ESTIMASI *LIKELIHOOD MAXIMUM PENALIZED* DARI MODEL REGRESI SEMIPARAMETRIK

Nur Salam[1]
[1]Universitas Lambung Mangkurat (UNLAM)

Abstract

The semiparametric regression model in matrix form is $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{Z}) + \boldsymbol{\varepsilon}$ where $\boldsymbol{X}^T$ is the matrix of predictor variables for the parametric component, $\boldsymbol{Z}$ is predictor variables of component nonparametric, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)^T$ is the vector $(k + 1) \times 1$ for the unknown parameters, $\boldsymbol{f}$ is an unknown function which in this research using B-spline function approach and $\boldsymbol{\varepsilon}$ is a random error vector, $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(0, \sigma^2\boldsymbol{I})$. The method of the research is literature study. This research is begun by explaining the semiparametric regression model, semiparametric regression in matrix form, estimating semiparametric regression models using likelihood maximum penalized method by first estimating the parametric part and the nonparametric part and then goes on to conclude from the results of the estimation. The estimation results of the regression model semiparametric using the method of likelihood maximum penalized is

$$\hat{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \hat{\boldsymbol{f}}$$

$$\hat{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{V}^{-1})^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X})^{-1}(\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{V}^{-1})^{\boldsymbol{T}}\mathbf{X}) +$$

$$\mathbf{B}\,[(\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{V}^{-1}\mathbf{B} + \lambda\boldsymbol{K})^{-1}(\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{V}^{-1})^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X})^{-1}(\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{V}^{-1})^{\boldsymbol{T}}\mathbf{X})^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{V}^{-1} - \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{V}^{-1}\mathbf{B}]$$

The estimation results are divided into two parts, namely parametric and nonparametric components, with estimator for the component parametrics is

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{V}^{-1})^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X})^{-1}(\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{V}^{-1})^{\boldsymbol{T}}\mathbf{X})$$

The estimator for the nonparametric component is

$$\hat{\boldsymbol{f}} = \mathbf{B}\,[(\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{V}^{-1}\mathbf{B} + \lambda\boldsymbol{K})^{-1}(\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{V}^{-1})^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X})^{-1}(\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{V}^{-1})^{\boldsymbol{T}}\mathbf{X})^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{V}^{-1}] - [\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{V}^{-1}\mathbf{B}]$$

***Keywords**: Semiparametric Regression, Matrix of Quadratic Forms, Penalized Maximum Likelihood.*

1. Pendahuluan

Analisis regresi merupakan salah satu teknik statistika yang digunakan untuk menjelaskan tentang hubungan antara suatu variabel bebas (*independent*) sebagai variabel prediktor (X) dengan variabel tak bebas (*dependent*) sebagai variabel respon (Y) yang dapat dinyatakan sebagai bentuk model matematis. Terdapat beberapa model dalam analisis regresi diantaranya yaitu model regresi parametrik dan model regresi nonparametrik. Regresi parametrik adalah model regresi dengan asumsi bahwa fungsi regresinya diketahui dan memilki parameter. Sedangkan regresi nonparametrik adalah

ISBN: 978-602-14387-0-1

model regresi yang tidak diketahui fungsi regresinya. Hal ini memberi fleksibilitas yang lebih besar di dalam berbagai bentuk yang mungkin dari fungsi regresi. Untuk mengkonstruksi model regresi nonparametrik terlebih dahulu dipilih ruang fungsi yang sesuai, di mana fungsi regresi $f(.)$ diyakini termasuk di dalamnya. Pemilihan ruang fungsi ini biasanya dimotivasi oleh sifat kelicinan (*smoothing*) yaitu diasumsikan dimiliki oleh fungsi regresi.

Estimasi fungsi regresi tersebut dapat dilakukan melalui dua pendekatan yaitu pendekatan parametrik dan nonparametrik. Pendekatan parametrik adalah pendekatan yang dilakukan jika fungsi regresinya diketahui dan bergantung pada parameter, sehingga mengestimasi fungsi regresinya sama dengan mengestimasi parameternya. Sedangkan pendekatan nonparametrik dilakukan jika fungsi regresinya tidak diketahui sehingga mengestimasi fungsi regresinya dilakukan dengan mengestimasi fungsi regresi yang tidak diketahui tersebut dengan pendekatan estimator kernel, spline atau yang lain. Model semiparametrik (model linear parsial) merupakan model pendekatan baru dalam regresi di antara dua model regresi sudah populer yaitu regresi parametrik dan regresi nonparametrik. Model semiparametrik (model linear parsial) merupakan model gabungan yang memuat keduanya yaitu komponen parametrik dan komponen nonparametrik. Estimasi model semiparametrik telah dapat dilakukan dengan diberbagai metode yang ada misalnya metode kuadrat terkecil (*least square*), metode *penalized least square, mean square error* (MSE) dan lain-lain. Namun suatu hal yang cukup menarik adalah bagaimana mengestimasi model linear parsial dalam hal ini mengestimasi parameter dan fungsinya menggunakan metode *likelihood maximum penalized*. Oleh karena itu pada penelitian ini saya akan mengkaji tentang estimasi model linear parsial menggunakan metode *likelihood maximum penalized*.

