BAB II
DASAR TEORI

Fenomena aeroelastik merupakan salah satu batasan dalam perancangan suatu struktur kendaraan terbang. Oleh karena itu muncullah suatu disiplin ilmu yang mempelajari tentang fenomena tersebut yang dinamakan aeroelastisitas. Aeroelastisitas adalah suatu disiplin ilmu yang mempelajari tentang deformasi pada benda elastis dalam suatu regim aliran udara. Fenomena aeroelastik itu sendiri dapat dikategorikan dalam dua jenis yaitu *static aeroelastic* (aeroelastik statis) dan *dynamic aeroelastic* (aeroelastik dinamik).

2.1 Aeroelastik Statik

Beberapa tahun yang lalu, Collar menyarankan bahwa *Aeroelasticity* dapat divisualisasikan seperti bentuk segitiga pada ilmu dinamika, *solid mechanics* dan aerodinamis tidak tunak (*unsteady*). Gambar seperti pada di bawah ini

Aeroelasticity terkait dengan fenomena fisik yang mana suatu interaksi diantara inersia, elastisitas dan gaya aerodinamis. Bidang Teknik penting lainnya dapat diidentifikasikan oleh pasangan tiap-tiap titik pada segitiga. Sebagai contoh:

a. Stabilitas dan pengaturan/control (mekanika penerbangan) = dinamik dan *aerodynamic*
b. Getaran struktur = dinamik dan solid mekanik
c. *Static Aeroelasticity* = aliran tunak aerodinamik dan *solid mechanics*

Secara konseptual, tiap-tiap bidang pada segitiga tersebut adalah aspek khusus pada Aeroelasticity. Meskipun pengaruh yang kuat pada stabilitas *Aeroelasticity* dan pengaturan pada mekanika terbang dapat meningkatkan substansi dalam beberapa tahun belakangan ini [1].

Adapun fenomena *static aeroelastic* terdapat dua jenis permasalahan dasar yaitu *static instability* yang biasa disebut divergensi dan *aileron reversal*.

2.1.1. Divergensi

Masalah divergensi yang paling umum dijumpai pada struktur adalah divergensi torsional. Permasalahan ini mengakibatkan patahnya *airfoil* pada Fokker D-8 saat melakukan maneuver-tukik meskipun telah diperhitungkan secara matang berdasarkan kekauan, pengujian statik dan memenuhi kekuatan struktural.

Divergensi torsional terjadi akibat sudut *twist* yang terjadi pada struktur *airfoil* tersebut cukup besar sehingga mengakibatkan kekakuan struktur tidak mampu lagi menahan momen aerodinamik yang terjadi akibat besarnya sudut *twist* tersebut. Dengan kata lain divergensi torsional terjadi bila jumlah momen aerodinamik dengan momen elastis pada struktur *airfoil* berharga nol. Fenomena tersebut terjadi akibat kecepatan dari udara tersebut telah mencapai pada batas stabilitas statik dari *airfoil* tersebut [4].

2.1.2. *Aileron Reversal*

Aileron atau yang disebut juga dengan *control surface* merupakan bagian dari *airfoil* yang berfungsi untuk menambah atau mengurangi gaya angkat. Prinsip kerja dari *aileron* adalah untuk membangkitkan tambahan gaya angkat yang digunakan untuk pengendalian pesawat udara. Normalnya gaya angkat pada *airfoil* akan bertambah bila *aileron* didefleksikan ke bawah dan bila *aileron* di defleksikan ke atas maka gaya angkat akan berkurang. Seiring dengan bertambahnya kecepatan udara di sekitar *airfoil* maka *aerodynamic twisting* moments pun juga akan bertambah sedangkan elastic moment tetap sehingga kefektifitas *aileron* untuk menghasilkan gaya angkat akan berkurang. Batas kecepatan dimana suatu *aileron* tidak mampu lagi bekerja sebagaimana mestinya dikenal dengan kecepatan *aileron reversal* (*aileron reversal speed*). Sehingga dapat disimpulkan bahwa *aileron reversal* merupakan fenomena aeroelastik statik yang mana *aileron* tersebut sudah tidak mampu lagi bekerja sebagaimana fungsinya.

