Kestabilan dari Model Dinamik Penyebaran Malaria

Renny Dwi Prastiwi, Widowati
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP

ABSTRAK

Pada paper ini dikemukakan model dinamik penyebaran malaria yang bergantung pada populasi manusia dan nyamuk. Model tersebut merupakan sistem persamaan differensial non linear dengan lima variabel tak bebas yaitu variabel jumlah manusia rentan, manusia terinfeksi, manusia kebal, nyamuk rentan, dan nyamuk terinfeksi per total masing – masing populasi. Selanjutnya dari model tersebut dicari solusi kasetimbangannya dan dianalisis kestabilannya. Hasil analisa menunjukkan bahwa model penyebaran malaria mempunyai enam titik kesetimbangan yang terdiri dari satu titik kesetimbangan bebas penyakit dan lima titik kesetimbangan endemik. Kestabilan ditentukan berdasarkan nilai eigen dari persamaan differensial non linear yang telah dilinearkan dengan menggunakan deret Taylor.

Kata kunci : model penyebaran malaria, titik kesetimbangan, nilai eigen, kestabilan

ABSTRACT

In this paper we propose the dynamic model of the malaria spread which depend on human and mosquito populations. The form of the model is non linear differential equations system with five dependent variables i.e. succeptible humans, infectious humans, immune humans, succeptible mosquitos, and infectious mosquitos per each total populations. Further, from the model can be analyzed the stability of equilibrium. The result of analysis indicate that the spread of malaria model enable to have six equilibrium points which consist of one disease free equilibrium and five endemic equilibriums. Stability can be determined by the eigen values from non linear differential equations which have been linearized by using Taylor series.

Key words : the spread of malaria model, equilibrium point, eigen values, stability.

1. Pendahuluan

Malaria merupakan salah satu penyakit yang telah tersebar di beberapa wilayah di dunia [6]. Malaria disebabkan oleh parasit dari genus plasmodium. Ada empat jenis plasmodium yang dapat menyebabkan malaria, yaitu plasmodium falciparum dengan masa inkubasi 7-14 hari, plasmodium vivax dengan masa inkubasi 8-14 hari, plasmodium oval dengan masa inkubasi 8-14 hari, dan plasmodium malaria dengan masa inkubasi 7-30 hari. Parasit-parasit tersebut ditularkan pada manusia melalui gigitan seekor nyamuk dari genus *anopheles.* Karena faktor penting pada penularan malaria adalah manusia dan nyamuk, maka dari kedua fator penting tersebut, dapat dibuat sebuah model penyebaran malaria yang bergantung pada populasi manusia dan nyamuk.

2. Model Penyebaran Malaria

Dalam rangka mengkonstruksi model penyebaran malaria, populasi manusia dan nyamuk akan dikelompokkan terlenih dahulu. Untuk populasi manusia terdapat empat kelompok yang terdiri dari kelas rentan (S_h), inkubasi (E_h), terinfeksi (I_h), dan kebal (R_h). Sedangkan populasi nyamuk hanya dibagi ke dalam tiga kelas, yaitu kelas rentan (S_v), inkubasi (E_v), dan terinfeksi (I_v). Pada populasi nyamuk tidak terdapat kelas kebal, karena periode infeksinya selalu berakhir dengan kematian. Dari kelas-kelas tersebut maka jumlah populasi manusia dapat dirumuskan dengan $N_h = S_h + E_h + I_h + R_h$, sedangkan jumlah populasi nyamuk dirumuskan dengan $N_v = S_v + E_v + I_v$. Parameter – parameter lain yang digunakan antara lain kecepatan kelahiran per kapita untuk manusia dan nyamuk yang masing - masing adalah λ_h dan λ_v. Manusia dalam kelas kebal, kekebalannya akan semakin menurun dengan kecepatan β_h. Individu – individu dalam masa inkubasi akan menjadi terinfeksi dengan kecepatan v_h untuk manusia dan v_v untuk nyamuk. Individu – individu yang terinfeksi menjadi sembuh dan masuk ke dalam kelas rentan dengan kecepatan r_h, sedangkan individu yang terinfeksi menjadi sembuh dan masuk ke dalam kelas kebal dengan kecepatan α_h. Kecepatan kematian per kapita untuk populasi manusia dan nyamuk masing – masing dinyatakan dengan $f_h(N_h)$ dan $f_v(N_v)$ dengan f_h dan f_v diasumsikan sebagai fungsi monoton naik. Individu – individu yang terinfeksi malaria meninggal dengan kecepatan γ_h.

