

SOLUSI ANALITIK PERSAMAAN TRANSPORT DAN DISTRIBUSI AMONIAK

Ipung Setiawan¹, Widowati²

^{1,2}Jurusan Matematika FMIPA UNDIP

E-mail : [2wiwied_mathundip@yahoo.com](mailto:wiwied_mathundip@yahoo.com)

ABSTRAK

Aplikasi transformasi Laplace pada persamaan transport dan distribusi amoniak dikaji pada paper ini. Model matematika yang merepresentasikan perilaku analitik perubahan konsentrasi amoniak terhadap posisi dan waktu pada perairan diformulasikan. Model matematika untuk transport dan distribusi amoniak tersebut dikonstruksi berdasarkan peristiwa adveksi dan difusi-dispersi. Model matematika yang diperoleh berupa persamaan diferensial parsial. Persamaan ini juga dibangun melalui proses transformasi dari amoniak menjadi nitrit dalam proses nitrifikasi. Selanjutnya, persamaan diferensial parsial yang terbentuk dicari solusinya dengan mengaplikasikan transformasi Laplace. Solusi yang diperoleh berupa solusi analitik yang serupa dengan fungsi error komplementer. Dari hasil simulasi diperoleh bahwa semakin besar nilai koefisien difusi-dispersi maka pergerakan konsentrasi amoniak ke arah berkurangnya konsentrasi semakin lambat.

Kata Kunci : *Adveksi, difusi-dispersi, transport amoniak, persamaan diferensial parsial, transformasi Laplace*

1. Pendahuluan

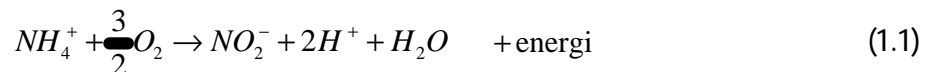
Transformasi Laplace biasa digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa, namun dalam makalah ini transformasi Laplace akan digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial untuk model transport dan distribusi amoniak. Model matematika mengenai penyebaran nitrogen (amoniak) pada perairan yang dikembangkan oleh P.G. Whitehead dan R.J. Williams (1982) membentuk persamaan diferensial parsial. Model ini dibangun berdasarkan peristiwa adveksi dan difusi-dispersi pada suatu perairan serta proses nitrifikasi tahap pertama pada siklus nitrogen yaitu proses transformasi dari amoniak menjadi nitrit.

Pada siklus ini oksigen sangat diperlukan untuk mengubah amoniak menjadi nitrit kemudian nitrit menjadi nitrat, akibatnya kadar DO (*Dissolved Oxygen*) pada perairan akan menurun. Tahapan nitrifikasi pada siklus nitrogen dinyatakan dalam bagan siklus nitrogen (Whitehead dan William,

1982). Nitrifikasi merupakan suatu proses oksidasi enzimatik yang dilakukan oleh sekelompok jasad renik/bakteri dan berlangsung dalam dua tahap yang terkondisikan sebagai berikut :

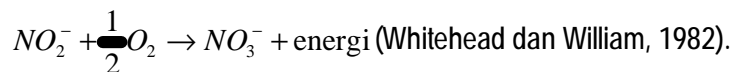
1. Tahap pertama yaitu nitritasi.

Pada proses ini reaksi berlangsung dari amoniak diubah menjadi nitrit yang melibatkan bakteri *Nitrosomonas* dan *Nitrosococcus* dengan persamaan reaksi (Whitehead dan William, 1982) sebagai berikut.



2. Tahap kedua yaitu nitratasi.

Pada proses tahap kedua reaksi diperankan oleh bakteri *Nitrobacter* dan *Nitrococcus spp* yang melakukan oksidasi dari nitrit ke nitrat dengan persamaan reaksi



2. Model Persamaan Transport dan Distribusi Amoniak

Model transport dan distribusi amoniak dikonstruksi pada perairan yang memiliki sifat *steady state flow* dan *uniform flow*. Sistem massa polutan (amoniak) pada aliran ini mengikuti hukum kekekalan massa (*law of conservation of mass*) yang menyatakan bahwa massa di dalam suatu sistem aliran akan tetap menurut waktu (Welty, dkk, 2001).

