas Sikel [3]

Definisi 2.5

Jika *G* adalah sebuah graf, *V(G)* dan *E(G)* adalah himpunan titik dan sisi dari graf *G*. Multiplisitas sikel dari graf *G*, dinotasikan *CM(G)* adalah jumlah maksimal sikel sisi yang disjoin pada graf *G*.

Contoh 2.5.1



Gambar 2.19 Graf G

Dari Gambar 2.19 dapat diperoleh bahwa multiplisitas sikel pada graf G adalah $v_1v_2v_3v_1$ atau $CM(G) = 1$.

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas tentang multiplisitas sikel dari graf total pada graf sikel, graf *path* dan graf kipas. Namun, sebelumnya akan dibahas mengenai definisi graf total dan multiplisitas sikel pada graf total.

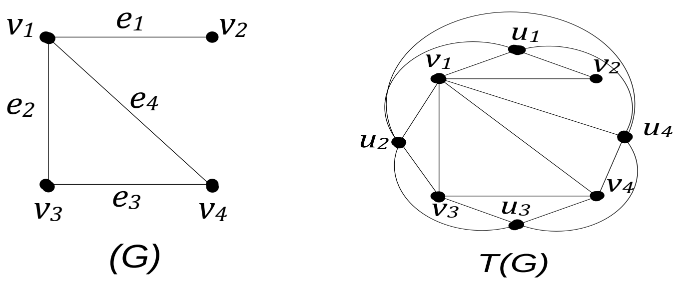
3.1 Graf Total

Definisi 3.1 [6]

Diberikan graf G dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Graf total dari graf G dinotasikan dengan $T(G)$ adalah graf yang mempunyai himpunan titik $V(G) \cup U(G)$, dengan $U(G)$ adalah himpunan titik yang diperoleh dari penambahan satu titik di setiap sisi $e = v_i v_j$ pada graf G.

Dalam graf total, dua titik adalah *adjacent* di $T(G)$ jika dan hanya jika (i) v_i *adjacent* dengan v_j di graf G, (ii) $u_i \in U(G)$ *adjacent* dengan $u_j \in U(G)$ jika sisi e_i dan sisi e_j insiden pada titik yang sama di G, (iii) $v_i \in V[T(G)]$ *adjacent* dengan $u_i \in U(G)$ jika v_i insiden dengan sisi e_i.

Contoh 3.1



Gambar 3.1 Graf *G* dan Total Graf *G*

Graf pada Gambar 3.1 merupakan graf G dengan himpunan titik *V(G)* = $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisi *E(G)* = $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Graf total dari graf *G* adalah graf yang mempunyai himpunan titik $V[T(G)] = V(G) \cup U(G)$, dimana $U(G)$ adalah himpunan titik yang diperoleh dari penambahan satu titik di setiap sisi $e = v_i v_j$ pada graf G dengan $U(G) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$.

Dua titik *adjacent* pada $T(G)$ adalah:

(i) v_1 *adjacent* dengan v_2 di graf G.

v_1 *adjacent* dengan v_3 di graf G.

v_1 *adjacent* dengan v_4 di graf G.

v_3 *adjacent* dengan v_4 di graf G.

(ii) $u_1 \in U(G)$ *adjacent* dengan $u_2 \in U(G)$ jika sisi e_1 dan sisi e_2 insiden di titik $v_1 \in V(G)$.

$u_1 \in U(G)$ *adjacent* dengan $u_4 \in U(G)$ jika sisi e_1 dan sisi e_4 insiden di titik $v_1 \in V(G)$.

$u_2 \in U(G)$ *adjacent* dengan $u_3 \in U(G)$ jika sisi e_2 dan sisi e_3 insiden di titik $v_3 \in V(G)$.

$u_2 \in U(G)$ *adjacent* dengan $u_4 \in U(G)$ jika sisi e_2 dan sisi e_4 insiden di titik $v_1 \in V(G)$.

$u_3 \in U(G)$ *adjacent* dengan $u_4 \in U(G)$ jika sisi e_3 dan sisi e_4 insiden di titik $v_4 \in V(G)$.

(iii) $v_1 \in V[T(G)]$ *adjacent* dengan $u_1 \in U(G)$ jika v_1 insiden dengan sisi e_1.

$v_2 \in V[T(G)]$ *adjacent* dengan $u_1 \in U(G)$ jika v_2 insiden dengan sisi e_1.

$v_1 \in V[T(G)]$ *adjacent* dengan $u_2 \in U(G)$ jika v_1 insiden dengan sisi e_2.

$v_3 \in V[T(G)]$ *adjacent* dengan $u_2 \in U(G)$ jika v_3 insiden dengan sisi e_2.

$v_3 \in V[T(G)]$ *adjacent* dengan $u_3 \in U(G)$ jika v_3 insiden dengan sisi e_3.

$v_4 \in V[T(G)]$ *adjacent* dengan $u_3 \in U(G)$ jika v_4 insiden dengan sisi e_3.

$v_1 \in V[T(G)]$ *adjacent* dengan $u_4 \in U(G)$ jika v_1 insiden dengan sisi e_4.

$v_4 \in V[T(G)]$ *adjacent* dengan $u_4 \in U(G)$ jika v_4 insiden dengan sisi e_4.

3.2 Multiplikasi Sikel dari Graf Total Pada graf *G*

Definisi 3.2 [1]

Diberikan graf G dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Multiplisitas sikel dari graf total pada graf G, dinotasikan $CM[T(G)]$ adalah jumlah maksimal sikel sisi yang disjoin dari graf total pada graf *G*.

Contoh 3.2

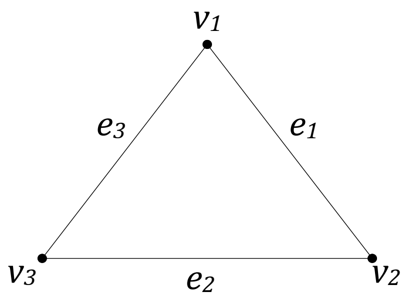
Dari gambar 3.1 maka multiplikasi sikel dari graf total pada graf G adalah $v_1u_1v_2$, $v_1u_2v_3, v_1u_4v_4, v_3u_3v_4, u_2u_1u_4$. Atau bisa ditulis $CM[T(G)] = 5$.

3.3 Multiplisitas Sikel dari Graf Total Pada Graf Sikel C_n

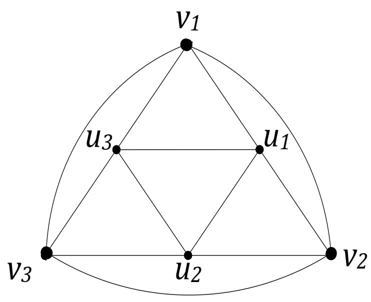
Diberikan graf sikel C_n dengan n adalah banyaknya titik dan $n \geq 3$.

3.3.1 Graf Sikel C_3

Graf Sikel C_3 mempunyai himpunan titik $V(C_3) = \{v_1, v_2, v_3\}$ dan himpunan sisi $E(C_3) = \{e_1, e_2, e_3\}$ dimana $e_i = v_iv_j$.



Gambar 3.3.1 Graf Sikel C_3



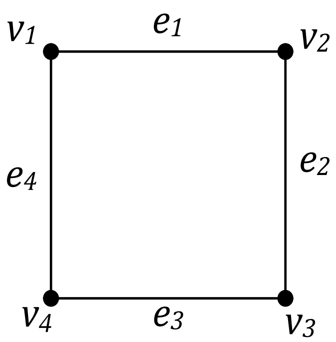
Gambar 3.3.2 Graf Total dari Graf Sikel C_3

Graf total dari graf sikel C_3 adalah graf yang mempunyai himpunan titik $V[T(C_3)] = V(C_3) \cup U(C_3)$, dimana $U(C_3)$ adalah himpunan titik yang diperoleh dari penambahan satu titik di setiap sisi $e = v_i v_j$ pada graf G dengan $U(C_3) = \{u_1, u_2, u_3\}$ dan $E[T(C_3)] = \{v_i u_i | 1 \leq i \leq 3\} \cup \{u_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq 2\} \cup \{u_3 v_1\} \cup \{v_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq 2\} \cup \{v_3 v_1\} \cup \{u_i u_{i+1} | 1 \leq i \leq 2\} \cup \{u_3 u_1\}$. Sikel sisi yang disjoin adalah $S_1 = \{u_i u_{i+1} v_{i+1} u_i |\ i = 1, 2\}$, $S_2 = \{u_3 u_1 v_1 u_3\}$, $S_3 = \{v_1 v_2 v_3 v_1\}$. Terlihat bahwa S_i dengan $1 \leq i \leq 3$ adalah himpunan – himpunan yang beranggotaan sikel sisi yang disjoin dalam C_3, dimana $|S_1| = 2$, $|S_2| = 1$, $|S_3| = 1$. Sehingga

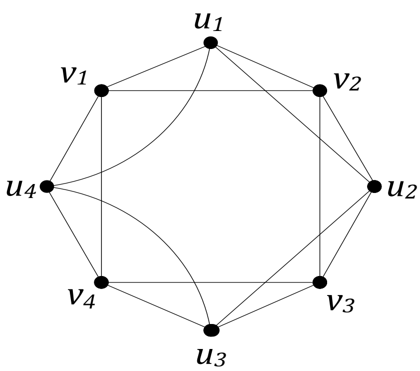
$$CM\ [T(C_3)] = |S_i| = 2 + 1 + 1 = 4.$$

3.3.2 Graf Sikel C_4

Graf Sikel C_4 mempunyai himpunan titik $V(C_4) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisi $E(C_4) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ dimana $e_i = v_i v_j$.



