

# KESTABILAN MODEL DINAMIK FERMENTASI ALKOHOL SECARA KONTINU

Widowati<sup>1</sup>, Nurhayati<sup>2</sup>, Lailatussyaifah<sup>3</sup>  
<sup>1,3</sup>Jurusan Matematika FMIPA UNDIP  
<sup>2</sup>Jurusan Biologi FMIPA UNDIP  
E-mail : [widowati\\_math@undip.ac.id](mailto:widowati_math@undip.ac.id)

## ABSTRAK

Pada paper ini dibahas analisis kestabilan model dinamik fermentasi alkohol dengan proses fermentasi dilakukan secara kontinu (alir). Disini dikaji dua model dinamik yang berbentuk sistem persamaan differensial nonlinear. Model pertama merepresentasikan model dinamik dengan efek penghambatan yang disebabkan oleh konsentrasi etanol pada waktu reaksi. Pada model kedua merepresentasikan efek penghambatan yang disebabkan oleh laju perubahan konsentrasi etanol. Dari kedua model itu diselidiki perilaku sistem disekitar titik kesetimbangan dengan cara menganalisis kestabilannya. Kestabilan ditentukan melalui nilai eigen dari persamaan karakteristik yang diperoleh melalui proses pelinearan sistem disekitar titik kesetimbangan.

**Kata kunci :** *Fermentasi alkohol, substrat, mikrobial, etanol, kestabilan*

## 1. Pendahuluan

Fermentasi merupakan salah satu bentuk respirasi anaerobik dengan perubahan senyawa-senyawa kompleks dari suatu bahan menjadi senyawa sederhana. Pada fermentasi alkohol umumnya menggunakan 2 mikrobial utama yaitu bakteri atau *yeast* (ragi). Bakteri yang sering digunakan untuk fermentasi alkohol adalah *Zymomonas mobilis* dan *Zymomonas lindneri*, sedangkan *yeast* yang sering digunakan adalah *Saccharomyces* (Nurhayati, dkk, 2009 dan Perry, 1999).

Reaksi dalam fermentasi berbeda-beda tergantung pada jenis gula yang digunakan dan produk yang dihasilkan. Secara singkat, glukosa yang merupakan gula paling sederhana, melalui fermentasi akan menghasilkan etanol. Suhu optimum untuk fermentasi antara 28 – 30 °C (Perry, 1999).

Etanol disebut juga etil alkohol, alkohol murni, alkohol absolut, atau alkohol saja. Etanol merupakan sejenis cairan yang mudah menguap, mudah terbakar, tidak berwarna, dan merupakan alkohol yang sering digunakan dalam kehidupan sehari-hari. Antara lain, sebagai bahan bakar, termometer modern, parfum, perasa, dan juga pewarna makanan.

Proses fermentasi alkohol dapat dilakukan secara *kontinu* (alir). Dalam fermentasi alir terdapat beberapa model yang digunakan untuk mempelajari efek penghambatan yang disebabkan konsentrasi etanol pada fermentasi alkohol oleh *Zymomonas mobilis*. Model matematika ini bertujuan untuk menggabungkan efek penghambatan yang berbeda. Model pertama mempertimbangkan model dengan efek penghambatan yang disebabkan oleh konsentrasi etanol pada waktu reaksi. Sedangkan model kedua yaitu untuk menggabungkan efek penghambatan yang disebabkan oleh laju perubahan konsentrasi etanol (Cheng-Che Li, 2009).

