PROSIDING SEMINAR NASIONAL STATISTIKA
UNIVERSITAS DIPONEGORO 2013
ISBN: 978-602-14387-0-1

MODEL WAVELET RADIAL BASIS UNTUK PERAMALAN RUNTUN WAKTU NONLINEAR

Rukun Santoso[1], Subanar[2], Dedi Rosadi[2], dan Suhartono[3]
[1]Staf Pengajar Jurusan Statistika FSM UNDIP
[2]Universitas Gajah Mada
[1]Staf Pengajar Jurusan Statistika ITS

Abstract

Penggunaan model wavelet radial basis untuk peramalan data runtun waktu akan dibahas dalam tulisan ini. Model dimaksud merupakan pengembangan dari model peramalan berbasis wavelet yang sudah ada, dengan menambahkan suku radial basis sebagai bagian nonlinear. Disamping sebagai model prediksi, model yang dibangun juga dapat digunakan untuk mendeteksi keberadaan sifat nonlinear dalam data runtun waktu. Jika suku yang memuat fungsi radial basis memeiliki koefisien yang signifikan berarti terdapat sifat nonlinear dalam data. Kecukupan model prediksi diukur menggunakan persentasi rata-rata sesatan absolut (MAPE). Sebagai model alternatif baru keandalamnya akan dibandingkan dengan model yang sudah ada seperti model wavelet, model ARCH dan model GARCH

Kata kunci: wavelet, fungsi radial basis, model ARCH, model GARCH

1 Pendahuluan

Aktivitas ekonomi seperti pasar modal, pasar komoditas, dan kurs mata uang memiliki ukuran kuantitas yang dapat dinyatakan sebagai suatu variabel random. Contoh dari Kuantitas-kuantitas dimaksud adalah keuntungan saham, index harga saham, jumlah produk komoditas, jumlah permintaan komoditas, harga komoditas, nilai tukar antar mata uang, dan lain-lain. Jika kuantitas tersebut diukur menurut periode waktu tertentu maka hasil pengukurannya akan membentuk data runtun waktu. Metode analisis runtun waktu terus berkembang sejak Box dan Jenkins mengawali pembahasannya dalam Time Series Analysis: Forecasting and Control (1976). Metode Box-Jenkins dapat bekerja dengan baik jika data sampel diambil dari proses yang stasioner atau dapat dibawa ke bentuk stasioner. Model yang terbentuk termasuk dalam kelas model linier.

Pada perkembangannya ditemukan fakta bahwa data ekonomi pada umumnya memiliki sifat nonlinear serta varian yang berubah dari waktu ke waktu (heteroskedastic). Dalam kondisi ini metode Box-Jenkins mungkin memberikan jawaban yang kurang memuaskan. Beberapa metode untuk mengatasi masalah nonlininearitas dalam data antara lain model TAR (Threshold Autoregressives,)model SETAR (self-exiciting TAR), model STAR (smoth transition aoutoregressives) dan lai-lain. Model TAR dan SETAR antara lain dibahas oleh Tong (1990) sedangkan model STAR diusulkan oleh

ISBN: 978-602-14387-0-1

Terasvirta (1994). Engel (1982) mengusulkan model runtun waktu yang dapat mengakomodasi masalah heteroskedastik dalam data. Model tersebut diberi nama model ARCH (autoregressives conditional heteroskedasticity). Generalisasi model ARCH diusulkan oleh Bolerslev (1986) dan diberi nama model GARCH (Generalized ARCH). Secara umum model ARCH dan GARCH memiliki dua bagian model yaitu model mean dan model varian. Sebagai model parametrik, model ARCH dan GARCH mengasumsikan bahwa sesatan model berdistribusi normal dengan varian yang berubah bergantung waktu.

Alternatif lain dari model parametrik adalah model non parametrik. Model-model non parametrik yang terkini antara lain model jaringan syaraf tiruan [Haykin, 1999], model wavelet [murtagh, 2004], model fuzzy dan model gabungan (hibrid) seperti model wavelet-jaringan syaraf tiruan, model wavelet-fuzzy [Popoola, 2007]. Metode non parametrik tidak bergantung pada asumsi distribusi random variabel tertentu tetapi bekerja berdasarkan data, sehingga analisisnya tidak terlalu rumit. Kelemahan metode non parametrik pada umumnya adalah melibatkan perhitungan numerik yang banyak. Dengan pesatnya perkembangan teknologi komputer hal ini tidak menjadi kendala yang berarti. Uji keberadaan sifat nonlinear dalam data merupakan bagian awal sebelum membangun model nonlinear. Uji dimaksud antara lain dibahas oleh Brock, Dechert dan Scheinkman (1987) yang dikenal dengan uji BDS. Teraesvirta, Lin dan Granger (1993) mengusulkan suatu uji nonlinearitas dengan pendekatan model jaringan syaraf tiruan. Metode pendekatan JST juga diusulkan oleh Lee, White dan Granger (1993) dengan nilai awal bobot random.

