ISBN: 978-602-14387-0-1

ALTERNATIF PEMBUKTIAN PENGEMBANGAN TEOREMA DIRAC UNTUK GRAF BERORDE KURANG ATAU SAMA DENGAN SEPULUH

Hasmawati, Jusmawati Massalesse, Hendra, Muhamad Hasbi
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanudin

Abstrak

Bilangan Ramsey adalah bilangan bulat terkecil n sedemikian sehingga pewarnaan dua warna pada graf lengkap K_n akan memuat subgraf sewarna yang isomorph dengan graf G atau H. Penentuan batas bawah bilangan Ramsey $R(G,H)$ menggunakan teorema Chv'atal dan Harary (1972), yaitu $R(G,H) \geq (\chi(\mathrm{H})\text{-}1)(C(G)\text{-}1)+1$. Untuk penentuan batas atas bilangan Ramsey $R(G,H)$, digunakan beberapa metode diantaranya, penerapan himpunan bebas terbesar, keterhubungan suatu graf, derajat terbesar dan terkecil suatu graf, dan penerapan Teorema Dirac. Teorema Dirac dapat digunakan untuk mencari batas atas bilangan Ramsey graf roda berorde besar. Namun untuk penetuan batas atas bilangan Ramsey graf roda orde sembarang, penggunaan teorema Dirac belum cukup. Selanjutnya, teorema Bondy menyajikan karakteristik graf yang memuat semua siklus sehingga teorema ini dapat digunakan dalam penentuan batas atas bilangan Ramsey untuk graf-graf siklus atau graf yang memuat siklus. Hanya saja teorema Bondy tersebut memberikan persyaratan yang sangat ketat. Akibatnya, masih banyak graf-graf yang merupakan graf pansiklis (memuat semua siklus) namun tidak memenuhi syarat yang diberikan oleh teorema Bondy. Dalam tulisan ini, disajikan suatu proposisi sebagai pengembangan teorema Dirac. Proposisi ini memberikan karakteristik graf pansiklis untuk orde tertentu namun tidak terlalu ketat seperti keketatan yang diberikan teorema Bondy.

Kata Kunci : *Bilangan Ramsey, Graf, Batas Bawah, Batas Atas, Siklus, Roda, Teorema Dirac, Teorema Bondy*

1. Pendahuluan

Beberapa metode yang digunakan pada penentuan bilangan Ramsey diantaranya penerapan konsep himpunan bebas suatu graf, keterhubungan suatu graf, derajat suatu graf, konsep multipartite, teorema Dirac dan lain-lain. Konsep himpunan bebas, keterhubungan suatu graf, derajat suatu graf, dan teorema Dirac pada umumnya digunakan pada penentuan bilangan Ramsey untuk graf-graf yang memuat siklus. Karena graf roda adalah graf yang memuat siklus, maka metode-metode yang disebutkan di atas juga dapat digunakan untuk mencari bilangan Ramsey graf roda khususnya untuk graf roda orde kecil. Lebih lanjut, Teorema Dirac adalah teorema tentang siklus dengan orde tertentu, yaitu graf yang memiliki siklus orde tertentu, sehingga Teorema Dirac dapat dipakai untuk mencari bilangan Ramsey graf roda orde tertentu. Namun, belum ditemukan suatu metode dalam pencarian bilangan Ramsey untuk graf graf yang memuat roda orde sembarang.

ISBN: 978-602-14387-0-1

Mengubah syarat cukup suatu teorema, akan mengubah pulah syarat perlunya. Olehnya itu, dengan mengubah syarat cukup teorema Dirac yakni menambahkan karakteristik graf non bipartit dengan derajat tertentu diharapkan syarat perlunya juga berubah yaitu adanya jaminan keberadaan semua siklus pada suatu graf. Dalam makalah ini,akan diperlihatkan bahwa penambahan karakteristik pada graf-graf yang memenuhi teorema Dirac merupakan graf pansiklis.

2. Tinjauan Pustaka

Membahas graf sebetulnya adalah membahas himpunan dan operasi-operasi yang ada padanya. Oleh karena itu, sebelum menyajikan pengertian graf terlebih dahulu menyajikan pengertian himpunan. Anggota dalam himpunan disyaratkan hanya muncul sekali saja. Misalkan S adalah himpunan hingga dan tak kosong. Didefinisikan $[S]^k = \{Y : Y \subset S, |Y| = k\}$.