Misal a_v adalah rata-rata jumlah gigitan per nyamuk per unit waktu, maka dengan melihat kembali kelas-kelas populasi manusia dan nyamuk, jumlah manusia terinfeksi per unit waktu dapat dirumuskan dengan $\left(\frac{c_{vh} a_v I_v}{N_h}\right) S_h$. Sedangkan jumlah nyamuk terinfeksi per unit waktu dapat dirumuskan dengan $\left(\frac{c_{hv} a_v I_h}{N_h}\right) S_v + \left(\frac{\tilde{c}_{hv} a_v R_h}{N_h}\right) S_v$ dengan

c_{vh} = penularan dari nyamuk yang terinfeksi ke manusia rentan

c_{hv} = penularan dari manusia yang telah terinfeksi ke nyamuk rentan

$\tilde{c}_{hv}$ = penularan dari manusia kebal yang telah terinfeksi ke nyamuk rentan

Dari parameter – parameter di atas , model penyebaran malaria dapat diformulasikan sebagai berikut

$$\frac{dS_h}{dt} = \lambda_h N_h + \beta_h R_h + r_h I_h - f_h(N_h) S_h - \left(\frac{c_{vh} a_v I_v}{N_h}\right) S \; ;$$

$$\frac{dE_h}{dt} = \left(\frac{c_{vh} a_v I_v}{N_h}\right) S_h - (v_h + f_h(N_h)) E_h \; ;$$

$$\frac{dI_h}{dt} = v_h E_h - (r_h + \alpha_h + \gamma_h + f_h(N_h)) I_h \; ;$$

$$\frac{dR_h}{dt} = \alpha_h I_h - (\beta_h + f_h(N_h))R_h$$

$$\frac{dS_v}{dt} = \lambda_v N_v - f_v(N_v)S_v - \left(\frac{c_{hv}a_v I_h}{N_h}\right)S_v - \left(\frac{\tilde{c}_{hv}a_v R_h}{N_h}\right)S_v;$$

$$\frac{dE_v}{dt} = \left(\frac{c_{hv}a_v I_h}{N_h}\right)S_v + \left(\frac{\tilde{c}_{hv}a_v R_h}{N_h}\right)S_v - (v_v + f_v(N_v))E_v;$$

$$\frac{dI_v}{dt} = v_v E_v - f_v(N_v))I_v;$$

$$\frac{dN_h}{dt} = \lambda_h N_h - f_h(N_h)N_h - \gamma_h I_h$$

$$\frac{dN_v}{dt} = \lambda_v N_v - f_v(N_v)N_v \quad (2.1)$$

sedangkan kecepatan kematian per kapita dirumuskan dengan

$$f_h(N_h) = \mu_h + \mu_{2h}N_h$$

$$f_v(N_v) = \mu_v + \mu_{2v}N_v$$

Untuk lebih memudahkan dalam menganalisa model, maka dilakukan pendefinisian variabel baru sebagai berikut

$$u = \frac{S_h}{N_h},\quad v = \frac{E_h}{N_h},\quad w = \frac{I_h}{N_h},\quad R = \frac{R_h}{N_h},$$

