

PENGUJIAN INTERCEPT PADA UJI SATU ARAH MAKSIMUM UNTUK TESTS TERKAIT NON-SAMPLE PRIOR INFORMATION

Budi Pratikno dan Arlinda Widiana
Jurusan MIPA Matematika Unsoed Purwokerto
bpratikto@gmail.com

Abstract

This research studied testing the intercept for one-side hypothesis (maximum) on a simple linear regression of tests that related to non-sample prior information (NSPI). The tests, namely unrestricted test (UT), restricted test (RT), and preliminary-test test (PTT), are used. The maximum power and minimum size are considered as a good test. A simulation study is presented for showing a graphically comparison of the tests. The result shown that the NSPI did not give a significant influence. It means that the PTT was not be an alternative choice between UT and RT, but they still follow the concept of the previous research.

Keywords: Linear model, power, and size.

1. Pendahuluan

Umumnya inferensi *statistics* dilakukan menggunakan data sampel. Inferensi statistik dapat berupa estimasi atau uji hipotesis. Kualitas estimator dan pengujian hipotesis dapat ditingkatkan menggunakan *non-sample prior information* (NSPI). NSPI adalah informasi tentang parameter populasi yang tidak berhubungan dengan data sampel. NSPI diperoleh dari sumber yang dapat dipercaya, misalnya studi sebelumnya atau pengetahuan ahli atau pengalaman dari para peneliti. Bancroft (1944, 1964) adalah peneliti pertama yang menggunakan NSPI untuk estimasi parameter. Kemudian dilanjutkan oleh Bancroft dan Han (1968) dan Saleh (2006), dan lain-lain. Selanjutnya, Tamura (1965), Saleh dan Sen (1978, 1982), serta Yunus dan Khan (2011), menggunakan NSPI untuk *testing* (pengujian) hipotesis pada kasus non parametrik. Setelah itu Pratikno (2012) menggunakan NSPI untuk *testing* hipotesis pada kasus parametrik. Penelitian ini adalah pengembangan penelitian sebelumnya dari penelitian Pratikno (2012) yang diterapkan pada hipotesis yang berbeda, yaitu *one-side hypothesis (maximum)*. Pratikno (2012) mengkaji *tests* yang terkait dengan NSPI, yaitu *unrestricted test* (UT), *restricted test* (RT), dan *pre-test test* (PTT), untuk *testing one-side hypothesis (minimum)*.

Pada kasus ini, penelitian difokuskan untuk *testing intercept* pada model regresi linier sederhana, $Y = \beta_0 + \beta_1 X + e$, dimana Y adalah *response*, β_0 adalah parameter

intercept, β_1 adalah parameter *slope*, X adalah *predictor*, dan e adalah *error term* yang berdistribusi normal. Model regresi yang terkait pengujian ini adalah model regresi untuk kasus variansi tidak diketahui (*unknown variance*) sedemikian hingga distribusi terkait adalah t dan *bivariate t distribution*.

Power (kuasa) uji adalah peluang menolak hipotesis nol (H_0) ketika nilai parameter yang sebenarnya terletak pada *alternative hypothesis* (H_1), sedangkan *size* (ukuran) uji adalah nilai *power* ketika nilai parameter yang sebenarnya terletak pada H_0 . Selanjutnya, *tests* (UT, RT, PTT) yang memiliki nilai *power* maksimum dan *size* minimum digunakan sebagai metode uji yang relevan/terbaik. *Software R* digunakan untuk menggambarkan grafik UT, RT dan PTT yang digunakan sebagai *graphically analysis*.

Pada bagian 2, dipresentasikan *proposed tests* dan modifikasi *tests* beserta distribusi sampling yang menyertainya. *Power* dan *size* dipaparkan pada bagian 3. Bagian 4, menggambarkan simulasi studi dan plot UT, RT, dan PTT. Kemudian, kesimpulan dan saran diberikan di bagian 5.