Struktur model secara biokimia untuk pertumbuhan aerobik dari *S. cerevisiae* pada glukosa dan etanol pada proses fermentasi telah dibahas oleh Lei, F., et.al.(2001). Kemudian, Wei(2009) telah mengemukakan model matematika dari fermentasi etanol dan telah mengkaji kestabilan dari subsistem *viable cells* dan substratnya. Selanjutnya, beberapa peneliti (Galaction, , Lipasteaum dan Cascaval, 2001) telah mengkaji fermentasi alkohol dengan sel immobilized *S. cerevisiae* dengan alginate. Pada penelitian sebelumnya (Galaction, dkk, 2001 dan Lei, 2001) belum dibahas tentang kestabilan dari model matematika yang diperoleh. Oleh karena itu pada paper ini, akan diselidiki kestabilan dari model dinamik pada proses fermentasi alkohol. Disini diselidiki kestabilan dari sistem terutama untuk model dengan efek penghambatan yang disebabkan oleh konsentrasi etanol pada waktu reaksi, sedangkan (Wei dan Chen, 2001) mengkaji kestabilan subsistemnya. Pada paper ini, untuk proses analisa secara kualitatif, kedua model yang dibahas mula-mula dicari titik kesetimbangannya. Kemudian dilakukan linearisasi dari model dinamik, selanjutnya mencari nilai eigen dari matriks Jacobiannya sehingga dapat ditentukan kestabilan lokal disekitar titik kesetimbangan berdasarkan nilai eigen tersebut.

## 2. Model Dinamik Fermentasi Alkohol

Pada bagian ini dibahas model dinamik pertama fermentasi alkohol secara kontinu dengan efek penghambatan yang disebabkan oleh konsentrasi etanol pada waktu reaksi dan Sedangkan model kedua yaitu dengan menggabungkan efek penghambatan yang disebabkan oleh laju perubahan konsentrasi etanol (Cheng-Ce Li, 2009). Berikut diberikan model dinamik pertama,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu(x) - D(x) - \beta x \\ \dot{y} &= D(x) - D(y) - \beta y \end{aligned}$$

(2.1)

$$\frac{dS}{dt} = \mu(S) - D(S) - \frac{dP}{dt}$$

dengan  $P$  : konsentrasi etanol (ml/ml),  $S$  : konsentrasi glukosa (mg/ml),  $X$  : berat basah *Zymomonas mobilis* (mg/ml),  $\mu(S)$  : konsentrasi masukan dari glukosa (mg/ml),  $D$ :tingkat pencucian dari *chemostat*,  $Y$  : Yield konstan (%),  $\mu(S) > 0$ ,  $D > 0$ ,  $\mu(S) > 0$ ,  $Y > 0$ , dan  $Y > 0$ .

Proses penghambatan pertumbuhan sel *Zymomonas mobilis* dapat disebabkan oleh pembentukan etanol seperti pada fermentasi glukosa membentuk etanol yang bertindak sebagai penghambat (Fogler, 1999). Dengan adanya proses penghambatan pada sistem maka terdapat  $\mu(S)$  yang merupakan fungsi hambatan.

$$\mu(S) = \mu(S) \left( \frac{1}{1 + \left( \frac{P}{K_i} \right)^n} \right) \quad (2.2)$$

dengan  $\mu(S) = (1 - \mu)$ ,  $\mu$  = konsentrasi etanol yang menghambat (ml/ml),  $K_i$  = konstanta empiris (pada fermentasi glukosa menjadi etanol parameter  $n=0,5$ ) [2], dengan  $\mu(0) = 1$ ,  $\mu(S) > 0$  dan  $\mu(S) < 0$  untuk  $P > 0$  ( $i = 1,2$ ).

Sehingga, dengan mensubstitusi persamaan (2.2) ke persamaan (2.1) maka diperoleh model yang merupakan sistem persamaan differensial dengan tiga variabel sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= (1 - \mu) \left( \frac{\mu(S)}{K_1 + \mu(S)} \right) - D(S) - \frac{dP}{dt} \\ \frac{dP}{dt} &= \mu(S) - \frac{1}{Y} (1 - \mu) \left( \frac{\mu(S)}{K_1 + \mu(S)} \right) \\ \frac{dX}{dt} &= (1 - \mu) \left( \frac{\mu(S)}{K_1 + \mu(S)} \right) - D(S) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Selanjutnya, diberikan model kedua yaitu model dinamik fermentasi alkohol secara kontinu dengan menggabungkan efek penghambatan yang disebabkan oleh riwayat laju perubahan (*change rate history*) konsentrasi etanol, yaitu  $\mu(S)$  untuk  $\tau \leq t$ . Definiskan variable baru [6]