Graf $G(V,E)$ adalah suatu sistem yang terdiri dari himpunan berhingga tak kosong $V = V(G)$ dan himpunan $E = E(G)$ dengan $E \subseteq [V]^2$. Himpunan V disebut *himpunan titik* dari G dan himpunan E disebut *himpunan sisi* dari G. Setiap u dan v di $V(G)$ disebut *titik* dan setiap $e = \{u,v\}$ di $E(G)$ disebut *sisi*. Selanjutnya, sisi $e = \{u,v\}$ ditulis uv. Titik u disebut *tetangga* (*neighbor*) dari titik v jika $e = uv$. Lebih lanjut, titik u dan v dikatakan *titik-titik bertetangga* (*adjacent*), sedangkan sisi e dikatakan *terkait* (*incident*) dengan titik u dan v. Dua sisi e_1 dan e_2 pada G disebut *sisi-sisi bertetangga* jika e_1 dan e_2 terkait pada satu titik yang sama. Sisi e_1 dan e_2 dikatakan *saling bebas* jika e_1 dan e_2 tidak bertetangga. Secara serupa, dua titik pada G dikatakan *saling bebas* jika kedua titik tersebut tidak bertetangga. Himpunan titik-titik yang saling bebas disebut *himpunan bebas*.

Kardinalitas himpunan S dinotasikan dengan $|S|$, adalah banyaknya anggota dari S. *Orde* graf G adalah $|V(G)|$ dan *ukuran* graf G adalah $|E(G)|$. Graf G berorde m dinotasikan dengan G_m. Graf G_n dikatakan *graf lengkap*, dinotasikan dengan K_n jika setiap dua titik pada G_n bertetangga. Misalkan v_i adalah sebarang titik pada G dan $S \subseteq V(G)$. Didefinisikan

$$N_S(v_i) = \{w \in S : wv_i \in E(G)\} \text{ dan } N_S[v_i] = N_s(v_i) \cup \{v_i\},$$

$$Z_S(v_1, v_2, \ldots, v_n) = N_S(v_1) \cap N_S(v_2) \cap \ldots \cap N_S(v_n),$$

dan

ISBN: 978-602-14387-0-1

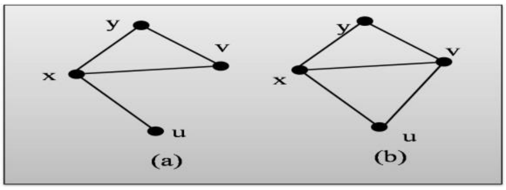
$$O_S(v_1, v_2, \dots, v_n) = N_S(v_1) \cup N_S(v_2) \cup \dots \cup N_S(v_n).$$

Derajat titik v_i, dinotasikan dengan $d_G(v_i)$, adalah $|N_G(v_i)|$. Derajat maksimum dari G adalah $\Delta G = maks\{d_G(v_i): v_i \in V(G)\}$, dan derajat minimum dari G adalah $\delta(G) = \min\{d_G(v_i): v_i \in V(G)\}$. Graf G disebut graf *r-reguler* jika $\Delta G = \delta(G) = r$.

Teorema 2.1. *Misalkan G adalah sebarang graf berorde n dan berukuran q. Jika $V(G) = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, maka*

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2q$$

Misalkan u dan v adalah dua titik pada graf G yang tidak bertetangga. Graf $G + \{uv\}$ adalah suatu graf baru dengan himpunan titik $V(G + uv) = V(G)$ dan himpunan sisi $E(G + uv) = E(G) \cup \{uv\}$. Contoh graf baru tersebut dapat dilihat pada Gambar 1.(b).

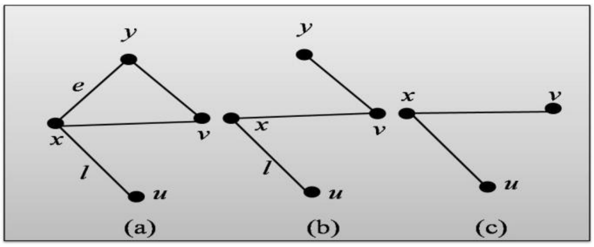


Gambar 1. (a) Graf G dan (b) Graf $G + uv$

Graf $H(V', E')$ disebut *subgraf* dari G jika $V' \subseteq V(G)$ dan $E' \subset E(G)$. Selanjutnya, subgraf H dari G ditulis $H \subseteq G$. Subgraf H dikatakan subgraf *maksimal* dari G jika H memuat semua sisi $xy \in E(G)$ untuk semua $x, y \in V'$. Untuk sebarang himpunan $S \subset V(G)$, subgraf *terinduksi* oleh S dari G adalah subgraf maksimal dari G dengan himpunan titik S dan dinotasikan dengan $G[S]$. Subgraf $G[V(G)\backslash V(H)]$ dinotasikan dengan $G\backslash H$.