2. Proposed Tests

2.1. UT

Mengacu pada Pratikno (2012), *test* untuk kasus NSPI tidak terdapat dalam *slope* (β_1), pada pengujian hipotesis satu arah (maksimum), $H_0 : \beta_0 = 0$ versus $H_1 : \beta_0 < 0$, adalah

$$T^{UT} = \frac{\hat{\beta}_0 - 0}{s_{\hat{\beta}_0}} = \frac{\hat{\beta}_0 \sqrt{n}}{s_\varepsilon \left[1 + \frac{\bar{X}^2}{S_{XX}} \right]^{1/2}}, \quad (1)$$

dengan $s_\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y})^2}$ atau akar dari *mean square error* (MSE) yang merupakan estimator dari variansi eror model regresi linear sederhana, dan slope diestimasi dari data sampel. *Test* (statistik uji) Persamaan (1) mengikuti distribusi

Student- t dengan derajat bebas ($n-2$). Pada Persamaan (1) $\frac{\hat{\beta}_0 \sqrt{n}}{s_\varepsilon \left[1 + \frac{\bar{X}^2}{S_{XX}} \right]^{1/2}}$ dihitung dari

data sampel. Menurut Pratikno (2012), kuasa dan ukuran PTT berdistribusi gabungan dari (T^{UT}, T^{PT}) dan (T^{RT}, T^{PT}) . Kemudian, didefinisikan $\{K_n\}$ sebagai rangkaian hipotesis alternatif (H_1) , yaitu

$$K_n := (\beta_0 - b_0, \beta_1 - b_1) = \left(\frac{\lambda_1}{\sqrt{n}}, \frac{\lambda_2}{\sqrt{n}} \right) = n^{-1/2} \lambda.$$

Dalam hal ini, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) = (\beta_0 \sqrt{n}, (\beta_1 - b_1) \sqrt{n})$. Pada K_n , nilai $(\beta_0 - b_0) < 0$ dan $(\beta_1 - b_1) < 0$. Sementara itu, pada H_0 , nilai $(\beta_0 - b_0) = 0$ dan $(\beta_1 - b_1) = 0$. Selanjutnya, didefinisikan sampling statistik uji dari UT dan distribusinya pada K_n , yaitu

$$\begin{aligned} T_1^{UT} &= T^{UT} - \left(\sqrt{n} (\beta_0) \left[s_\varepsilon \sqrt{1 + \frac{\bar{X}^2}{S_{xx}}} \right]^{-1} \right) \\ &= T^{UT} - \frac{\lambda_1}{k}, \end{aligned} \quad (2)$$

dengan $k = s_\varepsilon \sqrt{1 + \frac{\bar{X}^2}{S_{xx}}}$.

2.2. RT

Jika NSPI terdapat pada *slope* (diketahui/fixed), yaitu $\beta_1 = b_1$, maka test terkait NSPI yang digunakan adalah RT. Statistik uji untuk RT adalah

$$T^{RT} = \frac{\tilde{\beta}_0 - 0}{s_{\tilde{\beta}_0}} = \frac{\sqrt{n} \tilde{\beta}_0}{s_y}. \quad (3)$$

derajat bebas $(n-1)$. Selanjutnya, pada K_n , $(\beta_0 - b_0) < 0$ dan $(\beta_1 - b_1) < 0$, statistik uji dari RT diberikan oleh

$$\begin{aligned} T_2^{RT} &= T^{RT} - \frac{\beta_0 + (\beta_1 - b_1) \bar{X}}{\frac{s_y}{\sqrt{n}}} \\ &= T^{RT} - \frac{\lambda_1 + \lambda_2 \bar{X}}{s_y}. \end{aligned} \quad (4)$$

2.3. PTT

Jika NSPI terdapat pada *slope* (β_1) tetapi *uncertain* (diduga sebesar b_1), maka uji terkait NSPI yang digunakan adalah PTT. Pada PTT didahului dengan *pre-test* (PT), yaitu uji $H_0^* : \beta_1 = b_1$ vs $H_1^* : \beta_1 < b_1$, sedemikian hingga statistik uji PT adalah

$$T^{PT} = \frac{\hat{\beta}_1 - b_1}{s_{\hat{\beta}_1}} = \frac{\hat{\beta}_1 - b_1}{s_\varepsilon / \sqrt{S_{XX}}}, \quad (5)$$

dengan $S_{XX} = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ dan $s_\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y})^2}$. Jika H_0^* PT ditolak, maka gunakan UT untuk menguji H_0 karena UT berkorelasi dengan PT, jika tidak demikian maka RT yang digunakan. Secara sama, Persamaan (2.5) berdistribusi Student-*t* dengan derajat bebas ($n-2$). Secara jelas, bahwa PT dan UT berkorelasi, sedangkan PT dan RT tidak berkorelasi, sehingga kemudian *power* dan *size* dari PTT pada tingkat signifikansi α_3 diberikan sebagai kombinasi dari kondisi tersebut (Pratikno, 2012).

