

APLIKASI TRANSFORMASI LAPLACE PADA PERSAMAAN KONSENTRASI OKSIGEN TERLARUT

TITI YULIASTUTI dan WIDOWATI

ABSTRAK

Persamaan oksigen terlarut untuk reaksi kebutuhan oksigen orde pertama dikembangkan untuk reaksi orde 3/2 dan multiorde. Oksigen terlarut merupakan salah satu parameter kimia air yang berperan pada kehidupan biota perairan dan yang paling sering diukur dalam observasi pengaruh polusi organik pada perairan. Penentuan kebutuhan oksigen harus dipakai sebagai tambahan penentuan oksigen terlarut. Tes kebutuhan oksigen merupakan suatu metode untuk mengevaluasi kebutuhan oksigen secara biokimia. Pengembangan solusi persamaan oksigen terlarut untuk reaksi kebutuhan oksigen orde 3/2 diselesaikan dengan menggunakan transformasi laplace dan integral konvolusi untuk menyederhanakan solusi persamaan model.

Kata Kunci: Transformasi laplace, Oksigen Terlarut (DO), BOD

I. PENDAHULUAN

Air sebagai sumberdaya alam yang sangat penting bagi kehidupan makhluk hidup. Oleh karena itu kualitas air harus tetap dijaga demi kelangsungan makhluk hidup. Pencemaran pada perairan disebabkan oleh masuknya zat-zat asing ke dalam lingkungan, sebagai akibat dari tindakan manusia, yang merubah sifat-sifat fisik, kimia, dan biologis lingkungannya.

Kualitas air dipengaruhi oleh beberapa faktor, antara lain: Suhu air, *Total Suspended Solid (TSS)*, *Dissolved Oxygen (DO)*,

Biochemical Oxygen Demand (BOD), *Chemical Oxygen Demand (COD)*, dan lain sebagainya. Jenis bahan pencemar yang berasal dari industri adalah bahan organik yang *degradable* dan *non degradable* sehingga menyebabkan perubahan *DO*, *BOD*, *COD*, *TSS*, dan bahan organik yang tidak larut seperti logam berat. Salah satu parameter untuk menentukan kualitas air sungai adalah *Dissolved Oxygen (DO)* atau oksigen terlarut, parameter ini cukup memadai untuk mengetahui kondisi air sungai.

Pemodelan kualitas air sungai pertama kali dipelopori oleh Streeter dan Phelps pada tahun 1925 yang menerapkan persamaan *DO* untuk reaksi *BOD* orde pertama yang kemudian reaksi *BOD* orde pertama dapat dikembangkan kembali untuk reaksi *BOD* orde 3/2 dan multiorde. Pengembangan suatu solusi reaksi *BOD* orde pertama, 3/2 dan multiorde akan melibatkan pengintegrasian dari persamaan yang tidak praktis.

Pada paper ini dibahas bagaimana menentukan konsentrasi *DO* untuk reaksi *BOD* orde pertama dan 3/2 dengan menggunakan transformasi laplace. Sedangkan asumsi yang digunakan adalah kondisi aliran yang terjadi mantap dan seragam sehingga pengaruh dispersi pada *BOD* dan *DO* pada sungai diabaikan. Konstanta laju reaksi dan konstanta laju *reaerasi* merupakan parameter yang tetap dan tidak dipengaruhi oleh kondisi lingkungan serta parameter-parameter lain.

II. TEORI DASAR

Dissolved Oxygen dan Biochemical Oxygen Demand

Dissolved Oxygen (DO) atau oksigen terlarut merupakan salah satu parameter kimia air yang berperan pada kehidupan biota perairan dan yang paling sering diukur dalam observasi pengaruh polusi organik pada sungai. Parameter ini cukup memadai untuk melakukan observasi pada kondisi yang ada. Penurunan oksigen terlarut dapat mengurangi efisiensi pengambilan oksigen bagi biota perairan sehingga menurunkan kemampuannya untuk hidup normal. Rendahnya kandungan *DO* dalam air berpengaruh buruk terhadap kehidupan ikan dan kehidupan akuatik lainnya dan kalau tidak ada sama sekali oksigen terlarut mengakibatkan munculnya kondisi anaerobik dengan bau busuk dan permasalahan estetika.

