ISBN: 978-602-14387-0-1

PENDEKATAN NUMERIS RANCANGAN *D-OPTIMAL* UNTUK MODEL REGRESI EKSPONENSIAL TERGENERAL TIGA PARAMETER

Tatik Widiharih[1,2], Sri Haryatmi, [3,] Gunardi[4]
[1]Mahasiswa S3 Matematika UGM
[2]Jurusan Statistika FSM UNDIP
[3]Jurusan Matematika FMIPA UGM
[4]Jurusan Matematika FMIPA UGM
widiharih@gmail.com; s_kartiko@yahoo.com; gunardi@ugm.ac.id

Abstrak

Fungsi distribusi eksponensial tergeneral mempunyai bentuk kurva yang spesifik, kurva naik dari nol mencapai titik maksimum kemudian turun dan pada saat tertentu relatif konstan mendekati nol. Fungsi ini dapat dipergunakan untuk menggambarkan model kurva pertumbuhan. Untuk mendapatkan estimasi parameter model yang memenuhi kriteria tertentu yang ditetapkan sebelum pengamatan dilakukan diperlukan rancangan yang optimal. Kriteria *D-optimal* merupakan kriteria optimal dengan tujuan meminimumkan variansi dari estimator parameter dalam model. Dalam makalah ini akan dibahas rancangan *D-optimal* untuk regresi eksponensial tergeneral tiga parameter dengan galat bersifat homoskedastik. Penentuan titik-titik rancangan untuk *D-optimal* pada model nonlinear dipengaruhi oleh harga parameter dalam model, sehingga diperlukan informasi prior tentang harga dari parameter tersebut. Penentuan titik-titik rancangan tersebut dengan cara memaksimumkan determinan matriks informasi, dalam makalah ini dilakukan secara simulasi numeris dengan metode Modifikasi Newton (*Modified Newton*). Sedangkan rancangan yang digunakan adalah rancangan *minimally supported.*

Kata Kunci: D-Optimal, Matriks Informasi, Eksponensial Tergeneral, Homoskedastik, *Minimally Supported*

1. Pendahuluan

Rancangan percobaan (*design of experiment*) sangat diperlukan bagi peneliti yang menggunakan penelitian lapangan (laboratorium) untuk menenemukan sesuatu yang baru, menjawab fenomena yang berkembang ataupun memperkuat hasil temuan dari peneliti lain. Hal yang sangat mendasar dalam perancangan percobaan adalah tentang pemilihan satuan percobaan yang digunakan, perlakuan yang dicobakan dan bagaimana mengukur respon (Montgomerry, 2005).

Dalam melakukan penelitian setelah model ditetapkan, sering kali peneliti mempunyai masalah bagaimana memilih level (titik rancangan / *design point*) yang harus dicobakan sehingga memenuhi kriteria optimal yang diinginkan. Dalam makalah ini digunakan kriteria keoptimalan D-optimal. Kriteria D-optimal adalah kriteria keoptimalan dengan tujuan meminimalkan variansi dari penduga parameter sehingga diharapkan parameter dalam model akan signifikan.

ISBN: 978-602-14387-0-1

Fungsi distribusi eksponensial tergeneral mempunyai bentuk kurva yang spesifik, kurva naik dari nol mencapai titik maksimum kemudian turun dan pada saat tertentu relatif konstan mendekati nol. Fungsi ini dapat dipergunakan untuk menggambarkan model kurva pertumbuhan. Gupta and Kundu (1999) memperkenalkan distribusi eksponensial tergeneral *(Generalized Exponential / GE)* sebagai alternatif dari distribusi Gamma atau Weibull. Fungsi distribusi dari eksponensial tergeneral adalah :

$$f(x) = \alpha\lambda e^{-\lambda x}\left(1 - e^{-\lambda x}\right)^{\alpha-1}, \lambda > 0, \alpha \geq 1, x > 0 \tag{1}$$

dengan α merupakan parameter bentuk dan λ merupakan parameter skala. Kurva dari fungsi eksponensial tergeneral ini sangat spesifik berbentuk unimodal dengan maksimum terjadi pada $x = \frac{\ln(\alpha}{\lambda}$.