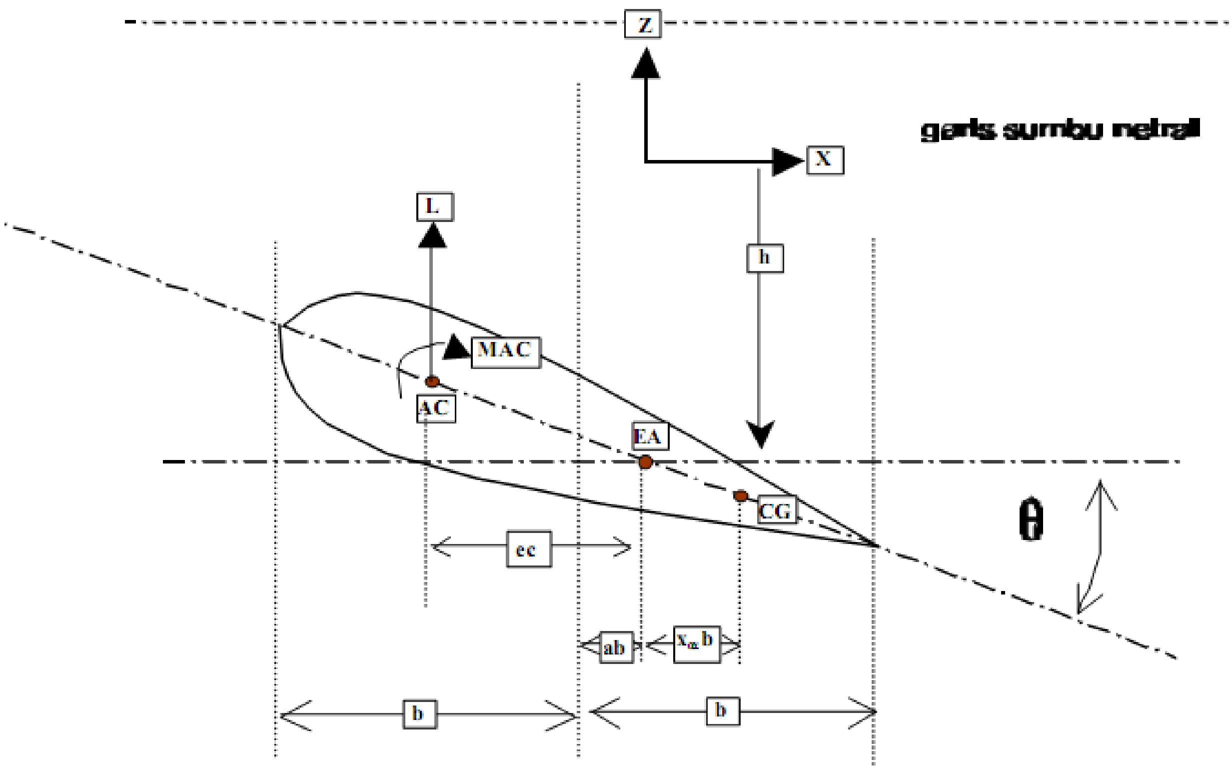
2.2 Aeroelastik Dinamik

Sebagaimana yang terlah dijelaskan pada bab I bahwa fenomena aeroelastik dinamik terjadi akibat adanya interaksi antara 3 gaya yaitu gaya aerodinamika, gaya inersia dan gaya elastis pada suatu struktur. Fenomena aeroelastik dinamik itu sendiri dibagi menjadi dua bagian yaitu stabilitas *flutter* (jika tidak melibatkan gaya eksitasi dari luar) dan masalah respon dinamik (apabila melibatkan gaya eksitasi luar seperti: gust (turbulensi udara), *buffet* (fluktuasi tekanan akibat aliran yang memisah), *landing impact,* dsb).

2.2.1. *Flutter*

Flutter merupakan fenomena berbahaya yang dihadapi dalam struktur fleksibel yang dikenakan gaya aerodinamis. Sebagai contoh pesawat terbang, bangunan, kabel telegraf, dan jembatan. *Flutter* terjadi sebagai akibat interaksi ketiga bidang yaitu aerodinamika, kekakuan, dan gaya inersia pada struktur. Dalam pesawat terbang, jika kecepatan angin meningkat, mungkin ada beberapa yang menjadi titik di mana redaman struktur tidak cukup untuk meredam gerakan yang meningkat karena energi aerodinamik yang ditambahkan ke struktur. Getaran ini dapat menyebabkan kerusakan struktur dan karenanya mempertimbangkan karakteristik *flutter* adalah penting bagian dari merancang pesawat terbang. [5]

Gambar 2.2 Berikut adalah permodelan *flutter* pada airfoil yang dimodelkan dalam dua derajat kebebasan yaitu terhadap arah vertical naik-turun dan sudut.



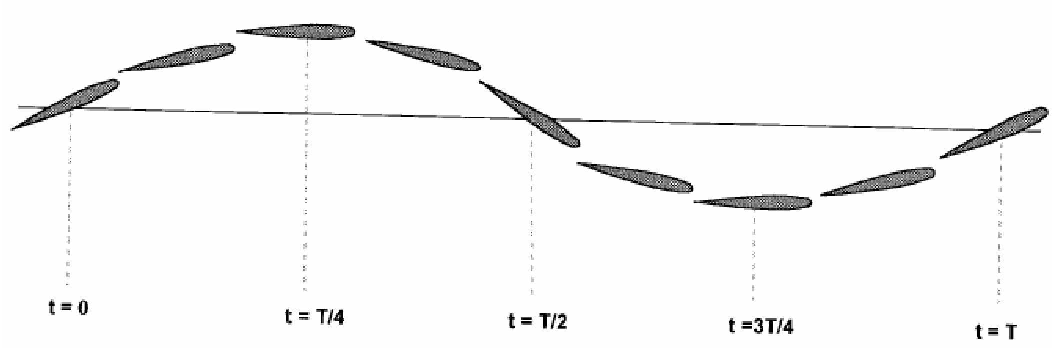
Gambar 2.2 Permodelan *flutter* pada airfoil [2]

Keterangan:

x-z	= sumbu x-z
L	= lift/ gaya angkat
AC	= aerodynamic center (pusat aerodinamik)
EA	= Elastic Axis (Sumbu elastik)
CG	= Center of Gravity (pusat grafitasi)
MAC	= Moment aerodinamik
b	= setengah chord
h	= gerakan *flutter* arah vertikal (heaving)
θ	= gerakan *flutter* arah memutar (pitching)
ab	= jarak antara sumbu elastic dengan sumbu z
ec	= jarak antara pusat aerodinamik dengan sumbu elastic
$x_a b$	= jarak antara sumbu elastic dengan pusat aerodinamik

2.2.1.1. Gerakan *Flutter*

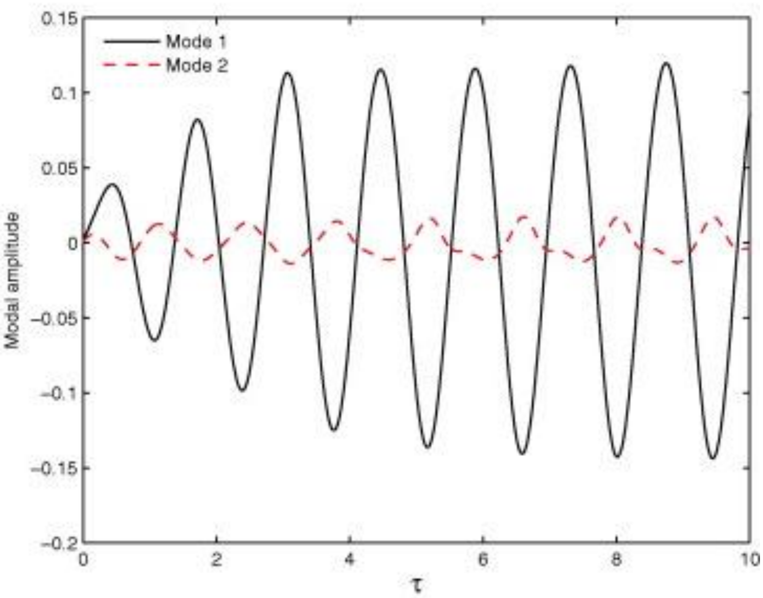
Flutter sebenarnya adalah getaran tereksitasi sendiri (*self exited vibration*) yang muncul karena pada kecepatan udara tertentu redaman aerodinamika yang dibangkitkan justru memberikan tambahan energi ke dalam sistem. Sehingga jika suatu struktur mengalami getaran itu secara terus menerus akan mengakibatkan kerusakan pada struktur (bersifat katastropis) atau dapat juga mengakibatkan kegagalan struktur yang berupa *fatigue* pada material struktur. Gambar 2.3 menunjukkan gerak harmonik naik turun jika terjadi *flutter*.