Penentuan *Biochemical Oxygen Demand (BOD)* atau kebutuhan oksigen dipakai sebagai tambahan penentuan *DO*, karena tes *BOD* merupakan salah satu metode

untuk mengevaluasi kebutuhan oksigen secara biokimia. *BOD* didefinisikan sebagai jumlah oksigen yang diperlukan oleh bakteri untuk mendekomposisikan bahan organik (hingga stabil) pada kondisi aerobik. Oleh karena itu, tujuan pemeriksaan *BOD* adalah untuk menentukan pencemaran air akibat limbah domestik atau limbah industri. Umumnya makin tinggi *BOD* makin tinggi tingkat pencemarannya.

2.2 Transformasi Laplace

Metode transformasi Laplace adalah suatu metode operasional yang dapat digunakan secara mudah untuk menyelesaikan persamaan diferensial linier.

Definisi 2.1

Misalkan $f(t)$ merupakan suatu fungsi dari t terdefinisi untuk $t > 0$.

Kemudian $\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$, jika ada dinamakan suatu fungsi dari p , katakan $F(p)$. Fungsi $F(p)$ ini dinamakan transformasi Laplace dari $f(t)$ dan dinotasikan dengan $\mathcal{L}\{f(t)\}$.

$$\text{Jadi } \mathcal{L}\{f(t)\} = F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

Operasi yang baru ditunjukkan yang menghasilkan $F(p)$ dari suatu fungsi $f(t)$ yang diberikan, disebut transformasi Laplace.

Teorema 2.2

Transformasi Laplace dari penjumlahan (selisih) dua fungsi adalah sama dengan penjumlahan (selisih) transformasi Laplace masing-masing fungsi.

$$\mathcal{L}\{f_1(t) \pm f_2(t)\} = \mathcal{L}[f_1(t)] \pm \mathcal{L}[f_2(t)]$$

Teorema 2.3

Transformasi Laplace suatu konstanta dikalikan dengan suatu fungsi adalah sama dengan konstanta tersebut dikalikan dengan transformasi Laplace dari fungsi tersebut.

$$\mathcal{L}[kf(t)] = k\mathcal{L}[f(t)]$$

Teorema 2.4

Transformasi laplace dari e^{-at} dikali dengan suatu fungsi adalah sama dengan transformasi laplace dari fungsi itu dengan p diganti oleh $(p+a)$.

$$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(p+a)$$

Teorema 2.5

Jika $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(p)$, maka $\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]=pF(p)-f(0)$

Definisi 2.6

Jika $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(p)$, maka $f(t)$ dinamakan transformasi Laplace invers dari $F(p)$ dan dinotasikan dengan $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$. Kemudian untuk mencari $\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$ harus dicari suatu fungsi dari t yang transformasi Laplaceny adalah $F(p)$.

2.3 Integral Konvolusi

Misalkan $f(t)$ dan $g(t)$ merupakan suatu fungsi dari t . Transformasi Laplace dari $f(t)$ dituliskan dengan $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(p)$ dan transformasi Laplace dari $g(t)$ dituliskan dengan $\mathcal{L}\{g(t)\}=G(p)$. Transformasi Laplace $h(t)$ dituliskan sebagai $\mathcal{L}\{h(t)\}=H(p)=F(p)G(p)$ dimana $F(p)$ dan $G(p)$ adalah transformasi pada fungsi f dan g . Akan tetapi $\mathcal{L}\{f(t)g(t)\}\neq\mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\}$.

Teorema 2.7

Misalkan $F(p)=\mathcal{L}\{f(t)\}$ dan $G(p)=\mathcal{L}\{g(t)\}$ untuk setiap $p>a\geq 0$.