$$Z(t) = \int_{-\infty}^t \frac{dP}{dt}(\tau) G_1(t - \tau) d\tau$$

dengan  $G_1(u)$  adalah *delay kernel*  $\beta^2 u e^{-\beta u}$  dan

$$W(t) = \int_{-\infty}^t \frac{dP}{dt}(\tau) G_0(t - \tau) d\tau$$

dengan  $G_0(u)$  adalah  $\beta e^{-\beta u}$ . Dua variabel tersebut merepresentasikan rata-rata fungsi bobot dari laju perubahan konsentrasi etanol.  $Z$  dan  $W$  memenuhi (untuk penyederhanaan penulisan ketergantungan fungsi terhadap  $t$ , dihilangkan),

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dt} &= \beta(W - Z), \\ \frac{dW}{dt} &= \beta\left(\frac{dP}{dt} - W\right), \end{aligned} \tag{2.4}$$

dengan  $Z > 0$ . Misalkan fungsi kontinu terdiferensialkan  $g(Z) = \frac{1}{2}(1 - \tanh(\gamma Z - \delta))$  merupakan fungsi delay untuk  $Z$ , dengan  $\gamma > 0$ ,  $\delta > 0$ .

Dari persamaan (2.1) dan (2.4) diperoleh persamaan model dinamik kedua.

$$\begin{aligned} \dot{S} &= \lambda - \mu S - \beta S W, \\ \dot{P} &= \mu S - \beta P W - \delta P, \\ \dot{W} &= [\beta P - \beta W], \\ \dot{Z} &= \beta(W - Z), \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} \dot{S} &= [\lambda - \mu S - \beta S W], \\ (0) &= \lambda, (0) = \mu, (0) = \beta, (0) = \delta, (0) = \beta, \end{aligned}$$

Jika didefinisikan [6]  $\Sigma = S + \frac{P}{\gamma_s}$ , maka  $\Sigma$  memenuhi  $\frac{d\Sigma}{dt} = S^{(0)} D - D \Sigma$ . Sehingga memenuhi  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Sigma = S^{(0)}$ . Selanjutnya untuk menyelidiki perilaku model (2.5) perhatikan *limiting system* dari sistem (2.5),

$$\begin{aligned} \dot{S} &= (\lambda - \mu S) - \beta S W, \\ \dot{P} &= (\mu S - \beta P W) - \delta P, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= f(x, y, z) \\
 \dot{y} &= g(x, y, z) \\
 \dot{z} &= h(x, y, z)
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

### 3. Analisis Kualitatif dari Sistem

Misalkan titik kesetimbangan dari model dinamik (2.3) adalah  $(x^*, y^*, z^*)$ , sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 f(x^*, y^*, z^*) &= 0 \\
 g(x^*, y^*, z^*) &= 0 \\
 h(x^*, y^*, z^*) &= 0
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Dari persamaan (3.1) didapat 2 titik kesetimbangan [10] yaitu  $(x^*, y^*, z^*)$  dengan  $x^* = 0$ ,  $y^* = 0$ ,  $z^* = 0$  dan  $(x^*, y^*, z^*) = (1, 1, 1)$ , dengan  $x^* = \frac{1}{2}$ ,  $y^* = \frac{1}{2}$ ,  $z^* = \frac{1}{2}$ .

Salah satu metode pelinearan adalah dengan ekspansi Taylor di sekitar titik kesetimbangan [1, 4]. Misalkan :

$$f(x, y, z) = f(x^*, y^*, z^*) + \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*, z^*)(x - x^*) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*, z^*)(y - y^*) + \frac{\partial f}{\partial z}(x^*, y^*, z^*)(z - z^*) \tag{3.2}$$