Misalkan $G(V, E)$ adalah sebarang graf. Misalkan pula $A \subset V$ dan $B \subset E$. Didefinisikan $V\backslash A = \{u \in V: u \notin A\}$ dan $E\backslash B = \{e \in E: e \notin B\}$. Graf $G - A$ adalah suatu subgraf dari G dengan $V(G - A) = V\backslash A$ dan $E(G - A) = E\backslash \{xy: x \in A \text{ atau } y \in A\}$. Graf $G - B$ adalah suatu subgraf dari G dengan $V(G - B) = V$ dan $E(G - B) = E\backslash B$. Khususnya untuk $A = \{x\}$ dan $B = e$ dengan $e = xy$, subgraf $G - B$ ditulis $G - e$ dan subgraf $G - A$ ditulis $G - x$. Contoh subgraf-subgraf tersebut dapat dilihat pada Gambar 2.

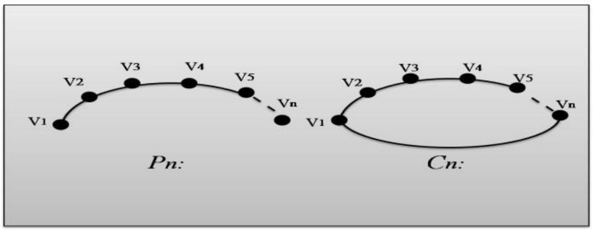
ISBN: 978-602-14387-0-1



Gambar 2. (a) Graf G, (b) subgraf $G - e$, dan
(c) subgraf $G - y$

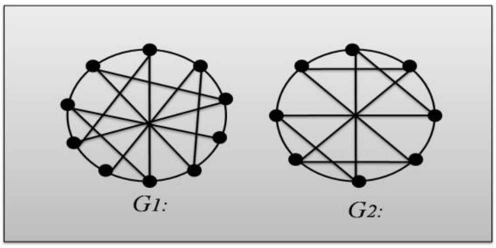
Lintasan (path) P dengan $n \geq 1$ titik adalah graf yang titik-titiknya dapat diurutkan dalam suatu barisan $u_1, u_2, \dots, u_n$ sedemikian sehingga $E(P) = \{u_i u_{i+1}: i = 1, \dots, n-1\}$. Graf G dikatakan *terhubung* jika untuk setiap dua titik u dan v pada graf tersebut terdapat suatu lintasan yang memuat u dan v.

Jika $P_n \coloneqq v_1, v_2, \dots, v_n$ adalah suatu lintasan berorde n dan $n \geq 3$, maka graf $C_n \coloneqq P_n + \{v_1 v_n\}$ disebut *siklus* berorde n (Lihat Gambar 3). Panjang P_n adalah $n - 1$, yaitu banyaknya sisi pada P_n dan panjang siklus C_n adalah n.



Gambar 3. (a) Lintasan P_n dan (b) Siklus C_n

Panjang siklus terbesar pada suatu graf G dinotasikan dengan $c(G)$, sedangkan panjang siklus terkecil dinotasikan dengan $g(G)$. Graf G dengan orde n disebut *pansiklis* (pancyclic) jika G memuat semua siklus C_l dengan $3 \leq l \leq n$, dan disebut *pansiklis lemah* (weakly pancyclic) jika G memuat siklus C_h untuk $g(G) \leq h \leq c(G)$. Graf G_1 pada Gambar 4 adalah pansiklis lemah dengan $g(G) = 4$ dan G_2 adalah pansiklis karena memuat semua siklus C_l untuk $3 \leq l \leq 8$.