Maka $H(p)=F(p)G(p)=\mathcal{L}\{h(t)\}$ untuk $p>a$ dimana :

$$\begin{aligned}h(t) &= \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau \\ &= \int_0^t f(t)g(t-\tau)d\tau\end{aligned}$$

Fungsi $h(t)$ pada Teorema 2.7 adalah konvolusi pada f dan g dan integralnya dikatakan sebagai integral konvolusi. Integral konvolusi dapat dituliskan sebagai $h(t)=(f*g)(t)$.

2.4 Integral Eksponensial

Integral eksponensial dituliskan sebagai berikut [1]

$$Ei(x)=\int_{-\infty}^xe^{\frac{t}{x}}dt \quad (2.1)$$

Disini terdapat dua ekspansi deret pada integral eksponensial, yang pertama sering digunakan untuk perhitungan yang kecil dari *argument* (x), dan yang lainnya adalah untuk menghitung nilai x yang besar. Ekspansi deret yang pertama adalah sebagai berikut [1]

$$Ei(x)=\gamma+\ln(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n.n!} \quad (2.2)$$

dengan γ = Konstanta Euler
= 0.577215...

Deret pada persamaan (2.2) konvergen untuk setiap nilai x , meskipun demikian dia secara perlahan akan konvergen untuk nilai x yang besar. Metode alternatif untuk menghitung $Ei(x)$ untuk nilai x yang besar adalah dengan menggunakan ekspansi deret asimptotik sebagai berikut [1]

$$Ei(x) = \frac{e^x}{x} \left(\frac{0!}{x^0} + \frac{1!}{x^1} + \frac{2!}{x^2} + \dots + \frac{n!}{x^n} \right)$$

$$= \frac{e^x}{x} \sum_{m=0}^n \frac{m!}{x^m} \quad (2.3)$$

Persamaan (2.2) dapat digunakan sebagai pengganti persamaan (2.3) ketika $x < 5$ hal ini dikarenakan terdapat error pada ekspansi asimptotiknya, tetapi ketika $x \geq 5$ kedua persamaan (2.2) atau (2.3) dapat digunakan.

III. PEMBAHASAN

Persamaan empiris *BOD* orde pertama pada model *DO* dalam suatu aliran telah dikembangkan secara luas pada tahun 1925 oleh Streeter dan Phelps [7]. Kemudian dikembangkan lagi untuk reaksi *BOD* orde 3/2 dan multiorde.

Jika ditinjau dari kejadian alam sebenarnya, fenomena kejadian

disungai sangatlah rumit. Untuk itu diperlukan beberapa penyederhanaan dengan asumsi sebagai berikut

1. Penentuan persamaan *DO* digunakan persamaan *BOD*, yaitu persamaan *DO* dengan reaksi *BOD* orde pertama dan orde 3/2.
2. Kondisi aliran yang terjadi adalah mantap dan seragam sehingga pengaruh dispersi pada *BOD* dan *DO* pada sungai diabaikan.
3. Konstanta laju reaksi dan konstanta laju *reaerasi* merupakan parameter yang tetap dan tidak dipengaruhi oleh kondisi lingkungan serta parameter-parameter lain.

3.1.1 Persamaan *BOD* Orde

Pertama

Persamaan model dasar dari konsentrasi *BOD* pada sungai dijelaskan oleh Streeter dan Phelps. Model *BOD* mendeskripsikan penguraian dari organik *biodegradable* yang dinyatakan sebagai persamaan *BOD* orde pertama disajikan dalam persamaan berikut

$$\frac{dL}{dt} = -k_1 L, \quad (3.1)$$

dengan

L = konsentrasi *BOD* (g/m^3)

k_1 = konstanta laju reaksi orde pertama (hari^{-1}), dengan $k_1 > 0$

Persamaan (3.1) merupakan penguraian aerobik yang mengkonsumsi oksigen. Selain itu terdapat pula pertukaran oksigen pada atmosfer dengan sungai, hal ini berhubungan dengan konsentrasi *DO*. Persamaan diferensial yang menjelaskan konsentrasi *DO* pada sungai ke suatu reaksi *BOD* adalah sebagai berikut.

