

ALTERNATIF BARU PENYUSUNAN RANCANGAN FRACTIONAL FACTORIAL SPLIT-PLOT

Bagus Sartono, Yenni Angraini, Indahwati
Departemen Statistika – FMIPA Institut Pertanian Bogor
bagusco@gmail.com
yangraini11@gmail.com
indahwati_43@yahoo.co.id

Abstrak

Percobaan split-plot memerlukan rancangan yang mampu memberikan informasi semaksimal mungkin terhadap pengaruh faktor-faktor yang terlibat. Ketika faktor yang digunakan berjumlah besar, rancangan fractional factorial split-plot dipilih dengan maksud menekan jumlah runs atau perlakuan yang dicobakan. Salah satu cara menyusun rancangan jenis ini adalah metode stratum-by-stratum dengan menggabungkan secara optimum dua buah sub-rancangan. Sub-rancangan untuk petak utama dan sub-rancangan untuk anak petak ditentukan terlebih dahulu di awal proses, kemudian teknik optimasi diterapkan untuk menggabungkan keduanya. Rancangan ortogonal dibangun dengan memilih sub-rancangan yang ortogonal dan penggabungan dilakukan sehingga faktor petak utama dan faktor anak petak dijaga saling ortogonal. Penelitian ini bermaksud untuk menawarkan perubahan pada prosedur ini dengan cara tidak menentukan kedua sub-rancangan di awal sekaligus. Perubahan yang dimaksudkan adalah dengan menentukan salah satu sub-rancangan di awal sedangkan sub-rancangan yang lain dibangun secara bersama-sama pada proses penggabungan.

Kata Kunci: Rancangan FFSP, *Multi-Stratum*, *Stratum-by-Stratum*, Pemrograman Linear

1. Pendahuluan

Rancangan split-plot merupakan rancangan yang paling banyak digunakan dalam berbagai percobaan industri (lihat misalnya penjelasan Jones dan Nachtseim (2009)). Dalam percobaan ini, terdapat dua jenis faktor yang terlibat yaitu faktor petak utama dan faktor anak petak. Faktor petak utama umumnya merupakan faktor yang secara praktek lebih mudah jika diterapkan satu taraf yang sama untuk beberapa satuan percobaan. Kumpulan dari satuan percobaan yang memperoleh taraf yang sama dari faktor petak utama itu yang disebut sebagai petak utama. Sementara itu, satuan-satuan percobaan dalam petak utama disebut sebagai anak petak dan akan memperoleh taraf yang berbeda-beda dari faktor lain yang dikenal sebagai faktor anak petak.

Karena percobaan industri sering melibatkan faktor dengan jumlah yang cukup banyak maka tidak memungkinkan untuk mencoba semua kombinasi taraf faktor yang ada. Misalnya saja jika ada 10 faktor yang terlibat dan masing-masing memiliki dua

taraf, maka secara total ada 1024 kombinasi taraf yang berbeda yang dapat dihasilkan. Mencoba 1024 perlakuan bukanlah suatu pekerjaan yang murah, dan umumnya mustahil dikerjakan. Bisgaard (2000) mendiskusikan bahwa secara umum yang sering menjadi penentu besarnya biaya rancangan ini adalah pada banyaknya petak utama yang diperlukan. Pilihan rancangan percobaan split-plot faktorial pecahan (*fractional factorial split-plot*, FFSP) lebih masuk akal untuk dilaksanakan.

Beberapa tulisan yang mendiskusikan mengenai teknik penyusunan rancangan FFSP dapat dikelompokkan menjadi dua kelompok. Kelompok pertama adalah menyusun kombinasi taraf faktor petak utama dan anak petak dalam satu tahapan. Metode ini meliputi pendekatan pembauran (*confounding*) untuk rancangan reguler dua-taraf (Huang *et al.*, 1998; Bingham & Sitter, 1999; Bingham *et al.*, 2004) dan pendekatan rancangan optimum (Goos & Vandebroek, 2003; Jones & Goos, 2007; 2009). Tipe kedua adalah menyusun rancangan split-plot dengan cara melakukan pemilihan sub-rancangan petak utama dan anak petak terlebih dahulu dan kemudian menggabungkan semuanya dengan teknik tertentu sehingga diperoleh rancangan lengkapnya. Teknik ini dikenal sebagai teknik *stratum-by-stratum* dan antara lain dapat ditemukan pada Bisgaard (2000), Kulahci & Bisgaard (2005), Schoen (1999), Trinca & Gilmour (2001), serta Sartono *et al.* (*in press*).

