

KONTRUKSI MODEL DINAMIK PERTUMBUHAN ALGA DAN PENGARUHNYA PADA PERUBAHAN KADAR NITROGEN

WIDOWATI¹, SUTIMIN², TARITA IS³

^{1,2,3} Jurusan Matematika FMIPA Universitas Diponegoro,
¹wiwied_mathundip@yahoo.com; wiwied_math@undip.co.id
Jl. Prof. Soedharto, SH, Kampus Tembalang Semarang

Abstrak. Pada paper ini dikemukakan pengkontruksian model dinamik pertumbuhan alga dan pengaruhnya pada perubahan kadar nitrogen diperairan. Model dinamik yang diperoleh merupakan sistem persamaan diferensial non-linear dengan empat variabel. Variabel tersebut adalah alga, amoniak, nitrit, dan nitrat. Model pertumbuhan alga yang diperoleh merupakan model logistik. Dari hasil simulasi diperoleh bahwa pertumbuhan alga mencapai maximum pada hari ke tujuh dengan kapasitas daya tampung alga adalah $78,64 \times 10^4$ /mL. Dari hasil simulasi diperoleh bahwa perubahan kadar amoniak, nitrit, dan nitrat dipengaruhi oleh perubahan kepadatan alga. Apabila kepadatan alga semakin tinggi, maka kadar amoniak dan nitrit semakin tinggi pula. Sedangkan apabila kepadatan alga semakin tinggi, maka kadar nitrat semakin rendah dan sebaliknya.

Kata kunci : Pemodelan matematika, nitrogen, alga, titik kesetimbangan, kestabilan

1. Pendahuluan

Siklus nitrogen merupakan serangkaian proses yang mendeskripsikan transformasi nitrogen. Proses-proses tersebut menghubungkan reaksi perubahan konsentrasi antara amoniak, nitrit, dan nitrat dengan kepadatan alga. Mula-mula nitrogen organik yang masuk dalam perairan akan terurai menjadi nitrogen amoniak. Proses ini dinamakan amonifikasi. Dengan bantuan bakteri *Nitrosomonas* dan *Nitrobacter*, nitrogen amoniak akan mengalami reaksi nitrifikasi menjadi nitrogen nitrit yang berlanjut menjadi nitrogen nitrat. Nitrogen-amoniak dan nitrat ini secara bersama-sama digunakan oleh alga untuk fotosintesis. Proses ini dinamakan asimilasi nitrogen anorganik oleh alga [2].

Pemodelan matematika merupakan salah satu bidang matematika yang dapat digunakan untuk merepresentasikan perubahan konsentrasi amoniak, nitrit, dan nitrat pada perairan ke dalam pernyataan matematika. Model dinamik nitrogen untuk sistem pada perairan sungai telah dibahas oleh beberapa peneliti [4, 6]. Kemudian, Buckley, et.al [1] mengkaji masalah optimisasi yang berhubungan dengan perairan dan nitrogen. Selanjutnya, Djambov dan Ruseva [3] mengemukakan masalah pemodelan matematika dari oksidasi homogen

nitrogen dalam produksi *nitric acid* pada tanaman. Model dinamik non-linear yang merepresentasikan dinamika ekosistem dari eutrofikasi pada badan air yang disebabkan oleh nutrisi telah dianalisis oleh Misra [5].

Sementara itu berdasarkan siklus nitrogen, Brown dan Barnwell[2] mengemukakan perubahan konsentrasi amoniak, nitrit, dan nitrat yang melibatkan model eksponensial alga. Widowati, dkk [8] telah mengkaji pemodelan matematika dan analisis numerik dari perubahan konsentrasi amoniak, nitrit, dan nitrat melalui eksperimen dilaboratorium dengan sampel berasal dari perairan Polder Tawang Semarang. Selanjutnya pada paper ini, dibahas pengaruh pertumbuhan alga pada perubahan kadar amoniak, nitrit, dan nitrat. Pertimbangan akan keterbatasan cahaya, nutrisi, kandungan oksigen, luas permukaan perairan tetap, dan dengan mengasumsikan tidak ada proses migrasi maka dapat dikonstruksi model logistik dari pertumbuhan alga. Hubungan antara model logistik pertumbuhan alga dengan perubahan kadar amoniak, nitrit, dan nitrat direpresentasikan dalam sistem persamaan diferensial non-linear. Kemudian dari sistem tersebut dicari titik kesetimbangannya. Analisa kestabilan dilakukan melalui pengkajian nilai eigen dari matriks Jacobian sistem terlinearisasi.