3. Power and Size

3.1. UT

Mengacu Pratikno (2012) dan Persamaan (2.2), *power* UT pada tingkat signifikansi α_1 , adalah

$$\begin{aligned} \pi_t^{UT}(\lambda_1) &= P(T^{UT} > t_{\alpha_1, n-2} | K_n) \\ &= 1 - P\left(T_1^{UT} \leq t_{\alpha_1, n-2} - \frac{\lambda_1}{k}\right) \end{aligned} \quad (6)$$

dan *size* UT diberikan sebagai

$$\begin{aligned} \alpha_t^{UT} &= P(T^{UT} > t_{\alpha_1, n-2} | H_0 : \beta_0 = 0) \\ &= 1 - P(T_1^{UT} \leq t_{\alpha_1, n-2}). \end{aligned} \quad (7)$$

3.2. RT

Selanjutnya, dengan menggunakan cara yang sama seperti pada UT, untuk tingkat signifikansi α_2 , maka diperoleh *power* and *size* RT sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\pi_t^{RT}(\lambda) &= P(T^{RT} > t_{\alpha_2, n-1} | K_n) \\ &= P\left(T_2^{RT} > t_{\alpha_2, n-1} - \frac{\sqrt{n}(\beta_0 + (\beta_1 - b_1)\bar{X})}{s_y}\right) \\ &= 1 - P\left(T_2^{RT} \leq t_{\alpha_2, n-1} - \frac{\lambda_1 + \lambda_2 \bar{X}}{s_y}\right).\end{aligned}\quad (8)$$

$$\begin{aligned}\alpha_t^{RT} &= P(T^{RT} > t_{\alpha_2, n-1} | H_0 : \beta_0 = 0) \\ &= 1 - P\left(T_2^{RT} \leq t_{\alpha_2, n-1} - \frac{\lambda_2 \bar{X}}{s_y}\right).\end{aligned}\quad (9)$$

3.3. PTT

Mengacu Pratikno (2012) dan kondisi UT dan PT (berkorelasi) dan RT dan PT (tidak berkorelasi) sebagaimana dinyatakan pada subbagian 2.3., maka *power* dan *size* dari PTT pada tingkat signifikansi α_3 diberikan sebagai

$$\begin{aligned}\pi_t^{PTT}(\lambda) &= P(T^{PT} > t_{\alpha_3, n-2}, T^{UT} > t_{\alpha_1, n-2}) + P(T^{PT} \leq t_{\alpha_3, n-2}, T^{RT} > t_{\alpha_2, n-1}) \\ &= m_{2\rho}\left(t_{\alpha_3, n-2} - \lambda_2 \frac{\sqrt{S_{XX}}}{s_\varepsilon \sqrt{n}}, t_{\alpha_1, n-2} - \frac{\lambda_1}{k}; \rho \neq 0\right) + \\ & m_{10}\left(t_{\alpha_3, n-2} - \lambda_2 \frac{\sqrt{S_{XX}}}{s_\varepsilon \sqrt{n}}, t_{\alpha_2, n-1} - \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 \bar{X})}{s_y}; \rho = 0\right).\end{aligned}\quad (10)$$

Pada Persamaan (10), $m_{2\rho}\left(t_{\alpha_3, n-2} - \lambda_2 \frac{\sqrt{S_{XX}}}{s_\varepsilon \sqrt{n}}, t_{\alpha_1, n-2} - \frac{\lambda_1}{k}; \rho \neq 0\right)$ dan

$m_{10}\left(t_{\alpha_3, n-2} - \lambda_2 \frac{\sqrt{S_{XX}}}{s_\varepsilon \sqrt{n}}, t_{\alpha_2, n-1} - \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 \bar{X})}{s_y}; \rho = 0\right)$, adalah probabilitas *bivariat Student-t*

yang didefinisikan dengan

$$m_{2\rho}(a_1, a_2; \rho \neq 0) = \int_{a_2}^{\infty} \int_{a_1}^{\infty} f(t^{PT}, t^{UT}) dt^{PT} dt^{UT} \quad (11)$$

dan

$$m_{10}(a_1, a_3; \rho = 0) = \int_{a_3}^{\infty} \int_{-\infty}^{a_1} f(t^{PT}, t^{RT}) dt^{PT} dt^{RT}. \quad (12)$$

Nilai koefisien korelasi antara T^{UT} dan T^{PT} , adalah $-1 < \rho < 1$, dan size dari PTT dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} \alpha_i^{PTT} &= P(T^{PT} > a_1, T^{UT} > a_2 | H_0) + P(T^{PT} \leq a_1, T^{RT} > a_3 | H_0) \\ &= m_{2,\rho}(t_{\alpha_3, n-2}, t_{\alpha_1, n-2}; \rho) + m_{10}\left(t_{\alpha_3, n-2}, t_{\alpha_2, n-1} - \frac{\lambda_2 \bar{X}}{s_y}; \rho = 0\right), \end{aligned} \quad (13)$$

dengan a_1, a_2 , dan a_3 adalah bilangan riil.