2. Tinjauan Pustaka

2.1. Regresi Parametrik

Regresi parametrik merupakan metode statistik yang digunakan untuk mengetahui pola hubungan antara variabel prediktor dengan variabel respons, dengan asumsi bahwa telah diketahui bentuk fungsi regresinya. Hubungan antara variabel respons dan variabel prediktor dalam model dapat terjadi dengan fungsi linier maupun nonlinier dalam parameter (Draper dan Smith, 1996). Sedangkan Secara umum bentuk

ISBN: 978-602-14387-0-1

model regresi linear berganda dengan k variabel prediktor diberikan oleh persamaan berikut:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \cdots + \beta_k x_{ik} + \varepsilon_i \quad \text{atau}$$

$$y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j x_{ij} + \varepsilon_i \qquad (1)$$

dengan j = 1, 2, . . ., k, x_{ij} adalah nilai dari variabel prediktor ke-j untuk pengamatan ke-i, untuk i = 1, 2, . . ., n, atau dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}^T \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \qquad (2)$$

Dengan, **y** adalah vektor dari variabel respons berukuran $n \times 1$, $\boldsymbol{X}^T$ merupakan matriks berukuran $n \times p$, dengan $p = k + 1$ dan $\boldsymbol{\beta}$ adalah vektor parameter yang akan diestimasi berukuran $p \times 1$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ adalah vektor error random berukuran $n \times 1$ berdistribusi normal, independen dengan mean nol dan varians σ^2. Secara lengkap matriks dan vektor–vektor tersebut diberikan oleh $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\beta}$ dan matriks $\boldsymbol{X}$ yaitu:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{X}^T = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ 1 & x_{31} & x_{32} & \cdots & x_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Untuk baris ke-i dari matriks $\boldsymbol{X}^T$ dapat dinotasikan oleh $\boldsymbol{X}_i^T$ yang memuat angka 1 diikuti oleh nilai variabel prediktor dari pengamatan ke-j, yaitu:

$\boldsymbol{X}_i^T = [1 \quad x_{i1} \quad \cdots \quad x_{ik}]$ (Ruppert, Wand dan Carrol, 2003).

2.2. Regresi Nonparametrik

Regresi nonparametrik digunakan apabila bentuk pola hubungan antara variabel respons dengan variabel prediktor tidak diketahui bentuk fungsi regresinya. Dalam regresi nonparametrik kurva regresi hanya diasumsikan mulus (*smooth*) dalam arti termuat dalam suatu ruang fungsi tertentu sehingga mempunyai sifat fleksibilitas yang tinggi. Model regresi nonparametrik secara umum adalah sebagai berikut:

$$y_i = f(z_i) + \varepsilon_i,\ i = 1, 2, . . ., n \qquad (3)$$

dengan, y_i adalah variabel respons, z_i merupakan variabel prediktor, $f(z_i)$ adalah fungsi regresi, dimana bentuk kurva regresinya tidak diketahui dan ε_i adalah *error* random berdistribusi normal, dengan mean nol dan varians σ^2.

Jika diberikan matriks berikut :

ISBN: 978-602-14387-0-1

$$\mathrm{y} = \begin{bmatrix} \mathrm{y}_1 \\ \mathrm{y}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{y}_n \end{bmatrix} \qquad \mathrm{f}(\mathbf{Z}) = \begin{bmatrix} f(z_1) \\ f(z_2) \\ \vdots \\ f(z_n) \end{bmatrix} \qquad \textbf{\textit{dan}} \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

maka model regresi pada Persamaan (3) dapat dituliskan dalam bentuk matriks. sebagai berikut:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f(Z)} + \varepsilon \qquad \text{(Hardle, 1994)} \qquad (4)$$

Definisi 1.1.

Fungsi densitas bersama dari n *variabel random* $X_1, \dots, X_n$ *dihitung pada* $x_1, \dots, x_n$ *yaitu* $f(x_1, \dots, x_n; \theta)$ *dikatakan sebagai suatu fungsi likelihood. Untuk tetapan nilai* $x_1, \dots, x_n$ *suatu fungsi likelihood adalah suatu fungsi dari* θ *dan sering dinyatakan dengan* $L(\theta)$. *Jika* $X_1, \dots, X_n$ *menyatakan suatu variabel random dari* $f(x;\theta)$ *maka* $L(\theta) = f(x_1;\theta) \dots f(x_n;\theta)$.

Definisi 1.2.