Tulisan ini mengusulkan model baru yang diberi nama model wavelet radial basis neural network (WRBNN). Wavelet telah dikenal sebagai alat yang unggul untuk mengurangi gangguan dalam data [Ogden 2005]. Radial basis telah dikenal sebagai fungsi pembangkit pendekatan nonlinear yang dapat mengakomodasi kondisi lokal [Orr, 1996]. Jaringan syaraf tiruan telah banyak digunakan untuk melakukan klasifikasi dan mencari nilai pendekatan fungsi. Keunggulan metode ini adalah kemampuannya untuk melakukan perbaikan model sehingga dapat dicapai keadaan optimal[Haykin, 1999]. Model WRBNN sebagai interaksi wavelet, radial basis dan jaringan syaraf tiruan diharapkan membentuk model hibrida yang lebih baik. Perangkat lunak komputer yang memadai juga diperlukan dalam penelitian ini. Hal ini didasarkan atas kebutuhan perhitungan dan analisis data yang khas, rumit dan banyak. Salah satu perangkat lunak yang memadai adalah paket program R [R Development Core Team, 2012], dan didukung modul tambahan fGarch [Wuertz dan Chalabi, 2009]dan wavelets [Aldrich, 2010].

2 Model Runtun Waktu Nonlinear

Box dan Jenkins (1971) adalah pelopor yang memodelkan runtun waktu secara matematis, dengan nama model Autoregressives Moving Average (ARMA). Metode Box-Jenkins dapat bekerja dengan baik pada proses yang stasioner. Model yang terbentuk termasuk dalam kelompok model linear. Tahapan kerja metode ini meliputi tahap persiapan data, pemilihan model, pendugaan parameter, pemeriksaan model dan peramalan. Persiapan data termasuk diferensi dan transformasi dilakukan agar stasioneritas proses terpenuhi. Model umum ARMA dapat diliaht pada persamaan 1.

$$Y_t = \mu + \sum_{i=1}^{p} \gamma_i Yt - i + \sum_{j=1}^{q} \theta_i \epsilon_{t-i} + \epsilon_t \tag{1}$$

dengan ϵ_t variabel acak normal dengan rata-rata 0 dan varian proses σ^2 konstan.

Fakta membuktikan bahwa ketergantungan runtun waktu terhadap informasi historis tidak selalu bersifat linear. Hal ini menjadikan ketertarikan peneliti untuk mengkaji model runtun waktu nonlinear. Salah satu bentuk hubungan non linear yang banyak dikaji adalah adanya sifat heteroskedastik, yaitu varian proses yang berubah bergantung waktu. Model heteroskedastik yang pertama diperkenalkan oleh Engle (1982) yang diberi nama model ARCH (*Autoregressives Conditional Heteroscedasticity*). Ide dasarnya adalah mengasumsikan bahwa suku sesatan ϵ_t dari persamaan 1 berpola nonlinear terhadap sesatan yang lalu seperti dimodelkan pada persamaan 2.

$$\epsilon_t = \sigma_t v_t \tag{2}$$

dengan v_t variabel acak N(0,1) dan σ_t dapat dinyatakan seperti pada persamaan 3.

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{s} \alpha_n \epsilon_{t-n}^2 \tag{3}$$

Bollerslev (1986) mengembangkan model ARCH pada persamaan 3 menjadi model GARCH (Generalized ARCH) seperti pada persamaan 4.

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{r} \beta_n \sigma_{t-n}^2 + \sum_{n=1}^{s} \alpha_n \epsilon_{t-n}^2 \tag{4}$$

Keberadaan sifat heteroskedastik dalam data dapat diketahui dengan uji Multiplikator Lagrange (LM test) yang antara lain dikemukakan oleh Breusch dan Pagan (1979) serta dikembangkan oleh Lee (1991).

Model nonlinear dapat pula berupa ketergantungan nonlinear terhadap informasi pengamatan terdahulu, yang secara umum dapat dituliskan dalam persamaan 5.

$$Y_t = \mu + \sum_{i=1}^{p} \omega_i \Phi(Y_{t-i}) + \epsilon_t \tag{5}$$

dengan Φ fungsi nonlinear seperti fungsi logistik, fungsi eksponensial, fungsi polinomial,dan fungsi radial basis. Pembahasan khusus dalam hal Φ merupakan fungsi radial basis dapat ditemukan pada Orr (1996) atau Haykin (1999).