Gambar 3.3.3 Graf Sikel C_4



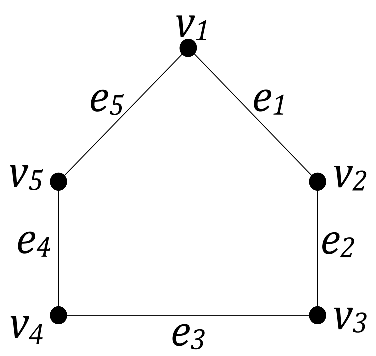
Gambar 3.3.4 Graf Total dari Graf Sikel C_4

Graf total dari graf sikel C_4 adalah graf yang mempunyai himpunan titik $V[T(C_4)] = V(C_4) \cup U(C_4)$, dimana $U(C_4)$ adalah himpunan titik yang diperoleh dari penambahan satu titik di setiap sisi $e = v_i v_j$ pada graf G dengan $U(C_4) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ dan $E[T(C_4)] = \{v_i u_i | 1 \leq i \leq 4\} \cup \{u_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq 3\} \cup \{u_4 v_1\} \cup \{v_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq 3\} \cup \{v_4 v_1\} \cup \{u_i u_{i+1} | 1 \leq i \leq 3\} \cup \{u_4 u_1\}$. Sikel sisi yang disjoin adalah $S_1 = \{u_i u_{i+1} v_{i+1} u_i | 1 \leq i \leq 3\}$, $S_2 = \{u_4 u_1 v_1 u_4\}$, $S_3 = \{v_1 v_2 v_3 v_4 v_1\}$. Terlihat bahwa S_i dengan $1 \leq i \leq 3$ adalah himpunan – himpunan yang beranggotaan sikel sisi yang disjoin dalam C_4, dimana $|S_1| = 3$, $|S_2| = 1$, $|S_3| = 1$. Sehingga

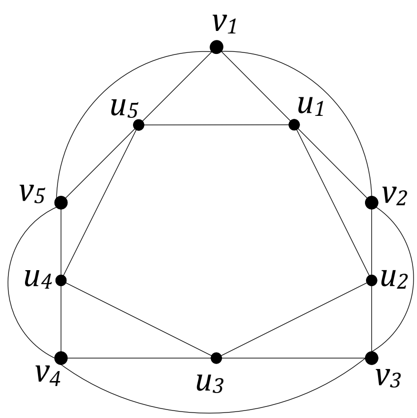
$$CM\,[T(C_4)] = |S_i| = 3 + 1 + 1 = 5.$$

3.3.3 Graf Sikel C_5

Graf Sikel C_5 mempunyai himpunan titik $V(C_5) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan himpunan sisi $E(C_5) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ dimana $e_i = v_i v_j$.



Gambar 3.3.5 Graf Sikel C_5



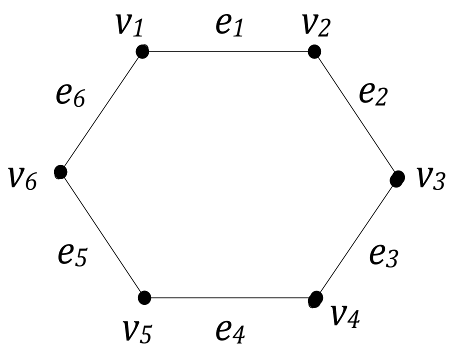
Gambar 3.3.6 Graf Total dari Graf Sikel C_5

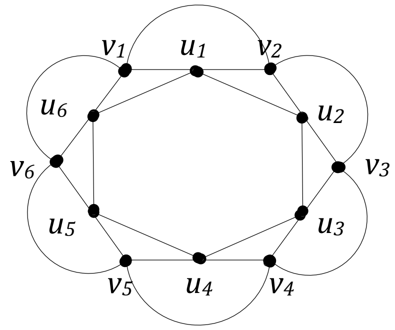
Graf total dari graf sikel C_5 adalah graf yang mempunyai himpunan titik $V[T(C_5)] = V(C_5) \cup U(C_5)$, dimana $U(C_5)$ adalah himpunan titik yang diperoleh dari penambahan satu titik di setiap sisi $e = v_i v_j$ pada graf G dengan $U(C_5) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ dan $E[T(C_5)] = \{v_i u_i | 1 \leq i \leq 5\} \cup \{u_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq 4\} \cup \{u_5 v_1\} \cup \{v_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq 4\} \cup \{v_5 v_1\} \cup \{u_i u_{i+1} | 1 \leq i \leq 4\} \cup \{u_5 u_1\}$. Sikel sisi yang disjoin adalah $S_1 = \{u_i u_{i+1} v_{i+1} u_i | 1 \leq i \leq 4\}$, $S_2 = \{u_5 u_1 v_1\}$, $S_3 = \{v_1 v_2 v_3 v_4 v_5\}$. Terlihat bahwa S_i dengan $1 \leq i \leq 3$ adalah himpunan – himpunan yang beranggotaan sikel sisi yang disjoin dalam C_5, dimana $|S_1|$= 4 , $|S_2|$ = 1, $|S_3|$= 1. Sehingga

$$CM\,[T(C_5)] = |S_i| = 4 + 1 + 1 = 6.$$

3.3.4 Graf Sikel *C₆*

Graf Sikel C_6 mempunyai himpunan titik $V(C_6) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan himpunan sisi $E(C_6) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ dimana $e_i = v_i v_j$.





Gambar 3.3.7 Graf Sikel C_6

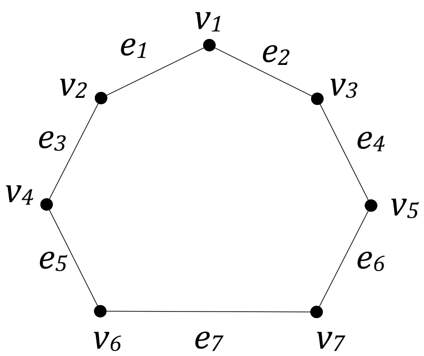
Gambar 3.3.8 Graf Total dari Graf Sikel C_6

Graf total dari graf sikel C_6 adalah graf yang mempunyai himpunan titik $V[T(C_6)] = V(C_6) \cup U(C_6)$, dimana $U(C_6)$ adalah himpunan titik yang diperoleh dari penambahan satu titik di setiap sisi $e = v_i v_j$ pada graf G dengan $U(C_6) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ dan $E[T(C_6)] = \{v_i u_i | 1 \leq i \leq 6\} \cup \{u_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq 5\} \cup \{u_6 v_1\} \cup \{v_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq 5\} \cup \{v_6 v_1\} \cup \{u_i u_{i+1} | 1 \leq i \leq 5\} \cup \{u_6 u_1\}$. Sikel sisi yang disjoin adalah $S_1 = \{u_i u_{i+1} v_{i+1} u_i | 1 \leq i \leq 5\}$, $S_2 = \{u_6 u_1 v_1\}$, $S_3 = \{v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6\}$. Terlihat bahwa S_i dengan $1 \leq i \leq 3$ adalah himpunan – himpunan yang beranggotaan sikel sisi yang disjoin dalam C_6, dimana $|S_1|$= 5 , $|S_2|$= 1, $|S_3|$= 1. Sehingga

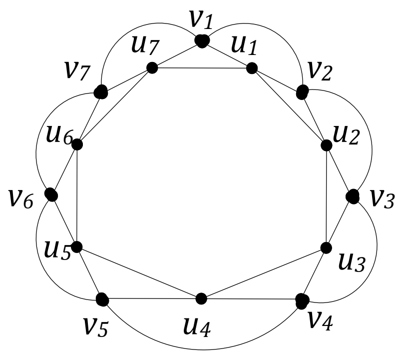
$$CM\ [T(C_6)] = |S_i| = 5 + 1 + 1 = 7.$$

3.3.5 Graf Sikel C_7

Graf Sikel C_7 mempunyai himpunan titik $V(C_7)$ = $\{v_1, v_2, v_{3,} v_4, v_5, v_6, v_7\}$ dan himpunan sisi $E(C_6)$ = $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ dimana $e_i = v_i v_j$.



Gambar 3.3.9 Graf Sikel C_7



Gambar 3.3.10 Graf Total dari Graf Sikel C_7

Sikel sisi yang disjoin dari graf sikel C_7 di atas adalah

$u_1u_2v_2u_1$; $u_2u_3v_3u_2$; $u_3u_4v_4u_3$; $u_4u_5v_5u_4$; $u_5u_6v_6u_5$; $u_6u_7v_7u_6$; $u_7u_1v_1u_7$; $v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_7v_1$ atau S_1= $\{u_iu_{i+1}v_{i+1}u_i | \ 1 \leq i \leq 6\}$, S_2 = $\{u_7u_1v_1u_7\}$, $S_3 = \{v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_7v_1\}$. Terlihat bahwa S_i dengan $1 \leq i \leq 3$ adalah himpunan – himpunan yang beranggotaan sikel sisi yang disjoin dalam C_7 dimana jumlah anggota dari masing-masing himpunan S adalah $|S_1|$ = 6, $|S_2|$ = 1, $|S_3|$ = 1. Sehingga

$$CM\ [T(C_7)] = |S_i| = 6 + 1 + 1 = 8.$$

Berdasarkan perhitungan Multiplisitas sikel dari graf sikel di atas, maka diperoleh sebagai berikut.

Tabel 3.1 Multiplikasi Sikel dari Graf Total Pada Graf Sikel

n	Graf Sikel C_n	$CM\ [T(C_n)]$
3	C_3	4 = 3 + 1
4	C_4	5 = 4 + 1
5	C_5	6 = 5 + 1
6	C_6	7 = 6 + 1
7	C_7	8 = 7+ 1

Selanjutnya, akan diformulasikan multiplisitas sikel dari graf total pada graf sikel C_n seperti yang dituliskan dalam teorema berikut.

Teorema 3.1

Multiplisitas Sikel dari Graf Total pada Graf sikel $C_n = n + 1$.

Bukti

Himpunan sikel sisi yang disjoin dari graf C_n adalah

$S_1 = \{u_i u_{i+1} v_{i+1} u_i \mid 1 \leq i \leq n - 1\}$

S_2 = $\{u_n u_1 v_1 u_n\}$

$S_3 = \{u_i u_{i+1} u_{i+2} u_{i+3} \ldots u_n u_i\}$

terlihat bahwa S_i dengan $1 \leq i \leq 3$ adalah himpunan-himpunan yang beranggotakan sikel sisi yang disjoin dalam C_n dimana jumlah anggota dari masing-masing himpunan S bisa dicari dengan menggunakan rumus barisan aritmatika.