Diberikan $L(\theta) = f(x_1, \dots, x_n; \theta)$ $\theta \in \Omega$ *menjadi pdf bersama dari* $X_1, \dots, X_n$. *Untuk suatu himpunan yang diberikan yaitu* $(x_1, \dots, x_n)$ *suatu nilai* $\hat{\theta}$ *di dalam* Ω *pada* $L(\theta)$ *adalah suatu nilai maksimum yang disebut suatu estimasi likelihood maksimum (MLE) dari* θ. *Dengan* $\hat{\theta}$ *adalah suatu nilai dari* $\hat{\theta}$ *yang memenuhi* $f(x_1, \dots, x_n; \hat{\theta}) = \underset{\theta \in \Omega}{max}\ f(x_1, \dots, x_n; \theta)$.

Definisi 1.3.

Suatu himpunan variabel random $X_1, \dots, X_n$ *disebut sebagai normal multivariate atau distribusi normal k-variabel jika pdf bersama mempunyai bentuk :*

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k |\boldsymbol{V}|}} exp\left[-\frac{1}{2}((\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{V}^{-1} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})\right]$$

dengan $\boldsymbol{x}' = (x_1, \dots, x_k)$, $\mu' = (\mu_1, \dots, \mu_k)$ *dan* $\boldsymbol{V} = \{Cov(X_i X_j\}$ *dan* $\mu_i = E(X_i)$ *dan* $\boldsymbol{V}$ *adalah suatu matriks kofarian nonsingular k x k.*

2.3. Spline

Spline adalah potongan polinomial, yaitu polinomial yang memiliki sifat tersegmen. Sifat tersegmen ini memberikan fleksibilitas lebih dari polynomial biasa, sehingga memungkinkan untuk menyesuaikan diri secara lebih efektif terhadap karakteristik dari suatu fungsi atau data (Budiantara dkk, 2006). Secara umum, fungsi

ISBN: 978-602-14387-0-1

Spline berorde p adalah sembarang fungsi yang dapat ditulis dalam bentuk (Rodriguez, 2001):

$$g(z) = \sum_{j=0}^{p} \alpha_j z^j + \sum_{j=1}^{h} \delta_j \left(z - k_j\right)_*^p \qquad (5)$$

dengan $(z-k_j)_*^p = \begin{cases} (z-k_j)^p & , z \geq k_j \\ 0 & , z < k_j \end{cases}$

α dan δ adalah konstanta real, g (z) adalah fungsi *Spline*, z adalah variabel prediktor dan k_1, k_2,. . .,k_h adalah titik-titik knot. Jika orde pada persamaan (2. 14) bernilai p = 1, p = 2 dan p = 3 maka akan diperoleh fungsi *Spline* secara berturut – turut dinamakan fungsi *Spline* linear, *Spline* kuadratik, dan *Spline* kubik (Rodriguez, 2001).

Beberapa jenis *Spline* yang dapat digunakan dalam regresi nonparametrik, yang dikenal sebagai fungsi basis, salah satunya adalah basis *B-Spline*. Jika fungsi regresi didekati dengan *B-Spline* maka dapat ditulis menjadi (Budiantara dkk, 2006)

$$f(z) = \sum_{l=1}^{m+K} \alpha_l \, B_{l-m,m}(z) \qquad (6)$$

Dengan $B_{l-m,m}(z)$ adalah basis dengan orde ke-(l-m) dari titik knot $a < u_1, u_2, \ldots, u_K < b$, dengan derajat m, dan α_1, α_2, . . ., α_{m+K} adalah parameter. Fungsi *B-Spline* dengan derajat m secara rekursif didefinisikan sebagai berikut:

1. Jika m =1 maka :

$$B_{j,1}(z) = \begin{cases} 1, & \text{jika } u \leq z \leq u_{j+1} \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

2. Jika untuk m > 1 maka :

$$B_{j,m}(z) = \frac{z-u_j}{u_{j+m}-u_j} B_{j,m-1}(z) + \frac{u_{j+m}-z}{u_{j+m}-u_{j+1}} B_{j+1,m-1}(z) \qquad (7)$$

Untuk mengestimasi parameter α pada Persamaan (7), didefinisikan matriks

$$\mathbf{B}(\boldsymbol{\lambda}) = (\mathrm{B}_{j,m}(z_i)) \qquad (8)$$

dengan i = 1, 2, . . .,n dan j = -(m-1), . . ., K, atau dapat ditulis dalam bentuk matriks berukuran $n \times (m+\mathrm{K})$

$$\mathbf{B}(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} \mathrm{B}_{-(m-1),m}(z_1) & \mathrm{B}_{-(m-2),m}(z_1) & \cdots & \mathrm{B}_{\mathrm{K},m}(z_1) \\ \mathrm{B}_{-(m-1),m}(z_2) & \mathrm{B}_{-(m-2),m}(z_2) & \cdots & \mathrm{B}_{\mathrm{K},m}(z_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{B}_{-(m-1),m}(z_\mathrm{n}) & \mathrm{B}_{-(m-2),m}(z_\mathrm{n}) & \cdots & \mathrm{B}_{\mathrm{K},m}(z_\mathrm{n}) \end{bmatrix}$$