$$x = \frac{S_v}{N_v},\quad y = \frac{E_v}{N_v},\quad z = \frac{I_v}{N_v}$$

sehingga

$$u + v + w + R = 1 \Rightarrow v = 1 - u - w - R,$$

$$x + y + z = 1 \Rightarrow y = 1 - x - y$$

Dengan pendefinisian parameter – parameter baru sebagai berikut

$$\tau = \mu_v t,\quad \lambda = \frac{\lambda_h}{\mu_v},\quad \beta = \frac{\beta_h}{\mu_v},$$

$$\gamma = \frac{\gamma_h}{\mu_v}, v = \frac{v_h}{\mu_v},\quad r = \frac{r_h}{\mu_v}$$

$$\alpha = \frac{\alpha h}{\mu v}, \qquad \varepsilon = \frac{\mu_h}{\mu_v}$$

$$\xi(N_h, N_v) = \frac{c_{vh}a_v\mu_{2h}(\lambda_v - \mu_v)N_v}{\mu_{2v}\mu_v(\lambda_h - \mu_h)N_h},$$

$$a = \frac{\lambda_v}{\mu_v},\quad b = \frac{c_{hv}av}{\mu_v},\quad c = \frac{\bar{c}_{hv}a_v}{\mu_v},$$

$$e = \frac{v_v}{\mu_v}$$

maka modelnya akan menjadi

$$\frac{du}{d\tau} = \lambda(1-u) + \beta R + rw + \gamma wu - \xi uz$$

$$\frac{dw}{d\tau} = v(1-u-R) + \gamma w^2 - (r + \alpha + \gamma + \lambda + v)w$$

$$\frac{dR}{d\tau} = \alpha w + \gamma wR - (\beta + \lambda)R$$

$$\frac{dx}{d\tau} = a(1-x) - bxw - cxR$$

$$\frac{dz}{d\tau} = e(1-x) - (a+e)z$$

(2.2)

3. Solusi Kesetimbangan Model

Misalkan $(u^*, w^*, R^*, x^*, z^*)$ adalah solusi kesetimbangan dari model, maka untuk mencarinya perlu diketahui bahwa kesetimbangan akan terpenuhi jika $\frac{dR}{dt}=0$, $\frac{dw}{dt}=0$, $\frac{dx}{dt}=0$, $\frac{dz}{dt}=0$,

$\frac{du}{dt}=0$. Dengan memasukkan syarat tersebut ke dalam persamaan (2.2) didapat

$$\frac{dR}{d\tau}=0$$

$$\alpha w+\gamma wR-(\beta+\lambda)R=0$$

$$(\beta+\lambda)R=(\alpha+\gamma R)w$$

$$w^*=\frac{(\beta+\lambda)R^*}{\alpha+\gamma R^*} \qquad (3.1)$$

$$\frac{dw}{d\tau}=0$$

$$v(1-u^*-R^*)+\gamma w^{*2}$$
$$-(r+\alpha+\gamma+\lambda+v)w^*=0$$

dengan mensubstisuaikan persamaan (3.1), maka diperoleh

$$u^*=\left(1-R^*\right)+\frac{\left(\beta+\lambda R^*\right)\left(\gamma\left(\beta+\lambda R^*\right)-M\left(\alpha+\gamma R^*\right)\right)}{\left(\alpha+\gamma R^*\right)^2 v} \qquad (3.2)$$

$$\frac{dx}{d\tau}=0$$

$$a(1-x^*)-bx^*w-cx^*R^*=0$$

dengan mensubstisuaikan persamaan (3.1), maka diperoleh

$$x^*=\frac{a\left(\alpha+\gamma R^*\right)}{a\alpha+\left\{a\gamma+b\beta+b\lambda+\alpha c\right\}R^*+c\gamma R^{*2}} \qquad (3.3)$$

$$\frac{dz}{d\tau}=0$$

$$e\left(1-x^*\right)-\left(a+e\right)z^*=0$$

dengan mensubstisuaikan persamaan (3.2), maka diperoleh

$$z^*=\left(\frac{e}{a+e}\right)\times$$
$$\left\{\frac{\left(\alpha c+b\left(\beta+\lambda\right)+c\gamma R^*\right)R^*}{a\alpha+\left(\alpha c+b\left(\beta+\lambda\right)+a\gamma\right)R^*+c\gamma R^{*2}}\right\} \qquad (3.4)$$