3 Model Runtun Waktu Berbasis Wavelet

Wavelet atau juga disebut wavelet ibu adalah fungsi gelombang kecil yang dapat membangun basis orthonormal pada ruang $L_2(R)$ [Daubechies, 1992]. Setiap jenis wavelet ibu memiliki pasangan wavelet ayah atau juga disebut fungsi skala yang khas. Biasanya wavelet disimbolkan dengan ψ sedangkan fungsi skala disimbolkan dengan ϕ. Untuk

ISBN: 978-602-14387-0-1

membangun basis pada $L_2(R)$ wavelet membentuk keluarga wavelet berupa bentuk dilatasi dan translasi seperti yang tertulis pada persamaan 6

$$\begin{aligned}\psi_{j,k}(t) &= 2^{-\frac{j}{2}}\psi(2^{-j}t-k) \\ \phi_{j,k}(t) &= 2^{-\frac{j}{2}}\phi(2^{-j}t-k)\end{aligned} \tag{6}$$

Ide pembentukan basis wavelet untuk ruang $L_2(R)$ terilhami oleh pembentukan basis untuk ruang $L_2[-\pi,\pi]$ menggunakan fungsi sines dan cosines [Ogden, 1997]. Dalam hal ini setiap fungsi dalam $L_2[-\pi,\pi]$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari fungsi sines dan cosines. Bentuk ini dikenal sebagai deret Fourier.

Seperti halnya fungsi sines dan cosines, wavelet memiliki sifat-sifat yang mendukung sebagai pembangkit basis seperti tertulis pada persamaan 7.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\phi_{j,k}(t)\phi_{j,m}(t) &= \delta_{k,m} \\ \int_{-\infty}^{\infty}\phi_{j,k}(t)\psi_{l,m}(t) &= 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty}\psi_{j,k}(t)\psi_{l,m}(t) &= \delta_{j,l}\delta_{k,m}\end{aligned} \tag{7}$$

dengan

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

Wavelet dan fungsi skala bersama-sama dapat membangun ruang multiresolusi, sehingga setiap fungsi $f \in L_2(R)$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari wavelet dan fungsi skala seperti disajikan pada persamaan 8.

$$f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{J,k}\phi_{J,k}(t) + \sum_{j\leq J}\sum_{k\in\mathbb{Z}} d_{j,k}\psi_{j,k}(t) \tag{8}$$

$$\tag{9}$$

Ruang multiresolusi yang memuat persamaan 8 dapat dituliskan dengan persamaan 10

$$L_2(R) \supseteq S_1 \oplus D_1 = S_2 \oplus D_2 \oplus D_1 = S_J \oplus D_J \oplus D_{J-1} \oplus \cdots \oplus D_1 \tag{10}$$

dengan $\oplus$ menyatakan operasi jumlahan ortogonal dua ruang vektor. Koefisien-koefisien pada persamaan 8 dapat dihitung menggunakan persamaan 11

$$\begin{aligned}cj,k &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi_{j,k}(t)dt \\ dj,k &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi_{j,k}(t)dt\end{aligned} \tag{11}$$

ISBN: 978-602-14387-0-1

3.1 Transformasi Wavelet Diskrit

Dari suatu wavelet terdapat sebanyak berhingga genap nilai-nilai dengan sifat istimewa. Himpunan nilai-nilai dimaksud disebut filter wavelet, yang biasa dituliskan seperti pada persamaan 12 dengan sifat seperti dituliskan pada persamaan 13 [Percieval dan Walden, 2000].

$$\mathbf{h} = [h_0, h_1, \cdots, h_{L-1}] \tag{12}$$

yang memenuhi sifat-sifat berikut

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{L-1} h_i &= 0 \\ \sum_{i=0}^{L-1} h_i^2 &= 1 \\ \sum_{i=0}^{L-1} h_i h_{i+2n} &= 0, \quad n \in \mathbb{Z} \end{aligned} \tag{13}$$

Sebagai pasangan dari filter wavelet terdapat filter skala yang dituliskan sebagai $\mathbf{g} = [g_0, g_1, \cdots, g_{L-1}]$. Antara $\mathbf{h}$ dan $\mathbf{g}$ terdapat hubungan seperti dituliskan pada persamaan 14.

$$g_l = (-1)^{l+1} h_{L-1-l} \tag{14}$$

Filter yang diulas pada paragraf sebelumnya adalah filter pada tingkat pertama, selanjutnya dinotasikan dengan $\mathbf{h}^{(1)}$. Sebelum membangun filter pada tingkatan yang lebih tinggi terlebih dulu dibentuk *up sampled* dari filter tingkat sebelumnya yaitu dengan cara menyisipkan 0 di antara nilai filter yang tidak sama dengan 0. Jadi *up sampled* dari (12) adalah

$$\mathbf{h}_{\mathbf{up}}^{(1)} = [h_0, 0, h_1, 0, \cdots, 0, h_{L-1}, 0, h_{L-1}] \tag{15}$$

Filter pada tingkat 2 dibentuk dengan rumus berikut

$$\mathbf{h}^{(2)} = \mathbf{h}_{\mathbf{up}}^{(1)} * \mathbf{g} \tag{16}$$

dengan $*$ menyatakan operasi konvolusi. Secara umum filter wavelet dan filter skala pada tingkat j dibentuk dengan rumus pada persamaan 17.