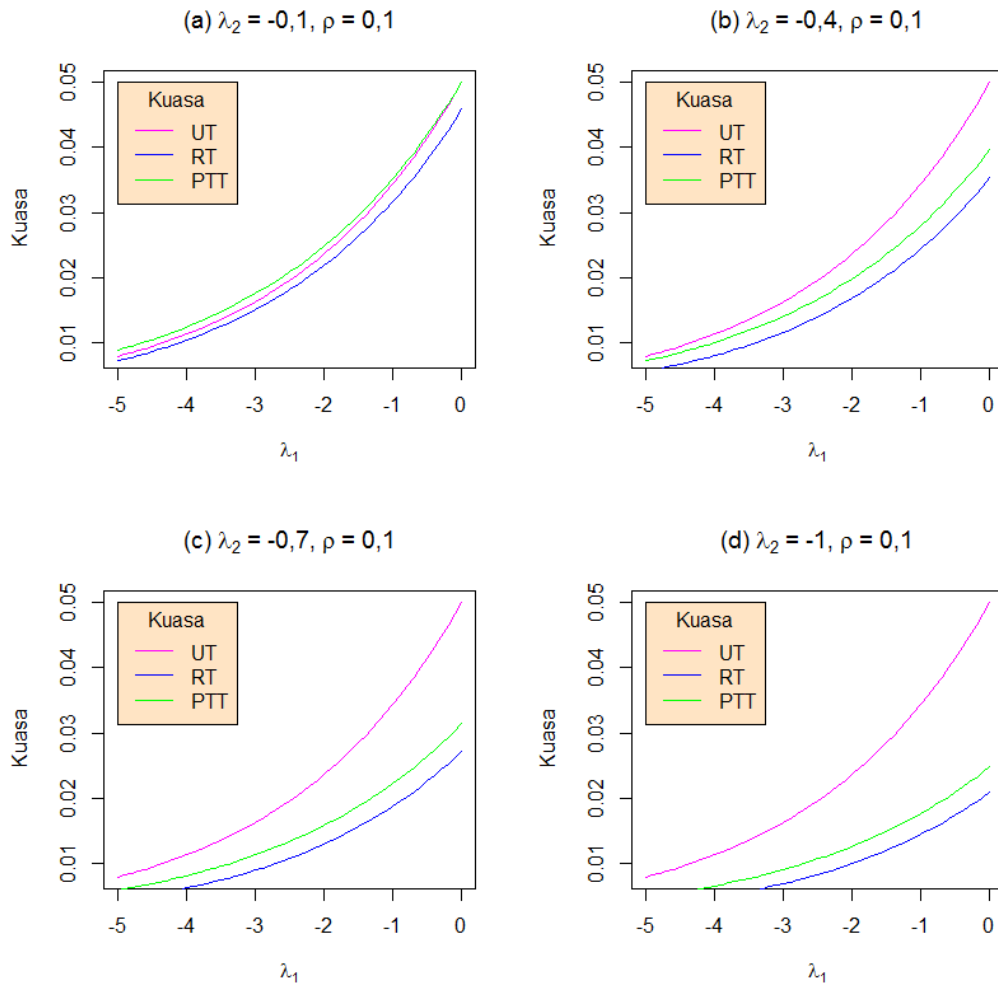
4. Simulation Study

Awal dari penelitian ini adalah akan menerapkan pada data riil yang memenuhi testing *one-side hypothesis* (maksimum), namun hal ini sulit dilakukan karena ketidaktersediaan yang cukup pada data riil yang memenuhi kondisi tersebut. Selanjutnya, penelitian ini difokuskan pada data pembangkitan dari R package 13.0.1, dengan $\beta_0 = -10$, $\beta_1 = -5$, nilai X_i di *generate* dari normal *mean* 2 dan standar deviasi 3 (tidak harus berdistribusi), dan ε_i dibangkitkan dari distribusi normal dengan $\mu = 0$ dan variansi $\sigma^2 = 1$.