ISBN: 978-602-14387-0-1

3. Hasil Dan Pembahasan

3.1 Regresi Semiparametrik

Model regresi semiparametrik merupakan gabungan antara regresi parametrik dan regresi nonparametrik. Diberikan bentuk model regresi semiparametrik sebagai berikut :

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_p x_{ik} + f(z_i) + \varepsilon_i \qquad (9)$$

dengan i = 1, 2, . . ., n. Persamaan (9) di atas dapat ditulis dalam bentuk matriks berikut:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{Z}) + \boldsymbol{\varepsilon} \qquad (10)$$

dimana, $\boldsymbol{y}$ adalah vektor dari variabel respons yang berukuran n × 1, $\boldsymbol{X}^T$ adalah matriks transpose variabel prediktor untuk komponen parametrik dengan ukuran n × p dengan p = (k + 1) dan $\boldsymbol{Z}$ variabel prediktor untuk komponen nonparametrik , $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)^T$ merupakan vektor $(k + 1) \times 1$ untuk parameter yang tidak diketahui, $\boldsymbol{f}$ adalah vektor dari fungsi regresi yang bentuk kurvanya tidak diketahui atau merupakan fungsi yang mulus atau dengan kata lain $\boldsymbol{f}$ atau $f(z_i)$ licin (*smooth*) yaitu $f(z_i) \in W_2^p[0,1] = \{f \mid f^{(p)}$ kontinu mutlak pada [0,1] , p = 0,1,2,…,p-1, $f^{(P)} \in$ L[0,1] yang disebut ruang Sabolev order p dengan L[0,1] adalah himpunan semua fungsi yang kuadratnya terintegral pada interval [0,1] dan $\boldsymbol{\varepsilon}$ adalah vektor dari *error* random independen dengan mean nol dan varians σ^2.

3.2 *Penalized Loglikelihood*

Penalized loglikelihood (PL) adalah cara lain untuk mendapatkan estimasi model regresi. Secara umum *penalized loglikelihood* diberikan oleh:

$$PL(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{V}) = l(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{V}) - \frac{\lambda}{2}\, J(f) \qquad (11)$$

dengan fungsional $PL(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{V})$ memuat tiga komponen, yaitu komponen *penalized loglikelihood* yaitu $l(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{V})$, *roughness penalty* J(f) yakni ukuran kemulusan dan kekasaran kurva dalam memetakan data dan parameter penghalus λ. Jelasnya komponen *penalized loglikelihood* dalam hal ini fungsi *loglikehood* yaitu :

$$l(\beta, f, y) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log\,(|\boldsymbol{V}| - \frac{1}{2}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta} - \boldsymbol{f})^T\ \boldsymbol{V}^{-1}\,(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x\beta} - \boldsymbol{f}) \qquad (12)$$

dan

$$\mathrm{J(f)} = \int_a^b [f''(z)]^2\, dt \qquad (13)$$

sehingga, jika Persamaan (12) dan (13) di atas disubstitusikan dalam Persamaan (11), maka persamaan untuk *penalized loglikelihood* dapat dituliskan menjadi:

ISBN: 978-602-14387-0-1

$$\text{PL}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{f},\boldsymbol{V}) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log(|\boldsymbol{V}| - \frac{1}{2}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta}-\boldsymbol{f})^T\ \boldsymbol{V}^{-1}\ (\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x\beta}-\boldsymbol{f})$$

$$-\frac{\lambda}{2}\int_a^b [f''(z)]^2\,dt$$

Parameter penghalus λ merupakan konstanta positif yang bernilai $0 < \lambda < 1$, yang berfungsi untuk mengontrol keseimbangan data dan kemulusan kurva, oleh karena itu pemilihan nilai λ merupakan suatu hal yang sangat penting.

3.3 *Roughness Penalty*

Misalkan diberikan sebuah fungsi $f(z)$, dimana bentuk kurva dari fungsi tersebut tidak diketahui. Karena fungsinya tidak diketahui, maka dilakukan suatu pendekatan fungsi. Salah satu fungsi pendekatanya adalah basis *Spline* yaitu *B-Spline*. Jadi, jika fungsi regresi f didekati dengan *B-Spline*, maka f dapat ditulis dalam bentuk :

$$f(z) = \sum_{l=1}^{m+K} \alpha_l B_{l-m,m}(z). \tag{14}$$

Jika terdapat K titik knot dengan *B-Spline* berderajat m, maka Persamaan (14) dapat dijabarkan menjadi:

$$f(z) = \sum_{l=1}^{m+K} \alpha_l B_{l-m,m}(z)$$

$$f(z) = \alpha_1 B_{1-m,m}(z) + \alpha_2 B_{2-m,m}(z) + \cdots + \alpha_{m+K} B_{m+K-m,m}(z)$$