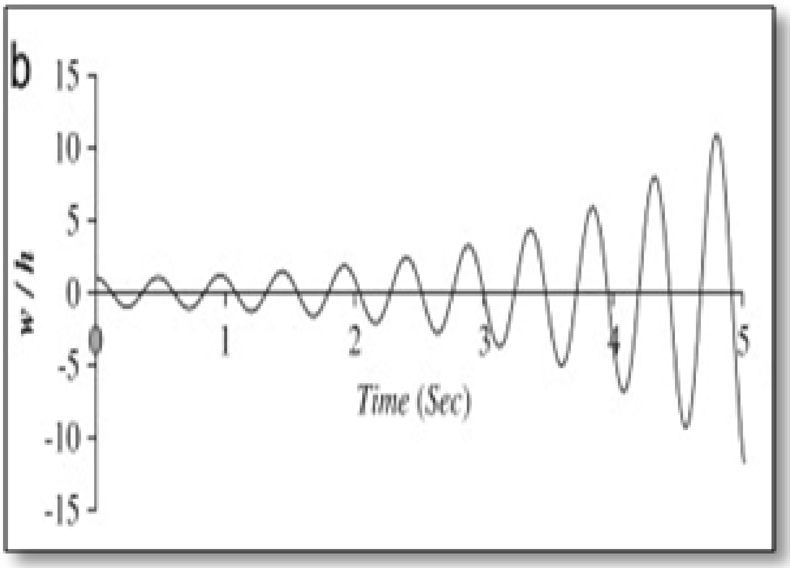
Gambar 2.3 Rotasi dan *Motion Plunge* untuk Airfoil Mempertunjukkan *Flutter* [11]

Gambar 2.4 Keadaan sebelum *Flutter*

Pada gambar 2.4 diperlihatkan kondisi dimana *flutter* belum terjadi, yang memperlihatkan gejala suatu getaran yang dapat teredam sedangkan gambar 2.5 memperlihatkan suatu kondisi getaran pada saat *flutter* dimana ketika terjadi *flutter* amplitudonya bernilai konstan. Sementara itu pada gambar 2.6 menunjukkan kondisi diatas *flutter* yang memperlihatkan suatu getaran yang tak teredan dan memiliki kecenderungan yang makin membesar dan bersifat divergensi.



Gambar 2.5 Keadaan ketika *Flutter* [11]



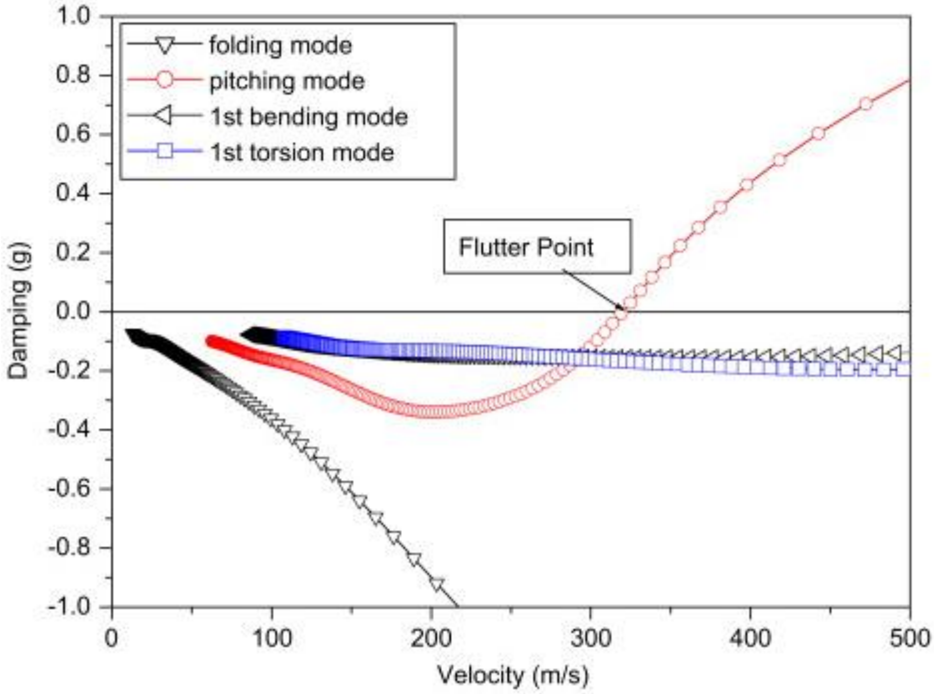
Gambar 2.6 Keadaan setelah *Flutter* [11]

Kondisi pada gambar 2.4, gambar 2.5 dan gambar 2.6 berdasarkan oleh koalesensi dari dua bentuk modus pitching dan heaving. Bentuk *pitching* adalah gerak rotasi pada suatu struktur dan bentuk *heaving* adalah vertikal atas dan ke bawah gerak di ujung sayap. Sebagai *airfoil* dalam peningkatan kecepatan, frekuensi modus ini bersatu atau datang bersama-sama untuk membuat satu modus pada frekuensi dan kondisi *flutter*. [11]

