LIPATAN GRAF DAN KAITANNYA DENGAN MATRIKS INSIDENSI PADA BEBERAPA GRAF

Septian Adhi Pratama[1], Lucia Ratnasari[2], Widowati[3]
[1,2,3]Jurusan Matematika FSM Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Tembalang Semarang

septiansuyanto@yahoo.com
ratnasari.lucia@yahoo.com

ABSTRACT. Let G_1 and G_2 be graphs with vertex-set $V(G_1)$ and (G_1) and edge-set $E(G_1)$ and $E(G_2)$. Then $f: G_1 \to G_2$ is called a graph map, if for each vertex $v \in V(G_1)$, $f(v) \in V(G_2)$ and for each edge $e \in E(G_1)$, $\dim\ (f(e)) \leq \dim(e)$. A graph map $f: G_1 \to G_2$ is called folding graph if and only if f maps verices to vertices and edges to edges, i.e., for each $v \in V(G_1)$, $f(v) \in V(G_2)$ and for each $e \in E(G_1), f(e) \in E(G_2)$. On this paper shown that what is there a folding graph into itself $(f: G_1 \to G_1)$ in tree graph, complete graph, bipartite graph, complete bipartite graph, cycle graph and multiple graph contains no $\mathrm{C_{2n-1}}$ cycle. For graphs which have a non-trivial folding, limit folding from the graphs is a edge, and graphs which have trivial folding, limit folding from the graphs is a vertex, in this paper also know the relation between folding graph with incidence matrices.

Keyword : Graph map, dim(e), folding graph , non-trivial folding, trivial folding and incidence matrices.

I. PENDAHULUAN

Salah satu topik dalam teori graf yang akan dibahas adalah lipatan graf. Lipatan graf sendiri pertama kali diperkenalkan oleh E. El-Kholy dan A. El-Esawy (2005), yang berasal dari Universitas Tanta, Mesir melalui sebuah jurnal,[4]. Terhitung cukup baru, perkembangan lipatan graf sendiri sampai saat ini cukup luas, salah satu buktinya E. El-Kholy, El-Said R. Lashin, dan Salama N. Daoud di Universitas Tanta memperkenalkan operasi baru pada lipatan graf melalui jurnal [5] yang telah terbit tahun 2012, selain itu lipatan graf juga dikembangkan oleh E. H. Hamouda dan Nada S. melalui sebuah jurnal [7]. Jurnal [7] tersebut membahas mengenai lipatan graf dan bilangan lipatan graf.

II. HASIL DAN PEMBAHASAN

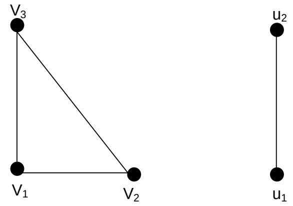
Definition 2.1. [4] *Misalkan G_1 dan G_2 adalah graf dan $f: G_1 \to G_2$ adalah fungsi kontinyu. Fungsi f disebut pemetaan graf jika:*

(i) untuk setiap titik $v \in V(G_1)$, $f(v)$ adalah titik di $V(G_2)$,

(ii) untuk setiap garis $e \in E(G_1), dim\ \ (f(e)) \leq dim(e)$.

Contoh 2.1

Diberikan graf G_1 dan G_2 dengan himpunan titik masing-masing $V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3\}$, $V(G_2) = \{u_1, u_2\}$ dan himpunan garis $E(G_1) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_1)\}$, $E(G_2) = \{(u_1, u_2)\}$ seperti Gambar 2.1.



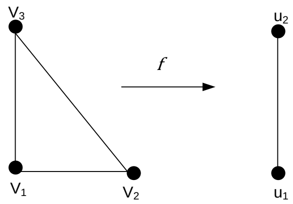
Gambar 2.1 Graf G_1 dan graf G_2

Pemetaan $f: G_1 \rightarrow G_2$ didefinisikan sebagai berikut:

$i.\quad f(v_1) = u_1,\ f(v_2) = u_2,\ f(v_3) = u_2.$

$ii.\ f(v_1, v_2) = (u_1, u_2), \qquad f(v_2, v_3) = u_2, \qquad f(v_3, v_1) = (u_1, u_2).$

Diperoleh $f(G_1)$ sebagai berikut.



