ISBN: 978-602-14387-0-1

DUA TIPE PEMETAAN KONTRAKTIF PADA RUANG METRIK CONE

Mohammad Mahfuzh Shiddiq[1]
[1)]Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Lambung Mangkurat

Abstract
Meir and Keeler introduced type of contraction mapping as generalization of the Banach contraction principle. Moreover, Leader defined another type of this mapping which considered complete graph function and satisfying more general property than Meir-Keeler type. In other hand, Huang and Zhang with their cone metrik space gives motivation to more explore fixed point theorem theory. In this paper, we introduce the concept Meir-Keeler and Leader type of contraction mappings on cone metrik space.

Keywords: Contractive Mapping, Meir-Keeler Property, Complete Graph Function, Cone Metric Space.

1. Pendahuluan

Teori titik tetap banach pada abad terakhir ini telah muncul sebagai teknik yang penting dalam studi non linier. Secara khusus, teori titik tetap mempunyai banyak aplikasi dalam berbagai bidang seperti biologi, kimia, fisika, ekonomi, sains komputer, dan teknik. Teori yang mengenai eksistensi titik tetap pemetaan kontraktif pada ruang metrik lengkap sendiri telah dikembangkan oleh beberapa ahli yang dimulai oleh teorema Banach klasik ((Banach), (Boyd, 1969), (Bryant, 1968), (Chu, 1965), Huang, 2007)).

Di antara perkembangan itu adalah konsep pemetaan kontraktif yang dikenalkan oleh Meir dan Keeler (Keeler, 1969), yaitu *fungsi kontraktif murni seragam lemah* seperti pada teorema berikut

Teorema 1.1 *Misalkan (X,d) adalah ruang metrik lengkap dan T adalah pemetaan X ke diri sendiri yang memenuhi syarat berikut*

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \text{ sedemikian hingga } \varepsilon \le d(x,y) < \varepsilon + \delta(\varepsilon) \Rightarrow d(x,y) < \varepsilon$$

Maka T mempunyai titik tetap tunggal $\xi \in X$. Lebih lanjut, untuk setiap $x \in X$ barisan $\{T^n\}$ konvergen ke ξ.

Namun dalam perkembangan selanjutnya, Leader (Leader, 1983) pada tahun 1983 menemukan kasus yang lebih umum, yaitu tanpa mensyaratkan ruang metrik lengkap (X,d), teorema titik tetap suatu fungsi yang memenuhi syarat berikut

ISBN: 978-602-14387-0-1

Definisi 1.2 (Leader, 1977) *Pemetaan* $T: X \to X$ *dikatakan* ***fungsi dengan graf lengkap*** *jika untuk setiap barisan Cauchy* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sedemikian hingga* $\left(f(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *juga barisan Cauchy terdapat titik* $x \in X$ *sedemikian hingga* $x_n \to x$ *dan* $f(x_n) \to f(x)$.

Definisi 1.3 (Leader, 1977) *Misalkan* X *adalah himpunan tak kosong.* $T: X \to X$ *adalah pemetaan,* ***Orbit*** *dari* x, *dinotasikan dengan* $O(x)$, *adalah barisan dari image* T^n, *yaitu*

$$O(x) = \{T^n x | n \in I, T^0 x = x\}$$

Selanjutnya, dia mengenalkan sifat berikut yang merupakan perumuman dari sifat Meir-Keeler

Untuk setiap $\varepsilon > 0$ *terdapat* $\delta(\varepsilon) \in (0, \infty)$ *dan bilangan asli* $r = r(\varepsilon)$ *sedemikian hingga*

[L] $$d\left(f^r(x), f^r(y)\right) < \varepsilon, \qquad untuk\ (x,y) \in D\left(\varepsilon + \delta(\varepsilon)\right)$$

dengan $D\left(\varepsilon + \delta(\varepsilon)\right) = \{(x,y) \in X \times X : d(x,y) < \varepsilon + \delta(\varepsilon)\}$

Titik tetap akhirnya dapat dibuktikan eksistensinya dengan menggunakan sifat di atas, yang tertuang dalam teorema berikut

Teorema 1.4 (Leader, 1983) *Misalkan* (X, d) *adalah ruang metrik dan* $T: X \to X$ *adalah fungsi dengan graf lengkap dan memenuhi sifat [L]. Maka* T *mempunyai titik tetap kontraktif.*

Selanjutnya pada tahun 2007, Huang dan Zhang mengenalkan konsep ruang metrik cone, yang mengenarlkan konsep ruang metrik dengan mengganti himpunan bilangan riil dengan ruang Banach terurut.