$$\frac{dC}{dt} = k_s (C_s - C) - k_1 f(t) \quad (3.2)$$

dengan

C = konsentrasi *DO* (g/m^3)

C_s = nilai saturasi untuk *DO* (g/m^3)

k_s = konstanta laju *reaerasi* (hari^{-1}), dengan $k_s > 0$

k_1 = konstanta laju reaksi orde pertama (hari^{-1}), dengan $k_1 > 0$

t = waktu (hari)

$f(t)$ = fungsi yang menyatakan konsentrasi *BOD* sebagai suatu fungsi terhadap waktu

Persamaan (3.2) mengasumsikan bahwa pertukaran oksigen

dengan atmosfer terjadi pada tingkat yang proporsional terhadap defisit oksigen, dengan defisitnya adalah konsentrasi saturasi (C_s) dikurangi dengan konsentrasi *DO*.

Kemudian persamaan (3.1) diintegrasikan untuk mencari nilai L dan diperoleh

$$L = L_0 e^{-k_1 t} \quad (3.3)$$

Pengujian *BOD* secara konvensional memberikan nilai y , jumlah konsumsi *DO* dari suatu sampel (g/m^3) merupakan fungsi terhadap waktu. Hubungannya dapat dituliskan sebagai $L = L_0 - y$. Kemudian persamaan (3.3) dikombinasikan dengan $y = L_0 - L$ sehingga menghasilkan persamaan

$$y = L_0 (1 - e^{-k_1 t})$$

Persamaan (3.2) dimodifikasi dengan menotasikan $f(t) = L$, diberikan dengan persamaan (3.3) diperoleh

$$\frac{dC}{dt} = k_s C_s - k_s C - k_1 L_0 e^{-k_1 t} \quad (3.5)$$

3.1.2 Transformasi Laplace untuk Menentukan Persamaan *DO* dengan Reaksi *BOD* Orde Pertama

Transformasi Laplace dari persamaan (3.5) adalah

$$\bar{C} = \frac{C_0}{(p + k_s)} + \frac{k_s C_s}{p(p + k_s)} - \frac{k_1 L_0}{(p + k_s)(p + k_1)} \quad (3.6)$$

dengan p adalah parameter pada transformasi Laplace dan transformasi Laplace dari $C(t)$ didefinisikan sebagai

$$\mathcal{L} C(t) = \int_0^{\infty} e^{-pt} C(t) dt = \bar{C}$$

Transformasi invers dari persamaan (3.6) dituliskan sebagai berikut:

$$\mathcal{L}^{-1}(\bar{C}) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{C_0}{(p + k_s)} + \frac{k_s C_s}{p(p + k_s)} - \frac{k_1 L_0}{(p + k_s)(p + k_1)} \right)$$

$$C(t) = C_s + e^{-k_s t} \left(C_0 - C_s - \frac{k_1 L_0}{(k_1 - k_s)} \right) + \frac{k_1 L_0}{(k_1 - k_s)} e^{-k_1 t} \quad (3.7)$$

Persamaan (3.7) merupakan persamaan DO dengan reaksi BOD orde pertama.

3.1.3 Konsentrasi DO Minimum dengan Reaksi BOD Orde Pertama

Konsentrasi DO minimum diperoleh dari penurunan persamaan (3.7) dan terjadi ketika $dC/dt = 0$. Apabila $C''(t_c) > 0$ maka $C(t_c)$ adalah konsentrasi DO minimum. Konsentrasi DO minimum terjadi pada saat waktu kritis yaitu pada saat $t=0$ atau $t=t_c$. Turunan dari persamaan (3.7) dituliskan sebagai $f(t_c)$, yaitu

$$f(t_c) = -k_s e^{-k_s t_c} \left(C_0 - C_s - \frac{k_1 L_0}{(k_1 - k_s)} \right) - \frac{k_1^2 L_0}{(k_1 - k_s)} e^{-k_1 t_c} \quad (3.8)$$

$$C''(t) = f'(t_c)$$

$$f'(t_c) = k_s^2 e^{-k_s t_c} \left(C_0 - C_s - \frac{k_1 L_0}{(k_1 - k_s)} \right) + \frac{k_1^3 L_0}{(k_1 - k_s)} e^{-k_1 t_c}$$