Terdapat beberapa pendekatan untuk meninjau kualitas air. Pendekatan yang dibahas disini menganggap bahwa pada setiap titik di suatu ruang berhubungan dengan nilai unsur yang ditinjau. Dalam hal ini unsur yang ditinjau adalah konsentrasi materi dari volume yang melingkupinya. Melalui pendekatan ini, air dengan sejumlah komponen yang heterogen dapat dijelaskan sebagai suatu paduan dari sejumlah kekontinuan yang berbeda, saling berinteraksi satu sama lain dan menempati posisi yang sama di suatu ruang sedemikian sehingga unsur-unsur pada masing-masing kekontinuan dapat diidentifikasi pada setiap titik di ruang tersebut.

Peristiwa transport dan distribusi amoniak terjadi secara adveksi dan difusi-dispersi. Adveksi merupakan suatu mekanisme transportasi massa suatu materi dari suatu titik ke titik lain yang terjadi pada aliran fluida. Secara matematika gerakan fluida dalam fenomena adveksi dinyatakan sebagai medan vektor dan bahan yang diangkut dinyatakan sebagai suatu skalar konsentrasi materi yang terkandung dalam cairan. Transport secara adveksi besarnya adalah hasil kali antara besarnya debit aliran dengan konsentrasi massa suatu materi.

Difusi dapat diartikan sebagai perpindahan partikel-partikel suatu materi dari daerah yang konsentrasinya tinggi menuju daerah yang konsentrasinya rendah sebagai akibat adanya gaya

pendorong. Sedangkan dispersi merupakan proses penyebaran partikel-partikel suatu materi oleh karena proses difusi. Berdasarkan hukum Fick yang kedua besarnya perubahan konsentrasi dirumuskan dengan $\frac{\partial C(x,t)}{\partial t} = E \frac{\partial^2 C(x,t)}{\partial x^2}$ dengan E adalah koefisien difusi-dispersi (L^2T^{-1}).

Keseimbangan massa polutan (amoniak) menurut hukum kekekalan massa (*law of conservation of mass*) pada aliran satu dimensi [2] diformulasikan sebagai berikut. *akumulasi dalam tiap segmen = transport input adveksi + transport input dispersi - transport output adveksi - transport output dispersi ± reaksi kimia*. Model matematika untuk transport dan distribusi amoniak (Whitehead dan William, 1982) ialah

$$\frac{\partial C(x,t)}{\partial t} = -v \frac{\partial C(x,t)}{\partial x} + E \frac{\partial^2 C(x,t)}{\partial x^2} - kC(x,t) \quad (2.1)$$

dengan

v : kecepatan aliran (LT^{-1})

k : tetapan laju reaksi amonium menjadi nitrit (T^{-1})

3. Solusi Persamaan Transport dan Distribusi Amoniak dengan Aplikasi Transformasi Laplace

Transformasi Laplace merupakan suatu metode operasional yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial. Dengan menggunakan transformasi Laplace, beberapa fungsi umum seperti fungsi sinusoida, fungsi sinusoida teredam dan fungsi eksponensial dapat diubah menjadi fungsi-fungsi aljabar variabel kompleks [4].

Definisi 3.1 (Ogata, K., 1970)

Misalkan $f(t)$ adalah suatu fungsi yang kontinu pada interval $[0, \infty)$ maka transformasi Laplace dari $f(t)$ didefinisikan dengan integral

$$L(f(t)) = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad (3.1)$$

$f(t)$: fungsi waktu (t) sedemikian rupa sehingga $f(t) = 0$ untuk $t < 0$. s : variabel kompleks.

Nilai integral persamaan (3.1) ada jika $\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a f(t)e^{-st} dt$.

Teorema 3.1 (Ogata, K., 1970)

Transformasi Laplace dari turunan fungsi $f(t)$ dinyatakan dalam persamaan $L \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] = sF(s) - f(0)$ dengan $f(0)$ adalah nilai awal $f(t)$ yang dihitung pada $t = 0$.