Penelitian ini dimaksudkan untuk memberikan alternatif baru terhadap teknik jenis *stratum-by-stratum* dengan tidak melakukan pemilihan dua sub-rancangan secara independen. Yang penulis usulkan adalah melakukan pemilihan sub-rancangan anak petak terlebih dahulu, kemudian melakukan pemilihan sub-rancangan petak utama berdasarkan karakteristik sub-rancangan anak petaknya. Pendekatan semacam ini diharapkan mampu memberikan rancangan akhir yang lebih baik karena dua sub-rancangan yang dipilih dengan saling bebas belum tentu mampu memberikan rancangan hasil penggabungan yang paling optimum.

Dalam tulisan ini selanjutnya akan dijelaskan secara detail bagaimana pendekatan yang diusulkan beserta dengan formulasi matematis dari model optimisasi yang digunakan. Selain itu akan diberikan beberapa ilustrasi untuk menggambarkan bagaimana usulan pendekatan ini diimplementasikan dalam menyusun rancangan dengan setting tertentu.

2. Tinjauan Pustaka

Notasi matriks

Andaikan ingin disusun suatu rancangan split-plot dengan parameter rancangan sebagai berikut:

- b : banyaknya petak utama, setiap petak utama memiliki n/b anak petak
- n : total banyaknya *runs* atau satuan percobaan
- s : banyaknya faktor anak petak, semua faktor memiliki dua level
- w : banyaknya faktor petak utama, semua faktor memiliki dua level

Karena ada b buah petak utama, maka diperlukan b buah perlakuan dengan satu perlakuan petak utama untuk masing-masing petak utama. Andaikan saja bahwa b buah perlakuan tersebut dikumpulkan dalam suatu matriks \mathbf{M} berukuran $b \times w$.

Selanjutnya masing-masing petak utama memiliki n/b anak petak sehingga secara total terdapat n anak petak. Dengan demikian diperlukan n buah perlakuan anak petak. Misalkan bahwa matriks \mathbf{S} yang berukuran $n \times s$ adalah matriks yang memuat seluruh n perlakuan anak petak tersebut.

Rancangan akhir diperoleh dengan memasang satu buah perlakuan petak utama kepada n/b perlakuan anak petak. Andaikan \mathbf{B} adalah matriks yang memasang dengan aturan tersebut, maka $\mathbf{W} = \mathbf{BM}$ adalah susunan perlakuan petak utama dengan urutan baris sesuai dengan posisi perlakuan anak petak pasangannya. Jika ini bisa dilakukan maka matriks rancangan akhir yang dinotasikan \mathbf{R} adalah penggabungan (*augmenting*) saja antara matriks \mathbf{W} dan \mathbf{S} , atau $\mathbf{R} = [\mathbf{W} \mid \mathbf{S}]$.

Untuk matriks \mathbf{M} dan \mathbf{S} yang telah ditentukan, satu-satunya matriks yang harus ditemukan untuk memperoleh rancangan akhir adalah matriks \mathbf{B} . Sekarang seandainya matriks \mathbf{S} telah ditetapkan, namun matriks \mathbf{M} belum. Hal ini berarti bahwa perlakuan apa saja yang akan digunakan pada b buah petak utama belum ditentukan. Namun, pilihan perlakuan petak utama itu dapat dengan mudah disediakan. Dalam prakteknya, tidak banyak tersedia petak utama sehingga b buah perlakuan petak utama pada umumnya adalah subset dari rancangan faktorial penuh. Andaikan \mathbf{C} adalah matriks berisi kandidat perlakuan petak utama dengan ukuran $c \times w$ dengan $c > b$, maka \mathbf{M} adalah anak matriks dari \mathbf{C} .

Didefinisikan **P** adalah sebuah matriks sedemikian rupa sehingga $\mathbf{M} = \mathbf{PC}$, maka permasalahan memperoleh rancangan akhir selanjutnya menjadi lebih rumit karena selain harus mencari matriks **B**, kita juga harus mencari matriks **P**.