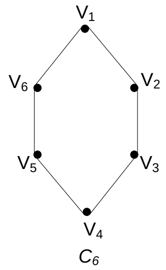
Gambar 2.2 Pemetaan graf G_1ke graf G_2 dan menghasilkan $f(G_1)$

Dari Contoh 2.1 dapat dilihat bahwa untuk setiap titik $v \in V(G_1)$, $f(v)$ adalah titik di $V(G_2)$ dan untuk setiap garis $e \in E(G_1), \dim\ (f(e)) \leq \dim(e)$, yaitu $\dim\ (f(e)) = 1\ \leq\ \dim(e) = 3$. Oleh karena itu $f: G_1 \rightarrow G_2$ merupakan pemetaan graf.

Definisi 2.2 [4] *Suatu pemetaan graf* $f: G_1 \rightarrow G_2$ *disebut lipatan graf jika dan hanya jika* f *memetakan titik ke titik dan garis ke garis yaitu untuk setiap* $v \in V(G_1)$, $f(v) \in V(G_2)$ *dan untuk setiap* $e \in E(G_1)$, $f(e) \in E(G_2)$.

Contoh 2.2

Diberikan graf sikel C_6 dengan himpunan titik $V(C_6) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan himpunan garis $E(C_6) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_6), (v_6, v_1\ )\}$ seperti Gambar 2.3.



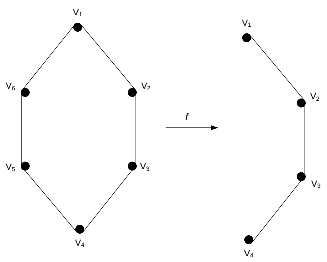
Gambar 2.3 Graf sikel C_6

Berikut ini diberikan pemetaan graf pada C_6. Misal $f: C_6 \to C_6$ adalah pemetaan graf yang didefinisikan sebagai berikut:

i. $f(v_1) = v_1$, $f(v_2) = v_2$, $f(v_3) = v_3$, $f(v_4) = v_4$, $f(v_5) = v_3$, $f(v_6) = v_2$.

ii. $f(v_1, v_2) = (v_1, v_2)$, $f(v_2, v_3) = (v_2, v_3)$, $f\ (v_3, v_4) = (v_3, v_4)$, $f(v_4, v_5) = (v_3, v_4)$, $f(v_5, v_6) = (v_2, v_3)$, $f(v_6, v_1) = (v_1, v_2)$.

Adapun ilustrasi gambarnya sebagai berikut.



Gambar 2.4 Pemetaan graf C_6 ke graf C_6 dan menghasilkan $f(C_6)$

Dari Contoh 2.2 dapat disimpulkan pemetaan graf $f: C_6 \to C_6$ memetakan dari titik ke titik dan garis ke garis, yaitu untuk setiap $v \in V(C_6)$, $f(v) \in V(C_6)$ dan untuk setiap $(v_x, v_y) \in E(C_6)$, $f(v_x, v_y) \in E(C_6)$ sedemikian sehingga diperoleh lipatan graf pada graf C_6.

Proposisi 2.3 [4] *Setiap graf tree T dapat dilipat ke dirinya sendiri dengan suatu barisan dari lipatan graf menjadi suatu garis.*

Teorema 2.4 *Jika K_n adalah graf lengkap maka tidak ada lipatan graf non-trivial yang dapat didefinisikan untuk K_n.*

Teorema 2.5 *Setiap graf bipartit $K_{s,r}$ dapat dilipat.*

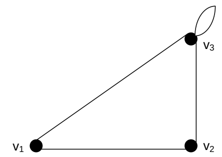
Teorema 2.6 *Setiap graf bipartit lengkap $K_{s,r}$ dapat dilipat ke suatu garis.*

Lemma 2.7 [9] *Batas akhir lipatan dari graf sikel C_n tergantung pada banyak garisnya.*

Lemma 2.8 [9] *Jika G adalah graf yang tidak memuat sikel ganjil maka batas akhir dari lipatan pada graf G adalah sebuah garis.*

Contoh 2.3

Diberikan graf H dengan *loop* sebagaimana terlihat pada Gambar 2.6.