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^{(\mathbf{j})} &= \mathbf{h}_{\mathbf{up}}^{(\mathbf{j}-1)} * \mathbf{g} \\ \mathbf{g}^{(\mathbf{j})} &= \mathbf{g}_{\mathbf{up}}^{(\mathbf{j}-1)} * \mathbf{g} \end{aligned} \tag{17}$$

Filter wavelet dan filter skala secara bersama-sama dapat membangun matriks transformasi wavelet diskrit. Hal ini berakibat setiap realisasi diskrit dari fungsi dalam $L_2(R)$ dengan jeda waktu yang sama dapat didekomposisi (dipecah) ke dalam bagian

ISBN: 978-602-14387-0-1

halus (S) dan bagian-bagian detil (D). Proses untuk memperoleh S dan D disebut transformasi wavelet diskrit (*D*iscrete Wavelet Transform=DWT). Misalkan $\mathbf{Y} = \{Y_t\}_{t=1}^{N}$ menyatakan realisasi diskrit yang dimaksud dengan $N > L$ dan $N = 2^J$ untuk suatu bilangan asli J. Transformasi wavelet diskrit pada tingkat j dapat dituliskan sebagai

$$\mathbf{D} = \mathbf{H_j Y} \tag{18}$$

$\mathbf{H_j}$ adalah matriks transformasi tingkat ke-j berukuran $N \times N$ dan $\mathbf{D}$ adalah hasil dekomposisi yang disebut juga sebagai matriks koefisien dengan ukuran $N \times 1$.

Baris ke-1 sampai dengan baris ke-$\frac{N}{2}$ dari matriks $\mathbf{H}$ adalah bentuk periodisasi 2 langkah dari $\mathbf{h^{(1)}}$ seperti dutuliskan pada persamaan 19

$$\mathscr{H}_1 = \begin{bmatrix} h_1 & h_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & h_{L-1} & h_{L-2} & \cdots & h_3 & h_2 \\ h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & h_{L-1} & h_{L-2} & \cdots & h_4 \\ \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & & 0 & h_{L-1} & h_{L-2} & & \cdots & h_1 & h_0 \end{bmatrix} \tag{19}$$

Pada matriks $\mathbf{H_1}$ baris ke-$\frac{N}{2}+1$ sampai dengan baris ke-N adalah bentuk periodisasi 2 langkah filter skala $\mathbf{g}$, yaitu

$$\mathscr{G}_1 = \begin{bmatrix} g_1 & g_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & g_{L-1} & g_{L-2} & \cdots & g_3 & g_2 \\ g_3 & g_2 & g_1 & g_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & g_{L-1} & g_{L-2} & \cdots & g_4 \\ \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & & 0 & g_{L-1} & g_{L-2} & & \cdots & g_1 & g_0 \end{bmatrix} \tag{20}$$

Pada matriks $\mathbf{H_2}$ sub matriks $\mathscr{G}_1$ akan didekomposisi (dipecah) menjadi $\mathscr{H}_2$ dan $\mathscr{G}_2$ yang masing-masing merupakan bentuk periodisasi 4 langkah dari filter wavelet dan filter skala tingkat 2. Proses dapat dilanjutkan sampai dengan tingkat ke-j, untuk $j \leq J$. Dalam hal ini $\mathscr{H}_j$ dan $\mathscr{G}_j$ masing-masing merupakan bentuk periodisasi 2^j langkah dari filter wavelet dan filter skala tingkat j. Lebih lanjut persamaan 18 dapat dituliskan kembali seperti pada persamaan 21.

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \left[\mathscr{H}_1\ \mathscr{G}_1\right]^T \mathbf{Y} = \left[\mathscr{H}_1\ \mathscr{H}_2\ \mathscr{G}_2\right]^T \mathbf{Y} = \cdots = \left[\mathscr{H}_1\ \mathscr{H}_2 \cdots \mathscr{H}_J\ \mathscr{G}_J\right]^T \mathbf{Y} \\ &= \left[D_1\ S_1\right]^T = \left[D_1\ D_2\ S_2\right]^T = \cdots = \left[D_1\ D_2 \cdots D_J\ S_J\right]^T \end{aligned} \tag{21}$$