Tulisan ini bermaksud untuk memaparkan suatu metodologi memperoleh matriks **B** dan **P** secara simultan sehingga rancangan akhir yang diperoleh memperoleh karakteristik yang baik. Karakteristik tersebut dinyatakan dalam bentuk pembauran yang seminimal mungkin antara faktor-faktor yang ada dalam rancangan. Menggunakan prinsip hirarki dalam analisis data rancangan faktorial pecahan, kami mengusulkan untuk memberikan perhatian hanya pada pengaruh utama dan pengaruh interaksi dua faktor. Dengan meminjam istilah ‘*word*’ dan ‘*letter*’ pada diskusi mengenai pembauran dan aliasing, kami memfokuskan diri dengan memperhatikan pembauran yang direpresentasikan dengan *word* yang berisi maksimal empat *letter*.

Berikut ini diberikan ringkasan mengenai notasi yang akan digunakan dalam tulisan ini sesuai dengan uraian yang diberikan sebelumnya.

Notasi	Deskripsi
S	matriks perlakuan anak petak, yang juga merupakan matriks pengaruh utama anak petak, berukuran $n \times s$
Z	matriks merupakan matriks pengaruh interaksi dua faktor anak petak, berukuran $n \times s_2$ dengan $s_2 = s(s - 1)/2$
C	matriks yang berisi kandidat perlakuan petak utama, yang juga merupakan matriks yang berisi pengaruh utama petak utama, berukuran $c \times w$ dengan $c = k 2^w \geq b$
J	matriks yang berisi kandidat pengaruh interaksi dua faktor petak utama, berukuran $c \times w_2$ dengan $c = k 2^w \geq b$ dan $w_2 = w(w - 1)/2$
P	matriks pemilihan kandidat perlakuan petak utama, berukuran $b \times c$ $p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jika kandidat perlakuan petak utama ke- } j \text{ terpilih} \\ 0 & \end{cases}$ $\sum_j p_{ij} = 1 \text{ dan } 0 \leq \sum_j p_{ij} \leq 1$

Notasi	Deskripsi
M = PC	<p>matriks perlakuan petak utama terpilih, yang juga merupakan matriks pengaruh utama faktor petak utama, berukuran $b \times w$</p> <p>Syarat yang harus dipenuhi adalah $M_i \bullet M_j = 0$ atau bahwa antar faktor petak utama bersifat saling orthogonal. Notasi lain dari syarat tersebut adalah:</p> $\sum_{k=1}^b m_{ik}m_{jk} = 0 \text{ untuk semua pasangan } i \neq j$ $\sum_{i=1}^b m_{ij} = 0 \text{ untuk semua } j = 1, \dots, w$
Q = PJ	<p>matriks pengaruh interaksi dua faktor petak utama terpilih, berukuran $b \times w_2$</p> <p>Syarat yang harus dipenuhi adalah:</p> $\sum_{i=1}^b q_{ij} = 0 \text{ untuk semua } j = 1, \dots, w_2$ <p>matriks assignment/menjodohkan yang menunjukkan perlakuan petak utama tertentu dipasangkan dengan perlakuan anak petak yang mana (atau sebaliknya), berukuran $n \times b$</p> $b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jika perlakuan petak utama ke- } j \text{ dipasangkan dengan perlakuan anak pet} \\ 0 & \end{cases}$ $\sum_j b_{ij} = 1 \text{ untuk semua } i = 1, \dots, n$ $\sum_j b_{ij} = n/b \text{ untuk semua } j = 1, \dots, b$ <p>Matriks B harus bersifat orthogonal dengan S agar antar faktor petak utama dan faktor anak petak bersifat saling orthogonal. Dengan demikian syarat yang harus terpenuhi adalah</p> $\mathbf{B}^T \mathbf{S} = \mathbf{0}$ <p>atau</p> $\sum_{k=1}^n b_{ki}s_{kj} = 0 \text{ untuk setiap pasangan } i \text{ dan } j$
W = BM	matriks perlakuan (pengaruh utama) dari faktor petak utama, berukuran $n \times w$
V = BQ	matriks pengaruh interaksi dua faktor petak utama, berukuran $n \times w_2$
R	<p>matriks rancangan akhir berukuran $n \times (w + s)$</p> $\mathbf{R} = [\mathbf{W} \mid \mathbf{S}]$

Menggunakan notasi matriks di atas, selanjutnya dapat diperoleh matriks-matriks yang merepresentasikan beberapa pola pembauran dua, tiga, dan empat ‘huruf’ dan disajikan ringkasannya pada Tabel 1.