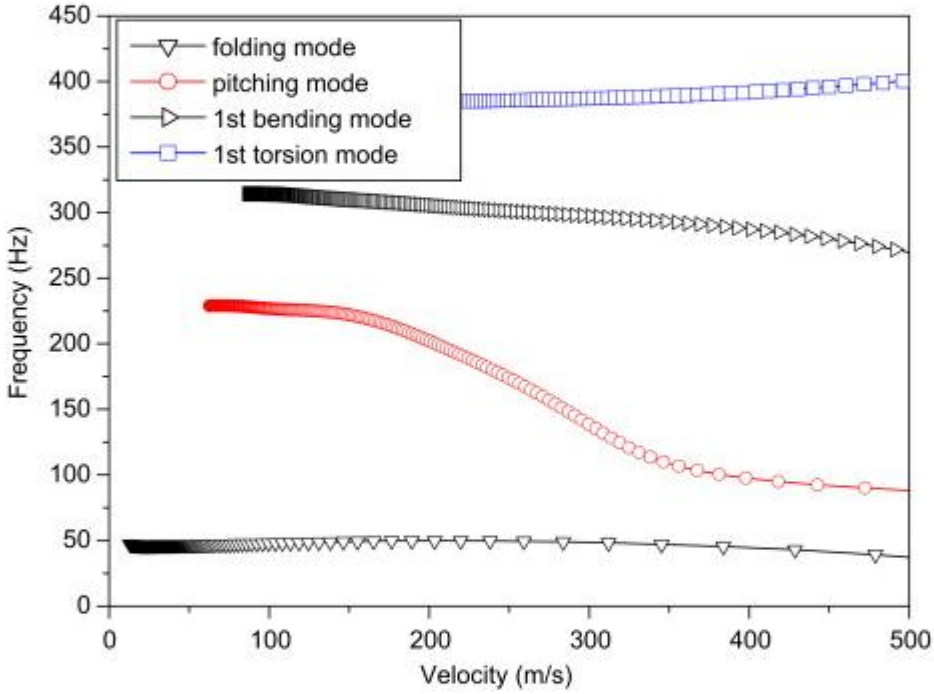
Jika modus getaran struktur yang digunakan dalam analisis dinamis, di persamaan (2.1) dapat digunakan untuk menentukan karakteristik model *flutter*. Persamaan ini merupakan hasil dari dengan asumsi gerak harmonik sederhana $\{u(t)\} = \{u_h\}e^{i\omega t}$ dan menempatkan ini ke sesuai urutan kedua persamaan diferensial biasa yang menggambarkan linear dinamis perilaku struktur yang mengalami gaya dan momen akibat aliran fluida.

$$\left[M_{hh}p^2 + \left(B_{hh} - \frac{\rho c V Q_{hh}^I}{4k} \right) p + \left(K_{hh} - \frac{\rho V^2 Q_{hh}^R}{2} \right) \right] \{u_h\} = 0 \tag{2.1}$$

Salah satu bentuk umum dari analisis *flutter* adalah analisis V-g. Dalam analisis V-g, struktural redaman semua modus getaran diasumsikan memiliki satu nilai yang tidak diketahui, g. Dalam Gambar 2.5, hasil untuk dua modus (akar dari determinan *flutter*) dari sayap sederhana model dengan 2 derajat kebebasan yang ditampilkan dalam bentuk kecepatan-redaman dan kecepatan-frekuensi. Dalam Gambar 2.7, kecepatan dimana salah satu modus melewati g = 0 maka disitulah kecepatan terjadi fenomena *flutter*. Sedangkan gambar 2.8 fenomena terjadinya *flutter* dapat terlihat ketika modus saling terkopel [3].



Gambar 2.7 Diagram V-g (kecepatan-redaman) [14]



Gambar 2.8 Diagram V-f (kecepatan-frekuensi) [14]

2.2.1.2. Persamaan Gerak *Flutter*

Persamaan gerak pada airfoil dengan 2 derajat kebebasan yang mengalami fenomena *flutter*, dengan menganggap redaman struktur bernilai nol adalah:

$$
\begin{aligned}
m\ddot{h} + S_\alpha \ddot{\alpha} + K_h \ddot{h} &= L \\
S_\alpha \ddot{h} + I_\alpha \ddot{\alpha} + K_\alpha \alpha &= M
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Dalam bentuk matrik persamaan di atas dapat ditulis menjadi:

$$[M_s]\{\ddot{u}\} + [K_s]\{u\} + q[Q_s]\{u\} = 0 \tag{2.3}$$

Dengan matriks massa, kekakuan dan aerodinamis adalah:

$$[M_s] = \begin{bmatrix} m & S_\alpha \\ S_\alpha & I_\alpha \end{bmatrix},\ [K_s] = \begin{bmatrix} K_h & 0 \\ 0 & K_h \end{bmatrix},\ [Q_s] = \begin{bmatrix} l_h & l_\alpha \\ m_h & m_\alpha \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

Dengan vektor posisinya adalah

$$[u] = \begin{bmatrix} h \\ \alpha \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

Dimana

[M]	= matriks massa
[K_s]	= matriks kekakuan
[Q_s]	= matriks gaya aerodinamis dependent
[m]	= massa struktur
[Sα]	= moment statik terhadap sumbu elastik
[Iα]	= gaya inersia massa struktur
{u}	= vektor posisi
h	= perpindahan arah *heaving*
α	= perpindahan arah *pitching* [4]

2.2.2. Respon Dinamik

Seperti hal nya *flutter*, respon dinamik juga merupakan suatu fenomena aeroelastik dinamik. Akan tetapi gaya eksitasi yang bekerja pada *airfoil* tidak hanya berasal dari gaya aerodinamika saja melainkan berasal dari gaya-gaya luar yang dapat menjadikan suatu struktur *airfoil* menjadi tidak stabi. Gaya-gaya tersebut dapat berasal dari turbulensi udara atau atmosfer (*gust*). Pola Aliran pada *gust* dapat terjadi secara diskrit maupun kontinyu. *Gust* dapat terjadi karena perubahan tekanan yang signifikan pada udara, sehingga timbullah kecepatan yang dihasilkan karena perubahan tekanan tersebut, dan kecepatan yang ditimbulkan gust tersebut memberikan eksitasi kepada struktur pesawat, sehingga apabila eksitasi tersebut cukup besar dan terjadi secara terus-menerus, maka tidak menutup kemungkinan struktur tersebut akan gagal atau rusak sebelum terjadi *flutter*. Kemunculan gust tersebut tidak hanya terjadi akibat perubahan tekanan yang signifikan saja, melainkan dapat pula terjadi akibat ketinggian terbang dari pesawat yang terlalu rendah. Jadi dapat disimpulkan bahwa beban yang diterima pesawat yang terbang pada ketinggian yang lebih rendah akan lebih besar jika dibandingkan dengan pesawat yang terbang pada ketinggian yang lebih tinggi.

