

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Struktur aljabar merupakan himpunan yang tidak kosong dengan satu atau lebih operasi biner dan aksioma-aksioma tertentu.

Misalkan suatu himpunan M yang merupakan himpunan tak kosong dengan operasi biner $*$ serta memenuhi aksioma asosiatif, memiliki elemen identitas, serta setiap elemen dari M mempunyai invers terhadap operasi $*$, maka M disebut dengan grup.

Mula-mula diperkenalkan himpunan tak kosong dengan satu operasi biner, selanjutnya diperkenalkan himpunan tak kosong dengan dua operasi biner yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Hal inilah yang membentuk struktur aljabar ring. Suatu himpunan tak kosong R dinamakan ring jika himpunan tersebut merupakan grup komutatif terhadap operasi penjumlahan, operasi penggandaannya bersifat asosiatif, serta kedua operasi penggandaan dan penjumlahannya bersifat distributif kiri dan distributif kanan. Ring yang mempunyai sifat komutatif terhadap operasi penggandaan dinamakan ring komutatif.

Dari sebuah ring komutatif dan sebuah grup dapat dikembangkan lagi menjadi struktur ring bertingkat (*graded Ring*). Ring bertingkat (*graded ring*) adalah ring komutatif R dan sebuah grup G terhadap operasi $*$ yang memenuhi aksioma berikut:

$$1. R = \bigoplus_{g \in G} R_g, g \in G$$

$$2. R_g \cdot R_h \subseteq R_{g \cdot h}, \text{ dimana } g, h \in G$$

Seperti pada ring (gelanggang) secara umum, maka disana akan dapat ditentukan ideal dari ring tersebut. Demikian juga untuk ring bertingkat, dapat juga ditentukan idealnya yang dinamakan dengan ideal bertingkat. Dari ideal bertingkat tersebut akan dikembangkan teori tentang ideal prima bertingkat (*graded prime ideal*), ideal maksimal bertingkat (*graded maximal ideal*), *graded radical*, serta *graded primary ideal*.

Dalam tugas akhir ini akan dibahas mengenai struktur dari ring bertingkat, ideal bertingkat, macam macam ideal bertingkat (*graded ideal*) beserta sifat-sifatnya.

1.2 Perumusan Masalah

Dari sedikit uraian latar belakang, maka permasalahan yang akan dibahas dalam tugas akhir ini adalah bagaimana struktur ring bertingkat, struktur ideal bertingkat, macam macam ideal bertingkat, serta sifat-sifatnya

1.3 Pembatasan Masalah

Pada tugas akhir ini akan dibahas tentang ring bertingkat, ideal bertingkat, macam macamnya, beserta sifat-sifatnya.

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan tugas akhir ini adalah

1. Mengkaji struktur ring bertingkat dan sifatnya.
2. Mengkaji struktur ideal bertingkat, macam-macamnya, serta sifat-sifat yang ada di dalamnya.

1.5 Metode Penulisan

Metode yang digunakan penulis dalam menyusun tugas akhir ini adalah studi literature. Pertama penulis akan menjabarkan tentang materi yang mengarah ke ring bertingkat, seperti grup, ring, ideal secara umum serta sifat-sifat yang ada di dalamnya. Selanjutnya penulis akan menjelaskan tentang ring bertingkat, ideal bertingkat, macam maca ideal bertingkat, serta sifat sifat yang ada di dalamnya.

1.6 Sistematika Penulisan

Tugas akhir ini terdiri dari empat bab. Bab I berisi pendahuluan yang menjelaskan latar belakang, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan penulisan, dan sistematika penulisan. Bab II berisi teori-teori dasar yang digunakan dalam pembahasan tugas akhir ini yang meliputi teori himpunan, grup, ring, serta ideal. Bab III berisi tentang ring bertingkat, ideal bertingkat, serta sifat sifat nya. Bab IV berisi kesimpulan dari keseluruhan bahasan pada tugas akhir ini.