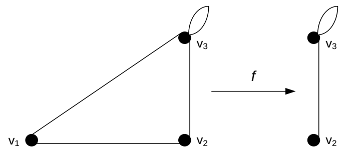
Gambar 2.6 Graf $\mathbf{H}$

Misal $f: H \to H$ adalah pemetaan graf yang didefinisikan sebagai berikut:

i. $f(v_1) = v_3$, $f(v_2) = v_2$, $f(v_3) = v_3$.

ii. $f(v_1, v_2) = (v_2, v_3)$, $f(v_1, v_3) = (v_3, v_3)$, $f(v_2, v_3) = (v_2, v_3)$, $f(v_3, v_3) = (v_3, v_3)$.

Adapun ilustrasi gambarnya sebagai berikut.



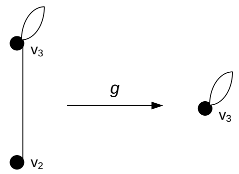
Gambar 2.7 Pemetaan graf $\mathbf{H}$ ke graf $\mathbf{H}$ dan menghasilkan $\boldsymbol{f}(\mathbf{H})$

Selnjutnya misal $g: H \to H$ adalah pemetaan graf yang didefinisikan sebagai berikut:

i. $f(v_2) = v_3$, $f(v_3) = v_3$.

ii. $f(v_2, v_3) = (v_3, v_3)$, $f(v_3, v_3) = (v_3, v_3)$.

Adapun ilustrasi gambarnya sebagai berikut.



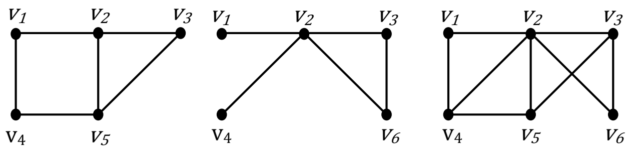
Gambar 2.8 Pemetaan graf $\boldsymbol{f}(\mathbf{H})$ ke graf $\boldsymbol{f}(\mathbf{H})$ dan menghasilkan $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\mathbf{H}))$

Lemma 2.10 [9] *Jika G adalah graf multiple yang tidak memuat sikel C_{2n-1} maka batas akhir dari lipatan graf pada graf G adalah loop.*

Definisi 2.11 [10] *Gabungan dua graf $G_1 = (V_1, E_1)$ dan graf $G_2 = (V_2, E_2)$ yang mempunyai himpunan titik $V(G_1 \cup G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G_1 \cup G_2) = E(G_1) \cup E(G_2)$ yang dinotasikan dengan $G_1 \cup G_2$.*

Contoh 3.18

Diberikan graf sebagai berikut :

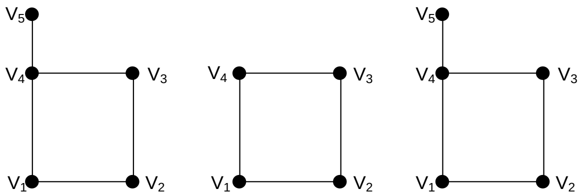


Gambar 2.10 Graf G_1, G_2, dan $G_1 \cup G_2$

Diberikan graf G_1 dan G_2 dengan G_2 subgraph dari G_1dan tidak memuat sikel ganjil. Lipatan graf dapat memenuhi pemetaan linier asalkan $G_1 \cup G_2$ tidak memuat sikel ganjil. Dalam mendefinisikan pemetaan graf untuk masing-masing graf, definisi pemetaan graf menggunakan satu definisi sama yang berlaku untuk kedua graf dan gabungan kedua graf yang dicari.

Contoh 2.4

Diberikan graf G_1 dan G_2 dengan himpunan titik masing-masing $V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $(G_2) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, dan himpunan garis $E(G_1) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_1), (v_4, v_5 \quad)\}$ $E(G_2) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), \quad (v_4, v_1) \quad \}$, seperti Gambar 2.11.



Gambar 2.11 Graf G_1, G_2, dan $G_1 \cup G_2$

Misal $f_1 : G_1 \rightarrow G_1$ adalah pemetaan graf yang didefinisikan sebagai berikut:

i. $f_1(v_1) = v_1$, $f_1(v_2) = v_2$, $f_1(v_3) = v_3$, $f_1(v_4) = v_4$, $f_1(v_5) = v_1$.

ii. $f_1(v_1, v_2) = (v_1, v_2)$, $f_1(v_2, v_3) = (v_2, v_3)$,

$f_1(v_3, v_4) = (v_3, v_4)$, $f_1(v_4, v_1) = (v_4, v_1)$, $f_1(v_4, v_5) = (v_4, v_1)$.