Pada S_1, *i* dapat dijabarkan dalam bentuk barisan aritmatika yaitu 1,2,3,…. n - 1 sehingga didapatkan suku pertama adalah α = 1 dan beda b = 1 serta $u_m = n - 1$ dimana *m* adalah batas terbesar dari S_1, sehingga didapatkan jumlah anggota S_1 dengan perhitungan berikut.

$$u_m = a + (m-1)b$$

$$n - 1 = 1 + (m-1)1$$

$$n - 1 = \cancel{1} + m - \cancel{1}$$

$$m = n - 1$$

Dapat ditulis $|S_1|$ = $n - 1$

Selanjutnya untuk S_2 dan S_3, masing-masing banyak anggota hanya 1 yaitu

$|S_2| = \{u_n u_1 v_1 u_n\}$ =1

$|S_3| = \{u_i u_{i+1} u_{i+2} u_{i+3} \ldots u_n u_i\}$ = 1

maka dapat ditulis $|S_2| = 1$ dan $|S_3|$ = 1.

Jadi masing-masing multiplisitas sikel pada tiap himpunan sikel sisi yang disjoin adalah $|S_1|$ = $n - 1$, $|S_2| = 1$, $|S_3|$ = 1. Sehingga $CM\ [T(C_n)]$ = $n - \cancel{1} + \cancel{1} + 1 = n + 1$.

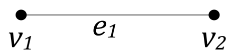
Terbukti bahwa $CM\ [T(C_n)] = n + 1$. ■

3.4 Multiplisitas Sikel dari Graf Total Pada Graf Path P_n

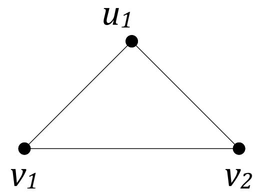
Diberikan graf Path P_n dengan n adalah banyaknya titik dan $n \geq 2$.

3.4.1 Graf Path P_2

Graf *path* P_2 mempunyai himpunan titik $V(P_2) = \{v_1, v_2\}$ dan himpunan sisi $E(P_2)=\{ e_1\}$ dimana $e_i = v_i v_j$.



Gambar 3.4.1 Graf Path P_2



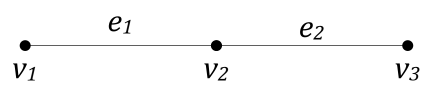
Gambar 3.4.2 Graf Total dari Graf Path P_2

Graf total dari graf *path* P_2 adalah graf yang mempunyai himpunan titik $V[T(P_2)] = V(P_2) \cup U(P_2)$, dimana $U(P_2)$ adalah himpunan titik yang diperoleh dari penambahan satu titik di setiap sisi $e = v_i v_j$ pada graf G dengan $U(P_2) = \{u_1\}$ dan $E[T(P_2)] = \{v_i u_i | i = 1\} \cup \{v_i v_{i+1} | i = 1\} \cup \{u_i v_{i+1} | i = 1\}$. Sikel sisi yang disjoin adalah $S_1 = \{v_i u_i v_{i+1} v_i | \ i = 1\}$, maka

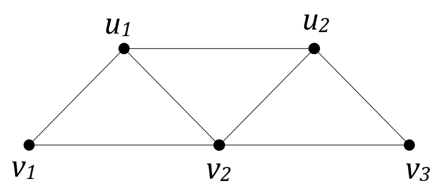
$$CM\ [T(P_2)] = 1.$$

3.4.2 Graf Path P_3

Graf *path* P_3 mempunyai himpunan titik $V(P_3) = \{v_1, v_2, v_3\}$ dan himpunan sisi $E(P_3)=\{e_1, e_2\}$ dimana $e_i = v_i v_j$.



Gambar 3.4.3 Graf Path P_3



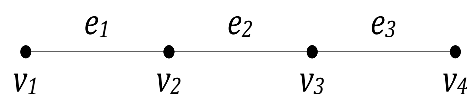
Gambar 3.4.4 Graf Total dari Graf Path P_3

Graf total dari graf *path* P_3 adalah graf yang mempunyai himpunan titik $V[T(P_3)] = V(P_3) \cup U(P_3)$, dimana $U(P_3)$ adalah himpunan titik yang diperoleh dari penambahan satu titik di setiap sisi $e = v_i v_j$ pada graf *path* P_3 dengan $U(P_3) = \{u_1, u_2\}$ dan E[T(P_3)]= $\{v_i u_i | i = 1{,}2\} \cup \{v_i v_{i+1} | i = 1{,}2\} \cup \{u_i v_{i+1} | i = 1{,}2\} \cup \{u_i u_{i+1} | i = 1\}$. Sikel sisi yang disjoin adalah $S_1 = \{v_i u_i v_{i+1} v_i |\ i = 1, 2\}$, maka

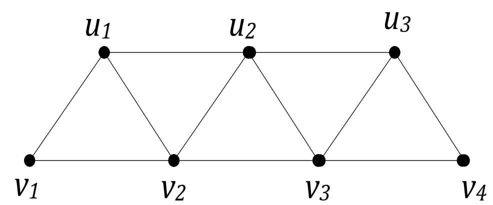
$$CM\ [T(P_3)] = 2.$$

3.4.3 Graf Path P_4

Graf *path* P_4 mempunyai himpunan titik $V(P_4)=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisi $E(P_4)=\{e_1, e_2, e_3\}$ dimana $e_i = v_i v_j$.



Gambar 3.4.5 Graf Path P_4



Gambar 3.4.6 Graf Total dari Graf Path P_4

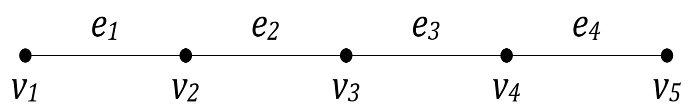
Graf total dari graf *path* P_4 adalah graf yang mempunyai himpunan titik $V[T(P_4)] = V(P_4) \cup U(P_4)$, dimana $U(P_4)$ adalah himpunan titik yang diperoleh dari penambahan satu titik di setiap sisi $e = v_i v_j$ pada graf *path* P_4 dengan $U(P_4) = \{u_1, u_2, u_3\}$ dan $E[T(P_4)] = \{v_i u_i | 1 \leq i \leq 3\} \cup \{v_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq 3\} \cup \{u_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq 3\} \cup \{u_i u_{i+1} | 1 \leq i \leq 2\}$. Sikel sisi yang disjoin adalah $S_1 = \{v_i u_i v_{i+1} v_i | \ i = 1, 2, 3\}$, maka

$$CM\ [T(P_4)] = 3.$$

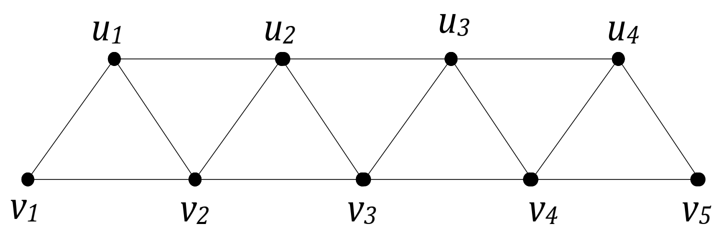
3.4.4 Graf Path P_5

Graf *path* P_5 mempunyai himpunan titik $V(P_5) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan himpunan sisi $E(P_5) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ dimana $e = v_i v_j$.

.



Gambar 3.4.7 Graf Path P_5



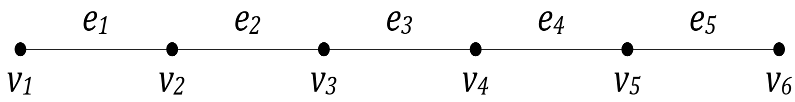
Gambar 3.4.8 Graf Total dari Graf Path P_5

Graf total dari graf *path* P_5 adalah graf yang mempunyai himpunan titik $V[T(P_5)] = V(P_5) \cup U(P_5)$, dimana $U(P_5)$ adalah himpunan titik yang diperoleh dari penambahan satu titik di setiap sisi $e = v_i v_j$ pada graf *path* P_5 dengan $U(P_5) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ dan $E[T(P_5)] = \{v_i u_i | 1 \leq i \leq 4\} \cup \{v_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq 4\} \cup \{u_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq 4\} \cup \{u_i u_{i+1} | 1 \leq i \leq 3\}$. Sikel sisi yang disjoin adalah $S_1 = \{v_i u_i v_{i+1} v_i \mid i = 1, 2, 3, 4\}$, maka

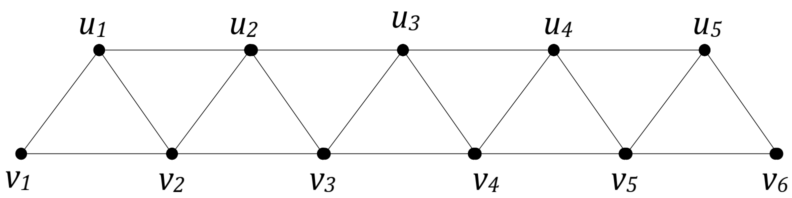
$$CM\ [T(P_5)] = 4.$$

3.4.5 Graf Path P_6

Graf *path* P_6 mempunyai himpunan titik $V(P_6) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan himpunan sisi $E(P_6) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ dimana $e = v_i v_j$.



Gambar 3.4.9 Graf Path P_6



Gambar 3.4.10 Graf Total dari Graf Path P_6

Graf total dari graf *path* P_6 adalah graf yang mempunyai himpunan titik $V[T(P_6)] = V(P_6) \cup U(P_6)$, dimana $U(P_6)$ adalah himpunan titik yang diperoleh dari penambahan satu titik di setiap sisi $e = v_i v_j$ pada graf *path* P_6 dengan $U(P_6) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$. Sikel sisi yang disjoin dari graf path P_6 di atas adalah $S_1 = \{v_i u_i v_{i+1} v_i \mid i = 1, 2, 3, 4, 5\}$, maka

$$CM\ [T(P_6)] = 5.$$

Berdasarkan perhitungan Multiplisitas sikel dari graf *path* di atas, maka diperoleh sebagai berikut.

Tabel 3.2 Multiplisitas Sikel dari Graf Total pada Graf *Path*

n	Graf *Path* P_n	$CM\ [T(P_n)]$
2	P_2	1 = 2 – 1
3	P_3	2 = 3 – 1
4	P_4	3 = 4 – 1
5	P_5	4 = 5 – 1
6	P_6	5 = 6 – 1

Selanjutnya, akan diformulasikan multiplisitas sikel dari graf total pada graf *path* P_n seperti yang dituliskan dalam teorema berikut.