$$f(z) = \alpha_1 B_{-(m-1),m}(z) + \alpha_2 B_{-(m-2),m}(z) + \cdots + \alpha_{m+K} B_{K,m}(z)$$

$$f(z) = \begin{bmatrix} \mathrm{B}_{-(m-1),m}(z) & \mathrm{B}_{-(m-2),m}(z) & \ldots & \mathrm{B}_{K,m}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{m+K} \end{bmatrix}$$

$$f(z) = \mathbf{B\alpha} \tag{15}$$

Untuk pengamatan sebanyak $i = 1, 2, \ldots, n$ maka

$$f(z_1) = \alpha_1 B_{-(m-1),m}(z_1) + \alpha_2 B_{-(m-2),m}(z_1) + \cdots + \alpha_{m+K} B_{K,m}(z_1)$$

$$f(z_2) = \alpha_1 B_{-(m-1),m}(z_2) + \alpha_2 B_{-(m-2),m}(z_2) + \cdots + \alpha_{m+K} B_{K,m}(z_2)$$

$$\vdots$$

$$f(z_n) = \alpha_1 B_{-(m-1),m}(z_n) + \alpha_2 B_{-(m-2),m}(z_n) + \cdots + \alpha_{m+K} B_{K,m}(z_n) \tag{16}$$

Dengan mendefinisikan bahwa $\mathrm{B}_{j,m}(z_i) = B_{ij}$ dan $f\ (z_i) = f_i$, untuk pengamatan

ISBN: 978-602-14387-0-1

sebanyak i = 1,2, . . .,n dan j = -(m-1), -(m-2), . . ., K maka Persamaan (16) di atas dapat dinyatakan sebagai:

$$
\begin{aligned}
f_1 &= \alpha_1 \mathrm{B}_{11} + \alpha_2 \mathrm{B}_{12} + \ldots + \alpha_{m+K} \mathrm{B}_{1v} \\
f_2 &= \alpha_1 \mathrm{B}_{21} + \alpha_2 \mathrm{B}_{22} + \ldots + \alpha_{m+K} \mathrm{B}_{2v} \\
&\vdots \\
f_n &= \alpha_1 \mathrm{B}_{n1} + \alpha_2 \mathrm{B}_{n2} + \ldots + \alpha_{m+K} \mathrm{B}_{nv}
\end{aligned} \tag{17}
$$

dengan

$B_{i1} = B_{-(m-1),m}\,(z_i)$, $B_{i2} = B_{-(m-2),m}\,(z_i)$, . . . , $B_{iv} = B_{K,m}\,(z_i)$

Jika diberikan matriks-matriks berikut :

$$
\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathrm{f}_1 \\ \mathrm{f}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{f}_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathrm{B}_{11} & \mathrm{B}_{12} & \cdots & \mathrm{B}_{1v} \\ \mathrm{B}_{21} & \mathrm{B}_{22} & \cdots & \mathrm{B}_{2v} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{B}_{n1} & \mathrm{B}_{n2} & \cdots & \mathrm{B}_{nv} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{m+K} \end{bmatrix}
$$

maka Persamaan (17) di atas dapat dinyatakan dalam bentuk matriks:

$$\mathbf{f} = \mathbf{B}\boldsymbol{\alpha}. \tag{18}$$

Menurut Gyorfy (2002), *roughness penalty* dapat dinyatakan sebagai integral dari kuadrat turunan kedua suatu fungsi atau dapat ditulis dengan:

$$\mathrm{J(z)} = \int_a^b [f''(z)]^2 \, dz. \tag{19}$$

Dengan mensubstitusi Persamaan (15) ke (19), maka diperoleh:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{J(f)} &= \int_a^b [f''(z)]^2 \, dz = \int_a^b [D^2 f(z)][D^2 f(z)]\, dz \\
&= \int_a^b [D^2\ \mathbf{B}\boldsymbol{\alpha}][D^2\ \mathbf{B}\boldsymbol{\alpha}]\, dz
\end{aligned} \tag{20}
$$

Karena hasil dari $\mathbf{B}\boldsymbol{\alpha}$ adalah skalar atau matriks 1×1, maka berdasarkan sifat-sifat transpose suatu matriks maka $(\mathbf{B}\boldsymbol{\alpha})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{T}}\mathbf{B}^{\mathbf{T}}$ akan menghasilkan hasil yang sama, yakni berupa skalar atau matriks 1×1. Akibatnya Persamaan (20) di atas dapat dituliskan menjadi $= \boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{T}} \int_a^b [D^2\ \boldsymbol{B}^{\mathbf{T}}][D^2\ \mathbf{B}]\, dz\ \boldsymbol{\alpha}$

$$= \boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{T}}\mathbf{K}\,\boldsymbol{\alpha} \quad \text{dengan} \quad \mathbf{K} = \int_a^b [D^2\ \mathbf{B}][D^2\ \mathbf{B}^{\mathbf{T}}]\, dz \tag{21}$$