Tabel 1. Ringkasan Jenis Pola Pembauran dan Matriks yang Merepresentasikannya
Pola Pembauran

WS --- matriks: $\mathbf{S}^T \mathbf{W} = \mathbf{S}^T \mathbf{B} \mathbf{M} = \mathbf{S}^T \mathbf{B} \mathbf{P} \mathbf{C}$

pembauran pengaruh utama faktor petak utama (W) dan pengaruh utama faktor anak petak (S)

WWS --- matriks: $\mathbf{S}^T \mathbf{V} = \mathbf{S}^T \mathbf{B} \mathbf{Q} = \mathbf{S}^T \mathbf{B} \mathbf{P} \mathbf{J}$

- pembauran pengaruh utama faktor petak utama (W) dengan pengaruh interaksi antara faktor petak utama dan faktor anak petak (WS)
- pembauran pengaruh utama faktor anak petak S dengan pengaruh interaksi antar dua faktor petak utama (WW)

WSS --- matriks: $\mathbf{Z}^T \mathbf{W} = \mathbf{Z}^T \mathbf{B} \mathbf{M} = \mathbf{Z}^T \mathbf{B} \mathbf{P} \mathbf{C}$

- pembauran pengaruh utama faktor petak utama (W) dengan pengaruh interaksi antar dua faktor anak petak (SS)
- pembauran pengaruh utama faktor anak petak S dengan pengaruh interaksi antara faktor petak utama dan faktor anak petak (WS)

WWSS --- matriks: $\mathbf{Z}^T \mathbf{V} = \mathbf{Z}^T \mathbf{B} \mathbf{Q} = \mathbf{Z}^T \mathbf{B} \mathbf{P} \mathbf{J}$

- pembauran antara WW dan SS
- pembauran antar WS dengan WS yang lain

WSSS --- matriks: $\mathbf{Z}^T \mathbf{T} = \mathbf{Z}^T [(\mathbf{1}_s^T \otimes \mathbf{W}) \odot (\mathbf{S} \otimes \mathbf{1}_w^T)] = \mathbf{Z}^T [(\mathbf{1}_s^T \otimes \mathbf{B} \mathbf{M}) \odot (\mathbf{S} \otimes \mathbf{1}_w^T)] = \mathbf{Z}^T [(\mathbf{1}_s^T \otimes \mathbf{B} \mathbf{P} \mathbf{C}) \odot (\mathbf{S} \otimes \mathbf{1}_w^T)]$

- pembauran antara WS dan SS

Catatan: \otimes : Kronecker Product; \odot : Hadamard Product

Perhatikan bahwa karena diinginkan **B** bersifat orthogonal terhadap **S**, atau $\mathbf{B}^T \mathbf{S} = \mathbf{S}^T \mathbf{B} = 0$ maka pembauran WS dan WWS juga bernilai 0. Dengan demikian yang

diperlukan adalah mencari matriks **P** dan **B** yang meminimumkan pembauran WSS, WWSS, dan WSSS.

Fokus dari penelitian ini adalah memperoleh model optimasi untuk memperoleh **P** dan **B** dengan fungsi tujuan dan kendala yang disebutkan di atas. Dalam penelitian ini kami akan memaksakan penggunaan metode *linear programming*. Karena itu, beberapa tantangan yang akan ditemui adalah:

1. Menyatakan pembauran dalam bentuk linear. Hal ini telah dilakukan dalam Sartono *et al.* (*in press*) sehingga kami akan melakukan adopsi saja dari tulisan tersebut.
2. Melakukan linearisasi terhadap bentuk tak linear pada definisi pembauran yang tidak terdapat pada literatur yang ada. Dalam berbagai definisi pembauran, terdapat perkalian antara matriks **P** dan **B** yang dua-duanya merupakan variabel yang tidak diketahui. Jelas bahwa ini adalah bentuk yang tidak linear dan tidak diperbolehkan pada *linear programming*. Penelitian ini memberikan solusi linearisasi bentuk-bentuk tersebut.