Teorema 3.2

Multiplisitas Sikel dari Graf Total pada graf *path* $P_n = n - 1$.

Bukti

Sikel sisi yang disjoin dari graf P_n adalah $S_1 = \{v_i u_i v_{i+1} v_i \mid 1 \leq i \leq n-1\}$ terlihat bahwa S_1 adalah himpunan yang beranggotakan sikel sisi yang disjoin dalam P_n. Dimana jumlah anggota dari himpunan S_1 bisa dicari dengan menggunakan rumus barisan aritmatika.

Untuk S_1, *i* dapat dijabarkan dalam bentuk barisan aritmatika yaitu 1,2,3,…. n - 1 sehingga didapatkan suku pertama adalah α = 1 dan beda b = 1 serta $u_m = n - 1$ dimana *m* adalah batas terbesar dari S_1, sehingga didapatkan jumlah anggota C_1 dengan perhitungan berikut.

$$u_m = a + (m-1)b$$

$$n - 1 = 1 + (m-1)1$$

$$n - 1 = \cancel{1} + m - \cancel{1}$$

$$m = n - 1$$

Dapat ditulis $|S_1| = n - 1$

Berdasarkan uraian di atas, maka $CM\ [T(P_n)] = |S_1| = n - 1$.

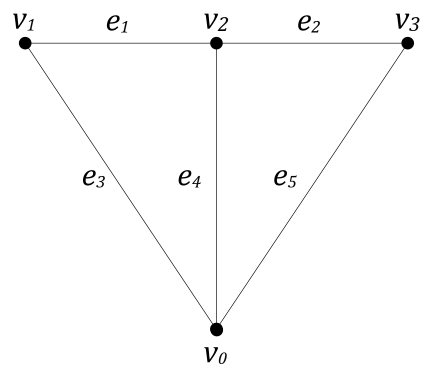
Terbukti bahwa $CM\ [T(P_n)] = n - 1$. ■

3.5 Multiplisitas Sikel dari Graf Total Pada Graf Kipas F_n

Diberikan graf kipas F_n untuk *n* banyaknya titik dan $n \geq 3$ untuk n bilangan asli dan memiliki titik-titiknya, yaitu $V(F_n)=\{v_0, v_1, v_2, v_3, \ldots., v_n\}$ dan himpunan sisi $E(F_n) = \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_{deg_G(v_0)+|E(Pn)|}\}$.

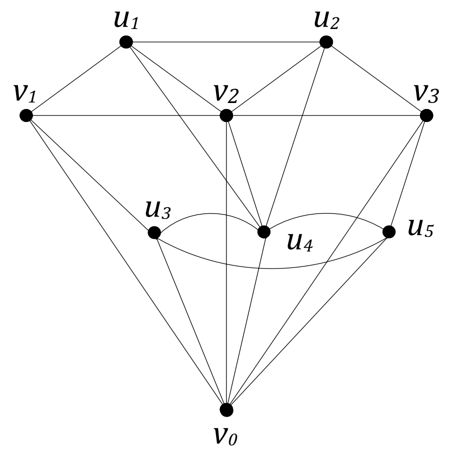
3.5.1 Graf Kipas F_3

Graf kipas F_3 dibentuk dari hasil penjumlahan graf komplit K_1 (Graf Nol N_1) dan graf *path* P_3, yaitu $F_3 = K_1 + P_3$. Graf kipas F_3 dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.5.1 Graf Kipas F_3

Sesuai definisi dari graf total maka bentuk graf total pada graf kipas F_3 sebagai berikut :



Gambar 3.5.2 Graf Total dari Graf Kipas F_3

Graf pada gambar 3.5.1 merupakan graf Kipas F_3 dengan himpunan titik $V(F_3)=\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ dan himpunan sisi $E(F_3)=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ dimana $e = v_i v_j$. Graf total dari graf Kipas F_3 adalah graf yang mempunyai himpunan titik $V[T(F_3)] = V(F_3) \cup U(F_3)$, dimana $U(F_3)$ adalah himpunan titik yang diperoleh dari penambahan satu titik di setiap sisi $e = v_i v_j$ pada graf Kipas F_3. Berdasarkan graf total di atas dan sesuai dengan definisi dari multiplisitas sikel maka diperoleh sikel sisi yang disjoin adalah :

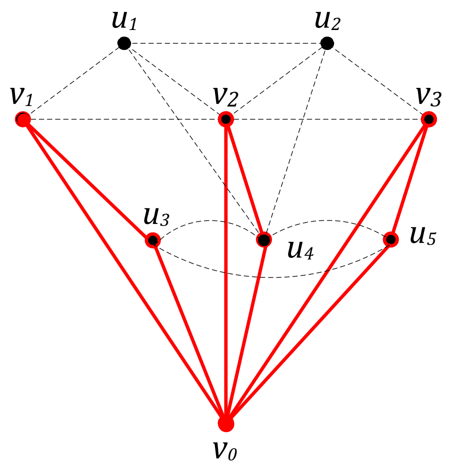
$S_1 = \{v_i u_{(i+(n-1))} v_0 v_i \mid 1 \leq i \leq 3\}$

$S_2 = \{v_i u_i v_{(i+1)} v_i \mid 1 \leq i \leq 2\}$

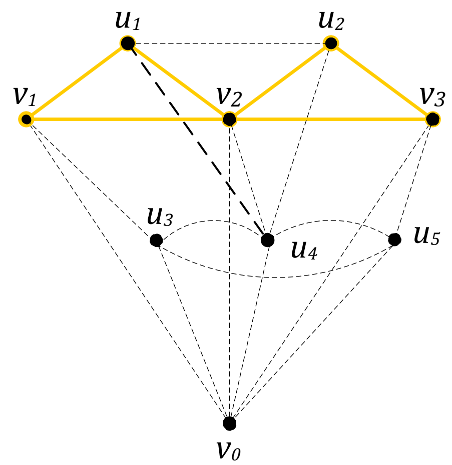
$S_3 = \{u_i u_{i+1} u_{i+2} u_i \mid i = 3\}$

$S_4 = \{u_i u_{i+n} u_{i+1} u_i \mid i = 1\}$

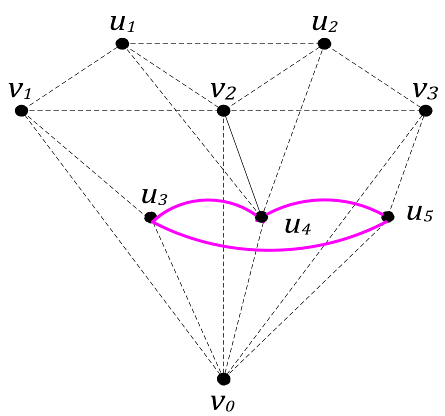
Dapat digambarkan sebagai berikut :



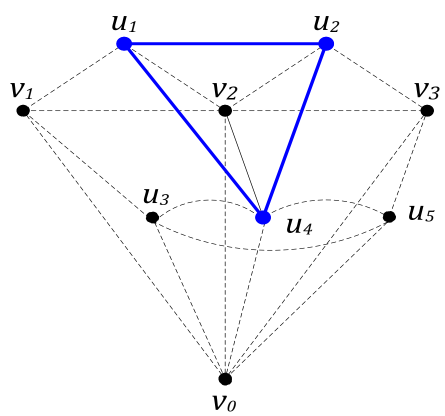
a.$S_1 = \{v_i u_{(i+(n-1))} v_0 v_i \mid 1 \leq i \leq 3\}$



b. $S_2 = \{v_i u_i v_{(i+1)} v_i \mid 1 \leq i \leq 2\}$



c. $S_3 = \{u_i u_{i+1} u_{i+2} u_i \mid i = 3\}$



d. $S_4 = \{u_i u_{i+n} u_{i+1} u_i \mid i = 1\}$

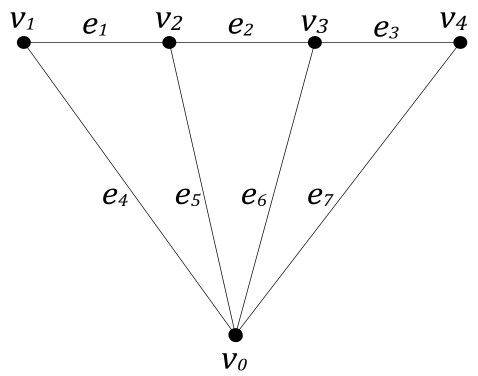
Gambar 3.5.3 Himpunan sikel sisi yang disjoin pada graf kipas F_3

Terlihat bahwa S_i dengan $1 \leq i \leq 4$ adalah himpunan – himpunan yang beranggotaan sikel sisi yang disjoin dalam F_3, dimana $|S_1| = 3$, $|S_2| = 2$, $|S_3| = 1$, $|S_4| = 1$. Sehingga

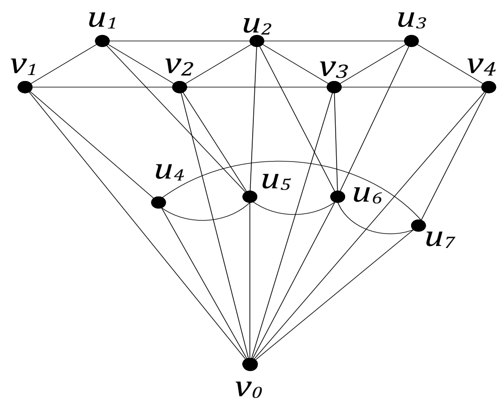
$$CM\ [T(F_3)] = |S_i| = 3 + 2 + 1 + 1 = 7.$$

3.5.2 Graf Kipas F_4

Graf kipas F_4 dibentuk dari hasil penjumlahan graf komplit K_1 (Graf Nol N_1) dan graf *path* P_4, yaitu $F_4 = K_1 + P_4$. Graf kipas F_4 dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.5.4 Graf Kipas F_4