4.1 Power of the Tests

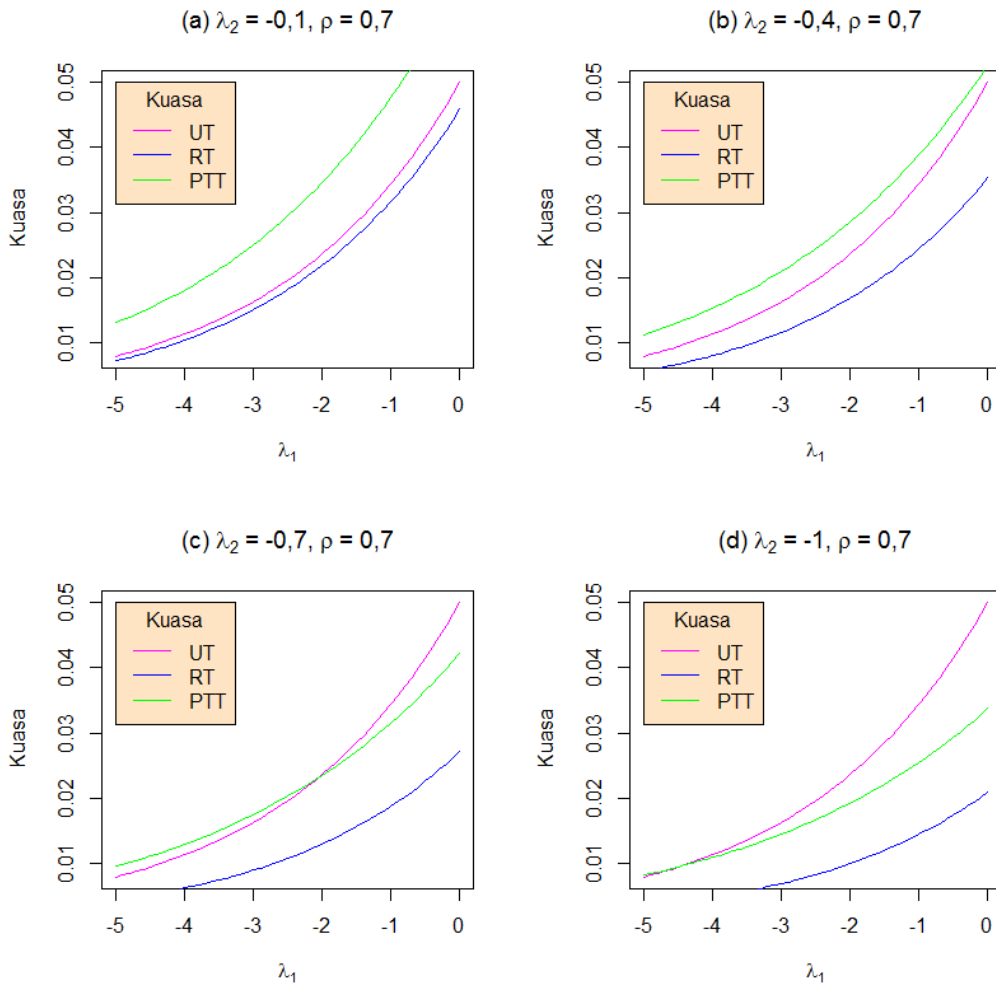
Grafik untuk kuasa uji dari UT, RT, dan PTT didasarkan pada Persamaan untuk koefisien korelasi 0,1 dan nilai λ_2 (lambda2) yang berbeda.

Grafik (Gambar 1) menunjukkan bahwa semakin besar nilai λ_1 , maka nilai kuasa dari UT semakin besar, dan UT tidak bergantung pada λ_2 . RT semakin besar sebagaimana nilai λ_1 , membesar, dan semakin kecil ketika nilai λ_2 maka semakin kecil. Hal ini berarti bahwa kuasa dari Γ^T tidak maksimum dan cenderung tidak optimal (baik). Sementara itu, PTT semakin besar sebagaimana nilai λ_1 semakin besar. Artinya PTT semakin baik. Secara jelas, terlihat bahwa ketika $\lambda_1 < 0$ dan $\lambda_2 < 0$ kuasa dari UT dan PTT selalu lebih besar daripada kuasa dari RT.