2. Pembahasan

2.1. Pemodelan Matematika

Pada bagian ini dikaji tentang model matematika yang dikonstruksi dari persamaan logistik dan persamaan Brown and Barnwell. Misalkan $A(t)$ adalah kepadatan alga pada saat t yang dinyatakan dalam jumlah sel/mL dan K adalah kapasitas daya tampung (*carrying capacity*). Parameter δ menunjukkan daya tumbuh alga yang dipengaruhi oleh laju pertumbuhan, respirasi, dan pengendapan alga, model logistik yang mengilustrasikan perubahan jumlah sel alga adalah

$$\frac{dA}{dt} = \delta A \left(1 - \frac{A}{K} \right), \quad (1)$$

dimana $\delta = \mu - \rho - \frac{\sigma_1}{d}$

- μ : laju pertumbuhan lokal alga (perhari),
- ρ : laju respirasi lokal alga (perhari),
- σ_1 : laju pengendapan lokal alga (meter/hari),
- d : rata-rata kedalaman perairan (meter),

dengan $\delta > 0$, $K > 0$, $\mu > 0$, $\rho > 0$, $\sigma_1 > 0$ dan $d > 0$.

Misalkan $N_1(t)$, $N_2(t)$, dan $N_3(t)$ berturut-turut menyatakan konsentrasi amoniak, nitrit, dan nitrat saat t dalam mg/L. Konsentrasi amoniak, nitrit, dan nitrat tersebut akan mengalami perubahan berdasarkan reaksi nitrifikasi (nitritasi dan nitratasi) [2]. Pada proses nitritasi, bakteri dari genus Nitrosomas akan mengubah amoniak menjadi nitrit dengan laju k_1 perhari. Selanjutnya pada proses nitratasi, bakteri dari genus Nitrobacter akan mengubah nitrit menjadi nitrat dengan laju k_2 perhari.

Bentos juga berpengaruh dalam perubahan konsentrasi amoniak. Bentos adalah sejenis hewan-hewan kecil yang hidup di dasar perairan. Keanekaragaman bentos tergantung atas kedalaman air, semakin dalam perairan keanekaragaman bentos akan semakin menurun [2]. Bentos yang melakukan metabolisme akan mengekskresikan nitrogen-amoniak ke dalam perairan sehingga konsentrasi amoniak akan meningkat. Proses metabolisme bentos dipengaruhi oleh cahaya. Misalkan σ_2 merupakan konstanta yang menyatakan tingkat sumber bentos dalam g/m^2 perhari dan d adalah kedalaman perairan dalam meter, maka $\frac{\sigma_2}{d}$ mg/L adalah konsentrasi amoniak yang diekskresikan bentos yang dipengaruhi oleh kedalaman perairan.

Perbandingan konsentrasi amoniak dan nitrat yang digunakan oleh alga berdasarkan faktor preferensi amoniak (P). Sehingga apabila saat t konsentrasi amoniak yang digunakan adalah P bagian, maka konsentrasi nitrat yang digunakan adalah $1-P$ bagian. Fungsi asimilasi amoniak dan nitrat pada saat t adalah

$$F(t) = \frac{PN_1(t)}{PN_1(t) + (1-P)N_3(t)} \quad (2a)$$

$$(1-F(t)) = \frac{(1-P)N_3(t)}{PN_1(t) + (1-P)N_3(t)} \quad (2b)$$

Apabila adalah total nitrogen yang terdapat dalam alga (mg-N/mg-A) dan μ adalah laju pertumbuhan alga maka total asimilasi amoniak dan nitrat oleh alga berturut-turut dapat dinyatakan dengan $F(t)\alpha\mu A(t)$ dan $(1-F(t))\alpha\mu A(t)$. Model perubahan konsentrasi amoniak, nitrit, dan nitrat [2] adalah