Pendefinisian Fungsi Tujuan dan Kendala

Sifat Orthogonal Antar Faktor Petak Utama

Telah dinyatakan sebelumnya bahwa matriks **P** ditentukan sedemikian rupa sehingga b buah perlakuan petak utama yang dipilih dari c buah kandidat perlakuan menghasilkan matriks $\mathbf{M} = \mathbf{PC}$ yang bersifat saling orthogonal. Syarat yang harus dipenuhi pada matriks **M** yang dihasilkan adalah:

- $\sum_{i=1}^b m_{ij} = \sum_{i=1}^b \sum_{k=1}^c p_{ik} c_{kj} = 0$; untuk semua $j = 1, \dots, w$
- $\sum_{k=1}^b m_{ki} m_{kj} = \sum_{k=1}^b \left(\sum_{l=1}^c p_{kl} c_{li} \right) \left(\sum_{u=1}^c p_{ku} c_{uj} \right) = \sum_{k=1}^b \sum_{l=1}^c \sum_{u=1}^c p_{kl} c_{li} p_{ku} c_{uj} = \sum_{k=1}^b \sum_{l=1}^c \sum_{u=1}^c x_{klu} c_{li} c_{uj} = 0$;

untuk semua pasangan $i \neq j$ dengan $x_{klu} \leq p_{kl}$; $x_{klu} \leq p_{ku}$; $x_{klu} \geq p_{kl} + p_{ku} - 1$; dan $x_{klu} \in \{0, 1\}$

Pembauran tipe WSS

Jika didefinisikan $\mathbf{D} = [d_{ij}] = \mathbf{Z}^T \mathbf{BPC}$ maka matriks **D** adalah matriks yang menggambarkan derajat pembauran WSS seperti yang telah disebutkan pada Tabel 1. Uraian mengenai bagaimana unsur dari matriks **D** diperoleh dapat dinyatakan dalam penurunan formula di bawah ini

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^n z_{ik} w_{kj} = \sum_{k=1}^n z_{ik} \left(\sum_{l=1}^b b_{kl} m_{lj} \right) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^b z_{ik} b_{kl} m_{lj} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^b z_{ik} b_{kl} \left(\sum_{h=1}^c p_{lh} c_{hj} \right) =$$

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^b \sum_{h=1}^c z_{ik} b_{kl} p_{lh} c_{hj}$$

Perhatikan bahwa z_{ik} dan c_{lj} yang merupakan unsur dari matriks \mathbf{Z} dan \mathbf{C} nilainya sudah diketahui karena kedua matriks ditentukan di awal, sedangkan b_{kl} dan p_{lh} adalah variabel yang nilainya tidak diketahui karena keduanya adalah unsur dari matriks \mathbf{B} dan \mathbf{P} yang akan dicari. Dalam formulasi linear programming perkalian dari dua variabel yang tidak diketahui ini tidak diperbolehkan karena melanggar sifat linear. Untuk itulah kemudian dilakukan penyesuaian berupa linearisasi sebagai berikut.

Andaikan $y_{klh} = b_{kl} \times p_{lh}$. Variabel b_{kl} dan p_{lh} merupakan dua variabel yang bersifat biner, karena hanya bernilai 1 atau 0. Demikian pula dengan variabel y_{klh} . Memanfaatkan trik linearisasi yang ada di berbagai buku teks linear programming selanjutnya dapat dituliskan bahwa

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^b \sum_{h=1}^c z_{ik} y_{klh} c_{hj}$$

dengan $y_{klh} \leq b_{kl}$; $y_{klh} \leq p_{lh}$; $y_{klh} \geq b_{kl} + p_{lh} - 1$; dan $y_{klh} \in \{0, 1\}$.

Pembauran WWSS

Jika didefinisikan $\mathbf{E} = [e_{ij}] = \mathbf{Z}^T \mathbf{B} \mathbf{P} \mathbf{J}$ maka matriks \mathbf{E} adalah matriks yang menggambarkan derajat pembauran WWSS seperti yang telah disebutkan pada Tabel 1. Dengan cara yang serupa pada penguraian unsur dari matriks \mathbf{D} diperoleh dapat dinyatakan dalam penurunan formula unsur dari matriks \mathbf{E} sebagai:

$$e_{ij} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^b \sum_{h=1}^c z_{ik} b_{kl} p_{lh} j_{hj} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^b \sum_{h=1}^c z_{ik} y_{klh} j_{hj}$$

dengan $y_{klh} \leq b_{kl}$; $y_{klh} \leq p_{lh}$; $y_{klh} \geq b_{kl} + p_{lh} - 1$; dan $y_{klh} \in \{0, 1\}$.

