

LAMPIRAN A

PENURUNAN PERSAMAAN NAVIER-STOKES

Hubungan ini akan diawali dari gaya yang beraksi pada massa fluida. Gaya-gaya ini dapat dibagi ke dalam gaya bodi, gaya permukaan, dan gaya inersia.

a. Gaya Bodi

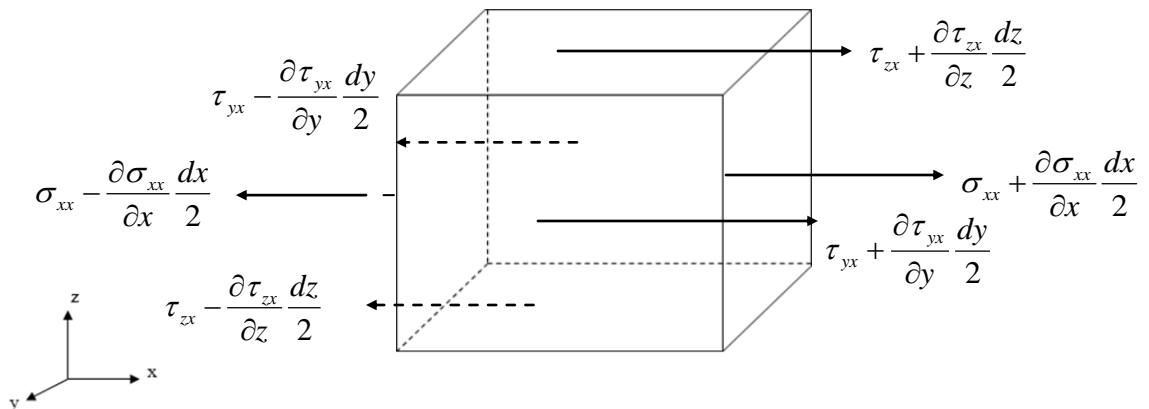
Gaya bodi seimbang terhadap massa fluida dan terdistribusi seluruhnya pada massa fluida, contohnya medan gaya gravitasi, yaitu gaya bodi yang merupakan gaya yang dibutuhkan untuk mempercepat massa partikel fluida. Misal G merupakan gaya per satuan massa sehingga ρG adalah gaya per satuan volume, kemudian hukum gerak Newton menyatakan gaya bodi beraksi pada setiap elemen di arah- x , $-y$, $-z$:

$$G_x \rho \, dx \, dy \, dz \quad G_y \rho \, dx \, dy \, dz \quad G_z \rho \, dx \, dy \, dz. \quad (\text{A.1})$$

b. Gaya Permukaan

Gaya permukaan seimbang terhadap luas area fluida dan terdapat pada elemen area dengan mengelilingi seluruh kontak langsung. Gaya permukaan dapat dibagi ke dalam normal dan tangensial komponen pada permukaan. Tegangan permukaan beraksi pada satu titik didefinisikan sebagai tegangan tensor τ_{ij} . Jika dF merupakan gaya yang beraksi pada suatu permukaan dA , definisi skalar dari tegangan normal dan geser masing-masing adalah

$$\tau_{normal} = \frac{dF_{normal}}{dA} \quad \tau_{geser} = \frac{dF_{geser}}{dA}. \quad (\text{A.2})$$



Gambar A.1. Volume elemen fluida.

c. Gaya Inersia

Gaya inersia didapat dari percepatan elemen fluida dan dirumuskan sebagai penurunan Du_i/Dt . Penurunan tersebut menggambarkan perubahan kecepatan sebagai pergerakan elemen pada ruang. Kecepatan u berada pada komponen- x . Jika $u_i = f(x, y, z, t)$, perubahan u terhadap waktu dt adalah

$$Du = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz. \quad (\text{A.3})$$

Jika $dt \rightarrow 0 \gg dx/dt = u, dy/dt = v$ dan $dz/dt = w$. Jika (A.3) kemudian dibagi dengan dt maka menjadi

$$Du = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (\text{A.4})$$

Gaya dibutuhkan untuk mempercepat elemen pada arah- x menjadi

$$\rho \frac{Du}{Dt} dx dy dz \quad (\text{A.5})$$

dimana akan membentuk persamaan yang sama pada arah lain.