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = -k_1N_1(t) + \frac{\sigma_2}{d} - F(t)\alpha\mu A(t), \quad (3 a)$$

$$\frac{dN_2(t)}{dt} = k_1 N_1(t) - k_2 N_2(t), \quad (3 b)$$

$$\frac{dN_3(t)}{dt} = k_2 N_2(t) - (1 - F(t)) \alpha \mu A(t), \quad (3 c)$$

dengan $\sigma_2 > 0$, $d > 0$, $\alpha > 0$, $0 \leq P \leq 1$, $k_1 > 0$, dan $k_2 > 0$.

Jika persamaan (2a- 2b) disubsitusikan ke dalam persamaan (3a) dan (3c) serta untuk penyederhanaan penulisan ketergantungan fungsi terhadap t dihilangkan, maka diperoleh model dinamik nitrogen yang berkaitan dengan pertumbuhan alga. Model ini merupakan sistem persamaan differensial dengan empat variabel sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \delta A \left(1 - \frac{A}{K} \right), \\ \frac{dN_1}{dt} &= -k_1 N_1 + \frac{\sigma_2}{d} - \frac{PN_1}{PN_1 + (1-P)N_3} \alpha \mu A, \\ \frac{dN_2}{dt} &= k_1 N_1 - k_2 N_2, \\ \frac{dN_3}{dt} &= k_2 N_2 - \frac{(1-P)N_3}{PN_1 + (1-P)N_3} \alpha \mu A, \end{aligned} \quad (4)$$

dengan $A(0) \geq 0$, $N_1(0) \geq 0$, $N_2(0) \geq 0$, dan $N_3(0) \geq 0$.

2.2. Kestabilan dari Solusi Kesetimbangan Model

Misalkan titik $E(A_e, N_{1e}, N_{2e}, N_{3e})$ menyatakan titik kesetimbangan untuk alga, amoniak, nitrit, dan nitrat dari model perubahan nitrogen pada sistem persamaan (4). Titik kesetimbangan tersebut dapat diperoleh jika memenuhi

$$\frac{dA}{dt} = 0, \quad \frac{dN_1}{dt} = 0, \quad \frac{dN_2}{dt} = 0, \quad \text{dan} \quad \frac{dN_3}{dt} = 0.$$

Selanjutnya, dapat diperoleh titik kesetimbangan dari sistem (4), $E(A_e, N_{1e}, N_{2e}, N_{3e})$ dengan $A_e = K$, $N_{1e} = C$,

$$N_{2e} = \frac{k_1}{k_2} C, \quad N_{3e} = \frac{k_1 P C^2}{(1-P)(\alpha \mu K - k_1 C)}, \quad \text{dimana} \quad \sigma_2 = \alpha \mu K d, \quad C > 0.$$

Perilaku dari sistem persamaan differensial non-linear (4) di sekitar titik kesetimbangan dapat dikaji dengan melinearisasi sistem tersebut. Jenis kestabilan dari titik kesetimbangan tersebut ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks Jacobian dari sistem terlinearisasi. Salah satu metode pelinearan adalah ekspansi Taylor di sekitar titik kesetimbangan. Misalkan $\bar{A} = A - A_e$,

$\bar{N}_1 = N_1 - N_{1e}$, $\bar{N}_2 = N_2 - N_{2e}$, dan $\bar{N}_3 = N_3 - N_{3e}$. Sehingga diperoleh sistem persamaan dalam bentuk matriks sebagai berikut