Smith (1918) memperkenalkan rancangan optimal (*optimal design*) yang diaplikasikan pada model regresi polinomial derajat 6 dengan satu peubah faktor (x) untuk nilai x antara *-1* dan *1*. Dalam hal ini diasumsikan residual bersifat independen, berdistribusi identik dan aditif sehingga metode estimasi menggunakan metode kuadrat terkecil (*Ordinary Least Square / OLS*). Hasil yang dikemukakan Smith ini tidak memiliki banyak dampak secara langsung.

Wald (1943) kemudian mengenalkan tentang kriteria D-optimal yang diterapkan pada rancangan bujur sangkar latin. Kriteria D-optimal ini diperoleh dengan cara memaksimumkan determinan dari matriks informasi. De la Garza (1954) menyatakan bahwa untuk menyusun matriks informasi dari model polinomial derajat p diperlukan $p+1$ titik rancangan termasuk dua titik batas daerah definisi dari x yaitu *-1* dan *1*. Kiefer and Wolfowitz (1960) menemukan bahwa G-optimal dan D-optimal adalah ekuivalen. Teorema ini dikenal dengan Teorema Equivalensi, dan teorema ini akan digunakan dalam membuktikan bahwa titik-titik rancangan yang ditetapkan merupakan rancangan D-optimal. Rancangan D-optimal ini juga sangat tergantung dari model yang digunakan. Pada model linear penentuan rancangan D-optimal lebih sederhana dari pada model nonlinear. Hal ini disebabkan matiks informasi pada model nonlinear mengandung nilai parameter yang tidak diketahui sehingga diperlukan informasi tentang nilai parameter tersebut.

Pada awalnya rancangan D-optimal diterapkan untuk model linear khususnya model regresi polinomial. Pada kasus homoskedastik (residual mempunyai variansi konstan) telah diteliti diantaranya pada kasus regresi kuadratik oleh Imhof *et al* (2000)

ISBN: 978-602-14387-0-1

, dalam penelitiannya proporsi dari tiga titik rancangan yang diambil tidak semua sama. Regresi derajat tiga dengan koefisien random diteliti oleh Luoma *et al* (2007), dalam penelitiannya ini parameter dipandang sebagai variabel random. Boon (2007) menggunakan cara exact dan numeris untuk menentukan rancangan D-optimal dari polinomial derajat tiga, menggunakan empat titik rancangan dengan proporsi setiap titik rancangan diambil sama. Regresi polinomial derajat *n* secara umum telah diteliti (Dette and Tobias (2000); Fang (2000); Atkinson *et al* (2007)). Pada dasarnya menggunakan rancangan yang bersifat *minimally supported* dengan proporsi setiap titik rancanga diambil sama. Atkinson *et al* (2007) menekankan penentuan titik rancangan menggunakan turunan pertama dari polinomial Legendre dengan derajat *n*. Sedangkan untuk kasus heteroskedastik (residual mempunyai variansi tidak konstan) penentuan rancangan D-optimal dengan menggunakan fungsi bobot. Beberapa peneliti menggunakan fungsi bobot yang berbeda beda. Huang *et al* (1995) menggunakan fungsi bobot dengan bentuk kuadrat dari peubah faktor. Chang and Lin (1997) menggunakan fungsi bobot dengan bentuk pangkat positif dan bentuk fungsi eksponensial. Antille *et al* (2003) menggunakan fungsi bobot dengan bentuk *arc tg* dan eksponensial. Dette and Trampisch (2010) menggunakan fungsi bobot yang sangat kompleks dan rumit. Widiharih dkk (2013a) mengaplikasikan tiga macam fungsi bobot dari Hoel (1958) dalam Antille *et al* (2003) dan diterapkan untuk regresi polinomial derajat tiga.

Rancangan *D-optimal* untuk model regresi eksponensial juga telah banyak diteliti baik pada kasus homoskedastik maupun kasus heteroskedastik. Model yang digunakan berbeda-beda dengan penerapan yang berbeda pula. Pada kasus homoskedatik Imhof (2001) mengembangkan model yang merupakan bentuk perkalian antara bentuk eksponensial dengan polinomial derajat *n*. Hans and Chaloner (2003) menggunakan model eksponensial yang diaplikasikan pada bidang pharmakokinetik dan model logaritma dari model eksponensial yang diaplikasikan pada plasma HIV RNA. Dette *et al* (2006) menggunakan empat macam model eksponensial , model pertama diaplikasikan pada bidang pertanian dan disebut model *Mitscherlichs growth*, model kedua dan ketiga diaplikasikan untuk analisis pertumbuhan kacang-kacangan dan model keempat diaplikasikan pada bidang pharmakokinetik. Atkinson (2008) menggunakan model bentuk eksponensial yang diaplikasikan pada bidang kesehatan yaitu menentukan konsentrasi obat dalam darah. Widiharih dkk (2012) menggunakan model