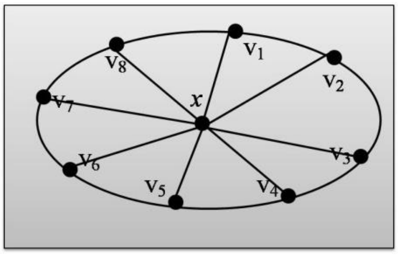
Gambar 4

ISBN: 978-602-14387-0-1

Teorema 2.2. *Jika G adalah graf berorde n dan berukuran* $n^2/_4$ *maka G memuat sebuah siklus ganjil atau* $G = K_{n/_2, n/_2}$

Teorema 2.3. *Misalkan G adalah sebarang graf berorde n. Jika* $\deg(u) + \deg(v) \geq n,\ \forall\, u, v \in V(G)$ *maka G dalah graf hamilton.*

Roda W_k adalah suatu graf yang dibentuk dari siklus C_k dengan menambahkan satu titik, sebut *x*, dan menambahkan k sisi dari titik *x* ke semua titik di C_k. Dalam hal ini, titik *x* disebut *poros* (hub) roda dan siklus C_k disebut *rim* roda. Pada Gambar 5 adalah roda W_8 dengan poros *x*.



Gambar 5

2.1 Teorema Dirac.

Teorema Dirac adalah suatu teorema yang dapat memberikan gambaran tentang kaitan antara derajat titik dan panjang siklus terbesar pada suatu graf.

Teorema 2.1.1 (Dirac, 1952). $misalkan\ G\ adalah\ graf\ berorde\ n \geq 3\ dan\ \delta(G) = \delta. jika\ G\ terhubung$-2, $maka\ c(G) \geq \min\{2\delta, n\}$

Sebelumnya telah dijelaskan bahwa pada penelitian ini akan dikaji pengembagan teorema Dirac, yakni adanya dugaan bahwa graf dengan beberapa syarat tertentu akan memuat semua siklus atau pansiklis. Sebelum masalah ini diuraikan secara rinci terlebih dahulu disajikan beberapa graf khusus dan karakteristiknya.

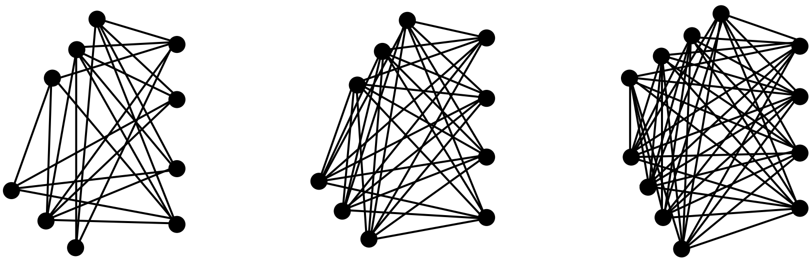
Misalkan V_1, V_2, ... V_k adalah beberapa himpunan bagian dari himpunan titik *V*(*G*) pada suatu graf *G*. Untuk setiap *i*, himpunan V_i disebut *partisi* dari *V*(*G*) jika $V_i \neq \emptyset$, dan $V(G) = \cup_{i=1}^{k} V_i$ serta $V_i \cap V_j = \emptyset$ dengan $i \neq j$. Graf *G* disebut graf *k-partit* jika *V*(*G*) dapat dipartisi ke dalam *k* partisi himpunan bebas V_1, V_2,..., V_k. Graf *k*-partit untuk $k \geq 2$ dengan $|V_i| = n_i$ disebut graf *multipartit,* dinotasikan dengan $B_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$. Khusus untuk $k = 2$, disebut graf *bipartit.* Graf multipartit $B_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ disebut graf *multipartit lengkap* jika setiap titik di setiap partisi bertetangga dengan semua titik di

ISBN: 978-602-14387-0-1

partisi-partisi lainnya. Graf multipartit lengkap dinotasikan dengan $K_{n_1,n_2,\dots,n_k}$. Menurut pengertian ini, bintang S_n merupakan graf bipartit lengkap dengan notasi $K_{1,n-1}$.