Linearisasi model (2.3) dititik  $(x^*, y^*, z^*)$  dengan menggunakan deret Taylor adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*, z^*)(x - x^*) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*, z^*)(y - y^*) + \frac{\partial f}{\partial z}(x^*, y^*, z^*)(z - z^*) \\
 \dot{y} &= \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*, z^*)(x - x^*) + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*, z^*)(y - y^*) + \frac{\partial g}{\partial z}(x^*, y^*, z^*)(z - z^*) \\
 \dot{z} &= \frac{\partial h}{\partial x}(x^*, y^*, z^*)(x - x^*) + \frac{\partial h}{\partial y}(x^*, y^*, z^*)(y - y^*) + \frac{\partial h}{\partial z}(x^*, y^*, z^*)(z - z^*)
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Dari persamaan di atas dapat diperoleh persamaan dalam bentuk matriks sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} - & 1 & - & - \\ & + & & - \\ & & 1 & - & - \\ & & & ( & + & ) \\ & & & & 1 & - & - \\ & & & & & + & \end{pmatrix} \\
 = & \begin{pmatrix} - & 1 & - & - \\ & + & & - \\ - & 1 & - & - \\ & + & & - \\ & & 1 & - & - \\ & & & ( & + & ) \\ & & & & 1 & - & - \\ & & & & & + & \end{pmatrix} - \frac{1}{+} \begin{pmatrix} 1 & - & - \\ & + & \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

dengan matriks Jacobiannya  $J(P^*, S^*, X^*)$  adalah

$$\begin{pmatrix} - & 1 & - & - \\ & + & & - \\ & & 1 & - & - \\ & & & ( & + & ) \\ & & & & 1 & - & - \\ & & & & & + & \end{pmatrix} - \frac{1}{+} \begin{pmatrix} 1 & - & - \\ & + & \end{pmatrix}$$

Perilaku dari sistem persamaan (2.3) di sekitar titik kesetimbangan  $(0, ( ), 0)$  dapat dikaji dari matriks Jacobian sebagai berikut :

$$J_{(0, ( ), 0)} = \begin{pmatrix} - & 0 & \frac{( )}{+ ( )} \\ 0 & - & -\frac{1}{+} \frac{( )}{( )} \\ 0 & 0 & \frac{( )}{+ ( )} - \end{pmatrix}$$

Persamaan karakteristik matriks  $J_{(0, ( ), 0)}$  dapat dicari dengan  $\det J_{(0, ( ), 0)} - I = 0$  dimana  $I$  matriks identitas, sehingga didapatkan persamaan karakteristik  $(- - )(- - )(- - ) = 0$ , (3.4)

Dengan  $\frac{(\cdot)}{(\cdot)} = \cdot$ . Persamaan (3.4) mempunyai penyelesaian

$$\cdot = - \quad \text{dan} \quad \cdot = - \cdot$$

Dalam hal ini

- a.  $> 0$  maka  $\cdot$  dan  $\cdot$  merupakan akar-akar real yang sama dan bernilai negatif.
- b.  $\cdot$  merupakan akar real yang negatif jika  $< \cdot$ .
- c.  $\cdot$  merupakan akar real yang positif jika  $> \cdot$ .

Sehingga perilaku sistem di sekitar titik kesetimbangan  $(\cdot, \cdot, \cdot)$  akan stabil jika  $\cdot > 0$ . (dalam hal ini, haruslah  $\cdot > 0$ ) dan perilaku sistem di sekitar titik kesetimbangan  $(\cdot, \cdot, \cdot)$  tidak stabil jika  $\cdot > 0$  (dalam hal ini,  $\cdot > 0$ ).

Perilaku dari sistem persamaan (2.3) di sekitar titik kesetimbangan  $(\cdot, \cdot, \cdot, \mathbf{m})$  dapat dilihat dari matriks Jacobian sebagai berikut :

$$J(\cdot, \cdot, \cdot, \mathbf{m}) = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

dengan

$$\begin{aligned} &= \frac{1 - \cdot (\cdot - \cdot)}{(\cdot + (\cdot - \cdot))}, \\ &= \frac{1 - \cdot}{(\cdot + (\cdot - \cdot))}, \\ &= \frac{1 - \cdot (\cdot - \cdot)}{+ (\cdot - \cdot)}. \end{aligned}$$