ISBN: 978-602-14387-0-1

eksponensial dengan mean terboboti, yang dapat diaplikasikan pada pertumbuhan populasi gulma disekitar kelapa sawit dengan respon berupa prosentase (berapa presen gulma yang masih hidup bila diberi perlakuan penyemprotan dengan dosis dan obat tertentu).

Widiharih *et al* (2013b) mengembangkan model eksponensial dengan mean terboboti ke model eksponensial terboboti (*weigted exponential model*) dengan dua parameter dan model eksponensial tergeneral (*generalized exponential model*) dengan dua parameter. Kedua model ini digunakan untuk menggambarkan kurva pertumbuhan dengan bentuk yang spesifik, yaitu respon berupa prosentase dan bentuk kurva menggambarkan pola pertumbuhan yang naik mencapai puncak (di titik maksimum) kemudian turun dan pada waktu tertentu relatif konstan mendekati nol.

Rancangan D-optimal untuk kurva pertumbuhan telah banyak diteliti. Chang and Lay (2002) menggunakan model polinomial. Dette and Pepelyshev (2008) menggunakan kurva pertumbuhan berbentuk sigmoidal dengan empat macam model yaitu model regresi eksponensial, regresi Weibull, regresi Logistik dan regresi Richard. Model kurva pertumbuhan yang lain diteliti oleh Li and Balakrishnan (2011) untuk menggambarkan model *tumor regrowth* yaitu model *double exponential regrowth* dan model LINEX *regrowth*. Sedangkan kurva pertumbuhan berbentu huruf S telah diteliti oleh Li (2011) dengan menggunakan fungsi Gompertz.

Berdasarkan model (1) dalam makalah ini akan dibahas rancangan *D-optimal* untuk model eksponensial tergeneral dengan tiga parameter dengan bentuk :

$$y = \lambda . e^{-\alpha x}(1 - e^{-\alpha x})^{\beta} , \alpha, \beta > 0, \lambda > 1, x\epsilon[0, \infty) \quad (2)$$

Untuk menentukan rancangan D-optimal model (2) dengan cara memaksimumkan matriks informasi dengan menggunakan metode Modifikasi Newton *(Modified Newton).*

2. Rancangan D-optimal Untuk Regresi Eksponensial Tergeneral Tiga Parameter.

Rancangan dengan p buah titik rancangan dinotasikan dengan :

$$\xi = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_p \\ w_1 & w_2 & \dots & w_p \end{pmatrix} \quad (3)$$

dengan : $w_i = \frac{r_i}{n}$

r_i : banyaknya ulangan untuk titik rancangan x_i

ISBN: 978-602-14387-0-1

n : banyaknya pengamatan dan $n = \sum_{i=1}^{p} r_i$

$\sum_{i=1}^{p} w_i = 1$

Untuk menunjukkan rancangan $\boldsymbol{\xi}$ seperti pada persamaan (3) merupakan rancangan *D-optimal* untuk model nonlinear $= \eta(x, \boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\varepsilon}$, langkah pertama yang dilakukan adalah melinearkan. Salah satu cara yang digunakan adalah menggunakan ekspansi deret Taylor disekitar titik $\beta_0 = (\beta_{01}, \beta_{02}, \dots, \beta_{0k})$ sebagai berikut :

$$E(y) = \eta(x, \boldsymbol{\beta}) = \eta(x, \boldsymbol{\beta_0}) + \left(\frac{\partial\, \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}^T} | \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta_0}\right) . (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta_0}) = \boldsymbol{c} + \left(\frac{\partial\, \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}^T} | \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta_0}\right) . \boldsymbol{\beta}$$

$$\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{\beta_0}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}^{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{\beta_0}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \qquad (4)$$

dengan : $\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{\beta_0}}(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial\, \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_1}, \frac{\partial\, \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_2}, \dots, \frac{\partial\, \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_k}\right)^T |_{\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta_0}}$