ISBN: 978-602-14387-0-1

3.4 Estimasi Model Regresi Semiparametrik dengan Metode *Likelihood Maximum Penalized*

Suatu asumsi ideal yang telah dikenal umum dalam suatu model regresi semiparametrik pada Persamaan (10) berkaitan dengan randon *error* yaitu *error*nya berdistribusi normal multivariate; $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \boldsymbol{I})$ dan $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ tidak berkorelasi, $i \neq j$ sehingga cov $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$. Namun dalam banyak keadaan satu atau keduanya dari asumsi-asumsi di atas tidak realistik. Oleh karena itu jika diasumsikan bahwa variansi *error* $(\boldsymbol{\varepsilon})$ di atas yaitu $\sigma^2 \boldsymbol{I}$ berubah menjadi suatu matriks definit positif **V** yang berukuran n x n maka dapat didefinisikan fungsi densitas bersama dari variabel random *error* ; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ adalah sebagai berikut :

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{(2\pi|\boldsymbol{V})|^{\frac{n}{2}}}\, exp(-\tfrac{1}{2}\, \boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{T}}\, \boldsymbol{V}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{\varepsilon})$$

Diperoleh fungsi *likelihood* dari $\boldsymbol{\varepsilon}$ adalah $l(\beta, f, y) = \prod_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i\,;\, \beta, f, V)$ dan selanjutnya fungsi *likelihood*nya adalah

$$l(\varepsilon_i\,; \beta, f, V) = (2\pi|\boldsymbol{V}|^{-\frac{n}{2}}\, exp\left\{-\frac{1}{2}\, \boldsymbol{\varepsilon}^T\, \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}\right\}$$

Berdasarkan bentuk umum fungsi *penalized loglikelihood* (PL) diperoleh :

$$\text{PL}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{V}) = l(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{V}) - \tfrac{\lambda}{2}\; J(f)$$

sehingga jika $\text{J(f)} = \int_a^b [f''(z)]^2\, dt$ maka fungsi *penalized loglikelihood* menjadi :

$$\text{PL} = l(\varepsilon_i\,; \beta, f, V) - \tfrac{\lambda}{2}\, \int_a^b [f''(z)]^2\, dt. \qquad (22)$$

Selanjutnya fungsi *loglikehood* dari $l(\varepsilon_i\,; \beta, f, V)$ adalah *:*

$$log l(\beta, f, y) = -\tfrac{n}{2}\log(2\pi) - \tfrac{n}{2}\log\,(|\boldsymbol{V}| - \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta} - \boldsymbol{f})^T\;\, \boldsymbol{V}^{-1}\,(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x\beta} - \boldsymbol{f}) \qquad (23)$$

Dari Persamaan (22), (23) dan (21) di atas diperoleh fungsi *penalized loglikelihood* dengan *roughness penalty* bentuk kuadrat dalam **α** menjadi :

$$\text{PL} = -\tfrac{n}{2}\log(2\pi) - \tfrac{n}{2}\log\,(|\boldsymbol{V}| - \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{V}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{y} - 2\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{V}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X\beta} - 2\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{V}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{f} + \boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{V}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X\beta} + 2\boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{V}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{V}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{f}) - \tfrac{\lambda}{2}\; \boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{T}}\, \boldsymbol{K\alpha} \qquad (24)$$

Dari Persamaan (18) diperoleh yaitu **f** = **Bα** sehingga jika Persamaan (18) di substitusi kepersamaan (24) diperoleh hasilnya menjadi :

$$\text{PL} = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log(|\boldsymbol{V}| - \frac{1}{2}(\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{y} - 2\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X\beta} - 2\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{V}^{-1}\mathbf{B\alpha} +$$

$$\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X\beta} + \quad 2\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{V}^{-1}\mathbf{B\alpha} + (\mathbf{B\alpha})^T\boldsymbol{V}^{-1}(\mathbf{B\alpha})) - \frac{\lambda}{2}\,\boldsymbol{\alpha}^T\,\boldsymbol{K\alpha}$$

$$\text{PL} = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log(|\boldsymbol{V}| \quad -\frac{1}{2}\,(\,\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{y} - 2\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X\beta} - 2\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{V}^{-1}\mathbf{B\alpha})$$

$$-\frac{1}{2}(\,\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X\beta} + \quad 2\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{V}^{-1}\mathbf{B\alpha} + \boldsymbol{\alpha}^T\mathbf{B}^T\boldsymbol{V}^{-1}\mathbf{B\alpha}\,) - \frac{\lambda}{2}\,\boldsymbol{\alpha}^T\,\boldsymbol{K\alpha}$$