Gambar 3.5.5 Graf total dari graf Kipas F_4

Graf pada gambar 3.5.4 merupakan graf Kipas F_4 dengan himpunan titik $V(F_4)$={v_0 , v_1, v_2, v_3, v_4} dan himpunan sisi $E(F_4)$={ $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7$} dimana $e = v_i v_j$. Graf total dari graf Kipas F_4 adalah graf yang mempunyai himpunan titik $V[T(F_4)] = V(F_4) \cup U(F_4)$,dimana $U(F_4)$ adalah himpunan titik yang diperoleh dari penambahan satu titik di setiap sisi $e = v_i v_j$ pada graf Kipas F_4. Berdasarkan graf total di atas dan sesuai dengan definisi dari multiplisitas sikel maka diperoleh sikel sisi yang disjoin adalah :

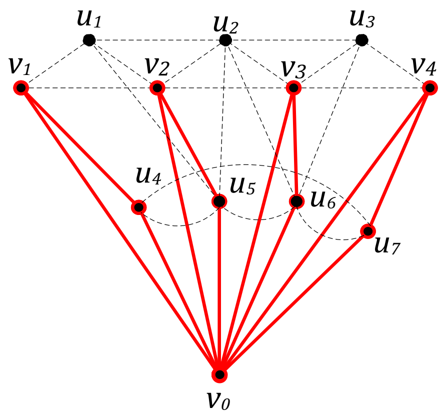
$S_1 = \{v_i u_{(i+(n-1))} v_0 v_i |\ 1 \leq\ i \leq 4\}$

$S_2 = \{v_i u_i v_{(i+1)} v_i\ |1 \leq\ i \leq 3\}$

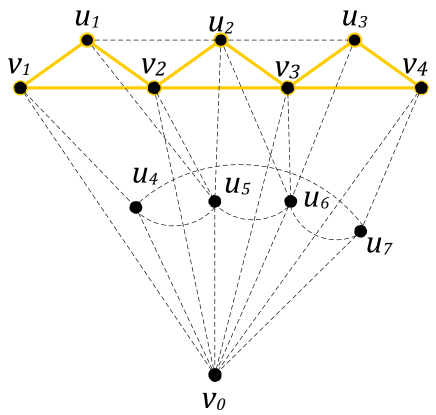
$S_3 = \{u_i u_{i+1} u_{i+2} u_i |\ i = 4\}$

$S_4 = \{u_i u_{i+n} u_{i+1} u_i |\ i = 1, 2\}$

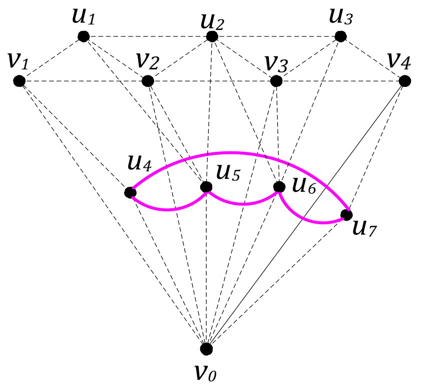
Dapat digambarkan sebagai berikut :

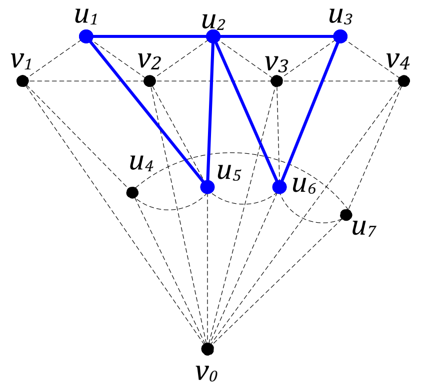


$a. S_1 = \{v_i u_{(i+(n-1))} v_0 v_i |\ 1 \leq\ i \leq 4\}$



b. $S_2 = \{v_i u_i v_{(i+1)} v_i\ |1 \leq\ i \leq 3\}$





$c. S_3 = \{u_i u_{i+1} u_{i+2} u_i \mid i = 4\}$ d. $S_4 = \{u_i u_{i+n} u_{i+1} u_i \mid i = 1, 2\}$

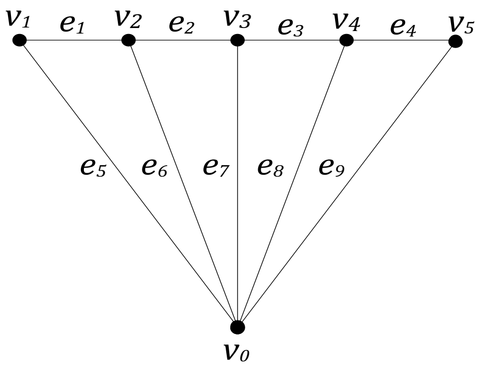
Gambar 3.5.6 Himpunan sikel sisi yang disjoin pada graf kipas F_4

Terlihat bahwa S_i dengan $1 \leq i \leq 4$ adalah himpunan – himpunan yang beranggotaan sikel sisi yang disjoin dalam F_4, dimana $|S_1| = 4$, $|S_2| = 3$, $|S_3| = 1$, $|S_4| = 2$. Sehingga

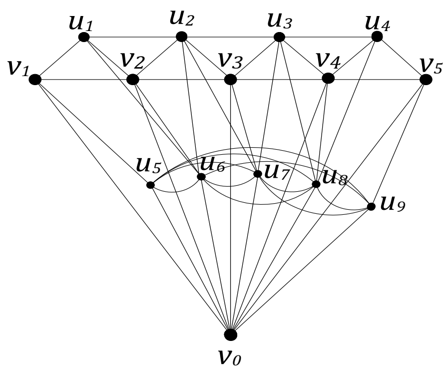
$$CM\ [T(F_4)] = |S_i| = 4 + 3 + 1 + 2 = 10.$$

3.5.3 Graf Kipas F_5

Graf kipas F_5 dibentuk dari hasil penjumlahan graf komplit K_1 (Graf Nol N_1) dan graf *path* P_5, yaitu $F_5 = K_1 + P_5$. Graf kipas F_5 dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.5.7 Graf Kipas F_5



Gambar 3.5.8 Graf Total dari Graf Kipas F_5

Graf pada gambar 3.5.7 merupakan graf Kipas F_5 dengan himpunan titik *V(F₅)*={v_0 , v_1, v_2, v_3, v_4, v_5} dan himpunan sisi *E(F₅)*={ $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8$, e_9} dimana $= v_i v_j$. Graf total dari graf Kipas F_5 adalah graf yang mempunyai himpunan titik $V[T(F_5)] = V(F_5) \cup U(F_5)$, dimana $U(F_5)$ adalah himpunan titik yang diperoleh dari penambahan satu titik di setiap sisi $e = v_i v_j$ pada graf Kipas F_5. Berdasarkan graf total di atas dan sesuai dengan definisi dari multiplisitas sikel maka diperoleh sikel sisi yang disjoin adalah :

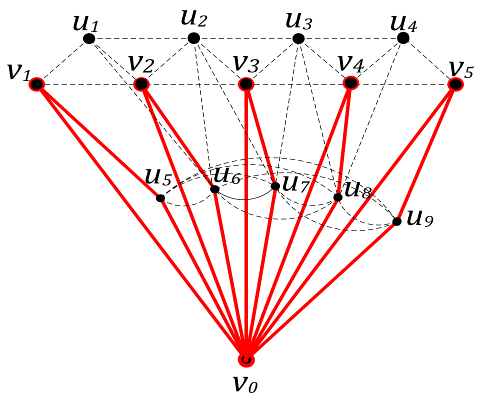
$S_1 = \{v_i u_{(i+(n-1))} v_0 v_i \mid 1 \leq \ i \leq 5\}$

$S_2 = \{v_i u_i v_{(i+1)} v_i \mid 1 \leq \ i \leq 4\}$

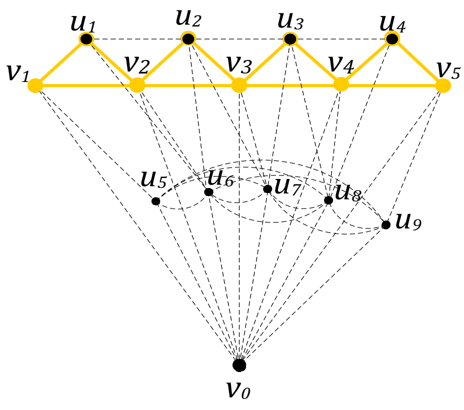
$S_3 = \{u_i u_{i+1} u_{i+3} u_i \mid i = \ 5, 6\} \cup \{u_i u_{i+2} u_{i+3} u_{i+4} u_i \mid i = 5\}$

$S_4 = \{u_i u_{i+n} u_{i+1} u_i \mid i = 1, 2,3\}$

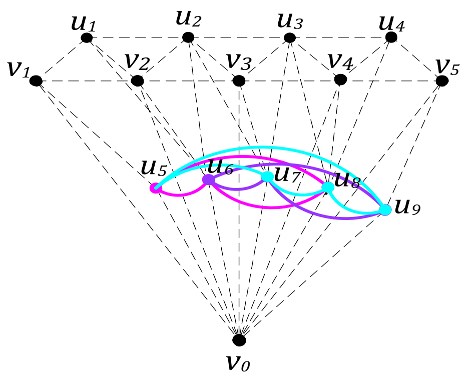
Dapat digambarkan sebagai berikut :