Secara umum persamaan (4) dapat dinyatakan sebagai :

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{x}).\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \qquad (5)$$

dengan : $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial\, \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_1}, \frac{\partial\, \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_2}, \dots, \frac{\partial\, \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_k}\right)^T$

Matriks informasi adalah :

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{p} w_i\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{x}) \qquad (6)$$

merupakan matriks simetri berukuran *kxk* dengan *k* adalah banyaknya parameter dalam model. Fungsi dispersi (variansi terstandar) yang bersesuaian dengan rancangan $\boldsymbol{\xi}$ adalah :

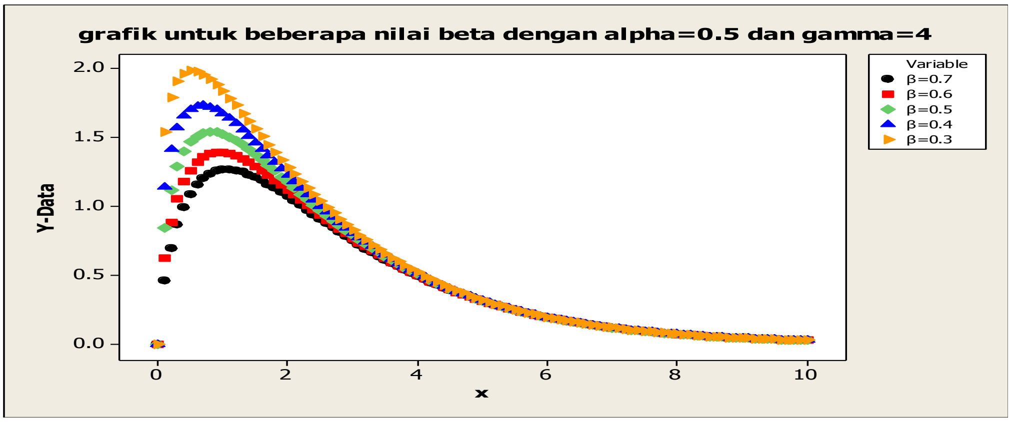
$$\mathrm{d}(x, \boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{f}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{x})\mathbf{M}^{-1}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \qquad (7)$$

Dalam matriks informasi $\mathbf{M}(\boldsymbol{\xi})$ seperti pada persamaan (6) masih mengandung parameter dalam model yang nilainya belum diketahui, sehingga diperlukan informasi awal tentang harga dari parameter tersebut. Untuk menunjukkan rancangan $\boldsymbol{\xi}$ seperti pada persamaan (5) merupakan rancangan D-optimal dengan membuktikan bahwa :

$$\mathrm{d}(x, \boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{f}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \leq \mathrm{k} \qquad (8)$$

Model regresi eksponensial tergeneral dengan tiga parameter seperti persamaan (2) mempunyai bentuk kurva yang spesifik. Grafik dari model eksponensial tergeneral untuk beberapa nilai β dengan $\alpha = 1$, dan $\lambda = 4$ seperti pada gambar 1 berikut :

ISBN: 978-602-14387-0-1



Gambar 1. Model Fungsi Eksponensial Tergenaral Tiga Parameter.

Berdasar Gambar 1, terlihat fungsi naik dari nol mencapai titik maksimum kemudian turun, setelah x=10 relatif konstan mendekati nol.

Bila Persamaan (2) dibawa seperti pada Persamaan (5) diperoleh :

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial\, \eta(x,\alpha,\beta,\lambda)}{\partial \alpha}, \frac{\partial\, \eta(x,\alpha,\beta,\lambda)}{\partial \beta}, \frac{\partial\, \eta(x,\alpha,\beta,\lambda)}{\partial \lambda}\right)^T$$

dengan : $\eta(x, \alpha, \boldsymbol{\beta}, \lambda) = \lambda e^{-\alpha x}(1 - e^{-\alpha x})^{\boldsymbol{\beta}}$.

$$\frac{\partial\, \eta(x,\alpha,\boldsymbol{\beta},\lambda)}{\partial \alpha} = \lambda.x.e^{-\alpha x}(1 - e^{-\alpha x})^{\boldsymbol{\beta}-1}\,(b.e^{-\alpha x} + e^{-\alpha x} - 1)$$

$$\frac{\partial\, \eta(x,\alpha,\beta,\lambda)}{\partial \beta} = \lambda.e^{-\alpha x}(1 - e^{-\alpha x})^{\boldsymbol{\beta}} \ln\,(1 - e^{-\alpha x})$$

$$\frac{\partial\, \eta(x,\alpha,\boldsymbol{\beta},\lambda)}{\partial \lambda} = e^{-\alpha x}(1 - e^{-\alpha x})^{\boldsymbol{\beta}}$$

Model regresi nonlinear yang digunakan disini dengan tiga parameter sehingga bila digunakan rancangan *minimally supported* diperlukan tiga titik rancangan dengan ulangan sama.