Definisi 3.2 (Ogata, K., 1970)

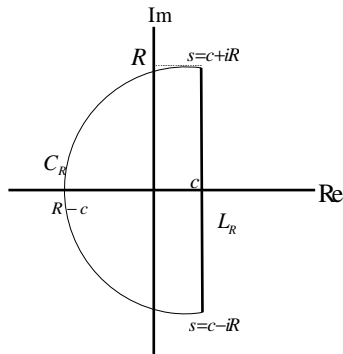
Transformasi Laplace Balik untuk $f(t)$ didefinisikan $f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{st} ds$ ($t > 0$) dengan c adalah konstanta pada sumbu real positif yang dipilih sedemikian sehingga lebih besar dari semua titik singular dari $F(s)$.

Teorema 3.2 (Munsch, A.D., 1994)

Misal $F(s)$ adalah transformasi Laplace dari $f(t)$ yang mempunyai sejumlah titik singular berhingga $s_1, s_2, s_3, \dots, s_k$ yang terletak di sebelah kiri garis vertikal $\text{Re}(s) = c$. Jika $F(s)$ terbatas oleh M_R dengan $M_R \rightarrow 0$ dan $R \rightarrow \infty$, maka $L^{-1}(F(s)) = \sum_{k=1}^n \text{Res} [e^{st} F(s), s = s_k]$

Bukti

Ditentukan lintasan $C = L_R + C_R$ sesuai dengan Gambar 3.1 sehingga semua titik singularnya terletak di sebelah kiri garis $L_R : s = c - iR$ hingga $s = c + iR$. Karena e^{st} analitik dimanapun pada bidang s sehingga $e^{st} F(s)$ mempunyai singularitas yang sama dengan fungsi $F(s)$ dengan demikian $\int_C e^{st} F(s) ds = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res} [e^{st} F(s), s = s_k]$ Berdasarkan lintasan pada Gambar 3.1 maka $\int_C e^{st} F(s) ds = \int_{L_R} e^{st} F(s) ds + \int_{C_R} e^{st} F(s) ds$.



Gambar 1. Lintasan setengah lingkaran

Pada segmen C_R , $s = c + Re^{i\theta}$ untuk $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ maka $ds = Rie^{i\theta} d\theta$ sehingga

$$\int_{C_R} e^{st} F(s) ds = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{(c+e^{i\theta}R)t} F(c + e^{i\theta}R) Rie^{i\theta} d\theta \quad (3.2)$$

Jika $|F(s)|$ terbatas oleh M_R maka $|F(s)| \leq M_R$. Berdasarkan pertidaksamaan segitiga dan sifat-sifat harga mutlak dari persamaan (3.2) didapatkan

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} e^{st} F(s) ds \right| &= \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{(c+e^{i\theta}R)t} F(c + e^{i\theta}R) Rie^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{(c+e^{i\theta}R)t} |F(c + e^{i\theta}R)| R d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{(ct+e^{i\theta}Rt)} |F(c + e^{i\theta}R)| R d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{ct} e^{Rte^{i\theta}} M_R R d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{ct} e^{Rt(\cos\theta + i\sin\theta)} M_R R d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{ct} e^{Rt\cos\theta} e^{iRt\sin\theta} M_R R d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{ct} e^{Rt\cos\theta} e^{iRt\sin\theta} M_R R d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{ct} e^{Rt\cos\theta} M_R R d\theta = e^{ct} M_R R \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{Rt\cos\theta} d\theta
\end{aligned}$$

Dengan demikian $\left| \int_{C_R} e^{st} F(s) ds \right| \leq e^{ct} M_R R \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{Rt\cos\theta} d\theta$ (3.3) Misal diambil $\theta = \phi + \frac{\pi}{2}$

maka $d\theta = d\phi$ dan $\cos\theta = \cos\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\phi$ sehingga $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{Rt\cos\theta} d\theta$ menjadi

$\int_0^{\pi} e^{-Rt\sin\phi} d\phi$. Berdasarkan pertidaksamaan kurva Jordan yaitu $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-Rt\sin\phi} d\phi \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2Rt\frac{\phi}{\pi}} d\phi$ maka

diperoleh $\int_0^{\pi} e^{-Rt\sin\phi} d\phi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-Rt\sin\phi} d\phi \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2Rt\frac{\phi}{\pi}} d\phi = \frac{\pi}{Rt}$ akibatnya $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{Rt\cos\theta} d\theta \leq \frac{\pi}{Rt}$. Dari

persamaan (3.3) diperoleh $\left| \int_{C_R} e^{st} F(s) ds \right| \leq e^{ct} M_R R \frac{\pi}{Rt} = e^{ct} M_R \frac{\pi}{t}$. Karena $M_R \rightarrow 0$ untuk $R \rightarrow \infty$

maka $\int_{C_R} e^{st} F(s) ds = 0$. Sehingga untuk $R \rightarrow \infty$, diperoleh

$$\begin{aligned} \int_C e^{st} F(s) ds &= \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s) e^{st} ds \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[e^{st} F(s), s = s_k] \end{aligned}$$