Misalkan $V_1, V_2, \dots, V_k$ adalah beberapa himpunan bagian dari himpunan titik $V(G)$ pada suatu graf G. Untuk setiap i, himpunan V_i disebut $partisi$ dari $V(G)$ jika $V_i \neq \emptyset$, dan $V(G) = U_{i=1}^{k} V_i$ serta $V_i \cap V_j = \emptyset$ dengan $i \neq j$. Graf G disebut graf k-$partit$ jika $V(G)$dapat dipartisi ke dalam k partisi himpunan bebas $V_1, V_2, \dots, V_k$. Graf $k - patit$ untuk $k \geq 2$ dengan $|V_i| = n_i$ disebut graf $multipartit$, dinotasikan dengan $B_{n1,n2,\dots nk}$. Khusus untuk $B_{n1,n2}$, grafnya disebut graf $bipartit$. Graf multipartit $B_{n1,n2,\dots nk}$ disebut graf $multipartit\ lengkap$ jika setiap titik disetiap partisi bertetangga dengan semua titik dipartisi-partisi lainnya. Graf multiparti lengkap dinotasikan dengan $K_{n1,n2,\dots nk}$.

Menurut pengertian ini, bintang S_n merupakan graf bipartit lengkap dengan notasi $K_{1,n-1}$. Graf $K_{n1,n2,\dots nk}$ disebut graf $multipartit\ lengkap\ seimbang$ dinotasikan dengan $K_{k\times t}$, jika $|V_i| = t$ untuk setiap i. Pada Gambar 6: Gambar (a) adalah graf multipartit $B_{3,3,4}$, gambar (b) adalah graf multipartit lengkap $K_{3,3,4}$, dan gambar (c) adalah graf multipartit lengkap seimbang $K_{3,3,4}$.



(a) (b) (c)

Gambar 6. Beberapa Graf Multipartit.

Berikut ini adalah proposisi yang terkait dengan bipartit atau non bipartit suatu graf.

Lemma 2.1.1 Brandt dan Faudree, (1998).

$Misalkan\ G\ adalah\ graf\ tak\ berpartit.\ Jika\ G\ mempunyai\ \ \delta(G) \geq \frac{n+2}{3},$

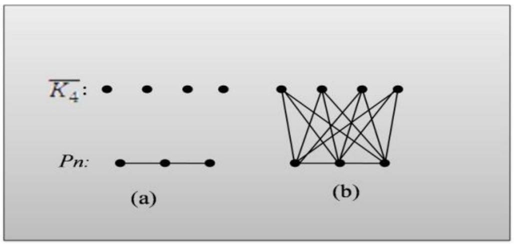
$maka\ G\ adalah\ pansiklis\ lemah\ dengan\ panjang\ lingkaran\ terkecil\ 3\ atau\ 4.$

ISBN: 978-602-14387-0-1

Misalkan G_i adalah graf dengan himpunan titik V_i dan himpunan sisi X_i, $i = 1,2,\ldots,k$. *Graf gabungan* $G = \bigcup_{i=1}^{k} G_i$ adalah suatu graf dengan himpunan titik $V = \bigcup_{i=1}^{k} V_i$ dan himpunan sisi $X = \bigcup_{i=1}^{k} X_i$. Definisi *graf jumlah* secara umum belum ada. Namun untuk jumlah dua graf, telah didefinisikan seperti berikut: *Graf Jumlah* (join) $G = G_1 + G_2$ adalah suatu graf dengan $V(G) = V_1 \cup V_2$ dan

$E(G) = X_1 \cup X_2 \cup \{uv : u \in V_1, v \in V_2\}$ (Disertasi Hasmawati, 2007).

Contoh graf jumlah $P_3 + \overline{K_4}$ dapat dilihat pada Gambar 7 (b). Dengan demikian, bintang S_n dapat didefinisikan sebagai $K_1 + \overline{K_m}$, roda W_m dapat didefinisikan sebagai $K_1 + C_m$.



Gambar 7. (a) graf $P_3 \cup \overline{K_4}$ dan (b) graf $P_3 + \overline{K_4}$.

2.2 Pewarnaan dan Dekomposisi

Secara umum pewarnaan graf terdiri atas pewarnaan titik dan pewarnaan sisi pada graf G. Pewarnaan titik adalah pemberian warna pada himpunan titik $V(G)$ dengan aturan setiap titik diberi hanya satu warna dan dua titik yang bertetangga diberi warna yang berbeda. Graf G dikatakan *berwarna* k jika G dapat diwarnai dengan k warna. Bilangan asli terkecil k sedemikian sehingga G berwarna k disebut *bilangan kromatik* dari G, dinotasikan $\chi(G)$. Sebagai contoh :