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \tag{9}$$

Matriks informasi yang sesuai dengan rancangan $\boldsymbol{\xi}$ pada Persamaan (9) adalah :

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{3} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{x}) \tag{10}$$

Matriks informasi seperti Persamaan (10) masih mengandung parameter yang tidak diketahui, sehingga determinannya juga mengandung parameter yang tidak diketahui. Jika dipunyai informasi awal tentang harga dari parameter maka dapat ditentukan titik-titik rancangan yang memenuhi kritria D-optimal.

ISBN: 978-602-14387-0-1

Memaksimumkan determinan matriks informasi Persamaan (10) menggunakan metode Modified Newton sebagai berikut:

1. Tentukan titik awal $x^{(0)}$ dan pilih toleransi ε untuk menghentikan proses iterasi.
2. Hitung $c_i^{(k)} = \frac{\partial g(x^{(k)})}{\partial x_i}$ $i = 1,2,\dots,n.$ dan $\|c^{(k)}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial g(x^{(k)})}{\partial x_i}\right)^2}$. dengan $g(x) = |\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\xi})|$. Jika $\|c^{(k)}\| < \varepsilon$ iterasi selesai, selain itu iterasi dilanjutkan.
3. Hitung matriks Hessian $H^{(k)}$ pada titik $x^{(k)}$.
4. Hitung $d^{(k)} = -\left[x^{(k)}\right]^{-1} c^{(k)}$
5. Hitung $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_x d^{(k)}$, dengan α_x dipilih dengan meminimumkan g$(x^{(k)} + \alpha_x d^{(k)})$
6. Ambil *k*=*k*+*1* dan kembali ke langkah 2.

Untuk beberapa nilai informasi awal dari α, β dan λ diperoleh titik-titik rancangan seperti Tabel 1 berikut.

Tabel 1. Titik-titik Rancangan Untuk Beberapa Nilai α, β dan λ

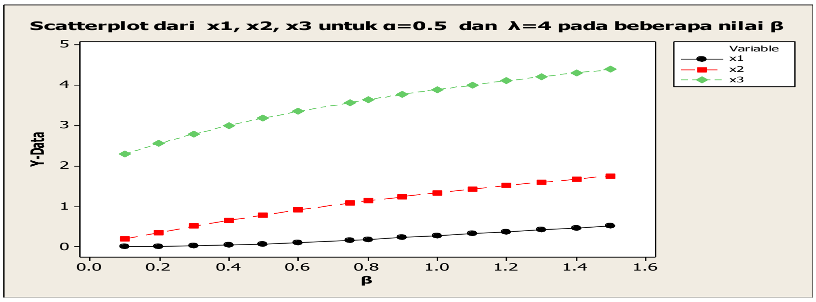
$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\beta}$	$\boldsymbol{\lambda}$	**Daerah Rancangan**	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	**3**
1	1	10	[0 , 5]	0.31412882	1.130678306	2.752250913
			[0.25 , 2.8]	0.31412882	1.130678306	2.752250913
			[0.35 , 5]	0.35	1.154403786	2.774594929
			[0.25 , 2.5]	0.30501346	1.087094571	2.5
			[0.35, 2.5	0.35	1.112276133	2.5
0.05	0.025	25	[0, 75]	7.50533979	26.68191456	63.40422563
			[7,65]	7.50533962	26.68191444	63.40422637
			[7.6 , 65]	7.6	26.74385131	63.46255489
			[7, 60]	7.37173168	26.06780995	60
			[8,55]	8	25.51818419	55
0.04	0.065	15	[0,80]	6.53663038	23.94447344	60.38407079
			[6,65]	6.53663038	23.94447344	60.38407079
			[7,75]	7	24.24959561	60.6724628
			[5,60]	6.52597912	23.88984373	60
			[7.5,55]	7.5	23.75715386	55