3.2 Transformasi Wavelet Diskrit Tak Menurun

Transformasi wavelet tak menurun (*Undecimated Wavelet Transform*=UDWT) dipandang memiliki keunggulan dibandingkan dengan DWT untuk analisis data runtun waktu [Percieval dan Walden, 2000]. Keunggulan tersebut antara lain, ukuran sampel tidak harus berbentuk 2^J dan banyaknya koefisien wavelet yang didapat pada setiap tingkat dekomposisi adalah tetap yaitu sama banyak dengan ukuran sampelnya. Diberikan notasi untuk filter wavelet dan filter skala untuk UDWT berturut-turut

ISBN: 978-602-14387-0-1

adalah $\tilde{\mathrm{h}}$ dan $\tilde{\mathrm{g}}$. Pada setiap tingkatan antara filter DWT dan filter UDWT terdapat hubungan

$$\tilde{\mathrm{h}} = \frac{\mathrm{h}}{\sqrt{2}} \qquad \text{dan} \qquad \tilde{\mathrm{g}} = \frac{\mathrm{g}}{\sqrt{2}}$$

.

Rumusan UDWT dapat ditulis seperti pada persamaan 22

$$\tilde{\mathbf{D}} = \tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{j}}\mathbf{Y} \tag{22}$$

Pada transformasi tingkat j matriks $\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{j}}$ berukuran $(j+1)N \times N$. Selanjutnya dinotasikan N baris pertama dari $\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{j}}$ dengan $\tilde{\mathscr{H}}_1$, N baris berikutnya dengan $\tilde{\mathscr{H}}_2$, proses dilanjutkan sehingga pada tingkat j diperoleh $\tilde{\mathscr{H}}_j$, dan N baris terakhir dinotasikan dengan $\tilde{\mathscr{G}}_j$. Untuk setiap indeks i, sub matriks $\tilde{\mathscr{H}}_i$ dan $\tilde{\mathscr{G}}_i$ masing-masing merupakan bentuk periodisasi satu langkah filter wavelet dan filter skala tingkat i. Sebagai contoh sub matriks $\tilde{\mathscr{H}}_1$ dapat disajikan dengan persamaan 23

$$\tilde{\mathscr{H}}_1 = \begin{bmatrix} \tilde{h}_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \tilde{h}_{L-1} & \tilde{h}_{L-2} & \cdots & \tilde{h}_2 & \tilde{h}_1 \\ \tilde{h}_1 & \tilde{h}_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \tilde{h}_{L-1} & \tilde{h}_{L-2} & \cdots & \tilde{h}_2 \\ \vdots & & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \tilde{h}_{L-1} & \tilde{h}_{L-2} & \tilde{h}_{L-3} & \cdots & \tilde{h}_1 & \tilde{h}_0 \end{bmatrix} \tag{23}$$

Dengan cara yang sepadan akan diperoleh $\tilde{\mathscr{G}}_1$ sebagai bentuk periodisasi satu langkah dari filter skala. Pada UDWT tingkat 2, sub matriks $\tilde{\mathscr{G}}_1$ akan terpecah menjadi $\tilde{\mathscr{H}}_2$ dan $\tilde{\mathscr{G}}_2$ yang masing-masing merupakan bentuk periodisasi satu langkah filter wavelet dan filter skala tingkat 2. Lebih lanjut cara yang sepadan dengan persamaan 21 untuk menuliskan proses UDWT adalah seperti tertulis pada persamaan 24.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{D}} &= \left[\tilde{\mathscr{H}}_1 \; \tilde{\mathscr{G}}_1\right]^T \mathbf{Y} = \left[\tilde{\mathscr{H}}_1 \; \tilde{\mathscr{H}}_2 \; \tilde{\mathscr{G}}_2\right]^T \mathbf{Y} = \cdots = \left[\tilde{\mathscr{H}}_1 \; \tilde{\mathscr{H}}_2 \cdots \tilde{\mathscr{H}}_J \; \tilde{\mathscr{G}}_J\right]^T \mathbf{Y} \\ &= \left[\tilde{D}_1 \; \tilde{S}_1\right]^T = \left[\tilde{D}_1 \; \tilde{D}_2 \; \tilde{S}_2\right]^T = \cdots = \left[\tilde{D}_1 \; \tilde{D}_2 \cdots \tilde{D}_J \; \tilde{S}_J\right]^T \end{aligned} \tag{24}$$

3.3 Model Peramalan Runtun Waktu dengan UDWT

Pada umumnya peramalan merupakan tujuan utama dari proses pemodelan. Banyak cara dapat digunakan untuk melakukan peramalan, mulai dari model sederhana (naive mmodel) hingga model yang rumit. Tulisan ini terinspirasi penggunaan hasil transformasi wavelet diskrit untuk peramalan runtun waktu yang dibahas oleh Murtagh (2004). Pembahasan yang lain juga dapat ditemukan dalam Renaud et al. (2003), dan Ciancio (2007). Murtagh mengasumsikan peramalan satu langkah ke depan bergantung kepada hasil UDWT data sebelumnya. Model yang ditawarkan dapat dinyatakan dengan persamaan 25

$$\hat{Y}_{N+1} = \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{A_j} \hat{a}_{j,k} d_{j,N-2^j(k-1)} + \sum_{k=1}^{A_{J+1}} \hat{a}_{J+1,k} c_{J,N-2^J(k-1)} \tag{25}$$