d. Persamaan Momentum

Persamaan momentum dalam bentuk diferensial dirumuskan pada tegangan tensor τ_{ij} yang berasal dari penerapan hukum gerak Newton pada partikel kecil fluida. Beranggapan bahwa partikel fluida pada waktu t mempunyai bentuk kubus dengan sisi dx , dy , dan dz berpusat pada (x, y, z) . Jika komponen tegangan tensor τ_{ij} ditandai pada pusat kubus, kemudian komponen pada muka- x positif dari kubus akan menjadi

$$\tau_{ij} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x} \frac{dx}{2}. \quad (\text{A.6})$$

dan pada muka- x negatif

$$\tau_{ij} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x} \frac{dx}{2}. \quad (\text{A.7})$$

Tegangan yang beraksi di arah- x pada muka di belakangnya dapat dirumuskan sama dengan persamaan di atas. Resultan komponen- x dari gaya yang beraksi pada kubus dapat dihitung dengan mengalikan tegangan dengan areanya dimana tegangan tersebut beraksi dan kemudian ditambahkan masing-masing dari setiap area:

$$\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) dx dy dz. \quad (\text{A.8})$$

Misal G merupakan gaya per satuan massa sehingga ρG adalah gaya per satuan volume, seperti yang ditunjukkan pada (A.1), kemudian hukum gerak Newton menyatakan persamaan momentum di arah- x sebagai massa dikalikan percepatan sama dengan gaya permukaan ditambah gaya bodi yang beraksi pada elemen:

$$\frac{Du_x}{Dt} \rho dx dy dz = \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) dx dy dz + \rho dx dy dz G_x. \quad (\text{A.9})$$

Kemudian persamaan dibagi dengan $(dx dy dz)$ persamaan momentum menjadi:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho G_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}. \quad (\text{A.10})$$

e. Persamaan Penyusun

Persamaan penyusun merupakan hubungan antara tegangan dan regangan dari material. Jika materialnya adalah fluida, sifat utamanya adalah bahwa fluida terdeformasi secara terus menerus sepanjang tegangan geser yang diberikan pada fluida tersebut, sekalipun jika tegangan gesernya konstan. Hal ini berarti bahwa tidak terdapat hubungan tunggal antara tegangan geser dan regangan geser. Di lain hal tegangan geser cenderung tergantung pada nilai regangan yang berubah. Hal ini menunjukkan bahwa banyak fluida yang mungkin dilakukan pendekatan dengan model *Newtonian*. Model *Newtonian* menggunakan asumsi bahwa tegangan geser linier terhadap nilai regangan dan hubungannya isotropik. Ketika nilai regangan geser nol, tegangan gesernya nol.

Pada fluida kondisi diam hanya terdapat komponen normal dari tegangan pada permukaan dan tegangan tensor merupakan isotropik. Beberapa tensor isotropik pasti seimbang terhadap delta Kronecker, δ_{ij} yang mana dinyatakan sebagai:

$$\delta_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tegangan pada fluida statis memiliki bentuk persamaan:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} \quad (\text{A.11})$$

dimana p merupakan tekanan termodinamika ditandai simbol negatif karena tekanan positif dinyatakan sebagai kompresi dan tegangan positif dinyatakan sebagai tensil.

Ketika fluida bergerak, suatu tambahan komponen tegangan non-isotropik, σ_{ij} , berkembang karena viskositas fluida. Hal tersebut merupakan tegangan geser, disebut penyimpangan tegangan tensor. σ_{ij} secara sederhana dapat ditambahkan pada persamaan (A.11) yang bertujuan untuk meliputi batas tegangan karena gerak fluida:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma_{ij}. \quad (\text{A.12})$$

Penyimpangan tegangan tensor, σ_{ij} , berhubungan dengan gradien kecepatan $\partial u_i / \partial x_j$, seperti yang disebutkan sebelumnya. Gradien kecepatan dapat dipisahkan ke dalam bagian simetris dan anti simetris:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (\text{A.13})$$