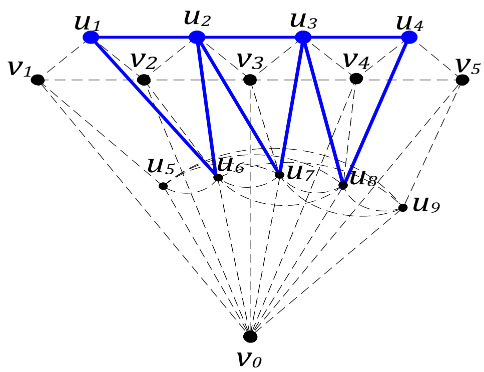
a.$S_1 = \{v_i u_{(i+(n-1))} v_0 v_i \mid 1 \leq \ i \leq 5\}$



b.$S_2 = \{v_i u_i v_{(i+1)} v_i \mid 1 \leq \ i \leq 4\}$



c. $S_3 = \{u_i u_{i+1} u_{i+3} u_i \mid i = 5, 6\} \cup \{u_i u_{i+2} u_{i+3} u_{i+4} u_i \mid i = 5\}$



d. $S_4 = \{u_i u_{i+n} u_{i+1} u_i \mid i = 1, 2,3\}$

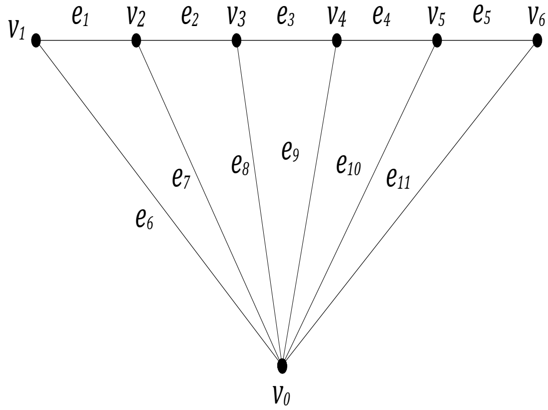
Gambar 3.5.9 Himpunan sikel sisi yang disjoin pada graf Kipas F_5

Terlihat bahwa S_i dengan $1 \leq i \leq 4$ adalah himpunan – himpunan yang beranggotaan sikel sisi yang disjoin dalam F_5, dimana $|S_1|$ = 5 , $|S_2|$ = 4, $|S_3|$ = 3, $|S_4|$ = 3 . Sehingga

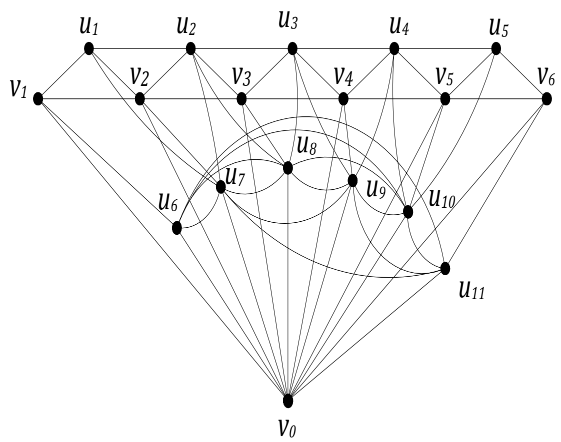
$$CM\ [T(F_5)] = |S_i| = 5 + 4 + 3 + 3 = 15.$$

3.5.4 Graf Kipas F_6

Graf kipas F_6 dibentuk dari hasil penjumlahan graf komplit K_1 (Graf Nol N_1) dan graf *path* P_6, yaitu $F_6 = K_1 + P_6$. Graf kipas F_6 dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.5.10 Graf Kipas F_6



Gambar 3.5.11 Graf total dari graf Kipas F_6

Graf pada gambar 3.5.10 merupakan graf Kipas F_6 dengan himpunan titik $V(F_6)$={v_0 , $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$} dan himpunan sisi $E(F_6)$={ $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7$, e_8 , e_9, e_{10} , e_{11}} dimana $= v_i v_j$. Graf total dari graf Kipas F_6 adalah graf yang mempunyai himpunan titik $V[T(F_6)] = V(F_6) \cup U(F_6)$, dimana $U(F_6)$ adalah himpunan titik yang diperoleh dari penambahan satu titik di setiap sisi $e = v_i v_j$ pada graf Kipas F_6. Berdasarkan graf total di atas dan sesuai dengan definisi dari multiplisitas sikel maka diperoleh sikel sisi yang disjoin adalah :

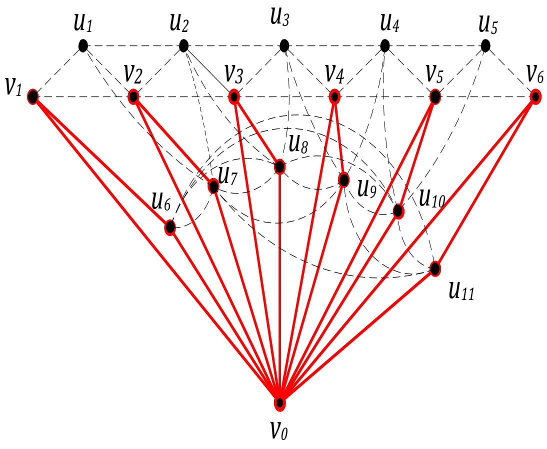
$S_1 = \{v_i u_{(i+(n-1))} v_0 v_i |\ 1 \leq\ i \leq 6\}$

$S_2 = \ \{v_i u_i v_{(i+1)} v_i\ |1 \leq\ i \leq 5\}$

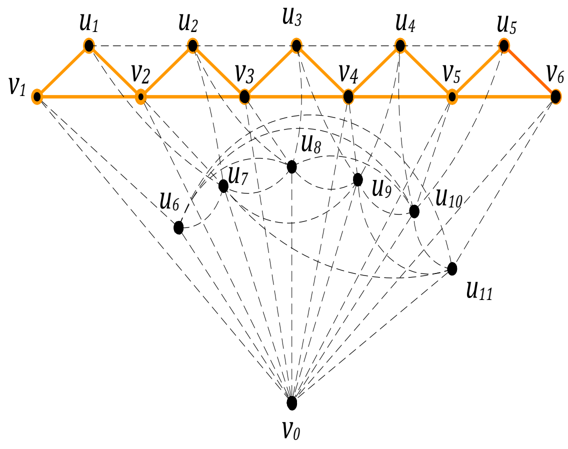
$S_3 = \{u_i u_{i+1} u_{i+2} u_i |\ i = 6, 8\} \cup \{u_i u_{i+2} u_{i+4} u_i\ =\ 7\} \cup\ \{u_i u_{i+4} u_{i+5} u_i\ =\ 6\}$

$S_4 = \{u_i u_{i+n} u_{i+1} u_i |\ i = 1 \leq i \leq 4\}$

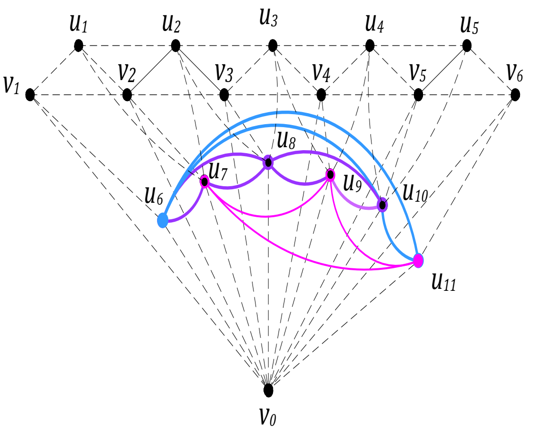
Dapat digambarkan sebagai berikut :



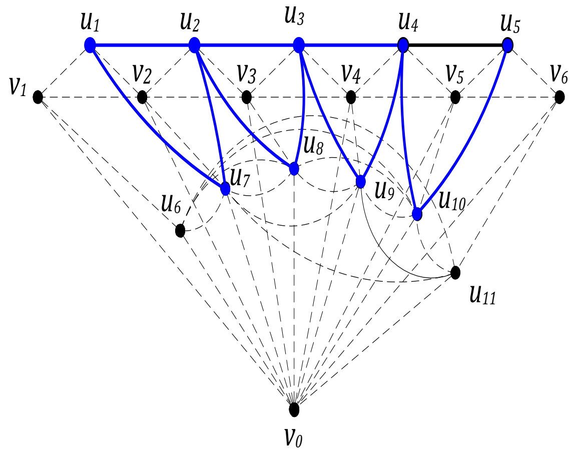
a.$S_1 = \{v_i u_{(i+(n-1))} v_0 v_i |\ 1 \leq\ i \leq 6\}$



b. $S_2 = \ \{v_i u_i v_{(i+1)} v_i\ |1 \leq\ i \leq 5\}$



c. $S_3 = \{u_i u_{i+1} u_{i+2} u_i \mid i = 6, 8\} \cup$
$\{u_i u_{i+2} u_{i+4} u_i = 7\} \cup \{u_i u_{i+4} u_{i+5} u_i = 6\}$



d. $S_4 = \{u_i u_{i+n} u_{i+1} u_i \mid i = 1 \leq i \leq 4\}$

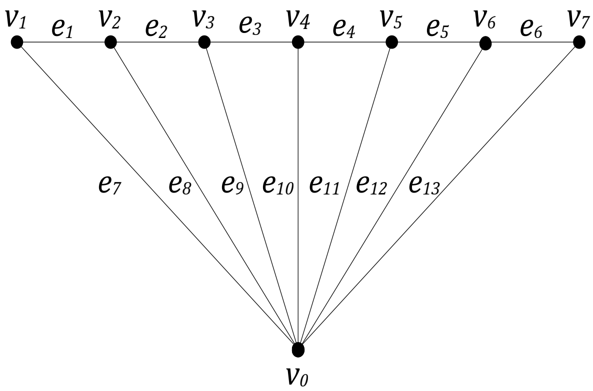
Gambar 3.5.12 Himpunan sikel sisi yang disjoin pada graf Kipas F_6

Terlihat bahwa S_i dengan $1 \leq i \leq 4$ adalah himpunan – himpunan yang beranggotaan sikel sisi yang disjoin dalam F_6, dimana $|S_1| = 6$, $|S_2| = 5$, $|S_3| = 4$, $|S_4| = 4$. Sehingga

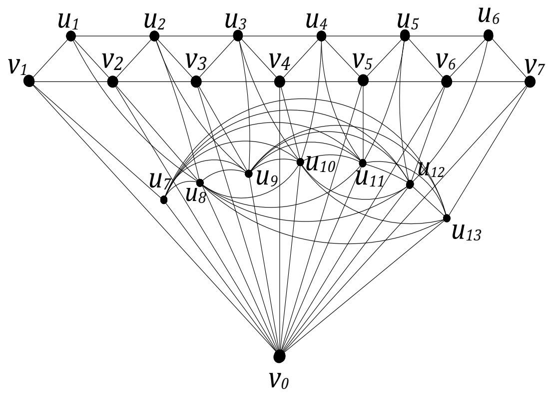
$$CM\ [T(F_6)] = |S_i| = 6 + 5 + 4 + 4 = 19.$$