$$\begin{pmatrix} \frac{d\bar{A}}{dt} \\ \frac{d\bar{N}_1}{dt} \\ \frac{d\bar{N}_2}{dt} \\ \frac{d\bar{N}_3}{dt} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Z & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{XN_{1e}}{(1-P)Y} & -k_1 - \frac{XAN_{3e}}{Y^2} & 0 & \frac{XAN_{1e}}{Y^2} \\ 0 & k_1 & -k_2 & 0 \\ -\frac{XN_{3e}}{PY} & \frac{XAN_{3e}}{Y^2} & k_2 & -\frac{XAN_{1e}}{Y^2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{A} \\ \bar{N}_1 \\ \bar{N}_2 \\ \bar{N}_3 \end{pmatrix}, \quad (5a)$$

dengan $X = P(1-P)\alpha\mu$, $Y = PN_{1e} + (1-P)N_{3e}$,

$Z = \delta \left(1 - \frac{2A_e}{K} \right)$, dan matriks Jacobiannya adalah

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} Z & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{XN_{1e}}{(1-P)Y} & -k_1 - \frac{XAN_{3e}}{Y^2} & 0 & \frac{XAN_{1e}}{Y^2} \\ 0 & k_1 & -k_2 & 0 \\ -\frac{XN_{3e}}{PY} & \frac{XAN_{3e}}{Y^2} & k_2 & -\frac{XAN_{1e}}{Y^2} \end{bmatrix}.$$

Persamaan karakteristik matriks \mathbf{J} yaitu

$$(Z-\lambda)(-\lambda) \left[\lambda^2 + \lambda(k_1+k_2+M_1+M_3) + k_1k_2 + k_2M_1 + k_1M_1 + k_2M_3 \right] = 0, \quad (5b)$$

dengan $\frac{XAN_{1e}}{Y^2} = M_1$, $\frac{XAN_{3e}}{Y^2} = M_3$.

Persamaan (5b) mempunyai penyelesaian $\lambda = 0$, $\lambda = Z$, dan solusi dari polinomial derajat dua $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$ dengan $a_1 = k_1 + k_2 + M_1 + M_3$, $a_2 = k_1k_2 + k_1M_1 + k_2M_1 + k_2M_3$. Nilai $a_1 \neq 0$ dan $a_2 \neq 0$. Hal ini mudah ditunjukkan, karena

$$a_1 = -4k_1 - k_2 - \frac{1}{PC\alpha\mu K} (-\alpha^2\mu^2K^2 + 2\alpha\mu Kk_1C + P\alpha^2\mu^2K^2 + 2Pk_1^2C^2)$$

dan

$$a_2 = k_1 k_2 + \frac{P \alpha \mu K C}{\left(P + \frac{k_1 P C}{\alpha \mu K - k_1 C} \right)^2} \left((1-P)(k_1 + k_2) + \frac{k_1 k_2 P C}{\alpha \mu K - k_1 C} \right)$$

Misalkan λ_1 dan λ_2 masing-masing adalah akar-akar dari

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0,$$

λ_1 dan λ_2 dapat dinyatakan sebagai $\lambda_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$ dan

$$\lambda_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}.$$

Perilaku sistem di sekitar titik kesetimbangan $E(A_e, N_{1e}, N_{2e}, N_{3e})$ akan stabil jika $Z < 0$, $\lambda_1 < 0$, dan $\lambda_2 < 0$. Dalam hal ini, haruslah $a_1 > 0$. Karena λ_2 selalu bernilai negatif, sehingga agar nilai $\lambda_1 < 0$ maka $a_1 > \sqrt{a_1^2 - 4a_2}$ atau $a_2 > 0$.

Perilaku sistem di sekitar titik kesetimbangan $E(A_e, N_{1e}, N_{2e}, N_{3e})$ tidak stabil jika $Z > 0$ atau $\lambda_1 > 0$ atau $\lambda_2 > 0$. Apabila λ_1 dan λ_2 keduanya bernilai positif maka $a_1 < 0$ dan $a_2 > 0$. Apabila λ_1 dan λ_2 berlawanan tanda maka $a_2 < 0$.