Misal $f_2 : G_2 \rightarrow G_2$ adalah pemetaan graf yang didefinisikan sebagai berikut:

i. $f_2(v_1) = v_1$, $f_2(v_2) = v_2$, $f_2(v_3) = v_3$, $f_{2_1}(v_4) = v_4$.

ii. $f_2(v_1, v_2) = (v_1, v_2)$, $f_2(v_2, v_3) = (v_2, v_3)$, $f_2(v_3, v_4) = (v_3, v_4)$, $f_2(v_4, v_1) = (v_4, v_1)$.

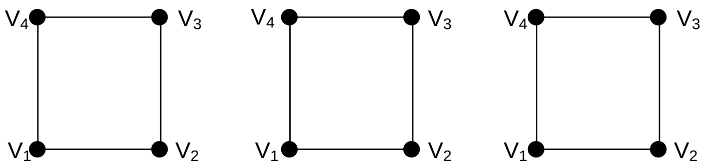
Misal $f_3 : (G_1 \cup G_2) \rightarrow (G_1 \cup G_2)$ adalah pemetaan graf yang didefinisikan sebagai berikut:

$i.\quad f_3(v_1) = v_1,\;\; f_3(v_2) = v_2,\;\; f_3(v_3) = v_3,\;\; f_3(v_4) = v_4,\;\; f_3(v_5) = v_1.$

$ii.\;\; f_3(v_1, v_2) = (v_1, v_2), \qquad f_3(v_2, v_3) = (v_2, v_3),$

$f_3(v_3, v_4) = (v_3, v_4), \qquad f_3(v_4, v_1) = (v_4, v_1), \qquad f_{3\,1}(v_4, v_5) = (v_4, v_1).$

Adapun ilustrasi graf hasil pemetaan graf berdasarkan pendefinisian diatas adalah sebagai berikut.



Gambar 2.12 Graf $\boldsymbol{f_1(G_1)}$, $\boldsymbol{f_2(G_2)}$, dan $\boldsymbol{f_3(G_1 \cup G_2)}$

Dari Gambar 2.12 dapat dilihat bahwa $f_3(G_1 \cup G_2) = f_1(G_1) \cup f_2(G_2)$ yang berarti untuk Lipatan graf dapat memenuhi pemetaan linier asalkan G_2 subgraph dari G_1dan tidak memuat sikel ganjil dan $G_1 \cup G_2$ tidak memuat sikel ganjil.

Definisi 2.12 [4] *Diberikan graf G_1 dengan himpunan titik $V(G_1) = \{v_1, \ldots, v_r\}$ dan himpunan garis $E(G_1) = \{e_1, \ldots, e_s\}$. Misal $f \in \eta\ (G_1)$ sedemikian sehingga $f(G_1) \neq G_1$. Matriks insiden dinotasikan $I = (\lambda_{kd})$ dan didefinisikan oleh:*

(i) $\lambda_{kd} = 1$, jika v_k insiden dengan e_d,

(ii) $\lambda_{kd} = 0$, jika v_k tidak insiden dengan e_d,

untuk $k = 1 \ldots r$, $d = 1 \ldots s$ dan v_k, $e_d \in G_1$.

Misal G_1dan G_2 adalah graf dan $f \in \eta\ (G_1, G_2)$, maka $f(G_1)$ adalah subgraf dari G_2, khususnya jika $f \in \eta\ (G_1)$ dengan $f(G_1) = G_1' \neq G_1$, maka G_1' adalah subgraf dari G_1.