Karena u^*, w^*, x^*, z^* adalah persamaan yang mengandung R^*, maka terlebih dahulu akan dicari nilai R^* dengan mensubstitusikan persamaan (3.1) sampai (3.4) ke dalam persamaan

$$\frac{du}{d\tau}=\lambda(1-u)+\beta R+rw+\gamma wu-\xi uz$$

sehingga nilai R^* didefinisikan sebagai solusi polinomial berderajat 6 sebagai berikut

$$R^*(A_5R^{*5}+A_4R^{*4}+A_3R^{*3}+A_2R^{*2}$$
$$+A_1R^*+A_0)=0$$

dengan

$$A_5=acDF\gamma^4v^2\xi,$$

$$A_4=\gamma^3v(Ac(\beta+\lambda)(-B+a\beta(\beta+\lambda)$$
$$+a\alpha v)+AD(c+aF)\xi$$
$$+cDF(B-a(\beta+\lambda)^2+a(2\alpha-\gamma)v)\xi)$$

$$A_3=\gamma^2(A(\beta+\lambda)(A(-B+a\beta(\beta+\lambda)$$
$$+a\alpha v)+v(-(B(c\alpha+a\gamma))+a(\beta+\lambda)$$
$$(a\beta\gamma-c\alpha\lambda)+a\alpha(c\alpha+a\gamma)v))$$
$$+D(A^2+AF(B-a(\beta+\lambda)^2)+$$
$$A(2c\alpha+a(2RF\alpha+\gamma-E\gamma))v$$
$$+cF\alpha v(2B-a(\beta+\lambda)^2$$
$$+a(\alpha-3\gamma)v))\xi)$$

$$A_2=a\gamma(A(\beta+\lambda)(-(A(B+a\lambda(\beta+\lambda)$$
$$-a\alpha v))$$
$$+a\gamma v(-2B+a(\beta^2-\lambda^2+2\alpha v)))+$$
$$D(2A^2+AF(2B-a(\beta+\lambda)^2)$$

$$+A((c+aF)\alpha-3a(-1+F)\gamma)v$$
$$+cF\alpha v(B-3a\gamma v))\xi),$$
$$A_1=\alpha^2(-(aA\gamma(\beta+\lambda)v(B+a\lambda(\beta+\lambda)$$
$$-a\alpha v))$$
$$+D(A^2+ABF-3aA(-1+F)\gamma v$$
$$-acF\alpha\gamma v^2)\xi),$$
$$A_0=aAD\alpha^3 v(1-F)\xi,$$
$$A=v(\alpha c+b(\beta+\lambda)),$$
$$B=a(\alpha v+M(\beta+\lambda))$$
$$D=\frac{a}{\xi}(\beta+\lambda)(v(\alpha+\gamma+r)+\lambda M),$$
$$M=\alpha+r+\gamma+v+\lambda,$$
$$F=\frac{\xi ev(\alpha c+b(\beta+\lambda))}{a(a+e)(\beta+\lambda)(\lambda+v)(\alpha+r+\gamma+\lambda)}$$

Maka jelas terdapat 6 solusi kesetimbangan dengan salah satu akarnya bernilai $R^*=0$. Ketika $R^*=0$, maka $E_0:(u^*,w^*,R^*,x^*,z^*)=(1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0)$ disebut *Disease Free Equilibrium* (DFE), yaitu kondisi dimana setiap individu dalam populasi tersebut belum terjangkit penyakit. Dan ketika $R^*\neq 0$, maka titik kesetimbangannya disebut kesetimbangan endemik.