Pembauran WSSS

Andaikan didefinisikan bahwa $\mathbf{F} = [f_{ij}] = \mathbf{Z}^T \mathbf{T} = \mathbf{Z}^T [(\mathbf{1}_s^T \otimes \mathbf{W}) \odot (\mathbf{S} \otimes \mathbf{1}_w^T)]$, maka matriks \mathbf{F} adalah matriks yang mewakili derajat pembauran WSSS yang dinyatakan pada Tabel 1. Unsur f_{ij} dari matriks \mathbf{F} dapat dituliskan dalam bentuk berikut

$$\begin{aligned}
 f_{ij} &= \sum_{k=1}^n z_{ik} t_{kj} = \sum_{k=1}^n z_{ik} w_{kv} s_{ku} \quad \text{untuk } v \in \{1, \dots, w\} \text{ dan } u \in \{1, \dots, s\} \\
 &= \sum_{k=1}^n z_{ik} \left(\sum_{l=1}^b b_{kl} m_{lv} \right) s_{ku} = \sum_{k=1}^n z_{ik} \left(\sum_{l=1}^b b_{kl} \left(\sum_{h=1}^c p_{lh} c_{hv} \right) \right) s_{ku} = \sum_{k=1}^n z_{ik} \left(\sum_{l=1}^b \sum_{h=1}^c b_{kl} p_{lh} c_{hv} \right) s_{ku} \\
 &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^b \sum_{h=1}^c z_{ik} b_{kl} p_{lh} c_{hv} s_{ku}
 \end{aligned}$$

Selanjutnya dengan teknik linearisasi diperoleh bahwa

$$f_{ij} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^b \sum_{h=1}^c z_{ik} y_{klh} c_{hv} s_{ku}$$

dengan $y_{klh} \leq b_{kl}$; $y_{klh} \leq p_{lh}$; $y_{klh} \geq b_{kl} + p_{lh} - 1$; dan $y_{klh} \in \{0, 1\}$.

Fungsi Tujuan

Perhatikan bahwa matriks **D**, **E**, dan **F** kesemuanya adalah matrik pembauran yang masing-masing mewakili tipe pembauran WSS, WWSS dan WSSS. Agar rancangan akhir memiliki kemampuan yang tinggi dalam melakukan pendugaan baik dari sisi kuantitas dan kualitas maka unsur dari matriks pembauran itu diinginkan memiliki elemen yang bernilai kecil, atau sedekat mungkin dengan nol. Dengan demikian andaikan $\delta_{ij} = |d_{ij}|$, $\varepsilon_{ij} = |e_{ij}|$, dan $\phi_{ij} = |f_{ij}|$ maka fungsi tujuan dari model optimisasi penyusunan rancangan adalah meminimumkan tiga jenis nilai tersebut.

Sartono *et al.* (in press) menggunakan dua buah besaran yang digunakan dalam fungsi tujuan untuk diminimumkan yaitu:

1. jumlah dari seluruh nilai mutlak unsur matriks pembauran, atau berturut-turut

$$\text{adalah } \sum_i \sum_j \delta_{ij}, \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij} \text{ dan } \sum_i \sum_j \phi_{ij}$$

2. nilai terbesar dari tiga jenis nilai yang disebutkan sebelumnya

Bentuk Model Pemrograman Linear

Berdasarkan uraian yang telah dipaparkan sebelumnya, maka disusun model pemrograman linear sebagai berikut.

Fungsi Tujuan :

$$\text{Minimumkan } a_1 \delta + a_2 \left[\sum_{i=1}^{s_2} \sum_{j=1}^w \delta_{ij} \right] + a_3 \varepsilon + a_4 \left[\sum_{i=1}^{s_2} \sum_{k=1}^{w_2} \varepsilon_{ij} \right] + a_5 \phi + a_6 \left[\sum_{i=1}^{s_2} \sum_{k=1}^{sw} \phi_{ij} \right]$$

Dengan Kendala:

(a) Pembauran WSS (untuk $\forall(i, j) \ i = 1, 2, \dots, s_2$ dan $j = 1, 2, \dots, w$)

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^b \sum_{h=1}^c z_{ik} y_{klh} c_{hj} - \delta_{ij} \leq 0; \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^b \sum_{h=1}^c z_{ik} y_{klh} c_{hj} + \delta_{ij} \geq 0; 0 \leq \delta_{ij} \leq \delta$$

(b) Pembauran WWSS (untuk $\forall(i, j) \ i = 1, 2, \dots, s_2$ dan $j = 1, 2, \dots, w_2$)