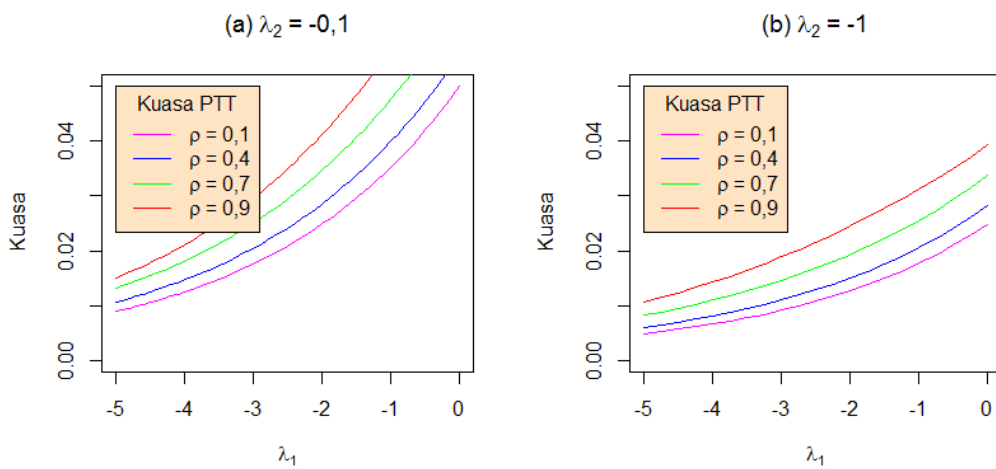


Gambar 1. Kuasa dari UT, RT, dan PTT versus λ_1 dengan Nilai λ_2 Berbeda.

Gambar 2 di bawah ini adalah grafik kuasa dari UT, RT, dan PTT untuk nilai λ_2 dan ρ yang berbeda-beda. Gambar 3 adalah variasi grafik PTT.



Gambar 2. Kuasa dari UT, RT, dan PTT versus λ_1 dengan $\lambda_2 = -0,1; -0,4; -0,7$; dan -1 , serta $\rho = 0,7$.

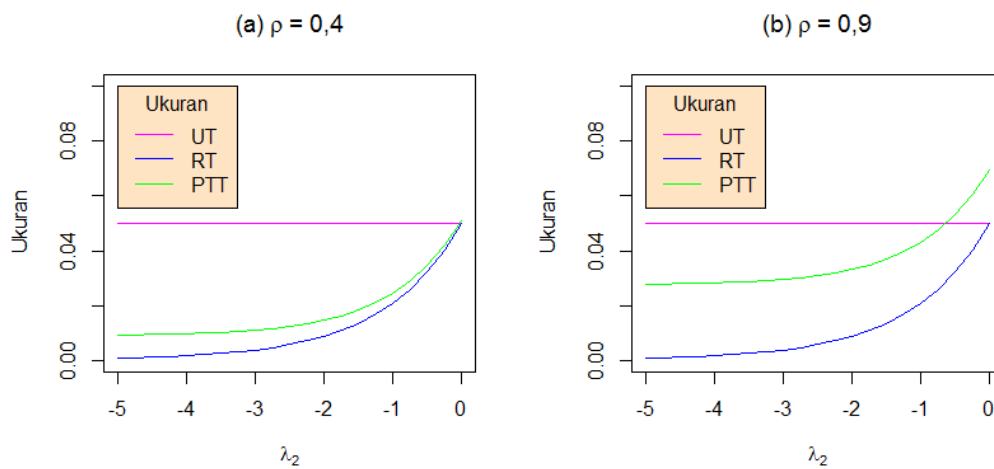


Gambar 3. Kuasa dari PTT versus λ_1 dengan $\lambda_2 = -0,1; -1$ dan $\rho = 0,1; 0,4; 0,7; 0,9$.

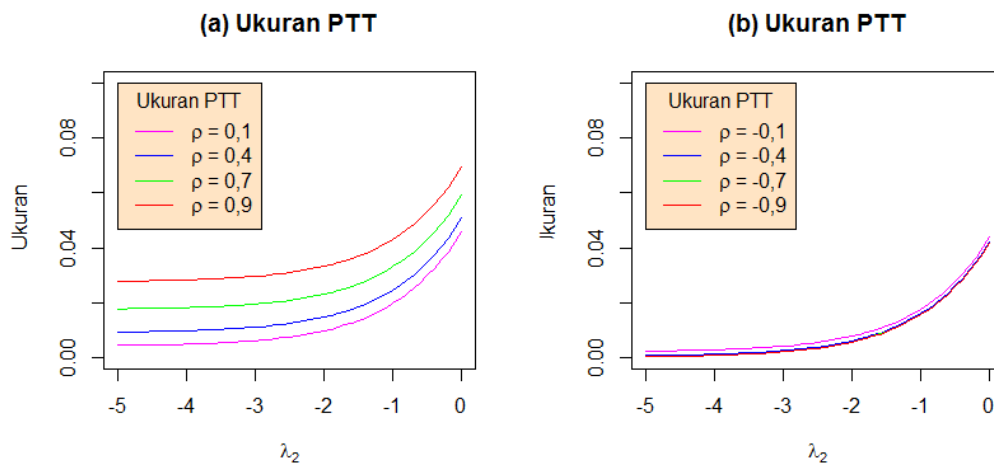
Gambar 1 – Gambar 3 dengan $\rho > 0$ menunjukkan bahwa grafik PTT berubah sebagaimana nilai ρ berubah, yaitu PTT semakin besar jika nilai ρ semakin besar. Simulasi grafik menunjukkan bahwa grafik kuasa dari UT, RT, dan PTT ketika $\rho < 0$ adalah *similar*.