ISBN: 978-602-14387-0-1

Tingkat dekomposisi tertinggi dinyatakan dengan J. Banyaknya koefisien yang dipilih pada tingkat j dinyatakan dengan A_j. Sebagai contoh jika diambil $J = 4$ dan $A_j = 2$ untuk $j = 1, 2, 3, 4, 5$ maka (25) dapat dinyatakan sebagai (26)

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{N+1} &= \hat{a}_{1,1}d_{1,N} + \hat{a}_{1,2}d_{1,N-2} + \hat{a}_{2,1}d_{2,N} + \hat{a}_{2,2}d_{2,N-4} + \\ &\quad \hat{a}_{3,1}d_{3,N} + \hat{a}_{3,2}d_{3,N-8} + \hat{a}_{4,1}d_{4,N} + \hat{a}_{4,2}d_{4,N-16} + \\ &\quad \hat{a}_{5,1}c_{4,N} + \hat{a}_{5,2}c_{4,N-16} \end{aligned} \tag{26}$$

Penyelesaian dari persamaan 25 beserta uji signifikansinya dapat dikerjakan menggunakan metode regresi linear.

4 Model Wavelet Radial Basis Neural Network

Fungsi radial basis telah digunakan sebagai pengolah pada lapisan tersembunyi dari jaringan syaraf tiruan. Hal ini antara lain telah dibahas oleh Haykin () dan Orr (). Input yang berjarak dekat dengan pusat radial basis akan menghasilkan nilai fungsi yang besar. Sebaliknya input yang jauh dengan pusat radial basis akan menghasilkan nilai fungsi yang kecil. Hal ini menjadikan fungsi radial basis sebagai pemilah input ke dalam kelompok-kelompok yang lebih homogen. Beberapa fungsi radial basis dapat dilihat pada persamaan 27, 28, dan 29
Fungsi Gaussian :

$$\Phi(r) = exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right), \quad \sigma > 0, \quad r \in \mathbb{R} \tag{27}$$

Fungsi Multiquadrics :

$$\Phi(r) = \sqrt{r^2 + c^2}, \quad c > 0, \quad r \in \mathbb{R} \tag{28}$$

Fungsi Multiquadrics invers :

$$\Phi(r) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + c^2}}, \quad c > 0, \quad r \in \mathbb{R} \tag{29}$$

Penggunaan fungsi radial basis pada jaringan syaraf tiruan (neural network) untuk menyelidiki adanya sifat nonlinear antara lain dibahas oleh Blake dan Kapetanios (2003). Hal ini memberikan pemikiran untuk mengembangkan model pada persamaan 25 menjadi model wavelet radial basis neural network (WRBNN) untuk mengantisipasi kemungkinan adanya sifat nonlinear pada hasil transformasi wavelet. Model yang dihasilkan dapat digunakan untuk menyelidiki adanya sifat nonlinear sekaligus dapat digunakan untuk peramalan.

Tanpa mengurangi keumuman, akan dibangun model WRBNN dengan input koefisien hasil transformasi wavelet tak menurun pada tingkat $J = 4$. Diberikan $\mathbf{X}_t = [d_{1,t}, d_{1,t-2}, d_{2,t}, d_{2,t-4}, d_{3,t}, d_{3,t-8}, d_{4,t}, d_{4,t-16}, c_{1,t}, c_{1,t-16}]^T$ vektor yang dibangun dari koefisien wavelet yang dipilih untuk dimasukkan dalam model. Model WRBNN yang ditawarkan dituliskan pada persamaan 30.

$$Y_{t+1} = \mathbf{A}^T\mathbf{X}_t + \sum_{i=1}^{n} b_i\Phi_i(\mathbf{X}_t) + \epsilon_t \tag{30}$$

ISBN: 978-602-14387-0-1

dengan $\mathbf{A}^T = [a_1, a_2, \cdots, a_{10}]$ adalah matriks koefisien bagian linear $\mathbf{B}^T = [b_1, b_2, \cdots, a_n]$ adalah matriks koefisien bagian nonlinear, Φ adalah fungsi nonlinear radial basis, dan ϵ_t adalah sesatan random. Jika ϵ_t berdistribusi normal dengan rata-rata0 dan varian σ^2 maka model pada persamaan 30 dapat diselesaikan dengan metode regresi linier. Model penaksirnya dapat dinyatakan seperti yang tercantum pada persamaan 31

$$\hat{Y}_{t+1} = \hat{\mathbf{A}}^T \mathbf{X}_t + \sum_{i=1}^{n} \hat{b}_i \Phi_i(\mathbf{X}_t) \tag{31}$$

dengan $\mathbf{A}^T = [a_1, a_2, \cdots, a_{10}]$ adalah matriks koefisien bagian linear $\mathbf{B}^T = [b_1, b_2, \cdots, a_n]$ adalah matriks koefisien bagian nonlinear.