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^b \sum_{h=1}^c z_{ik} y_{klh} j_{hj} - \varepsilon_{ij} \leq 0; \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^b \sum_{h=1}^c z_{ik} y_{klh} j_{hj} + \varepsilon_{ij} \geq 0; 0 \leq \varepsilon_{ij} \leq \varepsilon$$

(c) Pembauran WSSS (untuk $\forall(i, j) \ i = 1, 2, \dots, s_2$ dan $j = 1, 2, \dots, sw$

dan $u = \lceil j/w \rceil, v = j - (u - 1)w$)

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^b \sum_{h=1}^c z_{ik} y_{klh} c_{hv} s_{ku} - \phi_{ij} \leq 0; \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^b \sum_{h=1}^c z_{ik} y_{klh} c_{hv} s_{ku} - \phi_{ij} \geq 0; 0 \leq \phi_{ij} \leq \phi$$

(d) Linearisasi perkalian **B** dan **P**

$$y_{klh} \leq b_{kl}; y_{klh} \leq p_{lh}; y_{klh} \geq b_{kl} + p_{lh} - 1; y_{klh} \in \{0, 1\}$$

(e) Orthogonal antara faktor anak petak dan petak utama (untuk $\forall(i, j) \ i = 1, 2, \dots, s$ and $j = 1, 2, \dots, b$)

$$\sum_{k=1}^n b_{ki} s_{kj} = 0$$

(f) Sifat orthogonal antar faktor petak utama

$$\sum_{i=1}^b \sum_{k=1}^c p_{ik} c_{kj} = 0; \text{ untuk semua } j = 1, \dots, w$$

$$\sum_{k=1}^b \sum_{l=1}^c \sum_{u=1}^c x_{klu} c_{li} c_{uj} = 0; \text{ untuk semua pasangan } i \neq j$$

(g) Linearisasi perkalian **P** dengan **P**

$$x_{klu} \leq p_{kl}; x_{klu} \leq p_{ku}; x_{klu} \geq p_{kl} + p_{ku} - 1; x_{klu} \in \{0, 1\}$$

(h) Karakteristik Matriks **B**

$$\sum_{s=1}^n b_{st} = \frac{n}{b} \text{ untuk } \forall t = 1, 2, \dots, b; \sum_{t=1}^b b_{st} = 1 \text{ untuk } \forall s = 1, 2, \dots, n; b_{st} \in \{0, 1\}$$

(i) Karakteristik Matriks **P**

$$\sum_j p_{ij} = 1; 0 \leq \sum_j p_{ij} \leq 1$$

3. Ilustrasi Implementasi

Guna memperjelas metode yang diusulkan, kami memberikan sebuah ilustrasi implementasi dari model optimisasi pemrograman linear yang diuraikan pada bab sebelumnya pada sebuah kasus rancangan split-plot dengan setting parameter rancangan tertentu. Andaikan setting yang digunakan adalah sebagai berikut. Terdapat $b = 4$ petak utama yang masing-masing berukuran 4 sehingga secara total terdapat $n = 16$

satuan percobaan. Banyaknya faktor yang terlibat adalah $w = 3$ faktor petak utama dan $s = 5$ faktor anak petak.

Pada kasus ini hanya diperlukan empat perlakuan petak utama dengan tiga faktor. Matriks kandidat rancangan petak utama dapat menggunakan rancangan faktorial lengkap 2^3 yang berisi delapan kandidat perlakuan. Rancangan anak petak yang dapat digunakan adalah rancangan faktorial pecahan 2^{5-1} dengan generator $I = ABCDE$.

Selanjutnya matriks sub-rancangan menjadi input bagi model optimisasi pemrograman linear yang kami susun untuk memperoleh matriks **P** dan **B**. Proses komputasi penyelesaian masalah optimasi dilakukan menggunakan PROC OPTMODEL pada modul SAS/OR. Pembaca yang tertarik untuk memperoleh programnya dapat menghubungi penulis pertama. Dengan menjalankan program tersebut, akan diperoleh matriks **P** dan **B** yang diinginkan seperti yang disajikan pada Gambar 1.

Berdasarkan matriks P dan B yang telah diperoleh, selanjutnya dapat disusun bentuk rancangan FFSP lengkap seperti yang diperoleh pada Tabel 2. Dapat diperiksa bahwa kolom-kolom pada rancangan itu bersifat ortogonal satu dengan yang lainnya.