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2 & untuk\ n\ genap \\ 3 & untuk\ n\ ganjil. \end{cases}$$

$$\chi(W_m) = \begin{cases} 3 & untuk\ n\ genap \\ 4 & untuk\ n\ ganjil. \end{cases}$$

Sedangkan pewarnaan sisi adalah memberi warna pada himpunan sisi $E(G)$ sedemikian sehingga sisi-sisi yang bertetangga mempunyai warna yang berbeda. Selain kedua pewarnaan ini, juga terdapat bentuk pewarnaan lain yaitu pemberian dua atau lebih warna pada himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ sedemikian sehingga G

ISBN: 978-602-14387-0-1

memuat suatu subgraf yang *monokromatik* (subgraf yang memiliki satu warna). Bentuk pewarnaan ini digunakan pada penentuan bilangan Ramsey.

Misalkan G adalah graf dan $H_i \subseteq G$ untuk setiap i. *Dekomposisi* graf G adalah himpunan $\{H_1, H_2, \dots H_k\}$ sedemikian sehingga $E(G) = \bigcup_{i=1}^{k} E(H_i)$, $V(H_i) = V(H_j)$ dan $E(H_i) \cap E(H_j) = \emptyset$ untuk setiap $i \neq j$ dan $i, j \in \{1,2, \dots, k\}$. Dekomposisi dari graf G ditulis dengan notasi $G = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_k$. Sebagai contoh $K_4 = S_4 \oplus (C_3 \cup K_1)$ dan $K_m = F_m \oplus \overline{F_m}$.

3. Hasil Penelitian

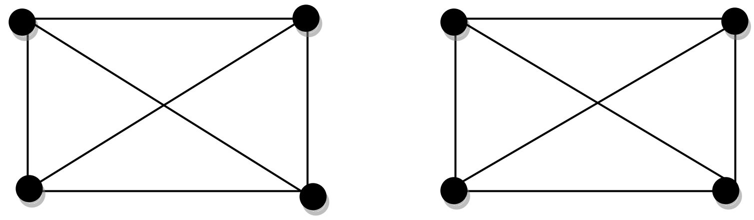
Pada penelitian ini akan dilakukan kajian pada teorema Dirac dan Lemma Brant. Hasil kajian dituliskan dalam bentuk proposisi seperti berikut.

Proposisi 3.1

Misalkan G adalah graf berorde $n \geq 3$ dan nonbipartit. Jika $\delta(G) \geq \frac{n+2}{2}$ dan terhubung-2 , maka graf G adalah pansiklik.

Verifikasi Proposisi 3.1

1. Diberikan graf G sembarang berorde 4 terhubung-2 dan non bipartit dengan $\delta(G) \geq 1{,}6 = \frac{n+2}{3}$. Bentuk graf G adalah graf lengkap atau graf seperti berikut:

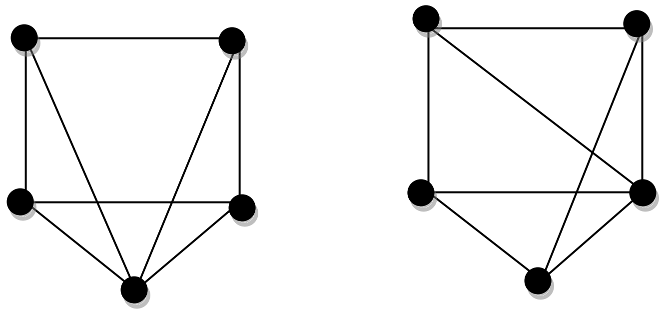


Gambar 8. Graf non bipartit dan terhubung-2 berorde 4

Mudah dilihat bahwa graf dengan karakteristik yang diberikan memuat siklus orde 3 dan 4. Jadi graf G pansiklik.