Misalkan E adalah ruang Banach riil dan P adalah subset E. P disebut *cone* jika

i. P *tutup, tak kosong dan* $P \neq \{0\}$
ii. $ax + by \in P$ *untuk semua* $x, y \in P$ *dan* $a \geq 0, b \geq 0$
iii. $P \cap \{-P\} = \{0\}$

Untuk sebarang $P \subseteq E$ didefinisikan urutan parsial $\leq$ yang berkaitan dengan P dengan $x \leq y$ jika dan hanya jika $y - x \in P$, sedangkan notasi $x < y$ berarti $x \leq y$ dan $x \neq y$. Sedangkan $x \ll y$ menunjukkan $y - x \in int(P)$, dimana $int(P)$ menotasikan interior dari P. Cone P dikatakan normal jika terdapat bilangan $M > 0$ sedemikian hingga untuk semua $x, y \in E$ berlaku

ISBN: 978-602-14387-0-1

$$0 \leq x \leq y \text{ mengakibatkan } \|x\| \leq M\|y\|$$

Bilangan M terkecil yang memenuhi di atas disebut konstanta normal dari P. Cone P disebut regular jika untuk barisan naik yang terbatas ke atas konvergen. Secara ekuivalen, cone P disebut regular jika dan hanya jika setiap barisan turun yang terbatas ke bawah konvergen. Setiap regular cone adalah normal.

Definisi 1.5 (Huang dkk, 2007) *Misalkan X adalah bilangan tak-kosong. Andaikan pemetaan $d: X \times X \to E$ memenuhi*

(d1). $0 \leq d(x,y)$ *untuk semua* $x, y \in X$ *dan* $d(x,y) = 0$ *jika dan hanya jika* $x = y$

(d2). $d(x,y) = d(y,x)$ *untuk semua* $x, y \in X$

(d3). $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ *untuk semua* $x, y, z \in X$

*Maka d disebut **metrik cone** pada X. Pasangan (X,d) disebut **ruang metrik cone**.*

Definisi 1.6 (Huang dkk, 2007) *Ruang metrik (X,d) disebut ruang metrik regular ketika cone P juga regular.*

Definisi 1.7 (Huang dkk, 2007) *Misalkan (X,d) adalah ruang metrik cone, $x \in X$ dan $(x_n)_{n\geq 1}$ adalah barisan di X. Maka*

i. $(x_n)_{n\geq 1}$ *konvergen ke x jika dan hanya jika untuk setiap $c \in E$ dengan $0 \ll c$ terdapat bilangan asli N sedemikian hingga $d(x_n, x) \ll c$ untuk semua $n \in N$. Notasinya $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ atau $x_n \to x$*

ii. $(x_n)_{n\geq 1}$ *disebut barisan Cauchy jika dan hanya jika untuk setiap $c \in E$ dengan $0 \ll c$ terdapat bilangan asli N sedemikian hingga $d(x_n, x_m) \ll c$ untuk semua $n, m \geq N$*

iii. (X,d) *disebut ruang metrik cone lengkap jika setiap barisan Cauchy konvergen.*

Definisi 1.8 *Misalkan (X,d) adalah ruang metrik cone dan $f: X \to X$. Fungsi f dikatakan memenuhi sifat Meir-Keeler Cone (MKC) jika untuk setiap $0 \neq c \in P$ terdapat $0 \ll d$ sedemikian hingga $d\big(f(x), f(y)\big) < c$ untuk semua $x, y \in X$ dengan $d(x,y) < c + d$*

2. Hasil Dan Pembahasan

Teorema berikut menunjukkan sifat Meir-Keeler pada ruang metrik cone dan titik tetap pemetaan kontraktif.

ISBN: 978-602-14387-0-1

Teorema 2.1 *Misalkan* (X, d) *adalah ruang metrik cone regular yang lengkap dan* $f: X \to X$ *memenuhi sifat (MKC) maka* f *mempunyai titik tetap tunggal.*