2.3. Simulasi Numerik

Sebagai verifikasi dari model dinamik yang dikemukakan, maka pada bagian ini diberikan simulasi untuk menyelidiki pengaruh pertumbuhan alga terhadap perubahan konsentrasi nitrogen-amoniak, nitrit, dan nitrat. Berdasarkan data dari Widowati, dkk [8] yang telah melakukan eksperimen di laboratorium, disini diperoleh data pertumbuhan alga dalam jumlah sel/mL x 10^4 . Demikian juga, untuk data konsentrasi amoniak, nitrit, dan nitrat diambil dari hasil penelitian Widowati, dkk [7, 8]. Sedangkan untuk parameter-parameter yang lain, nilainya didapatkan dari Brown, L.C and Barnwell [2]. Penggunaan QUAL2E-Uncas terhadap variasi input data parameter pada suatu perairan dapat diperoleh suatu analisis sensitivitas yang menjadi penentu dalam nilai interval setiap parameternya. Tanpa mengurangi keumuman, pada simulasi numerik ini diambil nilai parameter-parameter dalam interval tersebut, seperti di bawah ini

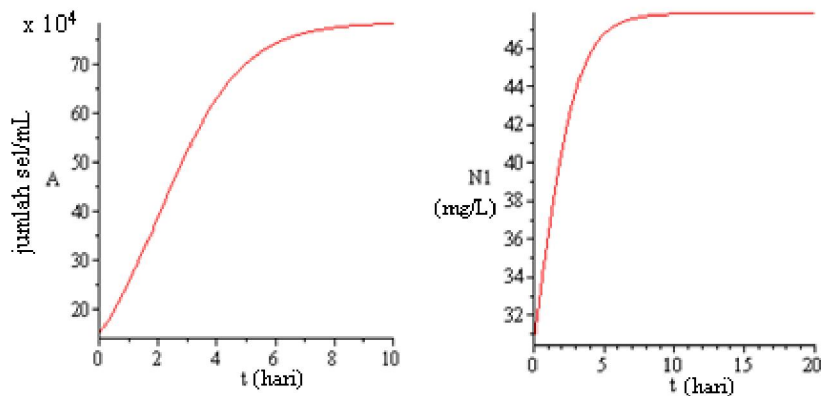
$$\begin{aligned} \alpha &= 0,08 & \sigma_1 &= 0,55 \\ \mu &= 1,05 & P &= 0,07 \\ \rho &= 0,2 \end{aligned}$$

dengan $\delta = 0,7125$; $F = \frac{0,07N_1(t)}{0,07N_1(t)+0,93N_3(t)}$, dan $\frac{\sigma_2}{d} = 6,6058$.

Nilai dari parameter $K = 78,64$, $k_1 = 0,00184$, dan $k_2 = 1,6041$ dicari menggunakan metode kuadrat terkecil dengan software MAPLE. Dari sini, diperoleh model perubahan konsentrasi amoniak, nitrit, nitrat yang berkaitan dengan pertumbuhan alga sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= 0,7125A \left(1 - \frac{A}{78,64} \right), \\ \frac{dN_1}{dt} &= -0,00184N_1 + 6,6058 \frac{0,07N_1}{0,07N_1 + 0,93N_3} - 0,084A, \\ \frac{dN_2}{dt} &= 0,00184N_1 - 1,6041N_2, \\ \frac{dN_3}{dt} &= 1,6041N_2 - \frac{0,93N_3}{0,07N_1 + 0,93N_3} - 0,084A. \end{aligned} \quad (6)$$

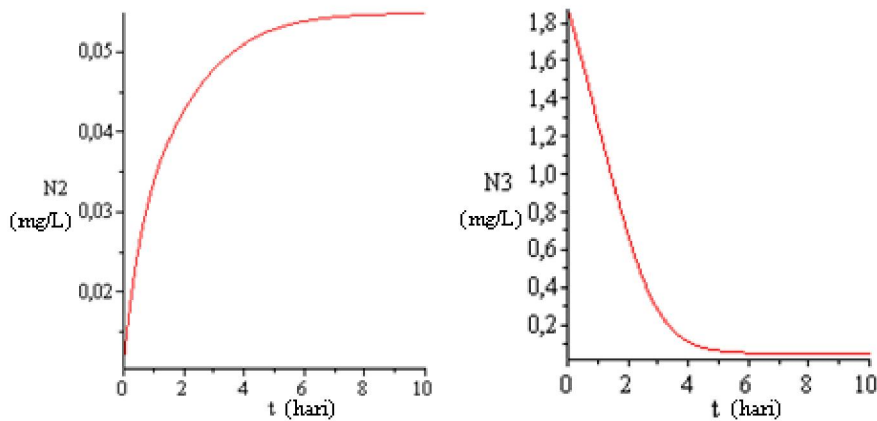
Grafik solusi dari sistem persamaan differensial non-linear di atas yang menyatakan perubahan jumlah sel alga, kadar nitrogen-amoniak, nitrit, dan nitrat terhadap waktu diberikan pada Gambar 1 dan Gambar 2.