Mengacu pada persamaan 26, banyaknya fungsi radial basis n dipilih sehingga memberikan penurunan jumlah sesatan kuadrat terbesar. Akan dibahas pemilihan n untuk fungsi Gaussian, sedangkan untuk fungsi yang lain dikerjakan secara analogi. Mula-mula untuk setiap t, X_t dijadikan pusat simpul tunggal fungsi radial basis untuk persamaan 30. Selanjutnya dihitung jumlah sesatan kuadratnya (SSE_t). Mengacu pada Blake dan Kapetanios (2003) nilai σ ditentukan sebagai $\sigma = \text{maks}|X_i - X_j|, \quad i, j = 1, 2, \cdots, N$. Untuk setiap t dihitung $\Delta_{SSE_t} = SSE - SSE_t$ dengan SSE adalah jumlah sesatan kuadrat dari persamaan 26. Selanjutnya dilakukan pengurutan menurun terhadap Δ_{SSE_t}.

Pembentukan model persamaan 31 diawali dengan mengambil X_t yang memberikan Δ_{SSE_t} terbesar sebagai pusat simpul fungsi radial basis yang pertama. Selanjutnya dilakukan pendugaan model, peramalan dan perhitungan jumlah sesatan kuadrat. Satu demi satu simpul radial basis ditambahkan dengan mengambil X_t yang memberikan Δ_{SSE_t} terbesar berikutnya. Proses dihentikan pada penambahan simpul ke-$k+1$ jika $SSE_{k+1} \geq SSE_k$. Langkah berikutnya adalah melakukan uji statistik untuk mendapatkan n simpul yang signifikan, dengan $n \leq k$. Model optimum dengan n simpul radial basis telah diperoleh.

5 Hasil dan Pembahasan

Untuk menyelidiki lebih lanjut sifat-sifat model yang dirancang pada bagian 4 diperlukan data yang memiliki sifat nonlinear. Suatu keberuntungan bahwa paket perangkat lunak R memberikan penyelesaian akan kebutuhan data melalui dua cara, yaitu dari kumpulan data yang tersedia dan melalui pembangkitan data simulatif. Biasanya kumpulan data tersebut terkait dengan paket-paket dalam program R yang telah terseleksi untuk penelitian dengan sifat-sifat tertentu. Adapun pembangkitan data simulatif diharapkan dapat memenuhi kebutuhan yang khas dari suatu obyek penelitian.

Tanpa mengurangi kemumuman penggunaan model, pembahasan dalam tulisan ini diarahkan pada analisis data runtun waktu $\{Y_t\}_{t=1}^{N}$ yang memiliki sifat heteroskedastik dengan pola ARMA(p,q) dan GARCH(r,s). Secara simulatif data dimaksud dapat dibangkitkan dengan modul fGarch. Data hasil pembangkitan dari model ARMA dan GARCH seperti pada persamaan 32 akan digunakan sebagai contoh kasus.

$$Y_t = 1 + 0.5Y_{t-1} + \sigma_t v_t \sigma_t^2 = 0.8\sigma_{t-1}^2 + 0.1\epsilon_{t-1}^2$$

ISBN: 978-602-14387-0-1

Data masukan untuk model WRBNN adalah hasil transformasi UDWT terhadap data $\{Y_t\}_{t=1}^{n}$, dalam contoh ini n=600. Proses UDWT dapat dilakukan menggunakan bantuan modul wavelets yang diintegrasikan dengan perangkat lunak R [Aldrich, 2010]. Hasil estimasi parameter model ARMA dan GARCH pada persamaan 32 dapat disajikan dalam tabel 1 Hasil estimasi parameter model yang tercantum pada tabel 1

Table 1: Estimasi Parameter Model ARMA+GARCH

Parameter	Estimasi	Nilai t	Prob.
μ	1	2952.948	0
γ_1	0.4951	2229.454	0
α_0	0	2.040	0.041395
α_1	0.1267	3.441	0.000579
β_1	0.7859	11.704	0

nampak telah mendekati parameter model pada persamaan 32.