Persamaan karakteristik matriks  $J(\cdot, \cdot, \cdot, \mathbf{m})$  dapat dicari melalui

$\det J(\cdot, \cdot, \cdot, \mathbf{m}) - \lambda I = 0$  dengan  $I$  matriks identitas, sehingga didapatkan persamaan karakteristik matriks  $J(\cdot, \cdot, \cdot, \mathbf{m})$  seperti di bawah ini

$$(x + y) - z - 2 - x + y = 0$$

$$-x - y + z - 2 = 0$$

Persamaan diatas mempunyai penyelesaian  $z = 2 - x - y$  dan solusi dari polinomial derajat dua  $x^2 - 2x + y^2 = 0$ , dengan

$$x^2 - 2x + y^2 = 0$$

$$= (x - 1)^2 + y^2 - 1 = 0$$

Misalkan  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  masing-masing adalah akar-akar dari  $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ , dan dapat dinyatakan sebagai

$$\lambda_1 = \frac{2 + \sqrt{4 - 4}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{2 - \sqrt{4 - 4}}{2}$$

Dalam hal ini

- i.  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  adalah akar-akar real dan berbeda untuk  $4 - 4 > 0$ ,
- ii.  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  adalah akar-akar real yang sama untuk  $4 - 4 = 0$ ,
- iii.  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  adalah akar-akar bilangan kompleks untuk  $4 - 4 < 0$ ,

Sehingga perilaku sistem di sekitar titik kesetimbangan akan stabil jika  $\lambda_1 < 0$  dan  $\lambda_2 < 0$ .

Dalam hal ini, haruslah  $2 > 0$  karena selalu bernilai negatif sehingga agar  $2 - 2 < 0$  maka  $2 > \sqrt{4 - 4}$  atau  $2 > 0$ .

Selanjutnya dikaji kestabilan dari model (2.6). Dari persamaan tersebut untuk

$$(\lambda_1) < 0$$

diperoleh titik kesetimbangan sistem  $(0, 0, 0, 0)$  stabil. Sedangkan untuk

$$(\lambda_2) > 0$$

persamaan (2.6) mempunyai dua titik kesetimbangan  $(0, 0, 0, 0)$  dan  $(X^*, P^*, 0, 0)$ . Titik kesetimbangan  $(0, 0, 0, 0)$  tidak stabil.

Untuk menyelidiki kestabilan lokal di sekitar titik kesetimbangan  $(X^*, P^*, 0, 0)$ , dimisalkan [6] suatu bilangan diantara 0 dan  $( )$  dan memenuhi  $( ) = / (0)$ .

Maka  $= ( ( ) - )$  dan  $= / ( )$ .

Misalkan pula  $= + - ( )$ ,  $= - ( ) ( ) (0)$ ,  $(0) = - \text{—————} < 0$  dan

$= - ( ) ( ) (0)$ , sehingga dapat diperoleh persamaan karakteristik dari  $(P^*, X^*, Z^*, W^*) = (X^*, P^*, 0, 0)$  seperti di bawah ini

$$+ + + + = 0,$$

dengan

$$\begin{aligned} & , \\ & , \\ & , \\ & . \end{aligned}$$

Persamaan karakteristik di atas merupakan polinomial derajat 4, dengan koefisien positif. Untuk menyelidiki kestabilan model disekitar titik kesetimbangan, perlu dicari akar-akar dari persamaan karakteristik tersebut. Mencari akar secara langsung dari polinomial tersebut agak sulit, untuk mempermudah dalam penyelidikan kestabilan digunakan kriteria kestabilan Routh. Sesuai dengan prosedur kriteria kestabilan Routh, disusun koefisien polinomial karakteristik dalam baris dan kolom dengan pola seperti table Routh berikut

$$\begin{array}{cccc} \lambda^4 & 1 & a_2 & a_4 \\ \lambda^3 & a_1 & a_3 & 0 \\ \lambda^2 & b_1 & b_2 & \\ \lambda^1 & c_1 & & \\ \lambda^0 & d_1 & & \end{array}$$

dengan

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - 1 \cdot a_3}{a_1}, \quad b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 \cdot 0}{a_1} = a_4, \quad c_1 = \frac{b_1 a_3 - 1 \cdot b_2}{b_1} = \frac{a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4}{a_1 a_2 - a_3},$$