4. Analisis Kestabilan

Kestabilan dari solusi setimbang dapat dicari dengan linearisasi persamaan (2.1) di titik u^*,w^*,R^*,x^*,z^* dengan menggunakan ekspansi Taylor. Persamaan differensial non linear (2.1) jika dilinierisasi menjadi persamaan (4.1) sebagai berikut

$$\frac{du}{dt}=(\gamma w^*-\lambda-\xi z^*)u+(r+\gamma u^*)w+\beta R$$
$$+(0)x+(-\xi u^*)z,$$
$$\frac{dw}{dt}=(-v)u+(2\gamma w^*-M)w+(-v)R$$
$$+(0)x+(0)z,$$
$$\frac{dR}{dt}=(0)u+(\alpha+\gamma R^*)w+$$
$$(\gamma w^*-\beta-\lambda)R+(0)x+(0)z,$$
$$\frac{dx}{dt}=(0)u+(-bx^*)w+(-cx^*)R$$
$$+(-\frac{a}{x^*})x+(0)z,$$
$$\frac{dz}{dt}=(0)u+(0)w+(0)R+(-e)x$$
$$-(a+e)z, \tag{4.1}$$

dengan

$$\frac{a}{x^*}=a+bw^*+cR^*$$
$$M=(\alpha+r+\gamma+v+\lambda)$$

Jika *JE* adalah matriks Jacobian dari persamaan (4.1), *I* adalah matriks identitas, maka persamaan karakteristik nilai eigen dapat dicari dengan $\left|JE-\zeta I\right|=0$. Persamaan karakteristik nilai eigen dari persamaan (4.1) adalah

$$\zeta^5+a_1\zeta^4+a_2\zeta^3+a_3\zeta^4+a_5$$

dengan

$$a_1=a+e+\frac{a}{x^*}+B_1+B_2+B_3$$

$$a_2=\frac{a}{x^*}(a+e)+\left(a+e+\frac{a}{x^*}\right)$$
$$(B_1+B_2+B_3)+B_1(B_2+B_3)$$
$$+B_2B_3+v(B_4+B_5)$$

$$a_3 = \frac{a}{x^*}(a+e)+(B1+B2+B3)$$
$$+\left(a+e+\frac{a}{x^*}\right)(B_1(B_2+B_3)$$
$$+B_2B_3+v(B_4+B_5))$$
$$+B_1(B_2B_3+vB_4)+v(B_5B_3+\beta B_4)$$

$$a_4 = \frac{a}{x^*}(a+e)(B_1(B_2+B_3)+B_2B_3$$
$$+v(B_4+B_5))+\left(a+e+\frac{a}{x^*}\right)$$
$$(B_1(B_2B_3+vB_4)+v(B_5B_3+\beta B_4))$$
$$-\xi evu^*x^*b$$

$$a_5 = \frac{a}{x^*}(a+e)((B_1(B_2B_3+vB_4)$$
$$+vB_5B_3+\beta B_4)$$
$$-\xi evu^*x^*(cB_4+bB_3)$$

dengan $B_i, i=1,\ldots,5$ fungsi – fungsi dari solusi R^* yang diberikan oleh persamaan (3.1) sampai (3.4) sebagai berikut

$$B_1 = \lambda+\xi z^*-\gamma w^*,$$

$$B_2 = M-2\gamma^* w^*,$$

$$B_3 = \beta+\lambda-\gamma w^*,$$

$$B_4 = \alpha+\gamma R^*,$$

$$B_5 = r+\gamma u^*.$$

Dari nilai eigen tersebut dapat ditentukan kestabilan dari titik – titik kesetimbangan dengan menggunakan teori teori kestabilan. Jika semua nilai eigennya adalah bilangan real negatif atau komplek konjugat dengan bagian real negatif, maka titik kesetimbangan nya stabil asimtotik. Jika semua nilai eigennya sama dengan nol atau murni imajiner, maka titik kesetimbangannya stabil tetapi tidak asimtotik. Dan jika salah satu atau semua nilai eigennya adalah bilangan real positif atau komplek konjugat dengan bagian real positif, maka titik kesetimbangannya tidak stabil.