Selai gust, gaya eksitasi dari luar yang dapat menimbulkan fenomena respon dinamik dapat pula berasal dari hentakan pada saat pesawat melakukan pendaratan atau dikenal dengan istilah landing impact. Selain itu eksitasi yang dapat menimbulkan fenomena respon dinamik dapat pula terjadi akibat fluktuasi tekanan yang disebabkan oleh aliran memisah. Kondisi ini dikenal dengan istilah buffeting. Pemisahan aliran tersebut dapat terjadi akibat sudut serang yang terlalu besar, sehingga aliran udara akan mulai memisah pada jarak yang lebih dekat dengan *nose*, meskipun kecepatannya rendah. Pemisahan aliran udara tersebut akan menimbulkan terjadinya gelombang-gelombang di sekitar struktur pesawat dan pastinya akan menimbulkan gaya eksitasi yang akan mengeksitasi struktur tersebut. Selain karena terlalu besarnya sudut serang buffeting juga dapat terjadi karena kecepatan dari pesawat yang sangat tinggi, sehingga akan menimbulkan gelombang kejut yang akan berinteraksi dengan lapisan batas yang akan mengakibatkan *gradient* tekanan yang besar dan menyebabkan adanya *wake*.

Adapun persamaan gerak pada airfoil dengan dua derajat kebebasan yang mengalami respon dinamik, dengan menganggap redaman struktur bernilai nol adalah:

$$\begin{aligned} m\ddot{h} + S_\alpha \ddot{\alpha} + K_h \ddot{h} - L &= L^D \\ S_\alpha \ddot{h} + I_\alpha \ddot{\alpha} + K_\alpha \alpha - M_y &= M^D \end{aligned} \tag{2.6}$$

Dimana L^D dan M^D merupakan komponen lift dan moment aerodinamika akibat ganggunan, seperti halnya persamaan gerak untuk *flutter*, persamaan gerak untuk respon dinamik juga dapat ditulis bentuk matrik.

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K_s]\{u\} + q[Q_s]\{u\} = q[Q^D]\{F(u)\} \tag{2.7}$$

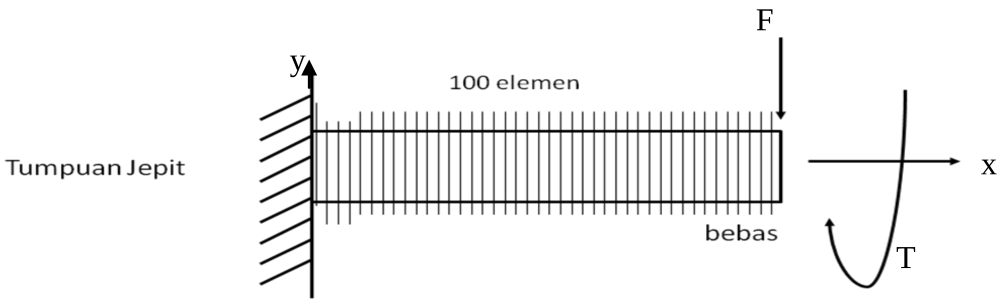
Dimana

[M]	= matriks massa
$[K_s]$	= matriks kekakuan
$[Q_s]$	= matriks gaya aerodinamis dependent
$[L^D]$	= gaya aerodinamika independent
$[M^D]$	= moment aerodinamika independent
[m]	= massa struktur
[Sα]	= moment statik terhadap sumbu elastik
[Iα]	= gaya inersia massa struktur
{u}	= vektor posisi
h	= perpindahan arah *heaving*
α	= perpindahan arah *pitching*

Adapun contoh daripada respon dinamik yang lain adalah buffeting. Buffeting adalah ketidaksatbilan frekuensi tinggi yang disebabkan karena pemisahan aliran udara atau osilasi gelombang kejut dari satu objek ke objek lain. Hal tersebut dikarenakan suatu dorongan kejut yang disebabkan meningkatnya gaya (getaran paksa). Umumnya hal itu memempengaruhi dari tail struktur pesawat terbang akibat aliran udara ke bawah aliran sayap [2].

2.3 Dinamika Sistem Kontinyu

Banyak dijumpai kasus-kasus dalam menyelesaikan suatu persamaan getaran yang tidak hanya satu atau dua derajat kebebasan. Akan tetapi banyak/ multi derajat kebebasan yang dikenal dengan istilah system kontinyu. Hal ini menandakan bahwa system dinamiknya bersifat kontinyu. Karena sifatnya yang demikian maka jumlah derajat kebebasan system menjadi tidak terhingga. Oleh karena itu system kontinyu juga sering disebut dengan system berderajat kebebasan tak hingga (*system of infinite degree of freedom*). Permasalahan pada system kontinyu adalah bersifat differensial parsial, sehingga solusinya relative lebih rumit dibandingkan dengan system diskrit. Meskipun demikian model kontinyu ini memberikan hasil yang lebih teliti dibandingkan dengan system diskrit. Pada sub bab ini akan dijelaskan tentang penurunan system kontinyu pada batang torsional yang dari penurunan ini kita akan mengetahui bentuk modus dan frekuensi pribadi pada sistem



Gambar 2.9 model batang dikenai beban dinamik

Dari gambar 2.9 dengan menerapkan hukun Newton maka kesetimbangan gaya dalam arah transversal pada elemen batang adalah

$$V(x,t)+p(x,t)-\left(V(x,t)+\frac{\partial V}{\partial x}dx\right)=\rho A(x)dx\frac{d^2u}{dt^2}(x,t) \tag{2.8}$$