Dari definisi transformasi Laplace balik $L^{-1}(F(s)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s) e^{st} ds$ maka terbukti bahwa

$$L^{-1}(F(s)) = \sum_{k=1}^n \text{Res}[e^{st} F(s), s = s_k].$$

Transformasi Laplace untuk fungsi konsentrasi amoniak yaitu

$$L(C(x,t)) = \int_0^{\infty} \exp(-st) C(x,t) dt = \bar{C}(x,s). \text{ Untuk dapat menentukan solusi dari persamaan (2.1)}$$

maka nilai awal dan nilai batas haruslah ditentukan. Dari persamaan (1.1) maka besarnya perubahan

konsentrasi untuk amonium adalah $-\frac{\Delta[NH_4^+]}{\Delta t} = -k[NH_4^+]$ untuk $\lim \Delta t \rightarrow 0$ membentuk

persamaan diferensial $\frac{dC}{dt} = -kC$ sehingga mempunyai solusi $C_0 \exp(-kt)$. Nilai awal dan nilai batas untuk menyelesaikan persamaan (1.1)

$$C(x,0) = 0 \quad \text{untuk} \quad 0 < x < \infty$$

$$\left. \begin{aligned} C(0,t) &= C_0 \exp(-kt) \\ \lim_{x \rightarrow \infty} C(x,t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{untuk} \quad t > 0 \quad (3.4)$$

Transformasi Laplace untuk persamaan (3.4)

$$\bar{C}(x,0) = 0 ; \quad \bar{C}(0,s) = \frac{C_0}{s+k} ; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \bar{C}(x,s) = 0 \quad (3.5)$$

3.1 Solusi Persamaan Transport dan Distribusi Amoniak dengan Debit Aliran Diabaikan

Pada bagian ini dikaji penyelesaian persamaan transport dan distribusi amoniak dengan debit aliran diabaikan. Hal ini berarti $v = 0$. Sehingga transformasi Laplace persamaan (1.1) dengan syarat persamaan (3.4) menjadi

$$\mathcal{L} \left(\frac{\partial C(x,t)}{\partial t} \right) = \mathcal{L} \left(E \frac{\partial^2 C(x,t)}{\partial x^2} - kC(x,t) \right)$$

$$s\bar{C}(x,s) - \bar{C}(x,0) = E \frac{\partial^2 \bar{C}(x,s)}{\partial x^2} - k\bar{C}(x,s)$$

$$E \frac{\partial^2 \bar{C}(x,s)}{\partial x^2} - (s+k)\bar{C}(x,s) = 0$$

Persamaan diferensial parsial di atas mempunyai persamaan karakteristik

$Er^2 - (s+k) = 0$. Solusi umumnya ialah

$$\bar{C}(x,s) = B_1 \exp \left(x \sqrt{\frac{s+k}{E}} \right) + B_2 \exp \left(-x \sqrt{\frac{s+k}{E}} \right)$$

Berdasarkan persamaan (3.5) maka didapat

$$\bar{C}(x,s) = \frac{C_0}{s+k} \exp \left(-x \sqrt{\frac{s+k}{E}} \right)$$

$$C(x,t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{C_0}{s+k} \exp \left(-x \sqrt{\frac{s+k}{E}} \right) \right)$$

$$= C_0 \exp(-kt) \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s} \exp \left(-x \sqrt{\frac{s}{E}} \right) \right) \quad (3.6)$$

Berikut diuraikan cara menentukan $\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s} \exp \left(-x \sqrt{\frac{s}{E}} \right) \right)$. Misal

$F(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s} \exp \left(-x \sqrt{\frac{s}{E}} \right) \right)$ dari definisi transformasi Laplace balik