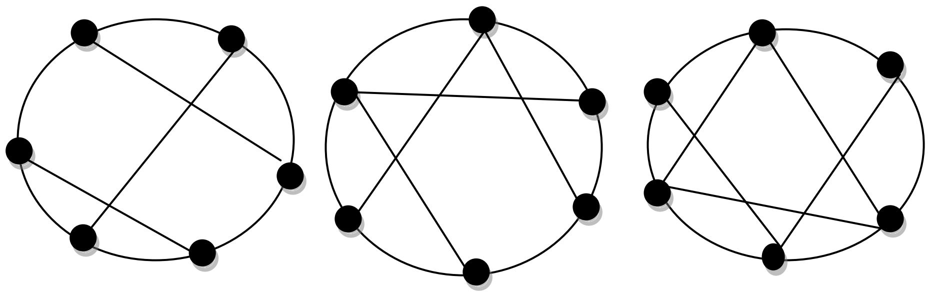
2. Diberikan graf G sembarang berorde 5 dan non bipartit dengan $\delta(G) \geq 2{,}33 = \frac{n+2}{3}$. Dalam hal ini graf G adalah graf dengan orde paling sedikit 3 dengan bentuk seperti pada Gambar 3.2. Mudah diketahui bahwa graf tersebut memuat siklus berorde 3,4, dan 5.

ISBN: 978-602-14387-0-1



Gambar 9. Graf non bipartit dan terhubung-2 berorde 5 dengan derajat paling sedikit 3.

3. Misalkan graf G berorde 6, non bipartit dengan $\delta(G) \geq 2{,}6 = \frac{n+2}{3}$.



Gambar 10. Graf non bipartit dan terhubung-2 berorde 6 dengan derajat paling sedikit 3.

Seperti pada Gambar 9, graf G adalah graf berderajat paling sedikit 3. Perbedaannya adalah graf G pada Gambar 10 adalah graf berorde 6. Juga mudah dilihat bahwa graf G pada Gambar 10 memuat siklus berorde 3, 4, 5, dan 6 atau pansiklik.

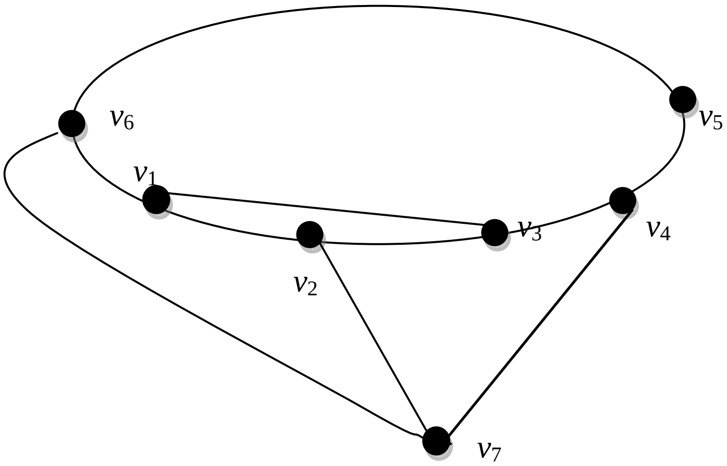
4. Misalkan G adalah graf non bipartit, terhubung-2 dan berorde n, $10 \geq n \geq 7$ dengan $\delta(G) \geq \frac{n+2}{3}$. Menurut Lemma 2.1.1, graf G adalah pansiklik lemah yaitu memuat C_l $g(G) \leq C_l \leq c(G)$ dengan $g(G) = 3$ atau $g(G) = 4$ Karena G adalah graf non bipartit, maka $g(G) = 3$. Jadi G memuat C_3. Menurut Teorema 2.1.1, $c(G) \geq 2(\frac{n+2}{3})$.

Selanjutnya, akan dibagi atas 3 kasus:

a. Untuk $n = 7$ maka dearajat terkecil pada G atau $\delta(G) \geq 3$ dan lingkaran terbesar pada G adalah paling sedikit 6 atau $c(G) \geq 6$. Berarti G memuat C_3, C_4, C_5, dan C_6 . Misalkan $C_6: v_1, v_2, \ldots, v_6, v_1$. Karena $d(v_7) \geq 3$, maka titik v_7 bertetangga