Bukti. Diketahui bahwa $d\big(f(x), f(y)\big) < d(x, y)$ untuk semua $x, y \in X$ dengan $x \neq y$. Misalkan $x_0 \in X$ dan $x_n = f(x_{n-1})$ untuk semua $n \geq 1$. Jika terdapat bilangan asli m sedemikian hingga $d(x_{m+1}, x_m) = 0$ maka $f(x_m) = x_m$ dan f mempunyai titik tetap. Jika $d(x_{n+1}, x_n) \neq 0$ untuk semua $n \geq 1$ maka $d(x_{n+1}, x_n) < d(x_n, x_{n-1})$. Oleh karena itu terdapat $\alpha \in P$ sedemikian hingga $d(x_{n+1}, x_n) \to \alpha$. Klaim bahwa $\alpha = 0$. Jika $\alpha \neq 0$, maka terdapat $0 \ll d$ sedemikian hingga $d\big(f(x), f(y)\big) < \alpha$ untuk semua $x, y \in X$ dengan $d(x, y) < \alpha + d$. Pilih $r > 0$ sedemikian hingga $\frac{d}{2} + N_r(0) \subseteq P$ dan ambil bilangan asli N sedemikian hingga $\|d(x_{n+1}, x_n) - \alpha\| < r$ untuk semua $n \in N$. Jadi $d(x_{n+1}, x_n) - \alpha \ll d$. Karena f memenuhi sifat MKC, $d(x_{n+2}, x_{n+1}) < \alpha$. Ini kontradiksi dengan $\alpha < d(x_{i+1}, x_i)$ untuk semua $i \geq 1$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $(x_n)_{n\geq 1}$ adalah barisan Cauchy. Andaikan $(x_n)_{n\geq 1}$ bukan barisan Cauchy, maka terdapat $0 \ll c$ sedemikian hingga semua bilangan asli m terdapat $i_m, j_m > m$ sedemikian hingga pertidaksamaan $d\big(x_{i_m}, x_{j_m}\big) \ll c$ tidak terpenuhi. Untuk $0 \ll e \ll c$ terdapat $0 \ll d$ sedemikian hingga $d\big(f(x), f(y)\big) < e$ untuk semua $x, y \in X$ dengan $d(x, y) < e + d$. Pilih bilangan asli M dan sedemikian hingga $d(x_{i+1}, x_i) \ll \frac{d}{2}$ untuk semua $i \geq M$. Juga ambil, $j_M \geq i_M > M$ sehingga relasi $d\big(x_{i_m}, x_{j_m}\big) \ll c$ tidak terpenuhi. Maka kita peroleh

$$d\big(x_{i_M-1}, x_{i_M+1}\big) \leq d\big(x_{i_M-1}, x_{i_M}\big) + d\big(x_{i_M}, x_{i_M+1}\big) \ll \frac{d}{2} + \frac{d}{2} \ll d + e$$

Oleh karena itu $d\big(x_{i_M}, x_{i_M+2}\big) \ll e$. Secara serupa, $d\big(x_{i_M}, x_{i_M+3}\big) \ll e$. Jadi $d\big(x_{i_M}, x_{j_M}\big) \ll e \ll c$ yang mana kontradiksi. Oleh karena itu $(x_n)_{n\geq 1}$ adalah barisan Cauchy. Karena (X, d) lengkap, maka terdapat $u \in X$ sedemikian hingga $x_n \to u$. Oleh karena itu $f(x_n) \to f(u)$. Akan tetapi, $f(x_n) = x_{n+1} \to u$ dan titik limitnya tunggal pada ruang metrik cone. Jadi f mempunyai paling tidak satu titik tetap. Karena $d\big(f(x), f(y)\big) < d(x, y)$ untuk semua $x, y \in X$ dengan $x \neq y$, f mempunyai titik tetap yang tunggal.

Selanjutnya di ruang metrik cone untuk pemetaan kontraktif tipe Leader sifat yang ditunjukkan adalah sebagai berikut

ISBN: 978-602-14387-0-1

Teorema 2.1 *Misalkan* (X, d) *adalah ruang metrik cone dan* $T: X \to X$ *dengan graf lengkap,dan diberikan* $x, y \in X$*. Jika untuk sebarang* $c \in P$ *terdapat* $0 \ll d(c)$ *dan bilangan asli* $r = r(c)$ *sedemikian hingga*

$$d\left(T^{i+r}x, T^{j+r}y\right) < c \textit{ untuk semua } i, j \textit{ dengan } d\left(T^{i}x, T^{j}y\right) < c + d \tag{1}$$

Maka T *mempunyai titik tetap.*

Bukti. Pertama kali akan didefinisikan suatu himpunan

$$d_k(n) = \max\left\{d\left(T^{i}x, T^{j}y\right): n \le i, j \le n + k\right\} \tag{2}$$

Bisa ditunjukkan bahwa untuk semua $k \in \mathbb{N}$ $Inf\{d_k(n): n \in \mathbb{N}\} = 0$. Misalkan $Inf\{d_k(n): n \in \mathbb{N}\} = c \in P$ untuk suatu nilai k. Dengan menggunakan hipotesis dari teorema untuk memperoleh d dan r sehingga (1) dipenuhi. Selanjutnya dipilih n sedemikian hingga $d_k(n) < c + d$. Berdasarkan (1) dan (2) $d_k(n + r) < c$ kontradiksi dengan definisi c. Sebelum melanjutkan pembuktian akan diberikan lemma berikut