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(st) \frac{\exp \left(-x \sqrt{\frac{s}{E}} \right)}{s} ds \quad \text{diambil } I = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(st) \frac{\exp \left(-x \sqrt{\frac{s}{E}} \right)}{s} ds \text{ dan akan}$$

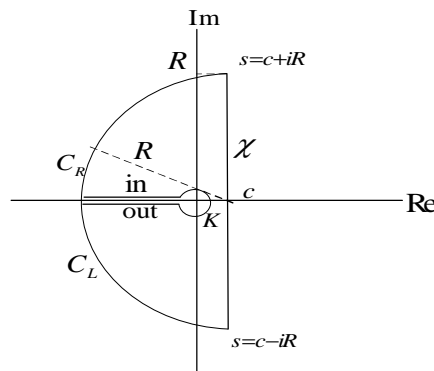
ditemukan nilai I dengan integral lintasan. Pada $F(s) = \frac{1}{s} \exp \left(-x \sqrt{\frac{s}{E}} \right)$ mempunyai titik singular di $s=0$ dan merupakan cabang terpotong (*branch cut*) sehingga

$\int_C e^{st} F(s) ds = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[e^{st} F(s), s = s_k]$ Sesuai dengan Gambar 3.2 diambil c mendekati titik singular yaitu c mendekati nol dan R mendekati tak hingga maka berdasarkan gambar tersebut diperoleh integral perlintasan sebagai berikut.

$$\int_{\mathcal{X}} e^{st} F(s) ds + \int_{C_R} e^{st} F(s) ds + \int_{\text{in}} e^{st} F(s) ds + \int_K e^{st} F(s) ds + \int_{\text{out}} e^{st} F(s) ds + \int_{C_L} e^{st} F(s) ds = 0$$

Sehingga diperoleh

$$\int_{C_R} e^{st} F(s) ds + \int_{\text{in}} e^{st} F(s) ds + \int_K e^{st} F(s) ds + \int_{\text{out}} e^{st} F(s) ds + \int_{C_L} e^{st} F(s) ds = - \int_Z e^{st} F(s) ds \quad (3.7)$$



Gambar 2. Lintasan tertutup sederhana setengah lingkaran

Berikut akan diuraikan nilai integral perlintasan.

1. Pada segmen K (lingkaran kecil) terlebih dahulu variabel kompleks s ditransformasi ke dalam bentuk polar. Misal $s = \xi e^{i\theta}$ dengan ξ merupakan radius lingkaran kecil pada segmen K yang besarnya mendekati nol dan θ sebagai batas pengintegralan bergerak dari π menuju $-\pi$ sehingga diperoleh $ds = i\xi e^{i\theta} d\theta$ dan $\sqrt{s} = \sqrt{\xi} e^{i\theta/2}$.

$$\int_K e^{st} F(s) ds = \int_K e^{st} \frac{e^{-x\sqrt{s/E}}}{s} ds = \int_{\pi}^{-\pi} \frac{e^{t\xi e^{i\theta}} e^{-x\sqrt{\frac{\xi e^{i\theta}}{E}}}}{\xi e^{i\theta}} i\xi e^{i\theta} d\theta = \int_{\pi}^{-\pi} e^{t\xi e^{i\theta}} e^{-x\sqrt{\frac{\xi e^{i\theta}}{E}}} i d\theta$$

oleh karena $\xi \rightarrow 0$ maka persamaan tersebut menjadi $\int_K e^{st} F(s) ds = \int_{\pi}^{-\pi} i d\theta = -2\pi i$

2. Sama halnya dengan segmen K maka pada segmen in dimisalkan bahwa $s = re^{i\theta}$ dengan $\theta = \pi$ sehingga didapatkan $s = re^{i\pi} = -r$. Akibatnya $ds = -dr$ dan $\sqrt{s} = \sqrt{re^{i\pi/2}} = \sqrt{r}i$. Pada segmen ini r sebagai batas pengintegralan bergerak dari radius $R \rightarrow \infty$ menuju $\xi \rightarrow 0$ maka diperoleh

$$\int_{in} e^{st} F(s) ds = \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \xi \rightarrow 0}} \int_R^{-r} e^{-rt} e^{(-xi\sqrt{\frac{r}{E}})} (-dr) = \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \xi \rightarrow 0}} \int_R^{-r} e^{-rt} e^{(-xi\sqrt{\frac{r}{E}})} dr$$