4. Diskusi Dan Penutup

Pendekatan yang diusulkan dan dipaparkan pada tulisan ini didasarkan pada pemikiran bahwa pemilihan sub-rancangan sebaiknya tidak dilakukan secara independen. Model optimasi yang disusun digunakan untuk dapat memilih salah satu sub-rancangan (dalam hal ini adalah sub-rancangan petak utama) yang secara optimum dapat digabung dengan sub-rancangan lain (yaitu sub-rancangan anak petak). Pemilihan titik-titik rancangan dalam sub-rancangan petak utama dilakukan terhadap sebuah gugus berisi kandidat perlakuan petak utama.

Meskipun teknik optimasi lain dapat digunakan, kami menerapkan teknik pemrograman linear dengan alasan (a) lebih mudah dipahami kerangka pemikirannya, (b) dapat dijalankan pada banyak software-software matematik, operation research, maupun statistik. Salah satu kendala dari teknik optimasi ini adalah lamanya proses komputasi karena pendekatan ini bersifat eksak. Ke depan, sangat mungkin

dikembangkan program komputasi menggunakan pendekatan lain yang lebih cepat seperti metaheuristik.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Gambar 1. Matriks **P** dan **B** solusi dari masalah optimasi pemrograman linear untuk ilustrasi rancangan FFSP 16 runs

Tabel 2. Rancangan FFSP 16 runs yang diperoleh menggunakan metode yang diusulkan

Petak Utama	W1	W2	W3	Anak Petak	S1	S2	S3	S4	S5
1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1
				2	-1	1	1	-1	1
				3	1	-1	1	1	-1
				4	1	1	-1	-1	1
2	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1
				2	-1	1	1	1	-1
				3	1	-1	-1	1	1
				4	1	-1	1	-1	1
3	1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1
				2	-1	1	-1	1	1
				3	1	-1	-1	-1	-1
				4	1	1	1	1	1
4	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1
				2	-1	-1	1	1	1
				3	1	1	-1	1	-1
				4	1	1	1	-1	-1

Ucapan Terima Kasih

Penelitian ini dilaksanakan atas biaya program Penelitian Unggulan Perguruan Tinggi BOPTN Institut Pertanian Bogor Tahun 2013. Penulis menyampaikan terima kasih kepada Ditjen Dikti Kemendikbud dan LPPM IPB atas dukungan pendanaan tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

- Bisgaard, S. 2000. The design and analysis of $2^{k-p} \times 2^{q-r}$ split plot experiments. *Journal of Quality Technology* 32: 39–56.
- Bingham, D. R., Schoen, E. D., and Sitter, R. R. (2004). Designing fractional factorial splitplot experiments with few whole-plot factors. *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. C (Applied Statistics)*, 53: 325–339. Corrigendum, 54:955-958.
- Bingham, D. R. and Sitter, R. R. (1999). Minimum-aberration two-level fractional factorial split-plot designs. *Technometrics*, 41:62–70.
- Goos, P. and Vandebroek, M. (2003). D-optimal split-plot designs with given numbers and sizes of whole plots. *Technometrics* 45: 235-245.
- Huang, P., Chen, D., and Voelkel, J. O. (1998). Minimum-aberration two-level split-plot designs. *Technometrics*, 40: 314–326.
- Jones, B. and Goos, P. (2007). A candidate-set-free algorithm for generating D-optimal splitplot designs. *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. C (Applied Statistics)*, 56: 347–364.
- Jones, B. and Nachtsheim, C. J. (2009). Split-plot designs: What, why, and how. *Journal of Quality Technology*, 41: 340–361.
- Jones, B., and Goos, P. (2009). D-optimal design of split-split-plot experiments. *Biometrika* 96: 67-82.
- Kulahci, M. and Bisgaard, S. (2005). The use of Plackett-Burman designs to construct splitplot designs. *Technometrics*, 47: 495–501.
- Sartono, B., Goos, P., and Schoen, E. (*in press*). Constructing General Orthogonal Fractional Factorial Split-Plot Designs. (tentatively accepted by *Technometrics*)
- Schoen, E. D. (1999). Designing fractional two-level experiments with nested error structures. *Journal of Applied Statistics*, 26:495–508.
- Trinca, L. A. and Gilmour, S. G. (2001). Multistratum response surface designs. *Technometrics*, 43: 25–33.