RANCANGAN *D-OPTIMAL* UNTUK REGRESI POLINOMIAL DERAJAT 3 DENGAN HETEROSKEDASTISITAS

SKRIPSI

Oleh :

NAOMI RAHMA BUDHIANTI

J2E 007 021

JURUSAN STATISTIKA

FAKULTAS SAINS DAN MATEMATIKA

UNIVERSITAS DIPONEGORO

SEMARANG

2013

RANCANGAN *D-OPTIMAL* UNTUK REGRESI POLINOMIAL DERAJAT 3 DENGAN HETEROSKEDASTISITAS

Oleh :

NAOMI RAHMA BUDHIANTI

J2E 007 021

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat Penyusunan Tugas Akhir
pada Jurusan Statistika Fakultas Sains dan Matematika UNDIP

JURUSAN STATISTIKA

FAKULTAS SAINS DAN MATEMATIKA

UNIVERSITAS DIPONEGORO

SEMARANG

2013

HALAMAN PENGESAHAN I

Judul : Rancangan *D-Optimal* untuk Regresi Polinomial Derajat 3 dengan Heteroskedastisitas.

Nama : Naomi Rahma Budhianti

NIM : J2E 007 021

Telah diujikan pada sidang Tugas Akhir tanggal 15 Februari 2013 dan dinyatakan lulus pada tanggal 27 Februari 2013.

Semarang,   Maret 2013

Mengetahui, Ketua Jurusan Statistika FSM UNDIP	Panitia Penguji Ujian Tugas Akhir Ketua,
<u>Dra. Hj. Dwi Ispriyanti, M.Si</u> NIP. 1957 09 14 1986 03 2 001	<u>Dra. Suparti, M.Si</u> NIP. 1965 09 13 1990 03 2 001

HALAMAN PENGESAHAN II

Judul : Rancangan *D-Optimal* untuk Regresi Polinomial derajat 3 dengan Heteroskedastisitas.

Nama : Naomi Rahma Budhianti

NIM : J2E 007 021

Telah diujikan pada sidang Tugas Akhir tanggal 15 Februari 2013

.

Semarang, 1 Maret 2013

Pembimbing I	Pembimbing II
Dra. Tatik Widiharih, M.Si	Moch. Abdul Mukid, S.Si, M.Si
NIP. 1961 09 28 1986 03 2 002	NIP. 1978 08 17 2005 01 1 001

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur kehadirat Allah SWT, karena berkat rahmat-Nya penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul : "**Rancangan D-Optimal untuk Regresi Polinomial Derajat 3 dengan Heteroskedastisitas**" dengan baik untuk memenuhi syarat memperoleh gelar Sarjana Strata Satu (S1) pada Jurusan Statistika Fakultas Sains dan Matematika Universitas Diponegoro.

Penulis menyadari bahwa penyusunan Tugas Akhir ini tidak akan berjalan dengan baik tanpa adanya dukungan dan bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada :

1. Ibu Dra. Hj. Dwi Ispriyanti, M.Si selaku Ketua Jurusan Statistika Fakultas Sains dan Matematika Universitas Diponegoro.
2. Ibu Dra. Tatik Widiharih, M.Si selaku Dosen Pembimbing I atas bimbingan, saran dan pengarahan sehingga penyusunan Tugas Akhir dapat selesai.
3. Bapak Moch. Abdul Mukid, S.Si, M,Si selaku Dosen Pembimbing II atas bimbingan dan pengarahan sehingga penyusunan Tugas Akhir menjadi lebih baik.
4. Bapak dan Ibu Dosen Jurusan Statistika FSM UNDIP atas bantuannya.
5. Keluarga besar penulis yang senantiasa mendoakan dan selalu memberikan dukungan.
6. Rekan-rekan mahasiswa Jurusan Statistika FSM UNDIP atas bantuan dan semangatnya.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan Tugas Akhir ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang bersifat membangun demi perbaikan ke depannya.

Semarang, Maret 2013

Penulis

ABSTRAK

Dalam suatu percobaan, model regresi polinomial derajat 3 dengan heteroskedastisitas yang mempunyai fungsi bobot $\lambda(x) = x\, e^{-x}$ menggunakan kriteria rancangan *D-Optimal*. Kriteria rancangan *D-Optimal* didapatkan dengan memaksimumkan determinan matriks rancangan atau meminimumkan determinan invers matriks rancangan. Matriks rancangan dibentuk dari rancangan optimal. Rancangan optimal merupakan matriks yang terdiri dari titik-titik rancangan dan ulangan di masing-masing titiknya. Titik-titik rancangan didapatkan dari akar polinomial Laguerre. Rancangan *D-Optimal* yang mempunyai nilai variansi terstandardisasi maksimum sama dengan jumlah parameter memenuhi syarat sebagai rancangan *D-Optimal* lokal.

Kata Kunci : Regresi Polinomial, Heteroskedastisitas, Rancangan *D-Optimal*, Polinomial Laguerre

ABSTRACT

An experiment, the 3rd degree of polynomial regression model with heteroscedastic and containing function of weight $\lambda(x) = x\, e^{-x}$ uses *D-Optimal* criteria. The *D-Optimal* criteria is obtained by maximizing determinant of design matrix or minimizing determinant of design matrix inverse. The design matrix is formed from optimal design. The optimal design is a matrix that consists the points and proportions at each point. The points are generated by the Laguerre polynomial roots. The *D-Optimal* design that has maximum value of standardized variance equals to amount of parameters at every point qualifies as a *D-Optimal* local design.