4.2 Size of the Tests

Size of the tests (UT, RT, dan PTT) pada kasus ini disajikan pada Gambar 4 dibawah ini.



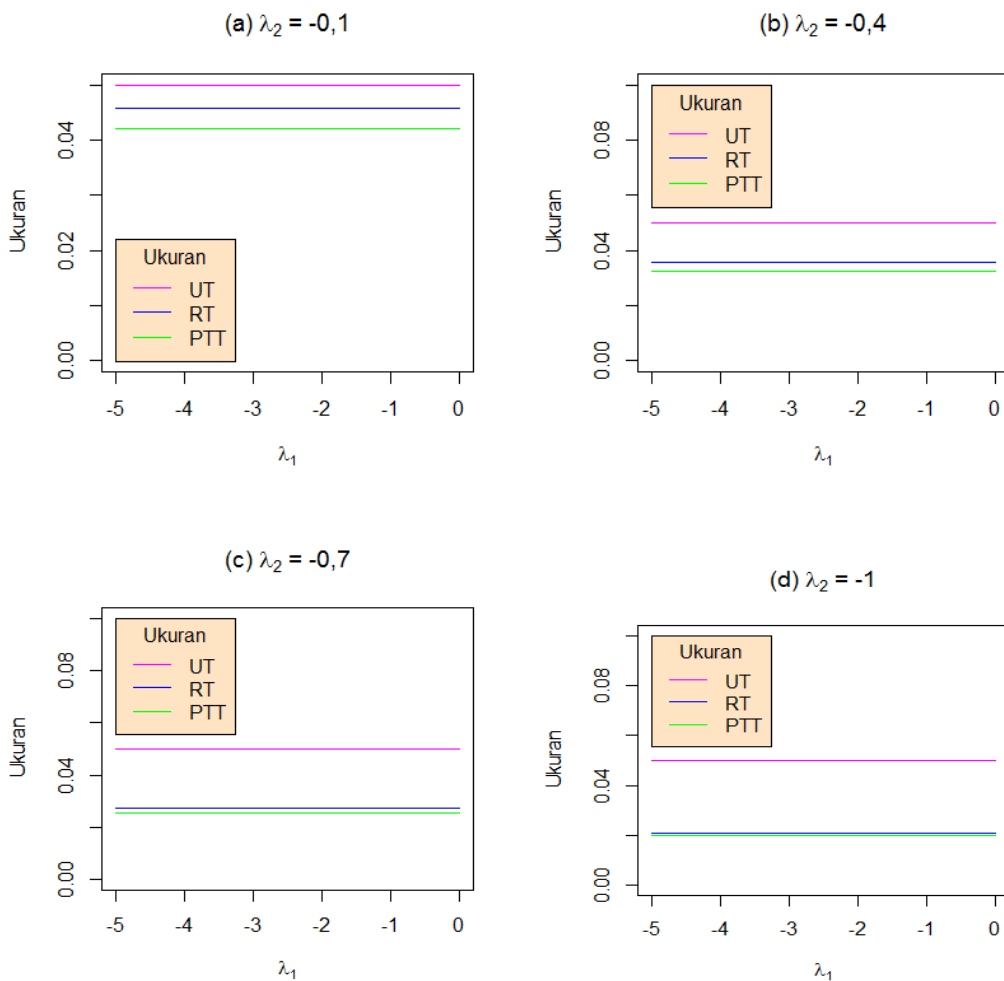
Gambar 4. Size of tests (UT, RT dan PTT)



Gambar 5. Ukuran uji dari PTT versus λ_2 dengan $\rho = 0,1; 0,4; 0,7; \text{ dan } 0,9$ serta ukuran uji dari PTT versus λ_2 dengan $\rho = -0,1; -0,4; -0,7; \text{ dan } -0,9$.