3. Sama halnya dengan segmen in , pada segmen out diambil $s = re^{i\theta}$ dengan $\theta = -\pi$ sehingga didapatkan $s = re^{i(-\pi)}$. Akibatnya $ds = -dr$ dan $\sqrt{s} = \sqrt{re^{-i\pi/2}} = -\sqrt{r}i$. Pada segmen ini r sebagai batas pengintegralan bergerak dari radius $\xi \rightarrow 0$ menuju $R \rightarrow \infty$ sehingga

$$\int_{out} e^{st} F(s) ds = \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \xi \rightarrow 0}} \int_{\xi}^R e^{-rt} e^{(xi\sqrt{\frac{r}{E}})} (-dr) = \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \xi \rightarrow 0}} \int_{\xi}^R e^{-rt} e^{(xi\sqrt{\frac{r}{E}})} dr$$

$$\begin{aligned} & \int_{in} e^{st} F(s) ds + \int_{out} e^{st} F(s) ds \\ &= \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \xi \rightarrow 0}} \int_R^{-r} e^{-rt} e^{(-xi\sqrt{\frac{r}{E}})} dr + \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \xi \rightarrow 0}} \int_{\xi}^R e^{-rt} e^{(xi\sqrt{\frac{r}{E}})} dr \\ &= \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \xi \rightarrow 0}} \int_{\xi}^R e^{-rt} \left(e^{(xi\sqrt{\frac{r}{E}})} - e^{(-xi\sqrt{\frac{r}{E}})} \right) dr \\ &= \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \xi \rightarrow 0}} \int_{\xi}^R e^{-rt} 2i \sin \left(x \sqrt{\frac{r}{E}} \right) dr \\ &= 2\pi i \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{Et}} \right) \end{aligned}$$

4. Pada segmen C_R diambil $s = c + Re^{i\theta}$ untuk $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ maka $ds = Rie^{i\theta} d\theta$ serta

$$F(s) = \frac{e^{-x\sqrt{\frac{s}{E}}}}{s} \text{ maka diperoleh } \int_{C_R} e^{st} F(s) ds = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{(c+e^{i\theta}R)t} F(c + e^{i\theta}R) Rie^{i\theta} d\theta$$

Pada lintasan Gambar 3.2 dipilih c mendekati nol sehingga $\lim_{c \rightarrow 0} Re^{i\theta} + c = Re^{i\theta}$ akibatnya

$|s| = |Re^{i\theta}| = R$. Jika $F(s)$ terbatas pada M_R maka $|F(s)| \leq M_R$ dengan $M_R = \int_{|s|=R} \frac{1}{s} e^{-x\sqrt{s}} ds = \frac{1}{R} \int_0^{2\pi} e^{-x\sqrt{R}e^{i\theta}} R d\theta$ sehingga diperoleh $M_R = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_0^{2\pi} e^{-x\sqrt{R}e^{i\theta}} R d\theta = 0$. Berdasarkan

Teorema 3.2 maka diperoleh $\int_{C_R} e^{st} F(s) ds = 0$

5. Pada segmen C_L , diambil $s = c + Le^{i\theta}$ untuk $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ maka $ds = Lie^{i\theta} d\theta$ serta

$$F(s) = \frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s} \text{ maka diperoleh } \int_L e^{st} F(s) ds = \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} e^{(c+e^{i\theta}L)t} F(c + e^{i\theta}L) Lie^{i\theta} d\theta$$

Pada segmen C_L besarnya nilai $L = R \rightarrow \infty$ dengan demikian berdasarkan Teorema 3.2 yaitu jika $F(s)$ terbatas oleh $M_L = 0$ maka $|F(s)| \leq M_L$. Dengan demikian

$$\int_L e^{st} F(s) ds = 0$$

Jadi diperoleh nilai

$$\begin{aligned} I &= \int_x e^{st} F(s) ds = 2\pi i \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{Et}} \right) \right) \\ &= 2\pi i \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{Et}} \right) \end{aligned}$$

Oleh karena $F(t) = \frac{1}{2\pi i} I$ sehingga diperoleh

$$F(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \exp \left(-x\sqrt{\frac{s}{E}} \right) \right] = \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{Et}} \right)$$