Untuk mendapatkan estimator kemungkinan maksimum *penalized* (*likelihood maximum penalized*) dari persamaan PL di atas maka dicari turunan pertama untuk masing-masing parameter dari fungsi PL di atas yang dalam hal ini yaitu $\boldsymbol{\beta}$ dan $\boldsymbol{\alpha}$ dan kemudian menyamakan hasilnya dengan nol. Diperoleh hasilnya sebagai berikut :

$$\frac{\partial \text{PL}}{\partial \beta} = 0$$

$$-\frac{1}{2}(-2\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X} + \mathbf{2}(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X})^T\boldsymbol{\beta} + 2\,(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{B\alpha})^T)\ = 0$$

$$\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}^T(\boldsymbol{V}^{-1})^T\boldsymbol{X\beta} - \boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{B}^T(\boldsymbol{V}^{-1})^T\mathbf{X}\ = 0$$

$$\boldsymbol{X}^T(\boldsymbol{V}^{-1})^T\boldsymbol{X\beta}\ = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{B}^T(\boldsymbol{V}^{-1})^T\mathbf{X}$$

$$\boldsymbol{\beta}\ = (\,\boldsymbol{X}^T(\boldsymbol{V}^{-1})^T\boldsymbol{X})^{-1}\,(\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{B}^T(\boldsymbol{V}^{-1})^T\mathbf{X}\,)$$

Jadi didapat estimator $\boldsymbol{\beta}$ bagian parametriknya adalah

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}\ = (\,\boldsymbol{X}^T(\boldsymbol{V}^{-1})^T\boldsymbol{X})^{-1}\,(\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{B}^T(\boldsymbol{V}^{-1})^T\mathbf{X}\,) \qquad (25)$$

$$\frac{\partial \text{PL}}{\partial \alpha} = 0$$

$$-\frac{1}{2}(-2\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{B} + \ 2\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{B} + \mathbf{2}\ \mathbf{B}^\mathbf{T}\boldsymbol{V}^{-1}\mathbf{B\alpha}) - \lambda\,\boldsymbol{K\alpha} = 0$$

$$\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{V}^{-1} - \mathbf{B}^\mathbf{T}\boldsymbol{V}^{-1}\mathbf{B\alpha}\ \ - \lambda\,\boldsymbol{K\alpha}\ = 0$$

$$(\mathbf{B}^\mathbf{T}\boldsymbol{V}^{-1}\mathbf{B}\ +\lambda\,\boldsymbol{K})\boldsymbol{\alpha}\ = \boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{V}^{-1} - \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{V}^{-1}\ \boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{\alpha}\ = (\mathbf{B}^\mathbf{T}\boldsymbol{V}^{-1}\mathbf{B}\ +\lambda\,\boldsymbol{K})^{-1}\ \boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{V}^{-1} - \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{B} \qquad (26)$$

Substitusi Persamaan (25) ke Persamaan (26) adalah :

$$\boldsymbol{\alpha}\ = (\mathbf{B}^\mathbf{T}\boldsymbol{V}^{-1}\mathbf{B}\ +\lambda\,\boldsymbol{K})^{-1}\ \ (\,\boldsymbol{X}^T(\boldsymbol{V}^{-1})^T\boldsymbol{X})^{-1}\,(\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{B}^T(\boldsymbol{V}^{-1})^T\mathbf{X}\,)^{\,T}\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{V}^{-1} - \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{B}$$

Substitusi Persamaan (25) ke Persamaan (18) yaitu :

$$\boldsymbol{f} = \quad \mathbf{B}\,[(\mathbf{B}^\mathbf{T}\boldsymbol{V}^{-1}\mathbf{B}\ +\lambda\,\boldsymbol{K})^{-1}\ \ (\,\boldsymbol{X}^T(\boldsymbol{V}^{-1})^T\boldsymbol{X})^{-1}\,(\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{V}^{-1} - \boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{B}^T(\boldsymbol{V}^{-1})^T\mathbf{X}\,)^{\,T}\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{V}^{-1} - \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{B}]$$

Jadi didapat estimator $\hat{\boldsymbol{f}}$ bagian nonparametrik adalah

$$\hat{\boldsymbol{f}} = \quad \mathbf{B}\,[(\mathbf{B}^\mathbf{T}\boldsymbol{V}^{-1}\mathbf{B}\ +\lambda\,\boldsymbol{K})^{-1}\,(\,\boldsymbol{X}^T(\boldsymbol{V}^{-1})^T\boldsymbol{X})^{-1}\,(\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{B}^T(\boldsymbol{V}^{-1})^T\mathbf{X}\,)^{\,T}\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{V}^{-1}]$$

ISBN: 978-602-14387-0-1

$$-[\ \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{V}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{B}] \qquad (27)$$

Estimasi model regresi diperoleh dengan mengsubstitusi persamaan (25) dan (27) ke dalam persamaan berikut :

$$\hat{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{X}\,\hat{\boldsymbol{\beta}} + \hat{\boldsymbol{f}}$$

$$\hat{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{V}^{-\mathbf{1}})^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X})^{-\mathbf{1}}\,(\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{V}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{V}^{-\mathbf{1}})^{\boldsymbol{T}}\mathbf{X}) + \mathbf{B}\,[(\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{V}^{-\mathbf{1}}\mathbf{B} + \lambda\,\boldsymbol{K})^{-1}\,(\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{V}^{-\mathbf{1}})^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X})^{-\mathbf{1}}\,(\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{V}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{V}^{-\mathbf{1}})^{\boldsymbol{T}}\mathbf{X})^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{V}^{-\mathbf{1}} - \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{V}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{B}]$$