Ruas kanan persamaan 2.8 adalah gaya inersia pada elemen batang. Persamaan 2.8 dapat disederhanakan menjadi

$$-\frac{\partial V}{\partial x}+p(x,t)=\rho A(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) \tag{2.9}$$

Sedangkan kesetimbangan momen pada elemen batang dapat dinyatakan sebagai

$$\left(M(x,t)+\frac{\partial M}{\partial x}dx\right)+p(x,t)dx\frac{dx}{2}-\left(V(x,t)+\frac{\partial V}{\partial x}dx\right)dx-M(x,t)=0 \quad (2.10)$$

Karena dx cukup kecil maka persamaan 2.10 dapat disederhanakan menjadi

$$V(x,t)=\frac{\partial M}{\partial x}(x,t) \quad (2.11)$$

Dari mekanika kekuatan bahan persamaan defleksi lentur batang dinyatakan dengan

$$M(x,t)=-EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) \quad (2.12)$$

Kombinasi persamaan (2.9), (2.10), (2.11) dan (2.12) menjadi

$$\rho A(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t)\right)=p(x,t) \quad (2.13)$$

Jika momen inersia dan luas penampang batang berharga konstan dan jika dianggap tidak ada gaya lateral maka persamaan gerak batang transversal dengan simpangan yang cukup kecil yang mengalami getaran bebas dapat dinyatakan sebagai PDP orde ke-4:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+c^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}=0 \text{ dimana } c=\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (2.14)$$

Selanjutnya dengan subtitusi w(x,t)= F(x) G(t) ke persamaan 2.14 dan dengan menerapkan metode pemisahan aliran diperoleh

$$\begin{aligned} &\frac{F^{(4)}}{F}=-\frac{\ddot{G}}{c^2 G}=\beta^4 \\ &F(x)=A\cos\beta x+B\sin\beta x+C\cosh\beta x+D\sinh\beta x \\ &G(t)=a\cos\left(c\beta^2 t\right)+b\sin\left(c\beta^2 t\right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Dimana β konstanta. Solusi persamaan 2.25 diberikan oleh

$$w_n(x,t)=\left(a_n\cos\left(c\beta^2 t\right)+b_n\sin\left(c\beta^2 t\right)\right)\left(A\cos\beta x+B\sin\beta x+C\cosh\beta x+D\sinh\beta x\right) \quad (2.16)$$

Dimana a, b, A, B, C dan D adalah konstanta yang ditentukan berdasarkan kondisi batas dan kondisi awal. Selanjutnya dengan menerapkan prinsip superposisi solusi totalnya diberikan oleh

$$w_n(x,t) = \sum w_n(x,t)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(c\beta^2 t\right) + b_n \sin\left(c\beta^2 t\right)\right)\left(A\cos\beta x + B\sin\beta x + C\cosh\beta x + D\sinh\beta x\right) \tag{2.17}$$

Untuk menggambar bentuk modus pada suatu struktur di dalam tabel 2.1 disajikan bagaimana rumus untuk menentukan bentuk modus dengan variasi kondisi batas pada struktur.

Adapun kondisi batas dan bentuk modus dalam berbagai kondisi untuk empat modus pertama ditunjukkan oleh tabel 2.1.

Tabel 2.1 Bentuk modus dan konstanta frekuensi pada getaran transversal batang

No	Kondisi Batas	Persamaan Frekuensi	Bentuk Modus	$\beta_n L$
1	Tumpuan sederhana	$\sin(\beta_n L) = 0$	$F_n(x) = C_n \sin(\beta_n x)$	π 2π 3π 4π
2	Bebas-Bebas	$\cos(\beta_n L) \cdot \cosh(\beta_n L) = 1$	$F_n(x) = C_n \begin{pmatrix} \sin(\beta_n x) + \sinh(\beta_n x) + \\ \alpha_n (\cos(\beta_n x) - \cosh(\beta_n x)) \end{pmatrix}$ $\alpha_n = \dfrac{\sin(\beta_n L) - \sinh(\beta_n L)}{\cosh(\beta_n L) - \cos(\beta_n L)}$	0 4.730041 7.853205 10.995608 14.137165
3	Jepit-jepit	$\cos(\beta_n L) \cdot \cosh(\beta_n L) = 1$	$F_n(x) = C_n \begin{pmatrix} \sinh(\beta_n x) + \sin(\beta_n x) + \\ \alpha_n (\cosh(\beta_n x) - \cos(\beta_n x)) \end{pmatrix}$ $\alpha_n = \dfrac{\sinh(\beta_n L) - \sin(\beta_n L)}{\cos(\beta_n L) - \cosh(\beta_n L)}$	0 4.730041 7.853205 10.995608 14.137165
4	Jepit-bebas	$\cos(\beta_n L) \cdot \cosh(\beta_n L) = -1$	$F_n(x) = C_n \begin{pmatrix} \sin(\beta_n x) - \sinh(\beta_n x) - \\ \alpha_n (\cos(\beta_n x) - \cosh(\beta_n x)) \end{pmatrix}$ $\alpha_n = \dfrac{\sin(\beta_n L) + \sinh(\beta_n L)}{\cos(\beta_n L) - \cosh(\beta_n L)}$	1.875104 4.694091 7.854757 10.995541
5	Jepit-engsel	$\tan(\beta_n L) - \tanh(\beta_n L) = 0$	$F_n(x) = C_n \begin{pmatrix} \sin(\beta_n x) + \sinh(\beta_n x) + \\ \alpha_n (\cosh(\beta_n x) - \cos(\beta_n x)) \end{pmatrix}$ $\alpha_n = \dfrac{\sin(\beta_n L) - \sinh(\beta_n L)}{\cos(\beta_n L) - \cosh(\beta_n L)}$	3.926602 7.068583 10.210176 13.351768
6	Engsel-bebas	$\tan(\beta_n L) - \tanh(\beta_n L) = 0$	$F_n(x) = C_n (\sin(\beta_n x) \cdot \alpha_n \sinh(\beta_n x))$	3.926602 7.068583 10.210176 13.351768

(2.18)

Pada tabel 2.1 $\beta_n L = 0$ menunjukkan getaran batang pada modus benda tegar.