3.5.5 Graf Kipas F_7

Graf kipas F_7 dibentuk dari hasil penjumlahan graf komplit K_1 (Graf Nol N_1) dan graf path P_7, yaitu $F_7 = K_1 + P_7$. Graf kipas F_7 dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.5.13 Graf Kipas F_7



Gambar 3.5.14 Graf total dari graf Kipas F_7

Graf pada gambar 3.5.13 merupakan graf Kipas F_7 dengan himpunan titik *V(F₇)*={v_0 , $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$} dan himpunan sisi *E(F₆)*={ $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5,$ $e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}$} dimana $= v_i v_j$. Graf total dari graf Kipas F_7 adalah graf yang mempunyai himpunan titik $V[T(F_7)] = V(F_7) \cup U(F_7)$, dimana $U(F_7)$ adalah himpunan titik yang diperoleh dari penambahan satu titik di setiap sisi $e = v_i v_j$ pada graf Kipas F_7. Berdasarkan graf total di atas dan sesuai dengan definisi dari multiplisitas sikel maka diperoleh sisi sikel yang disjoin adalah :

$S_1 = \{v_i u_{(i+(n-1))} v_0 v_i | \, 1 \leq \, i \leq 7\}$

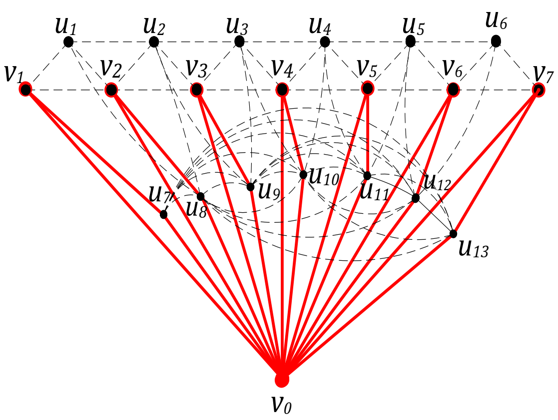
$S_2 = \{v_i u_i v_{(i+1)} v_i \, |1 \leq \, i \leq 6\}$

$S_3 = \{u_i u_{i+1} u_{i+3} u_i | 7 \leq \, i \leq 10\} \cup \{u_i u_{i+4} u_{i+5} u_i | \, i = 7, 8\} \cup$

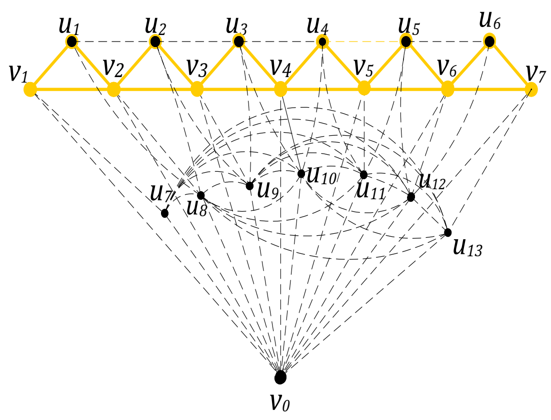
$\{u_i u_{i+2} u_{i+6} u_i | \, i = 7\}$

$S_4 = \{u_i u_{i+n} u_{i+1} u_i | \, i = 1 \leq i \leq 5\}$

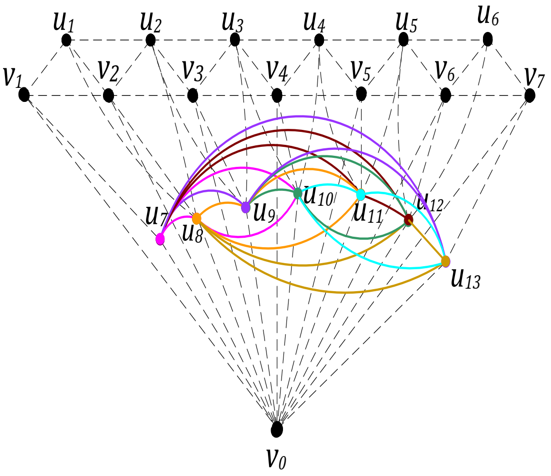
Masing – masing himpunan sikel tersebut dapat digambarkan sebagai berikut :



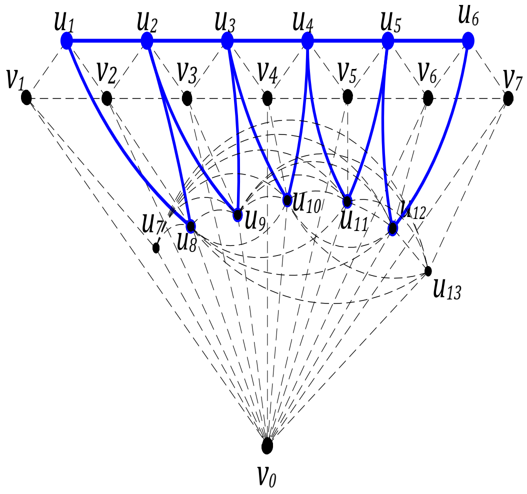
$a.\ S_1 = \{v_i u_{(i+(n-1))} v_0 v_i | \, 1 \leq \, i \leq 7\}$



b. $S_2 = \{v_i u_i v_{(i+1)} v_i \, |1 \leq \, i \leq 6\}$



c. $S_3 = \{u_i u_{i+1} u_{i+3} u_i | 7 \leq i \leq 10\} \cup \{u_i u_{i+4} u_{i+5} u_i | \ i$=7,8$\} \cup \{u_i u_{i+2} u_{i+6} u_i | \ i = 7\}$



d. $S_4 = \{u_i u_{i+n} u_{i+1} u_i | \ i = 1 \leq i \leq 5\}$

Gambar 3.5.15 Himpunan sikel sisi yang disjoin pada graf Kipas F_7

Terlihat bahwa S_i dengan $1 \leq i \leq 4$ adalah himpunan – himpunan yang beranggotaan sikel sisi yang disjoin dalam F_6, dimana $|S_1|$ = 7 , $|S_2|$ = 6, $|S_3|$ = 7, $|S_4|$ = 5 . Sehingga

$$CM\ [T(F_7)] = |S_i| = 7 + 6 + 7 + 5 = 25.$$

Berdasarkan perolehan multiplisitas sikel dari graf kipas di atas, maka diperoleh tabel sebagai berikut.

Tabel 3.3 Multiplisitas Sikel dari Graf Total pada Graf Kipas

n	Graf Kipas F_n	$CM\ [T(F_n)]$
1	F_3	$7 = \left[\frac{3^2 + 17.3 - 18}{6}\right]$
2	F_4	$10 = \left[\frac{4^2 + 16.4 - 18}{6}\right]$

3	F_5	$15 = \left[\frac{5^2+17.5-18}{6}\right]$
4	F_6	$19 = \left[\frac{6^2+17.6-18}{6}\right]$
5	F_7	$25 = \left[\frac{7^2+17.7-18}{6}\right]$

Selanjutnya, akan diformulasikan multiplisitas sikel dari graf total pada graf kipas F_n seperti yang dituliskan dalam teorema berikut.

Teorema 3.3

Multiplisitas Sikel dari Graf Total pada graf kipas F_n adalah

$$CM\,[T(F_n)] = \begin{cases} \left[\frac{n^2+17n-18}{6}\right], \text{ untuk } n \text{ ganjil} \\ \left[\frac{n^2+16n-18}{6}\right], \text{ untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

Bukti

Misal $V(F_n) = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan $E(F_n) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ dimana $e = v_i v_j$. Graf total dari graf Kipas F_n adalah graf yang mempunyai himpunan titik $V[T(F_n)] = V(F_n) \cup U(F_n)$, dimana $u_i \in U(G)$ adalah titik yang membagi setiap sisi $e = v_i v_j$. Sedangkan $E[T(F_n)] = \{v_i u_i \mid 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{v_i v_{i+1} \mid 0 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_i v_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_i u_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_i u_{i+n} \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_i u_{i+n+1} \mid 1 \leq i \leq n\}$.

Kasus I :

Jika n ganjil

Berdasarkan definisi dari multiplisitas sikel maka diperoleh sikel sisi yang disjoin adalah

$S_1 = \{v_i u_{(i+(n-1))} v_0 v_i \mid 1 \leq i \leq n\}$

$S_2 = \{v_i u_i v_{(i+1)} v_i \mid 1 \leq i \leq n-1\}$

$S_3 =$ {Himpunan sisi sikel yang disjoin pada graf komplit K_n}

$S_4 = \{u_i u_{i+n} u_{i+1} u_i \mid 1 \leq i \leq n-2\}$.

Terlihat bahwa S_i dengan $1 \leq i \leq 4$ adalah himpunan – himpunan yang beranggotaan sikel sisi yang disjoin dalam F_n, dimana jumlah anggota dari masing-masing himpunan S bisa dicari dengan menggunakan rumus barisan aritmatika.

Pada S_1, i dapat dijabarkan dalam bentuk barisan aritmatika yaitu 1,2,3,…. n sehingga didapatkan suku pertama adalah α = 1 dan beda b = 1 serta $u_m = n$ dimana m adalah batas terbesar dari S_1, sehingga didapatkan jumlah anggota S_1 dengan perhitungan berikut.

$$u_m = a + (m-1)b$$

$$n = 1 + (m-1)1$$

$$n = \cancel{1} + m - \cancel{1}$$

$$m = n$$

dapat ditulis $|S_1| = n$.

Pada S_2, i dapat dijabarkan dalam bentuk barisan aritmatika yaitu 1,2,3,…. $n-1$ sehingga didapatkan suku pertama adalah α = 1 dan beda b = 1 serta $u_m = n-1$ dimana m adalah batas terbesar dari S, sehingga didapatkan jumlah anggota S_2 dengan perhitungan berikut.

$$u_m = a + (m-1)b$$

$$n - 1 = 1 + (m-1)1$$

$$n - 1 = \cancel{1} + m - \cancel{1}$$

$$m = n - 1$$

dapat ditulis $|S_2| = n - 1$.