3.2.1 Persamaan BOD Orde 3/2

Persamaan (3.1) dapat dikembangkan ke dalam persamaan BOD orde 3/2 sebagai berikut

$$\frac{dL}{dt} = -k_{3/2} L^{3/2} \quad (3.9)$$

dengan

$$L = \text{konsentrasi } BOD \text{ (g/m}^3\text{)}$$

$k_{3/2}$ = konstanta laju reaksi orde 3/2 ((m³/g)^{1/2}/hari), $k_{3/2} > 0$

Kemudian persamaan (3.9) diintegrasikan untuk mencari nilai L diperoleh

$$L = \frac{4L_0}{\left(2 + k_{3/2} t \sqrt{L_0}\right)^2} \quad (3.10)$$

Kemudian persamaan (3.10) dikombinasikan dengan $L_0 - y = L$ menjadi

$$y = L_0 - L = L_0 - \frac{4L_0}{\left(2 + k_{3/2} t \sqrt{L_0}\right)^2}$$

$$\text{Misalkan } T = \frac{2}{k_{3/2} \sqrt{L_0}} \quad (3.11)$$

Dengan

T = suatu konstanta waktu (hari).

Sehingga

$$y = L_0 - \frac{4}{k_{3/2}^2 (T+t)^2} \quad (3.12)$$

Persamaan (3.2) dimodifikasi dengan menotasikan $f(t) = L^{3/2}$, diberikan dengan persamaan (3.3) diperoleh

$$\frac{dC}{dt} = k_s (C_s - C) - \frac{8}{k_{3/2}^2 (T+t)^3} \quad (3.13)$$

3.2.2 Transformasi Laplace untuk Menentukan Persamaan DO dengan Reaksi BOD Orde 3/2

Transformasi Laplace dari persamaan (3.13) adalah

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(\frac{dC}{dt}\right) &= \mathcal{L}(k_s C_s) - \mathcal{L}(k_s C) - \\ &\quad \mathcal{L}\left\{\frac{8}{k_{3/2}^2 (T+t)^3}\right\} \\ \overline{C} &= \frac{C_0}{p+k_s} + \frac{k_s C_s}{p(p+k_s)} \\ &\quad - \frac{8}{k_{3/2}^2 (p+k_s)} \mathcal{L}\left\{\frac{1}{(T+t)^3}\right\} \quad (3.14) \end{aligned}$$

Transformasi invers balik dari persamaan (3.14) diperoleh dari tabel transformasi Laplace dan dengan menggunakan konvolusi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}(\overline{C}) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{C_0}{p+k_s} + \frac{k_s C_s}{p(p+k_s)}\right. \\ &\quad \left. - \frac{8}{k_{3/2}^2 (p+k_s)} \mathcal{L}\left\{\frac{1}{(T+t)^3}\right\}\right) \end{aligned}$$

Sesuai Teorema 2.7

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{8}{k_{3/2}^2 (p+k_s)} \mathcal{L}\left\{\frac{1}{(T+t)^3}\right\}\right) &= \\ \frac{8 e^{-k_s t}}{k_{3/2}^2} * \frac{1}{(T+t)^3} \end{aligned}$$

diperoleh

$$C(t) = C_0 e^{-k_s t} + C_s (1 - e^{-k_s t}) + \frac{4k_s^2}{k_{3/2}^2} \left[\left(\frac{1}{k_s^2 (T+t)^2} + \frac{1}{k_s (T+t)} \right) - e^{-k_s t} \left(\frac{1}{k_s^2 T^2} + \frac{1}{k_s T} \right) - \frac{4k_s^2}{k_{3/2}^2} \right] \{ e^{-k_s (T+t)} [Ei(k_s (T+t)) - Ei(k_s T)] \} \quad (3.15)$$

Persamaan (3.15) merupakan persamaan *DO* dengan reaksi *BOD* orde 3/2.