Jadi diperoleh hasil estimasi model regresinya adalah

$$\hat{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{V}^{-\mathbf{1}})^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X})^{-\mathbf{1}}\,(\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{V}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{V}^{-\mathbf{1}})^{\boldsymbol{T}}\mathbf{X}) + \mathbf{B}\,[(\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{V}^{-\mathbf{1}}\mathbf{B} + \lambda\,\boldsymbol{K})^{-1}\,(\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{V}^{-\mathbf{1}})^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X})^{-\mathbf{1}}\,(\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{V}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{V}^{-\mathbf{1}})^{\boldsymbol{T}}\mathbf{X})^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{V}^{-\mathbf{1}} - \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{V}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{B}]$$

4. Kesimpulan

Hasil estimasi model regresi semiparametrik dengan menggunakan metode *likelihood maximum penalized* adalah :

$$\hat{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{X}\,\hat{\boldsymbol{\beta}} + \hat{\boldsymbol{f}}$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{V}^{-\mathbf{1}})^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X})^{-\mathbf{1}}\,(\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{V}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{V}^{-\mathbf{1}})^{\boldsymbol{T}}\mathbf{X}) + \mathbf{B}\,[(\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{V}^{-\mathbf{1}}\mathbf{B} + \lambda\,\boldsymbol{K})^{-1}\,(\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{V}^{-\mathbf{1}})^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X})^{-\mathbf{1}}\,(\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{V}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{V}^{-\mathbf{1}})^{\boldsymbol{T}}\mathbf{X})^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{V}^{-\mathbf{1}} - \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{V}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{B}]$$

Estimasi di atas terbagi menjadi 2 bagian komponen parametrik dam nonparametrik, estimasi komponen parameternya yaitu

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{V}^{-\mathbf{1}})^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X})^{-\mathbf{1}}\,(\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{V}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{V}^{-\mathbf{1}})^{\boldsymbol{T}}\mathbf{X})$$

dan estimasi komponen nonparameternya yaitu

$$\hat{\boldsymbol{f}} = \mathbf{B}\,[(\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{V}^{-\mathbf{1}}\mathbf{B} + \lambda\,\boldsymbol{K})^{-1}\,(\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{V}^{-\mathbf{1}})^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X})^{-\mathbf{1}}\,(\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{V}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{V}^{-\mathbf{1}})^{\boldsymbol{T}}\mathbf{X})^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{V}^{-\mathbf{1}}] - [\ \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{V}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{B}]$$

DAFTAR PUSTAKA

Bain, L.J, dan Engelhardt. 1992. *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*, 2nd,Duxbury Press, Belmont, California.

Budiantara, Suryadi, Otok, dan Guritno. 2006. Pemodelan BSpline dan MARS pada nilai ujian masuk terhadap IPK mahasiswa jurusan desain komunikasi visual UK. Petra Surabaya. *Jurnal Teknik Industri*, Vol.8, 1-13.

Draper, R.N and Smith, H. 1998. *Applied Regression Analysis*, Johan Wiley & Sons,

ISBN: 978-602-14387-0-1

INC.

Gyorfy, L. 2002. *A Distibution-Free Theory of Nonparametric Regression*. Spinger-Verlag. New York.

Hansen, E dan Chan KS. *2010. Penalized Maximum Likelihood Estimasi Of A Stochastic Multivariate Regression Model, 2010 Elsevier B.V. All rights reserved.*

Hardle, W, liang. H and Gao. J. 2000. *Partially Linear Model*. Physica- Verlag, Heidelberg.

Hardle, W. 1994. *Applied Nonparamatric Regression*. Cambridge University Press, New York.

Heckma, E.N. 1985. *Spline Smoothing in a Partly Linear Model*. University of British Columbia, Canada, (Received June 1985).

Myers, R.H and Milton, J.S. 1991. *A First Cours in the Theory of Linear Statistical Models*. PWS-KENT Publishing Company, Boston

Nurnberger, G. 1989. *Approximation by Spline Functions*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, Hongkong.

Ruppert D, Wand M. P., and Carrol R. J. 2003. *Semiparametric regression.* Cambridge University, United kingdom.

Rodriguez, G. 2001. *Smoothing and Nonparamertic Regression*. http://www.data.princeton.edu.

Rencher, A.C. 2000. Linear models in statistics. A Wiley-Intersscience Publication, JOHN WILEY & SONS, INC. New York, Chichester, Weinheim, Brisbane, Toronto, Singapura.

Wang,Y. 2011. *Smoothing Spline Methods and Applications*, CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, London, New York.