5. Studi Kasus

Pada bagian ini diberikan studi kasus dengan data sekunder yang diambil dari Dinas Kesehatan Kota Semarang tahun 2007. Sedangkan data jumlah penduduk Semarang tahun 2007 diambil dari Badan Pusat Statistik Semarang. Dari data diketahui jumlah kelahiran selama tahun 2007 = 22838, sedangkan jumlah penduduk tahun 2007 = 1454594. maka diperoleh angka kelahiran

$$\lambda = \frac{22838}{1454594}\times 1000 = 0{,}0157006 .$$

Jumlah penderita malaria sebanyak 34. maka laju individu dalam masa inkubasi menjadi terinfeksi(v) = $\frac{34}{12}$= 2,8333, dengan rata – rata periode inkubasinya selama 12 hari. Laju individu terinfeksi menjadi sembuh dan masuk ke dalam kelas kebal(α) sebesar = $\frac{34}{10}$= 3,4, dengan rata – rata periode infeksinya selama 10 hari. Dari 34 penderita, ada satu penderita yang dalam 43 hari setelah sembuh kembali terinfeksi malaria. Maka laju individu dalam kelas kebal menurun kekebalannya dan kembali terinfeksi (β) = $\frac{1}{43}$ = 0,0233, dengan periode kekebalan 43 hari. Dari 34 kasus malaria tersebut, semuanya merupakan kasus impor, dimana individu yang terinfeksi digigit oleh nyamuk di luar kota semarang. Di kota semarang belum ditemukan nyamuk anopheles, dan bukan merupakan daerah endemis malaria. Maka angka kelahiran nyamuk bernilai nol. Dari data tersebut akan dibuat modelnya, kemudian dianalisis titik kesetimbangan dan kestabilannya.

a. Model penyebaran malaria

$$\frac{du}{d\tau} = \lambda(1-u) + \beta R + rw + \gamma wu - \xi uz$$
$$= 0{,}0157006(1-u) + 0{,}0233R$$

$$\frac{dw}{d\tau} = v(1-u-R) + \gamma w^2 - (r+\alpha+\gamma+\lambda+v)w$$

$$= 2{,}8333(1-u-R) - (3{,}4 + 0{,}0157006 + 2{,}8333)w$$
$$= 2{,}8333 - 2{,}8333u - 2{,}8333R - 6{,}249w \qquad (5.1)$$

$$\frac{dR}{d\tau} = \alpha w + \gamma wR - (\beta+\lambda)R$$

$$= 3{,}4w - (0{,}0233 + 0{,}0157006)R$$
$$= 3{,}4w - 0{,}039R$$

$$\frac{dx}{d\tau} = a(1-x) - bxw - cxR$$
$$= 0(1-x) - 0xw - 0xR$$
$$= 0$$

$$\frac{dz}{d\tau} = e(1-x) - (a+e)z$$
$$= 0(1-x) - 0z$$
$$= 0$$

b. Solusi Kesetimbangan

Solusi kesetimbangan dari model di atas dapat dirumuskan sebagai berikut

$$w^* = \frac{(\beta+\lambda)R^*}{\alpha+\gamma R^*}$$
$$= \frac{(0{,}0233+0{,}0157006)R^*}{3{,}4}$$
$$= 0{,}01147R^*$$

$$u^* = (1-R^*) + \frac{(\beta+\lambda)R^*\left(\gamma(\beta+\lambda R^*) - M(\alpha+\gamma R^*)\right)}{(\alpha+\gamma R^*)^2 v}$$
$$= 1 - R^* - 0{,}8286R^*$$
$$= 1 - 1{,}8286R^*$$

$$x^* = 0$$
$$z^* = 0$$

Karena u^* dan w^* adalah persamaan yang mengandung R^*, maka terlebih dahulu akan dicari nilai R^* dengan mensubstitusikan persamaan u^* dan w^* di atas ke dalam persamaan