Keywords : Polynomial Regression, Heteroscedastic, *D-Optimal* Design, Laguerre Polynomial

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

Halaman

DAFTAR LAMPIRAN

Halaman

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi yang semakin maju, menuntut perubahan yang mempengaruhi suatu penelitian atau percobaan dalam berbagai bidang misalnya peternakan, pertanian, biologi, farmasi dan kesehatan. Dalam penelitian atau percobaan, analisis statistik sangat diperlukan untuk memberikan jawaban yang akurat dengan biaya minimum. Percobaan yang menggunakan kriteria rancangan optimal adalah percobaan yang paling efisien.

Analisis regresi dalam pengertian modern adalah studi bagaimana variabel respon dipengaruhi oleh satu atau lebih variabel prediktor dengan tujuan untuk mengestimasi atau memprediksi nilai rata-rata variabel respon didasarkan pada nilai variabel prediktor yang diketahui (Widarjono, 2007).

Analisis regresi merupakan alat statistik yang sering digunakan dalam percobaan. Secara umum, model regresi polinomial derajat d dalam satu variabel adalah :

$$y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^{d} \beta_j x_i^j + \varepsilon_i \quad ; i = 1,2, \dots, n \tag{1}$$

dengan asumsi ε_i berdistribusi normal dengan rata-rata 0, variansi σ^2, dan saling independen.

Untuk menentukan pola hubungan yang baik antara variabel prediktor X dengan variabel respon Y, diperlukan suatu rancangan yang menghasilkan inferensi statistik paling akurat dan dapat menekan biaya percobaan. Oleh karena itu, percobaan menggunakan kriteria optimal dan nilai efisiensi dari rancangan yang digunakan (Huang, 2010). Rancangan optimal dibentuk melalui titik-titik variabel prediktor X dan ulangannya pada masing-masing titik pengamatan. Rancangan digunakan untuk membentuk matriks rancangan. Kriteria pemenuhan rancangan optimal didasarkan pada matriks rancangan dari model yang dipilih.

Berdasarkan model regresi polinomial pada persamaan (1), jika $d = 1$ maka persamaan (1) menjadi :

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \quad ; i = 1,2, \dots , n \tag{2}$$

Model regresi ditulis dalam notasi matriks sebagai berikut :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \varepsilon \tag{3}$$

dan dalam bentuk matriks menjadi :

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} ; \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} ; \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

dengan $\mathbf{Y}$ adalah vektor (n x 1) dari variabel respon, $\mathbf{X}$ adalah matriks (n x 2) dari variabel prediktor, β adalah vektor (2 x 1) dari koefisien regresi dan ε adalah vektor (n x 1) dari error. Rancangan untuk persamaan (2) adalah $\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ w_1 & w_2 \end{bmatrix}$, maka matriks rancangannya adalah $\boldsymbol{M}\,(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{2} w_i \mathbf{X}^T\mathbf{X}$.

Rancangan optimal mempunyai beberapa kriteria yaitu rancangan *A-Optimal* didapatkan dengan meminimumkan trace dari invers matriks rancangan sehingga didapatkan rata-rata dari $var(\widehat{\boldsymbol{\beta}})$ minimum. Rancangan *G-Optimal* didapatkan dengan meminimumkan variansi terstandardisasi yang maksimum, rancangan *G-Optimal* menggunakan Teori Equivalensi sedemikian hingga sama dengan rancangan *D-Optimal*. Rancangan *D-Optimal* didapatkan dengan memaksimumkan determinan dari matriks rancangan. Rancangan *E-Optimal* didapatkan dengan memaksimumkan nilai eigen minimum dari matriks rancangan, dengan menggunakan estimasi $a^T\hat{\beta}$ adalah minimum dan diketahui bahwa $a^Ta = 1$ (Atkinson *et.al*. 2007). Pada pembahasan ini, penulis menggunakan kriteria rancangan *D-Optimal*.

Rancangan *D-Optimal* menekankan pada kualitas estimasi parameter yang bertujuan untuk mendapatkan $var(\widehat{\boldsymbol{\beta}})$ minimum. Pada pembahasan model regresi polinomial derajat 3 dengan heteroskedastisitas, $var(\widehat{\boldsymbol{\beta}})$ minimum dapat dicapai dengan memaksimumkan determinan matriks rancangan $|\boldsymbol{M}\,(\boldsymbol{\xi})|$ atau meminimumkan determinan invers matriks rancangan $\left|\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{\xi})\right|$ (Atkinson *et.al*. 2007).

Penulis membatasi penentuan titik-titik rancangan dan invers pada matriks rancangan menggunakan software Maple10, sedangkan untuk menghitung matriks rancangan menggunakan Microsof Excel 2007. Perhitungan variansi terstandardisasi dan grafik menggunakan Matlab 7.1.

1.2 Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan Tugas Akhir ini adalah:

1. Mendapatkan titik-titik rancangan dan ulangannya untuk regresi polinomial derajat 3 dengan heteroskedastisitas yang mempunyai fungsi bobot $\lambda(x) = xe^{-x}$.
2. Membentuk matriks rancangan untuk pemenuhan kriteria rancangan *D-Optimal*.
3. Membuktikan bahwa rancangan yang telah ditentukan sebelumnya adalah rancangan optimal untuk *D-Optimal* lokal dengan menggunakan Teorema Equivalensi.