Berdasarkan Gambar 4, ukuran UT bernilai konstan karena tidak bergantung terhadap nilai λ_1 , λ_2 dan ρ , sedangkan ukuran RT bergantung terhadap nilai λ_2 , RT bertambah besar ketika nilai λ_2 bertambah besar. Kemudian, ukuran PTT bergantung terhadap nilai λ_2 dan ρ , dan tidak bergantung terhadap nilai λ_1 . Ukuran PTT bertambah besar ketika nilai λ_2 bertambah besar, demikian juga ketika nilai $\rho > 0$.

Gambar 5 memberikan informasi bahwa semakin kecil nilai ρ , maka semakin kecil pula nilai kuasa dari PTT, dengan demikian tidak similar untuk koefisien korelasi positif dan negatif. Selanjutnya, disajikan grafik dengan sumbu x-nya adalah λ_1 agar dapat menggambarkan lebih jelas perbedaan besarnya ukuran uji dari UT, RT, dan PTT.



Gambar 6. Ukuran dari UT, RT, dan PTT versus λ_1 dengan $\lambda_2 = -0,1; -0,4; -0,7; \text{ dan } -1$.

Berdasarkan Gambar 6, nilai ukuran dari RT dan PTT bertambah kecil ketika nilai λ_2 lebih kecil, sedangkan ukuran uji dari UT selalu konstan. Ketika nilai $\lambda_2 < 0$, ukuran uji dari UT selalu lebih besar dari ukuran RT dan PTT.

5. Kesimpulan dan Saran

5.1. Kesimpulan

Hasil riset menunjukkan bahwa nilai *power of the tests* (UT, RT dan PTT) relatif kecil, dan hal ini dapat dianggap sebagai indikator bahwa hasil riset ini relatif *significant* berbeda dengan *previous research* (Pratikno, 2012) pada kondisi $\lambda_1 < 0$. Kenyataan tersebut berkesan bahwa NSPI tidak berpengaruh terhadap pemilihan *tests* sebagaimana hasil pada penelitian sebelumnya pada testing, $H_0 : \beta_0 = \beta_{00}$ versus $H_1 : \beta_0 > \beta_{00}$, dimana PTT menjadi pilihan terbaik daripada RT dan UT. Namun, secara konsep dan *graphical analysis* (mengabaikan besaran nilai *power*), hasil riset masih mengikuti konsep *testing* dengan menggunakan NSPI, yaitu PTT adalah pilihan terbaik dari kedua *tests* UT dan RT. Hal ini ditunjukkan bahwa nilai *power* dan size PTT cenderung terletak antara UT dan RT. Akhirnya, mengacu dari riset ini dan *previous research*, maka dapat dipahami bahwa NSPI sangat dekat pada aplikasi data riil yang cenderung positif.

5.2 Saran

Sebaiknya dicobakan pada data riil, yang kemudian dibandingkan relevansinya dengan teori, dan juga perlu dilakukan untuk berbagai variansi kajian secara teori hipotesis dan relevansinya dengan kondisi-kondisi yang harus dipenuhi baik baik pada data riil ataupun teori distribusi dan hipotesis.

DAFTAR PUSTAKA

- Bancroft, T.A. (1944). On Biases in Estimation Due to The Use of The Preliminary Tests of Significance. *Annals Of Mathematical Statistics*. **15**, 190-204.
- Bancroft, T.A. (1964). Analysis and Inference for Incompletely Specified Models Involving The Use of The Preliminary Test(s) of Significance. *Biometrics*, **20**(3), 427-442.
- Han, C.P. dan Bancroft, T.A. (1968). On Pooling Means When Variance Is Un-Known. *Journal of American Statistical Association*, **63**, 1333-1342.

- Pratikno, B. (2012). Tests of Hypotesis for Linear Regression Models with Non Sample Prior Information. Disertasi, University of Southern Queensland.
- Saleh, A. K. Md. E. (2006). Theory of Preliminary Test and Stein-Type Estimation with Applications. Wiley, New Jersey.
- Saleh, A.K. Md. E. dan Sen, P.K. (1997). Nonparametric Estimation of Location Parameter After a Preliminary Tests on Regression. *Annals of Statistical*, **6**, 154-168.00
- Saleh, A. K. Md. E .dan Sen, P.K. (1982). Nonparametric Tests for Location After Parameter a Preliminary Tests on Regression. *Communication in Statistics-Theory and Methods*, **12**(16), 1855-1872.
- Tamura, R. (1965). Nonparametric Inferences With a Preliminary Test. *Bull. Math. Stat.* **11**, 38-61.
- Yunus, R.M. dan Khan, S. (2011). Increasing Power Of The Test Through Pre-Test – A Robust Method. *Communications in Statistics – Theory and Method*, **40**, 581-597.