Berdasarkan simulasi pada Tabel 1, untuk daerah rancangan [*0*, *b*], (dengan b dipilih sehingga f mendekati 0), mempunyai titik rancangan : x_1, x_2, x_3 , untuk beberapa daerah rancangan membentuk pola sebagai berikut:

ISBN: 978-602-14387-0-1

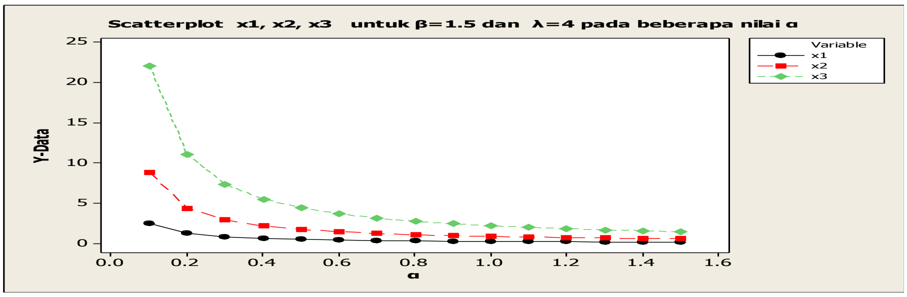
- Jika diambil daerah rancangan $[a,\ c]$ dengan a<x_1 dan $x_3 < c < b$ maka mempunyai titik rancangan : $x_1,\ x_2,\ x_3$
- Jika diambil daerah rancangan $[a,\ c]$ dengan $x_1 < a < x_3$ dan $x_3 < c < b$ maka mempunyai titik rancangan : $a,\ x^*{}_2,\ x^*{}_3$
- Jika diambil daerah rancangan $[a,\ c]$ dengan a <x_1 dan c <x_3 maka mempunyai titik rancangan : $x^*{}_1,\ x^*{}_2, c$
- Jika diambil daerah rancangan $[a,\ c]$ dengan $x_1 < a < x_3$ dan c <x_3 maka mempunyai titik rancangan : α, $x^*{}_2, c$

Scater plot dari titik-titik rancangan untuk $\alpha = 0.5$ dan $\lambda = 4$ pada beberapa nilai β seperti pada Gambar 2.



Gambar 2. Scaterplot Titik-titik Rancangan $\alpha = 0.5$ dan $\lambda = 4$ Pada Beberapa Nilai β

Berdasar Gambar 2, terlihat jika nilai β kecil maka jarak titik x_1, dan x_2 kecil. Sedangkan scater plot dari titik-titik rancangan untuk $\beta = 1.5$ dan $\lambda = 4$ pada beberapa nilai α seperti pada Gambar 3.



Gambar 3. Scaterplot Titik-titik Rancangan $\beta = 1.5$ dan $\lambda = 4$ Pada Beberapa Nilai α

Berdasar Gambar 3 rancangan *D-optimal* sensitif untuk nilai α yang kecil.

3. Kesimpulan

Dalam menentukan rancangan optimal peran peneliti sangat penting terutama pengetahuan ataupun berdasarkan percobaan yang telah dilakukan terdahulu tentang pola hubungan antara variabel faktor dan variabel respon yang akan dibangun. Pada model nonlinear diperlukan informasi awal tentang nilai parameter dalam model. Memaksimumkan determinan matriks informasi pada model eksponensial tergeneral ini mempunyai bentuk yang tidak *closed form* sehingga dilakukan dengan cara numeris menggunakan metode Modifikasi Newton.

DAFTAR PUSTAKA

Atkinson,A.C., Donev, A.N., and Tobias,R.D., 2007, *Optimum Experimental Designs, with SAS*, OXFORD University Press.

Atkinson, A.C.,2008, Examples of The Use of an Equivalence Theorem in Constructing Designs Optimum Experimental for Random Effect Nonlinea Regression Models, *Journal of Statistical Planning and Inference* , **138**, 2895-2606

Antille, G .,Dette,H.,and Weinberg, A., 2003, A Note On Optimal Designs In Weighted Polynomial Regression For The Classical Efficiency Functions, *Journal of Statistical Planning and Inference*,**113**, 285-292.