2.4 Aerodinamika Tak Tunak *(Unsteady Aerodynamics)*

Kuantitas gaya aerodinamika tak tunak (*unsteady aerodynamics*) dapat ditentukan dengan pengujian terowongan angin (*wind tunnel*), dihitung secara analitis maupun dengan software CFD (*Computational Fluid Dynamics*). Untuk kasus aliran subsonik, *nonviscous*, tak rotasional dan tak kompresibel kuantitas gaya dan momen aerodinamika tak tunak dapat dihitung dengan formulasi theodorsen [7].

2.4.1. Formulasi *Theodorsen*

$$L = -\pi\rho b^3\omega^2\left\{L_h\frac{h}{b} + \left[L_\alpha - \left(\frac{1}{2}+a\right)L_h\right]\alpha\right\} \tag{2.19}$$

$$M = -\pi\rho b^4\omega^2\left\{\left[M_h - \left(\frac{1}{2}+a\right)L_a\right]\frac{h}{b} + \left[M_\alpha - \left(\frac{1}{2}+a\right)\left(L_\alpha + M_h\right) + \left(\frac{1}{2}+a\right)^2 L_\alpha\right]\alpha\right\}$$

$$k = \frac{b\omega}{V} \text{ adalah frekuensi tereduksi} \tag{2.20}$$

$$L_h = 1 - \frac{2i}{k}C(k) \tag{2.21}$$

$$L_\alpha = \frac{1}{2} - \frac{2i}{k}\left[\frac{1}{2} + \left(1 - \frac{i}{k}\right)C(k)\right] \tag{2.22}$$

$$M_h = \frac{1}{2} \tag{2.23}$$

$$M_\alpha = \frac{3}{8} - \frac{i}{k} \tag{2.24}$$

Dimana

a = non-dim sumbu elastic diukur dari setengah chord

b = setengah chord

k = frekuensi tereduksi

V = kecepatan

ω = frekuensi pribadi

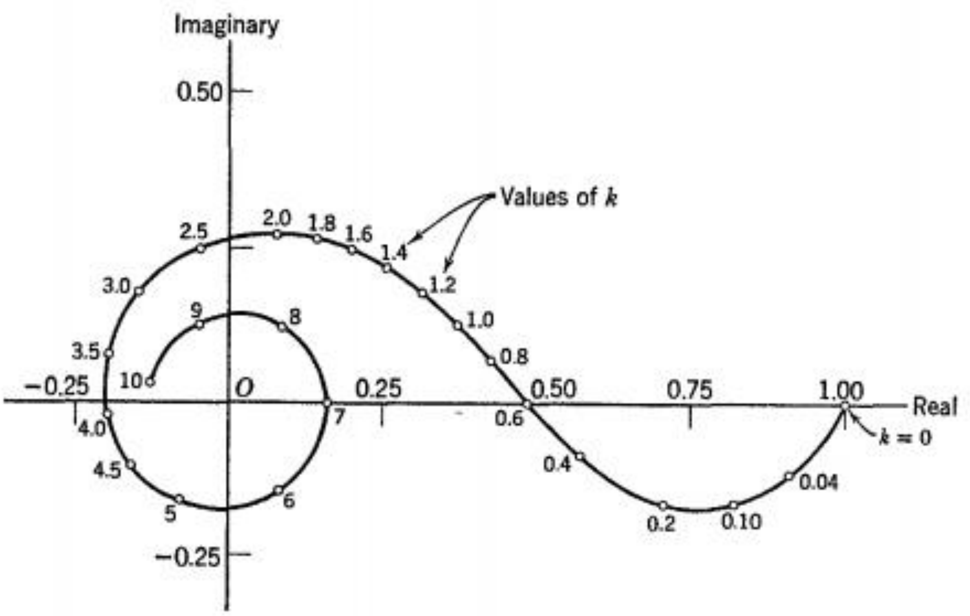
Lh = gaya angkat terhadap heaving

La = gaya angkat terhadap pitching [7]

Untuk C(k) merupakan fungsi *Theodorsen* yang dapat didefinisikan lagi menjadi

$$C(k) = F(k) + iG(k) = \frac{H_1^{(2)}(k)}{H_1^{(2)}(k) + iH_0^{(2)}(k)} \tag{2.25}$$

Dimana $H_n^{(2)}(k)$ merupakan fungsi Hankel jenis kedua dan orde ke-n. Bila pendekatan untuk perhitungan gaya aerodinamika merupakan pendekatan tunak (steady), maka nilai k=0 sehingga C(0) = (1.,0.). Atau dengan kata lain komponen C(k) yang riil adalah satu dan yang imajiner adalah nol.



Gambar 2.9 Distribusi nilai k pada kurva real-imaginer [9]

Gambar 2.9 menggambarkan tentang nilai k yang merupakan frekuensi tereduksi dalam sumbu real sebagai x dan imaginer di sumbu y.

2.4.2. Pendekatan Roger

Fungsi daripada pendekatan roger adalah untuk mentransformasikan koefisien gaya aerodinamika yang semula dalam bentuk domain frekuensi menjadi domain waktu. Transformasi ini bertujuan agar persamaan aeroelastik dapat dinyatakan dalam formulasi ruang keadaan (*state space*), sehingga lebih mudah dalam membuat suatu sistem pengendalian untuk mengatasi masalah fenomena aeroelastik. Prinsip dasar pendekatan roger adalah dengan mendekati gaya atau koefisien dari gaya-gaya aerodinamika tak tunak dengan deret berikut [10]:

$$\left[A_{ij}\left(M_\infty, p\right)\widehat{q}_j\right] = \begin{bmatrix} \left[A_0 ij(M_\infty)\right] + \left[A_1 ij(M_\infty)\right]p + \left[A_2 ij(M_\infty)\right]p^2 + \\ \sum_{l=1}^{nL} \frac{p}{p+B_{ij}}\left[A_{l+2} ij(M_\infty)\right] \end{bmatrix}\widehat{q}_j \tag{2.26}$$