Gambar 1. Perubahan kepadatan alga dan kadar amoniak terhadap waktu

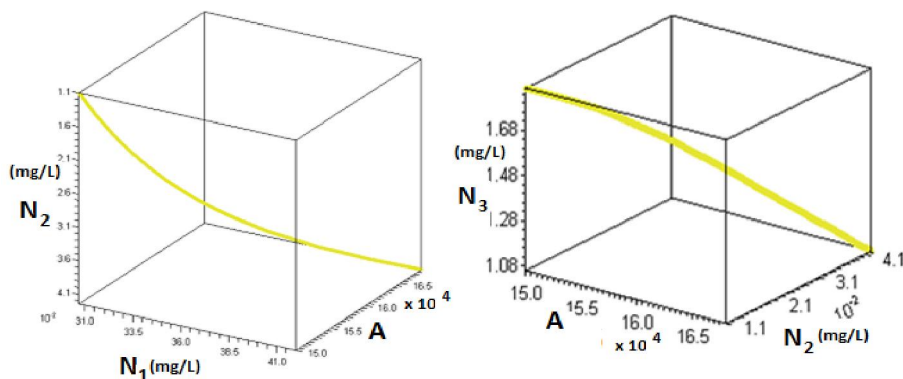
Dari Gambar 1 dan 2 terlihat bahwa pertumbuhan alga mencapai maximum pada hari ke tujuh dengan kapasitas daya tampung $78,64 \times 10^4$. Kadar amoniak mencapai maximum sekitar $47,5$ mg/L dan kadar nitrit mencapai maximum pada nilai $0,055$. Sedangkan kadar nitrat akan menurun seiring

dengan bertambahnya waktu. Dari plot ini juga terlihat bahwa solusi dari sistem dinamik non-linear (2.6) akan menuju titik tetap tertentu yang berarti juga stabil.



Gambar 2 . Perubahan kadar nitrit dan nitrat terhadap waktu

Selanjutnya diselidiki pengaruh perubahan jumlah sel (kepadatan) alga terhadap perubahan konsentrasi nitrogen. Pengaruh pertumbuhan alga (A) dengan perubahan kadar nitrogen-amoniak(N_1) , nitrogen-nitrit(N_2), dan nitrogen-nitrat(N_3) diberikan pada gambar berikut.



Gambar 3. Hubungan perubahan kepadatan alga dengan perubahan kadar nitrogen

Gambar di atas menunjukkan bahwa semakin meningkat jumlah sel (kepadatan alga) maka konsentrasi amoniak dan nitrit semakin membesar sedangkan konsentrasi nitrat akan semakin kecil. Untuk menganalisa kestabilan dari titik kesetimbangan, batas atas dari C diambil 47,5. Hal ini dikarenakan C merupakan titik kesetimbangan dari amoniak. Telah diperoleh bahwa amoniak mencapai maximum pada nilai 47,5 mg/L. Sehingga didapat nilai C pada interval $0 < C \leq 47,5$. Untuk simulasi numerik ini, dipilih $C = 21,648$ yang

merupakan rata-rata konsentrasi amoniak dari data[7]. Titik kesetimbangan model dinamik (2.6) adalah $E(A_e, N_{1e}, N_{2e}, N_{3e})$ dengan $A_e = 78,64$; $N_{1e} = 21,648$; $N_{2e} = 0,0248$; $N_{3e} = 0,0099$. Nilai eigen dari matriks Jacobian adalah $\lambda_1 = -0,7125$; $\lambda_2 = -1,607$; $\lambda_3 = -4,006$; $\lambda_4 = 0$. Karena semua nilai eigen dari matrik Jacobian untuk sistem terlinearisasi adalah kurang dari atau samadengan nol maka perilaku solusi model terlinearisasi di sekitar titik kesetimbangan adalah stabil.