Solusi untuk model transport dan distribusi amoniak dengan kecepatan aliran diabaikan adalah

$$C(x,t) = C_0 \exp(-kt) \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{Et}} \right)$$

3.2 Solusi Persamaan Transport dan Distribusi Amoniak dengan Debit Aliran Tidak Diabaikan

Transformasi Laplace untuk persamaan (1.1) dengan syarat persamaan (3.4)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[\frac{\partial C(x,t)}{\partial t} \right] &= \mathcal{L} \left[-v \frac{\partial C(x,t)}{\partial x} + E \frac{\partial^2 C(x,t)}{\partial x^2} - kC(x,t) \right] \\ s\bar{C}(x,s) - \bar{C}(x,0) &= -v \frac{\partial \bar{C}(x,s)}{\partial x} + E \frac{\partial^2 \bar{C}(x,s)}{\partial x^2} - k\bar{C}(x,s) \\ E \frac{\partial^2 \bar{C}(x,s)}{\partial x^2} - v \frac{\partial \bar{C}(x,s)}{\partial x} - (k+s)\bar{C}(x,s) &= 0 \end{aligned}$$

Persamaan karakteristiknya $Er^2 - vr - (s+k) = 0$. Dari sini diperoleh solusi umumnya

$$\bar{C}(x,s) = B_1 \exp \left(x \left(\frac{v + \sqrt{v^2 + 4E(s+k)}}{2E} \right) \right) + B_2 \exp \left(x \left(\frac{v - \sqrt{v^2 + 4E(s+k)}}{2E} \right) \right)$$

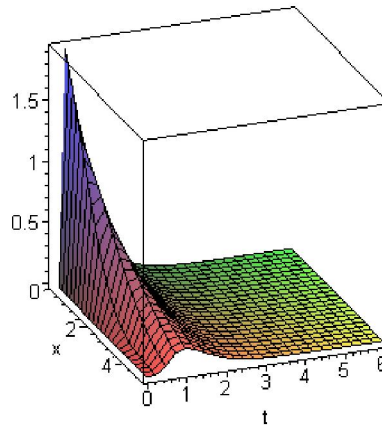
Dengan memasukkan syarat batas pada persamaan (3.5) diperoleh

$$\bar{C}(x,s) = \frac{C_0}{s+k} \exp \left(x \left(\frac{v - \sqrt{v^2 + 4E(s+k)}}{2E} \right) \right) \quad (3.8)$$

Dengan mencari transformasi Laplace balik persamaan (3.8) maka diperoleh solusi (Leij, F.J and Toride, N. 1995)

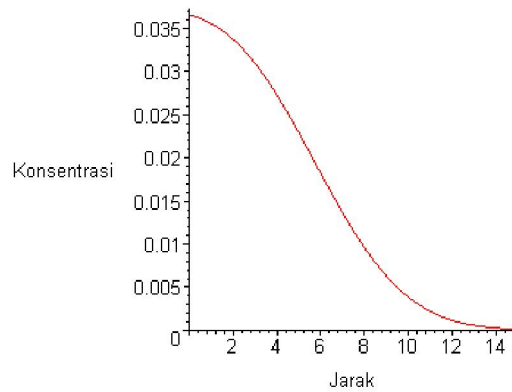
$$C(x,t) = \frac{C_0}{2} \exp(-kt) \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{x-vt}{2\sqrt{Et}} \right) + \exp \left(\frac{vx}{E} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{x+vt}{2\sqrt{Et}} \right) \right]$$

Ploting konsentrasi amoniak terhadap x dan t direpresentasikan dalam gambar berikut.