$$\frac{du}{d\tau} = \lambda(1-u^*) + \beta R^* + rw^* + \gamma wu^* - \xi u^* z^*$$

$$\lambda(1-u) + \beta R^* + rw^* + \gamma w^* u^* - \xi u^* z^* = 0$$

$$0{,}0157006(1-(1-1{,}8286)) + 0{,}0233R^* = 0$$
$$0{,}02871R^* + 0{,}0233R^* = 0$$
$$R^* = 0$$

maka titik kesetimbangannya adalah $(u^*, w^*, R^*, x^*, z^*) = (1,0,0,0,0)$

c. Analisis Kestabilan

Bentuk persamaan differensial non linear (3.8) yang dilinierisasi adalah

$$\frac{du}{dt} = (-0{,}0157006)u + 0{,}0233R,$$

$$\frac{dw}{dt} = (-2{,}8333)u + (-6{,}429)w + (-2{,}8333)R,$$

$$\frac{dR}{dt} = (3,4)w + (-0,039)R,$$

$$\frac{dx}{dt} = 0, \qquad (5.2)$$

$$\frac{dz}{dt} = 0,$$

Jika JE adalah matriks Jacobian dari persamaan (5.2), I adalah matriks identitas, maka persamaan karakteristik nilai eigen dapat dicari dengan $\left|JE - \zeta I\right| = 0$. Persamaan karakteristik nilai eigen dari persamaan (5.2) adalah

$$-0,3796379871\zeta^2 - 9,985502481\zeta^3 - 6,4837006\zeta^4 - \zeta^5$$

maka akar – akar persamaannya adalah

$$\zeta_1 = 0$$
$$\zeta_2 = 0$$
$$\zeta_3 = -0,03900060942$$
$$\zeta_4 = -2,416506190$$
$$\zeta_5 = -4,028193800$$

Karena semua akarnya merupakan bilangan riil ≤ 0, maka menurut teori kestabilan, titik kesetimbangan $(1,0,0,1,0)$ stabil tetapi tidak asimtotik.

Untuk menggambarkan kondisi stabil tersebut dapat dilakukan dengan menentukan solusi dari sistem persamaan tersebut terlebih dahulu.

Solusi sistem persamaan (5.2) berbentuk

$$u = C_1\sigma_1 e^{\zeta_1 t} + C_2\sigma_2 e^{\zeta_2 t} + C_3\sigma_3 e^{\zeta_3 t} + C_4\sigma_4 e^{\zeta_4 t} + C_5\sigma_5 e^{\zeta_5 t}$$

$$w = C_1\sigma_1 e^{\zeta_1 t} + C_2\sigma_2 e^{\zeta_2 t} + C_3\sigma_3 e^{\zeta_3 t} + C_4\sigma_4 e^{\zeta_4 t} + C_5\sigma_5 e^{\zeta_5 t}$$

$$R = C_1\sigma_1 e^{\zeta_1 t} + C_2\sigma_2 e^{\zeta_2 t} + C_3\sigma_3 e^{\zeta_3 t} + C_4\sigma_4 e^{\zeta_4 t} + C_5\sigma_5 e^{\zeta_5 t}$$

$$x = C_1\sigma_1 e^{\zeta_1 t} + C_2\sigma_2 e^{\zeta_2 t} + C_3\sigma_3 e^{\zeta_3 t} + C_4\sigma_4 e^{\zeta_4 t} + C_5\sigma_5 e^{\zeta_5 t}$$

$$z = C_1\sigma_1 e^{\zeta_1 t} + C_2\sigma_2 e^{\zeta_2 t} + C_3\sigma_3 e^{\zeta_3 t} + C_4\sigma_4 e^{\zeta_4 t} + C_5\sigma_5 e^{\zeta_5 t}$$

dimana ζ adalah nilai eigen dan σ adalah vector eigen yang diperoleh dengan menggunakan perhitungan $JE\sigma = \zeta\sigma$