Matriks I dapat dipartisi menjadi empat bagian, I' terletak di pojok kiri atas dan matriks nol O di sebelah kanannya. Matriks R, komplemen dari I', akan menjadi submatriks dari I' setelah menghapus baris dan kolom dari I' yang bukan merupakan bayangan dari setiap garis $e_{s_1+1}, \ldots, e_s$ dan titik $v_{r_1+1}, \ldots, v_r$. Matriks nol O menyatakan bahwa tidak terdapat titik $v_{r_1+1}, \ldots, v_r$ yang insiden dengan setiap garis dari bayangannya.

$$
I = \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{s_1} \\ e_{s_1+1} \\ e_{s_2+1} \\ \vdots \\ e_s \end{array}
\overset{\begin{array}{cc} v_1, v_2 \ldots, v_{r_1} & v_{r_1+1}, \ldots, v_r \end{array}}{\left(\begin{array}{c|c} I' & O \\ \hline Q & R \end{array} \right)}
$$

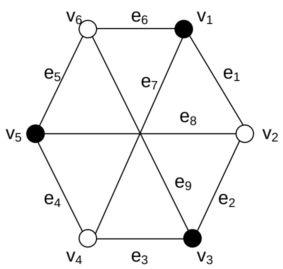
Selanjutnya jika matriks insidensi I dari graf G_1 *dapat dipartisi kedalam empat bagian dengan matriks nol terletak pada bagian pojok kanan atas, maka lipatan graf mungkin dapat didefinisikan jika disetiap pemetaan f pada* G_1 *ke bayangan* $f(G_1)$ *yang dikarakterisasi oleh matriks insidensi* I' *yang terletak pada bagian pojok kiri atas I. Pemetaan ini dapat didefinisikan dengan memetakan:*

(i) *Titik* v_j, $j = r_1 + 1, \ldots, r$ *ke titik* v_i, $i = 1, \ldots, r_1$ *jika kolom ke* j *dalam R sama dengan kolom ke* i *dalam* I' *setelah menghilangkan nol dari kolom ke* i.

(ii) *Garis* e_v, $v = s_1 + 1, \ldots, s$ *ke garis* e_l, $l = 1, \ldots, s_1$ *jika* e_v *dan* e_l *insidensi.*

Contoh 2.5

Diberikan graf bipartit lengkap $K_{3,3}$ dengan himpunan titik $V(K_{3,3}) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan dipisah $A = \{v_1, v_3, v_5\}$, $B = \{ v_2, v_4, v_6 \}$, dan himpunan garisnya $E(K_{3,3}) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$ seperti Gambar 2.13.



Gambar 2.13 Graf bipartit lengkap $K_{3,3}$

Selanjutnya akan dibentuk matriks insidensi *I* dari graf tersebut diatas.

$$I = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \\ e_7 \\ e_8 \\ e_9 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Berdasarkan Definisi 2.12, matriks I diatas dapat dipartisi menjadi empat bagian sedemikian sehingga mendapatkan bentuk seperti dibawah ini.

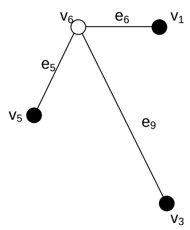
$$I = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} v_1 & v_3 & v_5 & v_6 & v_2 & v_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_5 \\ e_6 \\ e_9 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_7 \\ e_8 \end{array} & \left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Berdasarkan matriks I yang telah diatur ulang letaknya maka didapat empat bagian hasil partisi, didapatkan juga definisi pemetaan graf $f: K_{3,3} \rightarrow K_{3,3}$ yaitu:

i. $f(v_2) = v_6$, $f(v_4) = v_6$.

ii. $f(e_1) = e_6$, $f(e_2) = e_9$, $f(e_3) = e_9$, $f(e_4) = e_5$, $f(e_5) = e_5$, $f(e_6) = e_6$, $f(e_7) = e_6$, $f(e_8) = e_5$, $f(e_9) = e_9$.

Adapun ilustrasi gambar hasil pemetaanya adalah sebagai berikut.



Gambar 2.14 Hasil pemetaan graf $K_{3,3}$ dengan matriks insidensi yang menghasilkan $f(K_{3,3})$

Berdasarkan Definisi 2.12, Contoh 2.5 memiliki lipatan graf karena matriksnya dapat dipartisi kedalam empat bagian sedemikian sehingga matriks nol terletak pada bagian pojok kanan atas, dan lipatan graf dapat didefinisikan, karena terdapat pemetaan f dari $K_{3,3}$ ke bayangan $f(K_{3,3})$ yang dikarakterisasi oleh matriks insidensi I' yang terletak pada bagian pojok kiri atas *I*. Oleh karena itu pemetaan grafnya dapat didefinisikan dengan memetakan:

(i) Titik $v_j,\ j = r_1 + 1, \dots, r$ ke titik $v_i,\ i = 1, \dots, r_1$ jika kolom ke j dalam *R* sama dengan kolom ke i dalam I' setelah menghilangkan nol dari kolom ke i.