Dengan i, j= 1, 2, …, N

$$\widehat{B}_{jL} = \frac{p}{B_{lj}+p}\widehat{q}_j = \frac{s}{\frac{U}{b}B_{lj}+s}\widehat{q}_j \tag{2.27}$$

$$p = \frac{b}{U}s \tag{2.28}$$

Persamaan pendekatan roger dalam time domain menjadi

$$\left[A_{ij}\left(M_\infty, t\right)\widehat{q}_j\right] = \begin{bmatrix} \left[A_0 ij(M_\infty)\right] + \left[\frac{b}{U}A_1 ij(M_\infty)\right]\dot{q}_j + \left[\frac{b^2}{U^2}A_2 ij(M_\infty)\right]\ddot{q}_j^{\,2} + \\ \sum_{l=1}^{nL}\left[A_{l+2} ij(M_\infty)B_{jL}\right] \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

$$\dot{B}_{lj} = \widehat{q}_j - \frac{U}{b}B_{lj}B_{lj} \tag{2.30}$$

2.5 Persamaan *Flutter* dalam *Time Domain*

Dengan persamaan 2.29 dan 2.30 maka persamaan roger dikembalikan lagi ke persamaan flutter awal sehingga persamaan flutter telah bertransformasi dalam domain waktu

$$[M]\{\ddot{q}\}+[D]\{\dot{q}\}+[K]\{q\}-\frac{1}{2}\rho U^2[A_0(M_\infty)]\{q\}-\frac{1}{2}\rho Ub[A_1(M_\infty)]\{\dot{q}\} \\ -\frac{1}{2}\rho b^2[A_2(M_\infty)]\{\ddot{q}\}-\frac{1}{2}\rho U^2\sum[A_{l+2}(M_\infty)]\{B_L\}=\{0\} \tag{2.31}$$

$$\{\dot{B}_{lj}\}=\{\hat{q}_j\}-\frac{U}{b}[\beta_{lj}][B_{lj}] \tag{2.32}$$

Reduksi ke *state space*

$$\{\dot{x}\}=[A]\{x\} \tag{2.33}$$

Dengan *state vector*

$$\{x\}^T=\{q,r,B_L\} \tag{2.34}$$

Sistem dinamik matriks

$$[A_{sp}]=\begin{bmatrix} [0] & [I] & [0] & [0] & \cdots & \cdots \\ -[\tilde{M}]^{-1}[K] & -[\tilde{M}]^{-1}[\tilde{D}] & -[\tilde{M}]^{-1}[\tilde{A}_3] & -[M]^{-1}[\tilde{A}_4] & \cdots & \cdots \\ [0] & [I] & -\frac{u}{b}[\beta_3] & [0] & \cdots & \cdots \\ [0] & [I] & [0] & -\frac{u}{b}[\beta_4] & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{2.35}$$

Keterangan

$$\{r\}=\{\dot{q}\} \tag{2.36}$$

$$[\tilde{M}]=[M]-\frac{1}{2}\rho b^2[A_2] \tag{2.37}$$

$$[\tilde{D}]=[D]-\frac{1}{2}Ub[A_1] \tag{2.38}$$

$$[\tilde{K}]=[K]-\frac{1}{2}\rho U^2[A_0] \tag{2.39}$$

$$[\tilde{A}_{(l+2)}]=\frac{1}{2}\rho U^2[A_{(l+2)}] \tag{2.40}$$

dimana

Aij = koefisien aerodinamika roger

b = setengah chord

U = variasi Kecepatan

q = vector

x = state vector

l = jumlah lag

[M] = matriks massa

[D] = matriks redaman

[K] = matriks kekakuan

Adapun untuk mengetahui fenomena *flutter* salah satunya dengan *root locus*. Menggambar *root locus* dengan cara mencari nilai eigen pada matriks *Asp*. Seperti persamaan berikut.

$$s\{x\} = \lfloor A_{sp} \rfloor \{x\} \tag{2.41}$$

Fungsi daripada gambar *root locus* hanya mengetahui fenomena *flutter* tetapi tidak dapat mengetahui kecepatan *flutter* [10].

2.6 Persamaan Ruang-Keadaan *(State space)*

State suatu sistem dinamik adalah sekumpulan minimum variabel (disebut variabel-variabel *state*) sedemikian rupa sehingga dengan mengetahui variabel-variabel tsb pada t = t_0, bersama-sama dengan informasi input untuk t ≥ t_0, maka perilaku sistem pada t ≥ t_0 dapat ditentukan secara utuh..

Sehingga *State space* merupakan ruang berdimensi n dengan sumbu-sumbu x1, x2 ,… xn. Setiap *state* dapat terletak disuatu titik dalam ruang tsb.

Dari matriks A diatas kemudian mencari *state space* nya dengan cara

$$\{\dot{x}p\} = \lfloor A_{sp} \rfloor \{xp\} + [Bp]\{u_p\} \tag{2.42}$$

Dimana

$$\{u_p\} = \begin{Bmatrix} \delta \\ \dot{\delta} \\ \ddot{\delta} \end{Bmatrix} \tag{2.43}$$

Perhitungan numerik

$$t = k\Delta t \tag{2.44}$$

Menentukan matriks transisi

$$e^{[A]\Delta t} = [\Phi(\Delta t)] = [I] + [A]\Delta t + [A]^2 \frac{\Delta t^2}{2!} + [A]^3 \frac{\Delta t^3}{3!} + ... + [A]^m \frac{\Delta t^m}{m!} \tag{2.45}$$

Menghitung integral

$$\int e^{[A](\Delta t - \tau)} dt = [\Gamma(\Delta t)] = [I]\Delta t + [A]\frac{\Delta t^2}{2!} + [A]^2 \frac{\Delta t^3}{3!} + ... + [A]^{m-1} \frac{\Delta t^m}{m!} \tag{2.46}$$

Menghitung x

$$\{x((k+1)\Delta t)\} = [\Phi(\Delta t)]\{x(k\Delta t)\} + [\Gamma(\Delta t)][B]\{u(k\Delta t)\} \tag{2.47}$$

Nilai k, k=0,1, ……………..

dimana

x	= *state space*
k	= frekuensi tereduksi
Δt	= variasi waktu
m	= deret faktorial
$e^{[A]\Delta t}$	= pangkat matriks transisi [10]