Dengan menggunakan metode matriks, solusi persamaan (5.2) adalah

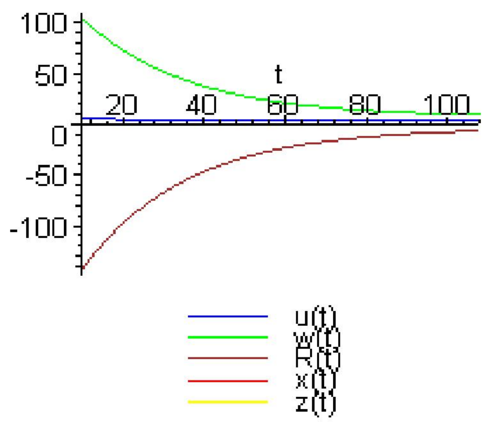
$$u = C_1 + C_2 + C_3(e^{-0,0390006094\,2}) + C_4(e^{-2,416506190}) + C_5(e^{-4,028193800})$$

$$w = 0,0077294C_1 + 0,0077294C_2 + 72,05163027C_3(e^{-0,0390006094\,2}) + 0,00000017771C_4(e^{-2,416506190}) + 202,0526761C_5(e^{-4,028193800})$$

$$R = C_1(0,673845) + C_2(0,673845) + C_3(-103,0388665)e^{-0,0390006094\,2t} + C_4(-1,000000404)e^{-2,416506190\,t} + C_5(-172,2100086)e^{-4,028193800\,t}$$

$$x = 0$$
$$z = 0$$

Gambar untuk solusi tersebut ditunjukkan pada gambar 5.2 berikut



Gambar 1 grafik solusi persamaan 5.1

Dari gambar tersebut dapat dilihat bahwa individu – individu pada kelas rentan cenderung stabil, sedangkan individu pada kelas terinfeksi dan kelas kebal akan menuju ke titik kesetimbangannya. Sedangkan nyamuk pada kelas rentan dan terinfeksi tidak ada, karena populasi nyamuk Anopheles di Semarang tidak ada.

6. Penutup

Model penyebaran malaria berupa sistem persamaan differensial non linear dengan lima variabel tak bebas yaitu variabel jumlah manusia rentan, manusia terinfeksi, manusia kebal, nyamuk rentan, dan nyamuk terinfeksi per total masing – masing populasi. Model penyebaran malaria memungkinkan mempunyai enam titik kesetimbangan yang dibagi menjadi dua macam yaitu DFE dan kesetimbangan endemik, dimana tiap titik kesetimbangan tersebut dianalisis kestabilannya dengan menggunakan teori kestabilan. Jika semua nilai eigennya negatif maka titik kesetimbangannya stabil asimtotik. Jika nilai eigennya sama dengan nol atau murni imajinet maka titik kesetimbangannya stabil tetapi tidak asimtotik. Jika salah satu atau semua nilai eigennya positif maka titik kesetimbangannya tidak stabil.

7. Daftar Pustaka

[1]. Baex, Andy, *"Malaria"*, http://www.indonesiaindonesia.com/f/7597-malaria/,diakses tanggal 11 Mei 2008

[2]. Boyce,W & Diprima, R, 1992. *Elementary Differential Equation & Boundary Value Problem*, Canada : John Wiley & Sons, Inc

[3]. Cronin, Jane, 1994. *Differential Equations : Introduction and Qualitatif Theory*, New York : Marcel Dekker. Inc

[4]. Finizio & Ladas, 1982. *Ordinary Differential Equations With ModernApplications*, New York : Wards Worth Inc

[5]. Nagle & Edward, 1986. *Fundamentals of Differential Equation, second edition*, California : Benyamin / Cummings Publishing Company Inc

[6]. Ngawa, Gideon A & William S. Shu , *"A Mathematical Model For Endemic Malaria With Variable Human And Mosquitopopulations"*, http://www.ictp.trieste.it/pub_off

[7]. Ross, Stephley L, 1984. *Differential Equation*, Canada : John Wiley & Sons, Inc