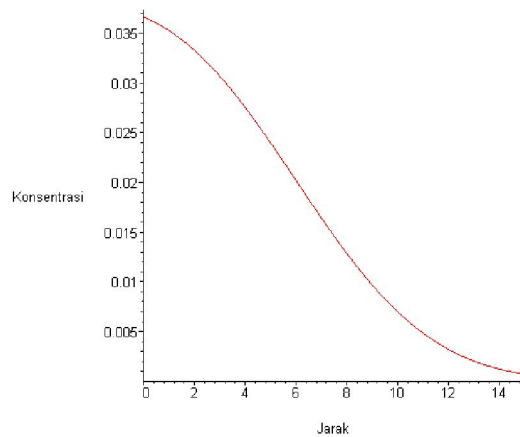


Gambar 3. Ploting adveksi-dispersi amoniak

Dari Gambar 3.3 terlihat bahwa konsentrasi amoniak akan menurun seiring dengan bertambahnya nilai x hal ini terjadi akibat proses difusi-dispersi. Berdasarkan model yang telah dikonstruksi, maka pola transport dan distribusi amoniak berdasarkan fenomena adveksi dan difusi-dispersi ditunjukkan gambar berikut. Grafik solusi adveksi-dispersi amoniak terhadap jarak serupa dengan grafik fungsi error komplementer (*complementary error function*) yang mempunyai arah gradien negatif. Dari grafik solusi terlihat bahwa konsentrasi amoniak semakin lama semakin menurun. Perilaku solusi ini sesuai dengan hukum dasar yang membangun model yaitu Hukum Fick yang menerangkan bahwa proses difusi terjadi ke arah berkeuangnya difusan. Dalam peristiwa transport dan distribusi amoniak di perairan sangat dipengaruhi oleh kecepatan aliran dan koefisien difusi-dispersi. Besarnya koefisien difusi-dispersi sangat mempengaruhi pergerakan konsentrasi amoniak. Hal ini disebabkan karena besarnya koefisien difusi-dispersi berbanding terbalik terhadap gradien konsentrasi. . Berikut akan ditampilkan simulasi grafik solusi yang memperlihatkan adanya perbedaan nilai koefisien difusi-dispersi. Misal suatu perairan A memiliki nilai $E = 3 m^2 s^{-1}$, $v = 2.5 ms^{-1}$, $k = 2 s^{-1}$, $C_0 = 2 mg l^{-1}$ dan $t = 2 s$ maka grafik solusi amoniak sesuai persamaan (3.7) ditunjukkan pada Gambar 4.



Gambar 4. Grafik solusi amoniak dengan nilai $E = 3 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$;



Gambar 5. Grafik solusi amoniak dengan nilai $E = 5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

Misal suatu perairan B memiliki nilai $E = 5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, $v = 2.5 \text{ ms}^{-1}$, $k = 2 \text{ s}^{-1}$, $C_0 = 2 \text{ mg l}^{-1}$ dan $t = 2 \text{ s}$ maka solusi amoniak ditunjukkan pada Gambar 3.6. Pada Gambar 3.5 terlihat bahwa pada proses transport dan distribusi amoniak, pergerakan penurunan konsentrasinya lebih cepat daripada Gambar 5.

4. Penutup

Transformasi Laplace dapat diterapkan untuk mencari solusi persamaan diferensial parsial seperti halnya pada persamaan transport dan distribusi amoniak di perairan. Solusi yang diperoleh berupa solusi analitik dari persamaan model. Dari solusi yang diperoleh dapat diketahui pola transport dan distribusi amoniak di perairan yang berupa grafik fungsi error komplementer. Dari simulasi diketahui bahwa semakin besar nilai koefisien difusi-dispersi maka pergerakan konsentrasi amoniak ke arah berkurangnya konsentrasi semakin kecil/lambat.

Daftar Pustaka

- [1] Humi, M and Miller, W.B. 1992. *Boundary Value Problems and Partial Differential Equations*. Boston : PWS-KENT Publishing Company.
- [2] Leij, F.J and Toride, N. 1995. *Discrete Time and Length Averaged Solutions of the Advection-Dispersion Equation*. Water Resources Research, Vol. 31, NO.7, Pages 1713-1724.
- [3] Munsch, A.D. 1994. *Complex Variables with Applications : Second Edition*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
- [4] Ogata, K. 1970. *Modern Control Engineering, First Edition*. Prentice-Hall, Inc.
- [5] Welty, J.R, Wicks, C.E, Wilson, R.E and Rorrer, G. 2001. *Dasar-dasar Fenomena Transport : Edisi Keempat*. Jakarta : Erlangga.
- [6] Whitehead, P.G. and William, R.J. 1982. *A Dynamic Nitrogen Balanced Model for River Systems*, IAHS Publ. no.139, 89-99.