(ii) Garis $e_v,\ v = s_1 + 1, \dots, s$ ke garis $e_l,\ l = 1, \dots, s_1$ jika e_v dan e_l insidensi.

III. KESIMPULAN

Lipatan graf *non-trivial* dapat didefinisikan pada graf *tree*, graf bipartit, graf bipartit lengkap dan graf sikel C_n dengan n genap, sedangkan lipatan graf *trivial* dapat didefinisikan pada graf lengkap K_n dan graf sikel C_n dengan n ganjil. Batas akhir lipatan graf pada graf *tree*, graf bipartit lengkap dan graf sikel C_n dengan n bernilai genap adalah sebuah garis. Graf sikel C_n dengan n bernilai ganjil tidak memiliki lipatan graf *non-trivial*. Batas akhir dari graf *G* yang tidak memuat sikel ganjil adalah sebuah garis. Batas akhir dari graf *multiple* (graf yang terdiri dari garis berganda dan memiliki *loop*) yang tidak memuat sikel C_{2n-1} adalah sebuah *loop*.

Kaitan antara matrik insidensi *I* dengan lipatan graf pada graf G_1 adalah jika matriks insidensi *I* dari graf G_1 dapat dipartisi kedalam empat bagian yaitu I' terletak di pojok kiri atas dan matriks nol O di sebelah kanannya, kemudian matriks *Q* teletak dipojok kiri bawah, dan matriks *R* dipojok kanan bawah. Lipatan graf dapat didefinisikan jika terdapat pemetaan f dari G_1 ke bayangan $f(G_1)$ yang dikarakterisasi oleh matriks I'.

IV. DAFTAR PUSTAKA

[1] Abdul Mutholib, 2012, *Pelabelan Titik a-Consecutive Edge Bimagic Total pada Graf*, Skripsi, FSM UNDIP. Semarang.

[2] Berlina Tirtaningrum, 2012, *Pelabelan Super Ajaib Sisi*, Skripsi, FSM UNDIP. Semarang

[3] Diestel, Reinchard. 2005. *Graph Theory*. Springer-Verlag Heidelberg, New York.

[4] El-Kholy E. M. dan El-Eshawy A. 2005. *Graph folding of some special graphs*, J.Math. Statistics Nal (1), 66-70, Sci. Pub. U.S.A.

[5] El-Kholy E. M., Lashin El-Said R. dan Daoud Salama N. 2012. *New Operations on Graphs and Graph Foldings,* International Mathematical Forum., vol.7, no.46, 2253-2268, Sci. Pub. U.S.A.

[6] Giblin, P.J. 1997. *Graphs, Surfaces and Homology*. Chapman and Hall, London.

[7] Hamouda E.H. 2012. *On the based folding of based graphs,* Applied Mathematical Science, vol. 6, no. 80, 3975-3979, Sci. Pub. U.S.A.

[8] Jeksiang, Jong . 2009. *Matematika diskret dan aplikasinya pada computer*. Yogyakarta. Andi offset.

[9] Nada S.I. dan E.H. Hamouda. 2009. *On the folding of graphs-theory and application,* Chaos, Solitons and Fractals 42, 669-675, Sci. Pub. U.S.A.

[10] Rosen, Kenneth H. 2007. "*Discrete Mathematics and Its Aplications Sixth Edition*". New York : McGraw – HILL BOOK COMPANY.

[11] Wilson R.J. dan Watkins J.J. 1981. *Graph an introductory approach.* John Wiley and Son, Inc.New York, U.S.A.

[12] Wojcik, Michal Ryszard. 2008. *Closed and Connected Graphs of Functions; Examples of Connected Punctiform Spaces.* Slaski University: Institute of Mathematic.

[13] Yuni Dwi Astuti, 17 Februari 2012, *Logika dan Algoritma,* http://kur2003.if.itb.ac.id/file/Graf-1.doc.(17 juli 2013).