Boon, J.E.,2007, Generating Exact D-optimal Designs for Polynomial Models, *Spring Sim* ,Vol.2 , 121-126

Chang, F.C., and Lin, G.C., 1997, D-optimal Designs for Weighted Polynomial Regression, *Journal of Statistical Planning and Inference* ,**62**, 317-331.

Chang, F.C., and Lay, C.F., 2002, Optimal Designs for a Growth Curve Models, *Journal of Statistical Planning and Inference* ,**104**, 427-438.

de la Garza, A, 1954, Spacing of Information in Polynomial Regression, *Annals of Mathematical Statistics*, **25**, 123-130

Dette, H., Melas, V.B. and Wong, W.K., 2006, Locally D-optimal Designs for Exponential Regression Models, *Statistica Sinica*,**16**, 789-803.

Dette, H and Pepelyshev, A.,2008, Efficient Experimental Designs for Sigmoidal Growth Models, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **138**, 2-17.

Dette, H and Trampisch M.,2010, A General Approach To D-Optimal Designs For Weighted Univariate Polynomial Regression Models, *Journal of The Korean Statistical Society* , **39**, 1-26.

Fang, Z.,2002, D-optimal designs for polynomial regression model through origin, *Statistics and Probability Letters*, **57**, 343-351.

Fang, Z .,2003, D-optimal designs for weighted polynomial regression, *Statistics and Probability Letters*, **63**,205-213,

Guest, P.G., 1958, Efficiency Problems in Polynomial Estimation, *Annals of Mathematical Statistics*, **29**, 1134-1145

Han,C., and Chaloner, K.,2003, D-and c-optimal Designs for Exponential Regression Models Used in Viral Dynamics and other Applications, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **115**, 585-601.

Huang Lo, M.N., Chang, F.C., and Wong, W.K., 1995, D-optimal Designs for Polynomial Regression Without an Intercept, *Statistica Sinica*, **5**, 441-458.

Imhof, L.A., et al ., 2000, D-Optimal Exact Designs For Parameter Estimation In A Quadratic Model , *Sankhya:The Indian Journal of Statistics*, **vol 62**, series B, Pt.2 pp 266-275.

Imhof , L.A.,2001, Maximin Designs for Exponential Growth Models and Heteroscedastic Polynomial Models, *The Annals of Statistics*, **Vo. 29**, No.2, 561-576.

Kiefer, J., and Wolfowitz, J., 1960, The Equivalence of Two Extremum Problems, *Can. Jnl. Math*, **Vol. 12**, 363-366.

Li, G.,2011, Optimal and Eficient Designs for Gompertz Regression Models, *Ann Inst Stat Math* , DOI 10.1007/s10463-011-03040-y..

Li, G., and Balakrishnan, N.,2011, Optimal Designs for Tumor Regrowth Models, *Journal of Statistical Planning and Inference*,**141**, 644-654.

Luoma, A., Nummi, T., and Sinha, B.K., 2007, Optimal Designs in Random Coeffisient Cubic Regression Models, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **137**, 3611-3617.

Montgomerry, D.C., 2005, *Design and Analysis of Experiments*, Sixth Edition, John Willey and Sons. Inc.

Smith, K., 1918, On the Standart Deviations of Adjusted and Interpolated Value of an Observed Polynomial Function and its Constans and the Guidance They Give Towards a proper Choice of the Distribution of Observation, *Biometrika,* **12**, 1-85

Wald, A.,1943, On The Efficient Design of Statistical Investigations, *Annals of Mathematical Statistics*, **14**, 134-140.

White,L., 1973, An Extension of the general equivalence theorem to nonlinear models. *Biometrika* 60, 345-348.

Widiharih,T., Haryatmi,S., dan Gunardi.,2012, Rancangan D-Optimal Untuk Model Regresi Eksponensial Dengan Mean Terboboti, *Prosiding KNM XVI UNPAD* , 3-6 Juli 2012.

Widiharih, T., Haryatmi,S., dan Gunardi.,2013a, D-optimal Design Untuk Regresi Polinomial Terboboti, *IndoMS Journal on Statistics* , **Vol.1**, No.1, 29-38

Widiharih, T., Haryatmi,S., and Gunardi.,2013b, D-optimal designs for weighted exponential and generalized exponential models, *Applied Mathematical Sciences* ,**Vol.7** No.22, 1067-1079