$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 \cdot 0}{c_1} = \frac{c_1 a_4}{c_1} = a_4.$$

Menurut kriteria kestabilan Routh agar sistem disekitar titik kesetimbangan  $(X^*, P^*, 0, 0)$  stabil, haruslah semua suku kolom pertama pada tabel Routh mempunyai tanda positif. Jadi harus dipenuhi  $a_1 a_2 > a_3$  dan  $a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_4$ .

#### 4. Penutup

Pada paper ini telah dikaji analisa kestabilan secara kualitatif dari dua model dinamik pada proses fermentasi secara kontinu dengan efek penghambatan yang disebabkan oleh konsentrasi etanol pada waktu reaksi (model pertama) dan menggabungkan efek penghambatan yang disebabkan oleh laju perubahan konsentrasi etanol (model kedua). Pada model pertama terdapat dua titik kesetimbangan yaitu  $E_1(P^*, S^*, X^*) = (0, ( ), 0)$  dan  $E_2( ( ), ( ) - \text{---}, m )$ . Sistem akan stabil jika  $<$  untuk titik kesetimbangan  $E_1$ , sedangkan untuk  $E_2$  akan stabil jika  $> 0$  atau  $> 0$ .

Pada model kedua setelah sistem dilinearisasi disekitar titik kesetimbangan  $(P^*, X^*, Z^*, W^*)$ , dapat diperoleh persamaan karakteristik yang merupakan polynomial orde 4. Kestabilan diselidiki dengan kriteria kestabilan Routh. Untuk titik kesetimbangan  $(X^*, P^*, 0, 0)$  stabil, jika  $a_1 a_2 > a_3$  dan  $a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_4$ .

#### Ucapan Terima Kasih

Paper ini merupakan bagian dari hasil Penelitian Penulis. Terima kasih kami sampaikan kepada Dekan FMIPA Universitas Diponegoro yang telah mendukung penelitian ini.

#### 5. Daftar Pustaka

1. Cronin, Jane. 1994. *Differential Equation : Introduction and Qualitatif Theory*, New York : Marcel Dekker. Inc.
2. Fogler, H. S. 1999. *Elements of Chemical Reaction Engineering*.

3. Galaction, A.I., Lipasteanu, A.M., Cascaval, D. 2010. *Kinetik Studies on Alcoholic Fermentation Under Inhibition Conditions Using a Bioreactor with Stirred Bed of Immobilized Yeast Cells*, The open Systems Biology Journal, **3**, 9-20.
4. Ledder, G. 2005. *Differential Equation: A Modeling Approach*, The McGraw-Hill, New York.
5. Lei, F., Rotboll, M. Jorgensen, S.B. 2001. *A Biochemically Structured Model for Saccharomyces cerevisiae*, Journal of Biotechnology, **88**, 205-221.
6. Cheng-Che Li. 2009. *Mathematical Models of Ethanol Inhibition Effect During Alcohol Fermentation*, Nonlinear Analysis, **71**, e1608-e1619.
7. Nurhayati, dkk. 2009. Laporan Penelitian Hibah Pekerti, *Produksi Etanol "Fuelgrade" dengan Teknik Pervaporasi Menggunakan Membran dari Chitosan*, Universitas Diponegoro, Semarang.
8. Perry. 1999. *Chemical Engineers' Handbook*, McGraw-Hill, Amerika.
9. Wei, C. and Chen, L. 2009. *Dynamics Analysis of Mathematical Model of Ethanol Fermentation with Gas Stripping*, Journal of Nonlinear Dynamic, **77**,13-23.
10. Widowati, Nurhayati, dan Sutimin. 2011. Laporan Penelitian Model *Dinamik Fermentasi Alkohol untuk Menentukan Optimasi Produk Etanol*, Universitas Diponegoro, Semarang.