Lemma 2.3 *Misalkan* c, d, r *memenuhi (1). Pada definisi (2) misalkan n memenuhi*

$$d_r(n) < Min\left\{c, \frac{d}{2}\right\} \tag{3}$$

Maka

$$d\left(T^{i}x, T^{j}y\right) < 3c \textit{ untuk semua } i, j \ge n \tag{4}$$

Andaikan

$$d\left(T^{n+r}x, T^{j}y\right) \ge c \text{ untuk suatu } j \ge n. \tag{5}$$

Ambil bilangan j yang terkecil yang memenuhi (5). Maka

$$d\left(T^{n+r}x, T^{i}y\right) < c \text{ untuk } n \le i < j \tag{6}$$

Berdasarkan (2) dan (3), diperoleh $j > n + r$. Jadi $n < j - r < j$. Oleh karena itu (6) dengan $i = j - r$ diperoleh

$$d\left(T^{n+r}x, T^{j-r}y\right) < c \tag{7}$$

Jadi $d\left(T^{n}x, T^{j-r}y\right) \le d(T^{n}x, T^{n}y) + d(T^{n}y, T^{n+r}x) + d\left(T^{n+r}x, T^{j-r}y\right) < 2d_r(n) + c < d + c$ berdasarkan (2), (3) dan (7). Yaitu $d\left(T^{n}x, T^{j-r}y\right) < d + c$ yang mana mengakibatkan $d\left(T^{n+r}x, T^{j}y\right) < c$ berdasarkan (1). Hal ini kontradiksi dengan pengandaian (5). Jadi yang benar adalah

$$d\left(T^{n+r}x, T^{j}y\right) < c \text{ untuk semua } j \ge n \tag{8}$$

Dengan cara yang serupa

ISBN: 978-602-14387-0-1

$$d(T^i x, T^{n+r} y) < c \text{ untuk semua } i \geq n \tag{9}$$

Oleh karena itu, untuk $i, j \geq n$ diperoleh $d(T^{n+r}x, T^j y) \leq d(T^{n+r}x, T^j y) + d(T^i x, T^j y) + d(T^i x, T^{n+r} y) < 3c$. Lemma 2.3 terbukti.

Berikutnya jika diberikan sebarang $c \in P$ dan terdapat $0 \ll d$ sedemikian hingga (1) terpenuhi. Selanjutnya definisi (2) memberikan nilai n sedemikian hingga (3) juga terpenuhi. Terakhir dengan menggunakan lemma 2.2, diperoleh bahwa

$$\lim_{i \to \infty.} d(T^i x, T^i y) = 0$$

Selanjutnya teorema 1 pada Leader [8] menunjukkan bahwa orbit x yaitu $\{T^n x\}$ adalah barisan Cauchy. Karena graf T adalah lengkap, maka $T^n x \to u$ dan $T^{n+1} x \to Tu$ untuk suatu nilai u. Oleh karena itu $Tu = u$, yaitu titik u adalah titik tetap dari T.

3. Kesimpulan

Pemetaan kontraktif pada ruang metrik untuk tipe Meir-Keeler dan tipe Leader dapat diperluas semesta pembicaraannya pada ruang metrik cone dengan mengganti beberapa definisi pada ruang metrik standar.

DAFTAR PUSTAKA

Banach S., *Sur les op´erations dans les ensembles abstraits et leur application aux ´equations int´egrales*, Fund. Math. **3**(1922), 133-181.

Boyd D.W, J.S.W.Wong, *On nonlinear contraction, Proc.Amer.Math.Soc.* **20** (1969). 458-464.

Bryant V.W., *A remark on a fixed point theorem for iterated mappings.*Amer.Math.Month **75**(1968) 399-400.

Chu S.C., J.B. Diaz, *Remarks on generalization of Banach's principle contraction mappings.* **2**(1965) 440-446

Huang L.-G, X. Zhang. (2007). *Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 332, 1468-1476.

Keeler E., A.Meir. *A theorem on contraction mappings.* J.Math.Anal.Appl. **28.** (1969). 326-329.

Leader Solomon. *Equivalent Cauchy sequences and contructive fixed points in metrik spaces*, Studia Math. **66** (1983) 63-67

Leader Solomon. *Fixed Points for operators on metric spaces with conditional uniform equivalence of orbits* ,J.Math. Anal. Appl. 61 (1977), 466-477.