Pada S_3 , S_3 adalah himpunan sikel sisi yang disjoin pada graf komplit K_n. $|\, S_3 \,| = \left[\frac{n^2 - n}{6}\right]$, akan dibuktikan banyaknya sisi sikel yang disjoin di S_3 adalah $\left[\frac{n^2 - n}{6}\right]$ jika n ganjil. Jika n = 1, maka banyaknya sisi sikel yang disjoin di K_1 adalah 0. Demikian pula jika n = 3, maka banyaknya sisi sikel yang disjoin di K_3 adalah 1. Perhatikan bahwa $|\, S_3 \,| = \left[\frac{n^2 - n}{6}\right]$ dengan n= 1, 3 adalah benar.

Anggap $m = 2k - 1$benar, $|\, S_3 \,| = \left[\frac{n^2 - n}{6}\right] = \left[\frac{2k^2 - 3k + 1}{3}\right]$ benar. Untuk mengetahui apakah n = 2k +1 benar, dapat diperiksa dengan perhitungan berikut:

$$|\, S_3 \,| = \left[\frac{n^2 - n}{6}\right]$$

$$= \left[\frac{(2k+1)^2 - (2k+1)}{6}\right]$$

$$= \left[\frac{2k^2 + k}{3}\right]$$

Jadi ternyata n = 2k + 1 benar. Berdasarkan prinsip induksi matematika, dapat disimpulkan bahwa $|\, S_3 \,| = \left[\frac{n^2 - n}{6}\right]$ benar untuk bilangan ganjil.

Pada S_4, *i* dapat dijabarkan dalam bentuk barisan aritmatika yaitu 1,2,3,…. $n - 2$ sehingga didapatkan suku pertama adalah α = 1 dan beda b = 1 serta

$u_m = n - 1$ dimana *m* adalah batas terbesar dari S_4, sehingga didapatkan jumlah anggota S_4 dengan perhitungan berikut.

$$u_m = a + (m-1)b$$

$$n - 2 = 1 + (m-1)1$$

$$n - 2 = \cancel{1} + m - \cancel{1}$$

$$m = n - 2$$

dapat ditulis $|S_4| = n - 2$.

Jadi masing-masing multiplikasi sikel pada tiap himpunan sikel sisi yang disjoin adalah $|S_1| = n$, $|S_2| = n - 1$, $|S_3| = \left\lfloor \frac{n^2 - n}{6} \right\rfloor$, dan $|S_4| = n - 2$. Sehingga

$$CM\ [T(F_n)] = n + n - 1 + \left\lfloor \frac{n^2 - n}{6} \right\rfloor + n - 2 = \left\lfloor \frac{n^2 + 17n - 18}{6} \right\rfloor \text{, untuk } n \text{ ganjil.}$$

Kasus II :

Untuk n genap

Berdasarkan definisi dari multiplisitas sikel maka diperoleh sisi sikel yang disjoin adalah

$S_1 = \{v_i u_{(i+(n-1))} v_0 v_i \mid 1 \leq i \leq n\}$

$S_2 = \{v_i u_i v_{(i+1)} v_i \mid 1 \leq i \leq n - 1\}$

$S_3 = \{$ Himpunan sisi sikel yang disjoin pada graf komplit $K_n\}$

$S_4 = \{u_i u_{i+n} u_{i+1} u_i \mid 1 \leq i \leq n - 2\}$.

Terlihat bahwa S_i dengan $1 \leq i \leq 4$ adalah himpunan – himpunan yang beranggotaan sisi sikel yang disjoin dalam F_n, dimana jumlah anggota dari masing-masing himpunan S bisa dicari dengan menggunakan rumus barisan aritmatika.

Pada S_1, *i* dapat dijabarkan dalam bentuk barisan aritmatika yaitu 1,2,3,…. n sehingga didapatkan suku pertama adalah α = 1 dan beda b = 1 serta $u_m = n$ dimana m adalah batas terbesar dari S_1, sehingga didapatkan jumlah anggota S_1 dengan perhitungan berikut.

$$u_m = a + (m-1)b$$

$$n = 1 + (m-1)1$$

$$n = \cancel{1} + m - \cancel{1}$$

$$m = n$$

dapat ditulis $|S_1| = n$.

Pada S_2, *i* dapat dijabarkan dalam bentuk barisan aritmatika yaitu 1,2,3,…. $n-1$ sehingga didapatkan suku pertama adalah α = 1 dan beda b = 1 serta $u_m = n-1$ dimana m adalah batas terbesar dari S_2, sehingga didapatkan jumlah anggota S_2 dengan perhitungan berikut.

$$u_m = a + (m-1)b$$

$$n-1 = 1 + (m-1)1$$

$$n-1 = \cancel{1} + m - \cancel{1}$$

$$m = n-1$$

dapat ditulis $|S_2| = n-1$.

Pada S_3, akan dibuktikan banyaknya sikel sisi yang disjoin di S_3 adalah $\left\lfloor \frac{n^2-2n}{6} \right\rfloor$, jumlah maksimal sikel sisi yang disjoin diambil dari K_n menggunakan langkah – langkah sebagai berikut.

Langkah 1 :

Ambil sikel sisi yang disjoin $S_i = u_i u_{i+1} u_{i+2} u_i$ (i = 1, 3, 5, …, n-1). Jelas bahwa $S_1, S_3, \ldots, S_{n-1}$ adalah sisi- sisi sikel yang disjoin, sehingga didapatkan $\frac{n}{2}$ sikel sisi yang disjoin.

Langkah 2:

Hapus sisi $u_i u_{\left(\frac{n}{2}+i\right)}$ (i= 1, 2,…, $\frac{n}{2}$) dari K_n.

Langkah 3:

Ambil sejumlah $\left[\frac{n^2-5n}{6}\right]$ sikel sisi yang disjoin dari $K_n - \{u_i u_{\left(\frac{n}{2}+i\right)} \mid i = 1,2,\ldots,\frac{n}{2}\}$.

Karena itu $\frac{n}{2} + \frac{n^2-5n}{6} = \left[\frac{n^2-2n}{6}\right]$. Karena $u_i u_{\left(\frac{n}{2}+i\right)}$ (i= 1, 2,…, $\frac{n}{2}$) adalah sisi yang tidak *adjacent* dalam K_n.

Sehingga dapat ditulis $|\, S_3 \,| = \left[\frac{n^2-2n}{6}\right]$.

Pada S_4, i dapat dijabarkan dalam bentuk barisan aritmatika yaitu 1,2,3,…. $n-2$ sehingga didapatkan suku pertama adalah α = 1 dan beda b = 1 serta $u_m = n-1$ dimana m adalah batas terbesar dari S, sehingga didapatkan jumlah anggota S_4 dengan perhitungan berikut.

$$u_m = a + (m-1)b$$

$$n - 2 = 1 + (m-1)1$$

$$n - 2 = \cancel{1} + m - \cancel{1}$$

$$m = n - 2$$

dapat ditulis $|S_4| = n - 2$.

Jadi masing-masing multiplisitas sikel pada tiap himpunan sikel sisi yang disjoin adalah $|S_1| = n$, $|S_2| = n - 1$, $|S_3| = \left[\frac{n^2 - 2n}{6}\right]$, dan $|S_4| = n - 2$. Sehingga

$$CM\ [T(F_n)] = n + n - 1 + \left[\frac{n^2 - 2n}{6}\right] + n - 2 = \left[\frac{n^2 + 16n - 18}{6}\right], \text{ untuk } n \text{ genap.}$$

Jadi terbukti bahwa

$$CM\ [T(F_n)] = \begin{cases} \left[\frac{n^2 + 17n - 18}{6}\right], \text{ untuk } n \text{ ganjil} \\ \left[\frac{n^2 + 16n - 18}{6}\right], \text{ untuk } n \text{ genap} \end{cases} \blacksquare$$

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari pembahasan tentang multiplisitas sikel dari graf total pada graf sikel C_n, *path* P_n , dan kipas F_n dapat disimpulkan sebagai berikut.

Hasil dari penelitian ini telah diketahui multiplisitas sikel dari graf total pada graf sikel C_n dengan $n \geq 3$ adalah $n + 1$ dan multiplisitas sikel dari graf total pada graf *path* P_n dengan $n \geq 3$ adalah $n - 1$.

Selanjutnya, telah diperoleh multiplisitas sikel dari graf total pada graf kipas F_n dengan $n \geq 3$ adalah $\left\lceil\frac{n^2+17n-18}{6}\right\rceil$ untuk n ganjil atau $\left\lceil\frac{n^2+16n-18}{6}\right\rceil$ untuk n genap, dengan n adalah titik pada graf G.

4.2 Saran

Penelitian ini masih membahas multiplisitas sikel dari graf total pada graf sikel C_n, graf *path* P_n, dan graf kipas F_n, maka penelitian ini dapat dilanjutkan dengan mencari multiplisitas sikel dari graf total pada graf lain.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Ali, Akbar. dan Panayappan, S. 2010. *Cycle Multiplicity of Total Graph of C_n, P_n , and $K_{1,n}$. International Journal of Engineering and Technology* Vol. 2, No. 2, 2010, pp. 55-58.

[2] Chartrand, Gary dan Linda Lesniak. 1996. *Graphs and Diagraphs 3nd Edition.* California: Wadsworth, Inc.

[3] Chartrand G., Geller D. and Hedetniemi S., 1971. *Graphs with forbidden Subgraphs, Journal of Combinatorial Theory,* Vol. 10, pp. 12-41.

[4] Gallian, Joseph. 2012. *A Dynamic Survey of Graph Labeling*. *The Electronic Journal of Cambinatorics 19.*

[5] Harary, Frank. 1969. *Graph Theory*. Ontario: Addison-Wesley Publishing Company Inc.

[6] Michalak D., 1981. *On middle and total graphs with coarseness equal 1*. Springer Verlag Graph Theory. Lagow proceedings. Berlin Heidelberg, New York, Tokyo, 139-150.

[7] Munir, Rinaldi. 2007. "*Matematika Diskrit"*. Bandung: Informatika Bandung.

[8] Sukirman. 2006. "*Pengantar Teori Bilangan"*.Yogyakarta: Hanggar Kreator.

[9] Wilson, J. Robin and John J. Watskin. 1990. "*Graphs An Introductory Approach"*. New York : University Course Graphs, Network, and Design.