Bagian anti simetris menunjukkan rotasi fluida dan tidak dapat menghasilkan tegangan. Tegangan hanya dihasilkan oleh nilai regangan tensor

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (\text{A.14})$$

Jika kita asumsikan hubungan linier antara $\vec{\sigma}$ dan \vec{e} maka dapat dituliskan:

$$\sigma_{ij} = K_{ijmn} e_{mn} \quad (\text{A.15})$$

dimana K_{ijmn} merupakan orde keempat tensor yang memiliki 81 komponen. Hal ini dapat ditunjukkan bahwa semua tensor isotropik dari tiap orde didapat dari δ_{ij} yang ditunjukkan bahwa K_{ijmn} memiliki bentuk:

$$K_{ijmn} = \lambda \delta_{ij} \delta_{mn} + \eta \delta_{im} \delta_{jn} + \gamma \delta_{in} \delta_{jm} \quad (\text{A.16})$$

dimana λ , η , γ adalah scalar yang bergantung pada kondisi termodinamika lokal. Karena σ_{ij} merupakan simetris, ini dibutuhkan dari persamaan (A.15) bahwa K_{ijmn} simetris di i dan j yang ditunjukkan oleh persamaan (A.16) bahwa

$$\gamma = \eta$$

yang berarti bahwa hanya dua scalar tertinggal dari awalnya 81 karena isotropi dan simetri. Substitusi dari (A.16) ke dalam (A.15) diperoleh

$$\sigma_{ij} = 2\eta e_{ij} + \lambda e_{mm} \delta_{ij} \quad (\text{A.17})$$

dimana $e_{mm} = \nabla \cdot \vec{u}$ dan tegangan tensor seluruhnya (A.5) menjadi

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\eta e_{ij} + \lambda e_{mm} \delta_{ij}. \quad (\text{A.18})$$

Dengan mengatur tanda $i = j$ didapatkan

$$\tau_{ij} = -3p + (2\eta + 3\lambda) \nabla \cdot \vec{u} \quad (\text{A.19})$$

dan p menjadi

$$p = -\frac{1}{3}\tau_{ii} + \left(\frac{2}{3}\eta + \lambda\right)\nabla\cdot\vec{u} \quad (\text{A.20})$$

Akan tetapi, mungkin tidak sama pada aliran sehingga dinyatakan tekanan rata-rata sebagai

$$\bar{p} = -\frac{1}{3}\tau_{ii} \quad (\text{A.21})$$

Substitusi persamaan (A.20) ke dalam (A.21) maka didapatkan

$$p - \bar{p} = \left(\frac{2}{3}\eta + \lambda\right)\nabla\cdot\vec{u} \quad (\text{A.22})$$

Untuk fluida inkompresibel $e_{mm} = \nabla\cdot\vec{u} = 0$ dan persamaan penyusun (A.19) menjadi

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\eta e_{ij} \quad (\text{A.23})$$

dimana p berarti tekanan rata-rata. Untuk fluida inkompresible tekanan termodinamika dapat dinyatakan. Perbedaan antara p dan \bar{p} terkait pada besarnya koefisien viskositas, $\kappa = \lambda + 2\eta/3$. Asumsi yang sering dipakai $\kappa = 0$ ditemukan akurat dan (A.19) untuk fluida kompresibel menjadi

$$\tau_{ij} = -\left(p + \frac{2}{3}\eta\nabla\cdot\vec{u}\right)\delta_{ij} + 2\eta e_{ij}. \quad (\text{A.24})$$

f. Persamaan Navier-Stokes

Persamaan Navier-Stokes diperoleh dengan memasukkan tegangan tensor (A.24) ke dalam persamaan momentum (A.10):

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho G_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[2\eta e_{ij} - \frac{2}{3}\eta(\nabla \cdot \vec{u})\delta_{ij} \right] \quad (\text{A.25})$$

Jika η konstan persamaannya menjadi

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho G_i + \eta \left[\nabla^2 u_i + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \vec{u}) \right] \quad (\text{A.26})$$

Untuk inkompresibilitas $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ dan persamaan jauh berkurang. Ditulis dalam notasi vektor menjadi

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \vec{G} + \eta \nabla^2 \vec{u} \quad (\text{A.27})$$