Hasil estimasi parameter model wavelet dengan data simulasi untuk persamaan 32 disajikan dalam tabel 2 Tabel 2 memuat 6 penduga parameter model wavelet yang

Table 2: Estimasi Parameter Model Wavelet

Variabel	Koefisien	Nilai t	Prob.
$d_{1,t}$	0.07472	6.195	0
$d_{3,t}$	0.08022	6.569	0
$d_{5,t}$	0.08201	7.342	0
$d_{7,t}$	0.09631	4.201	0
$c_{9,t}$	0.06513	12.025	0
$c_{10,t-16}$	0.06513	3.330	0.000925

signifikan dari 10 parameter seperti yang tercntum dalam persamaan (26).

Hasil estimasi parameter model WRBNN dengan pencocokan pada data simulasi persamaan 32 disajikan dalam tabel 3. Tabel 3 memperlihatkan bahwa 6 variabel terpilih pada model wavelet masih dapat dipertahankan sebagai bagian linear dari model WRBNN, meskipun ada penurunan signifikansi pada $d_{7,t}$ dan $c_{10,t-16}$. Model yang terbentuk hanya memuat satu fungsi radial basis sebagai bagian nonlinear dari model WRBNN.

Hasil perhitungan jumlah sesatan kuadarat (SSE) dari model GARCH, Wavelet dan WRBNN serta hasil uji normalitas Kolmogorov-Smirnov dapat disajikan pada tabel 4.

ISBN: 978-602-14387-0-1

Table 3: Estimasi Parameter Model WRBNN

Variabel	Koefisien	Nilai t	Prob.
$d_{1,t}$	0.502293	6.635	0
$d_{3,t}$	0.500346	6.225	0
$d_{5,t}$	0.596003	7.305	0
$d_{7,t}$	0.317993	3.151	0.00171
$c_{9,t}$	0.839897	12.345	0
$c_{10,t-16}$	0.167675	2.494	0.01291
Φ_1	-0.016140	-2.725	0.00662

Table 4: SSE dan Uji Normalitas K-S

Model	SSE	N	$\hat{\sigma}^2$	Prob K-S
GARCH	0.006808593	600	0.000011364	0.6099
Wavelet	0.006785685	583	0.00001165925	0.4264
WRBNN	0.006704714	583	0.00001152013	0.4567

6 Kesimpulan

Hasil estimasi parameter model GARCH, Wavelet dan WRBNN menunjukkan bahwa ketiganya memberikan hasil jumlah sesatan kuadrat yang tidak jauh berbeda. Namun perlu dicatat bahwa data yang digunakan adalah data simulasi dengan model tertentu yang telah ditetapkan. Perlu ada kajian lebih jauh menggunakan data hasil pengamatan nyata. Disamping itu, sebagai tindak lanjut penyelidikan simulatif perlu dikembangkan penyelidikan aspek teoritik menyangkut sifat matematis dari model Wavelet dan WRBNN. Aspek teoritik tersebut menyangkut sifat-sifat baik dari penduga parameter yang terkait dengan model tersebut.

References

[1] Aldrich E 2009 *A package of Functions for Computing Wavelet Filters, Wavelet Transforms and Multiresolution Analyses* http://www.ealdrich.com/wavelets/.

[2] Bollerslev T 1986 generalized autoregressive conditional heteroskedasticity *J. of Econometrics* **31** 307-27

[3] Box G E P and Jenkins G M 1976 *Time Series Analysis: Forecasting and Control* (San Francisco: Holden-Day)

[4] Ciancio A 2007 analysis of time series with wavelets *Int. J. of Wavelets, Multiresolution and Information Processing* **5**(2) 241-56

[5] Daubhechies I 1992 *Ten Lecture on Wavelets* (Philadelphia: SIAM)

ISBN: 978-602-14387-0-1

[6] Engel R F 1982 autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation, *J. Econometrica* **50** 987-1008

[7] Fugal D L 2009 *Conceptual Wavelets in Digital and Signal Processing* (Space and Signals Technologies LLC)

[8] Haykin S 1999 *Neural Networks: A Comprehensive Foundation* Prentice Hall

[9] Murtagh F, Starck J L and Renaud O 2004 on neuro wavelet modeling *Decision Support System* **37** 475-90

[10] Percival D B and Walden A T 2000 *Wavelet methods for time series analysis* (Cambridge: CU Press)

[11] Samarasinghe S 2006 *Neural Network for Applied Science and Engineering* (New York: Auerbach Pub)

[12] Rukun S, Subanar, Rosadi D, and Suhartono 2011 heteroscedastic time series model by wavelet transform *Proc. of "The* 6^{th} *SEAMS-UGM Conference 2011"*

[13] Starck J L, Jalal F and Murtagh F 2007 the undicimated wavelet decomposition and its reconstruction, *IEEE on Image Processing* **16**(2) 297-309

[14] Wei William W S 1994 *Time Series Analysis: Univariate and Multivariate methods* (Canada: Addison-Wesley)