3. Penutup

Perilaku dinamik kadar nitrogen pada perairan yang berkaitan dengan model logistik pertumbuhan alga telah dikaji secara analitik. Pada saat pertumbuhan alga mencapai *carrying capacity* ($A_e = K$), titik kesetimbangan untuk nitrogen-amoniak, nitrogen-nitrit, dan nitrogen-nitrat adalah $N_{1e} = C$,

$$N_{2e} = \frac{k_1}{k_2}C, \quad N_{3e} = \frac{k_1PC^2}{(1-P)(\alpha\mu K - k_1C)}.$$

Berdasarkan analisis kestabilan, diperoleh bahwa perilaku sistem di sekitar titik kesetimbangan stabil untuk $0 < C \leq 47,5$. Dari hasil simulasi diperoleh bahwa kadar nitrogen-amoniak, nitrit, dan nitrat akan stabil dan menuju ke suatu titik tetap. Selain itu juga diperoleh bahwa perubahan kadar nitrogen dipengaruhi oleh perubahan kepadatan alga. Semakin tinggi kepadatan alga, semakin tinggi pula kadar nitrogen-amoniak dan nitrogen-nitrit sedangkan konsentrasi nitrogen-nitrat semakin menurun.

Ucapan Terima Kasih. Paper ini merupakan bagian dari hasil Penelitian Fundamental tahun 2009 dengan Surat Perjanjian Pelaksanaan Hibah Penelitian Multi Tahun Nomor: 124.A/H7.2/KP/2009, tanggal 18 Maret 2009. Terima kasih penulis sampaikan kepada Universitas Diponegoro maupun DIKTI yang telah mendukung penelitian ini.

Daftar Pustaka

- [1]. T.N. Buckley, J.M. Miller, and G.D. Farquhar, *The mathematics of linked optimisation for water and nitrogen use in a canopy*, *Silva Fennica*, **36**, 3, 639–669, 2002.
- [2]. L.C. Brown and T.O. Barnwell, *The Enhanced Stream Water Quality Models Qual2E and Qual2E-Uncas: Documentation and User Manual*, Environmental Research Laboratory US Environmental Protection Agency Athens, Georgia, 1987.
- [3]. P. Djambov and N. Ruseva, *Modelling of nitrogen oxide oxidation in nitric acid production*, *Journal of the University of Chemical Technology and Metallurgy*, **41**, 1, 41-44, 2006.
- [4]. KIWE, Korea Water Resources Corporation, *Development of Water Quality Management System for the West Tarum Canal (WTC) of Citarum River Basin*

- (CRB) in West Java Province, 2003.
- [5]. A.K. Misra, *Mathematical modeling and analysis of eutrophication of water bodies caused by nutrients*, *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, **12**, 4, 511-524, 2007.
 - [6]. P.G. Whitehead and R.J. Williams, *A dynamic nitrogen balanced model for river systems*, *IAHS Publ.*, **139**, 89-99, 1982.
 - [7]. Widowati, Hermin P.S, and Sutimin, *Laporan Penelitian, Konstruksi Model Dinamik Nitrogen untuk memprediksi Beban Limbah Maksimum: Studi Kasus Polder Tawang Semarang*, Universitas Diponegoro, Semarang, 2009.
 - [8]. Widowati, Hermin P.S, and Sutimin, *Mathematical Modeling and Analysis of Ammonia, Nitrite, and Nitrate Concentration: Case Study in Polder Tawang Semarang, Indonesia*, *Proceedings of the IICMA*, Gadjah Mada University, Yogyakarta, 516-570, 2009.