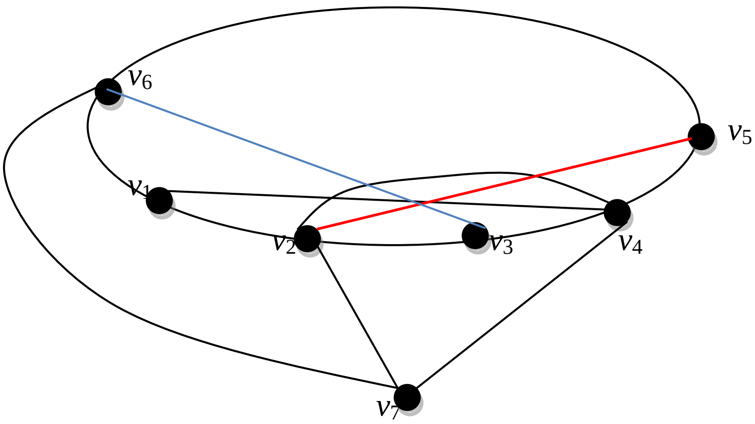
ISBN: 978-602-14387-0-1

dengan paling sedikit 3 titik di C_6 . Jika $N_{C_6}(v_7) = \{v_j, v_{j+1}, v_k\}$ maka $V(C_6) \cup \{v_7\}$ membentuk $C_7: v_1, \dots, v_j, v_7, v_{j+1}, v_n$ Misalkan $\forall u, v \in N_{C_6}(v_7), (u, v) \notin V(C_6)$, berarti siklus C_3 pada G tidak memuat v_7. Dengan demikian, siklus C_3 memuat titik-titik C_6 seperti pada ilustrasi berikut. Titik v_7 bertetangga dengan hanya 1 titik pada C_3.



dapat dilihat bahwa graf G memuat C_7: $v_1, v_2, v_7, v_6, v_5, v_4, v_3, v_1$

Kasus lain adalah titik v_7 bertetangga dengan 2 titik pada C_3, sebut v_1 *dan* v_3. Titik diluar tetangga v_7 pada C_6 saling bebas.



Perhatikan bahwa graf G tidak memuat C_7. Jadi Proposisi 3.1 tidak berlaku untuk n =7.

b. Untuk n = 8, dearajat terkecil pada G adalah 4 atau $\delta(G) \geq \frac{8+2}{3} = 3.3$ dan lingkaran terbesar pada G adalah paling sedikit 2(3.3)=6.6 atau $c(G)$≥6.6. Berarti G memuat siklus terbesar dengan panjang 7. Dengan demikian, graf G memeuat C_3, C_4 , C_5 , C_6 dan C_7. Misalkan C_7 : $v_1, v_2, \dots, v_7, v_1$. Karena $d(v_7) \geq 4$, maka titik v_8

ISBN: 978-602-14387-0-1

bertetangga dengan paling sedikit 4 titik di C_7 . Jika $N_{C_7}(v_7) = \{v_j, v_{j+1}, v_k, v_r\}$ maka $V(C_7) \cup \{v_8\}$ membentuk $C_8: v_1, \dots, v_j, v_8, v_{j+1}, v_n$. Misalkan $\forall u, v \in N_{C_7}(v_8), (u, v) \notin V(C_7)$, hal ini tidak mungkin karena banyaknya titik pada C_7 adalah 7 atau ganjil sehingga pasti paling sedikit ada satu pasang titik di C_7 yang bertetangga dan terkait dengan v_8. Dengan demikian, $c(G) = 8$ sehingga graf G memuat C_l dengan $3 \le C_l \le 8$. Jadi graf berorde 8 yang memenuhi syrat seperti pada Proposisi 3.1 merupakan graf pansiklis.

4. Kesimpulan

Pada penelitian ini, dihasilkan suatu rumusan sebagai berikut: Graf G berorde n genap dengan $8 \ge n \ge 3$, nonbipartit dan $\delta(G) \ge \frac{n+2}{2}$ serta terhubung-2 , adalah graf G pansiklik. Rumusan ini juga berlaku untuk n =3 dan n =5, tetapi tidak berlaku untuk n = 7.

DAFTAR PUSTAKA

Chartrand, G., dan Lesniak, L., CRC (1996) : Graph and Digraph, 3th , *Chapman and Hall.*

Diestel, R. (1999):Graph Theory, 2th, *Springer-Verlag*.

Hasmawati. (2007) : *Disertasi* Bilangan Ramsey untuk Graf yang Memuat Bintang, *Departemen Matematika ITB*, Indonesia.

Jusmawati M. dan Hasmawati, (2010-2011): Pengembangan metode penentuan bilangan Ramsey dan aplikasinya pada teori informasi, *Hibah Bersaing DIPA Unhas tahun* 2010 *dan tahun* 2011.

Korolova, A., (2005): Ramsey numbers of stars versus wheels of similar sizes, *Discrete Math*., **292**, 107-117.

Rosta, V. (Des. 2004) : Ramsey theory application, *The Electronic Journal of combinatorics # DS*13.