Integral eksponensial yang terdapat pada persamaan (3.15) dapat dihitung dengan menggunakan deret ekspansinya. Deret ekspansi pertama telah dijelaskan pada persamaan (2.2). Kemudian disubstitusikan ke persamaan (3.15) menjadi :

$$C(t) = C_0 e^{-k_s t} + C_s (1 - e^{-k_s t}) + \frac{4}{k_{3/2}^2} \left(\frac{(k_{3/2} L_0 (1 + k_s t) + 2k_s \sqrt{L_0})}{(2 + k_{3/2} t \sqrt{L_0})^2} \right) -$$

$$\frac{e^{-k_s t}}{k_{3/2}} \left(k_{3/2} L_0 + 2k_s \sqrt{L_0} \right) - \frac{4k_s^2}{k_{3/2}^2}$$

$$\left\{ e^{-k_s \left(\frac{2+k_{3/2} t \sqrt{L_0}}{k_{3/2} L_0} \right)} \left[\ln \left(\frac{k_s (2 + k_{3/2} t \sqrt{L_0})}{2k_s} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(k_s (2 + k_{3/2} t \sqrt{L_0}))^n - (2k_s)^n}{(k_{3/2} L_0)^n n!} \right] \right\} \quad (3.16)$$

Persamaan (3.16) merupakan persamaan *DO* untuk reaksi *BOD* orde 3/2 yang merupakan kombinasi deret konvergen pada persamaan (2.2).

Sedangkan deret ekspansi yang kedua adalah deret divergen yang telah dijelaskan pada persamaan (2.3) dan kemudian disubstitusikan ke persamaan (3.15). Hal ini dilakukan ketika nilai $k_s(T+t)$ lebih besar dari 5. Nilai M dan N dipilih sebagai *argument* dari integral eksponensial yang dihitung dengan menggunakan fungsi *roundoff* (pembulatan ke bilangan bulat yang terdekat) [7].

Dengan

$$M = \text{round}[k_s(T+t)] \quad (3.17)$$

$$N = \text{round}[k_s T] \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned}
C(t) &= C_0 e^{-k_s t} + C_s (1 - e^{-k_s t}) + \frac{4}{k_{3/2}} \\
&\left[\frac{k_{3/2} L_0 + 2k_s \sqrt{L_0} + k_s k_{3/2} L_0 t}{(2 + k_{3/2} \sqrt{L_0} t)^2} - \right. \\
&\left. \frac{e^{-k_s t}}{4} (k_{3/2} L_0 + 2k_s \sqrt{L_0}) \right] - \frac{4k_s}{k_{3/2}} \\
&\left\{ \frac{\sqrt{L_0}}{(2 + k_{3/2} \sqrt{L_0} t)} \sum_{n=0}^N n! \left(\frac{k_{3/2} \sqrt{L_0}}{k_s (2 + k_{3/2} \sqrt{L_0} t)} \right)^n \right. \\
&\left. - \frac{e^{-k_s t} \sqrt{L_0}}{2} \sum_{n=0}^M n! \left(\frac{k_{3/2} \sqrt{L_0}}{2k_s} \right)^n \right\} \quad (3.19)
\end{aligned}$$

Persamaan (3.19) merupakan persamaan *DO* untuk reaksi *BOD* orde 3/2 yang merupakan kombinasi dengan deret divergen pada persamaan (2.3).

Konsentrasi *DO* minimum diperoleh dari penurunan persamaan (3.15) dan terjadi ketika $dC/dt = 0$. Apabila $C''(t_c) > 0$ maka $C(t_c)$ adalah konsentrasi *DO* minimum. Konsentrasi *DO* minimum terjadi pada saat waktu kritis yaitu pada saat $t=0$ atau $t=t_c$. Turunan dari persamaan (3.15) dituliskan sebagai $f(t_c)$, yaitu

$$\begin{aligned}
f(t_c) &= k_s (C_s - C_0) e^{-k_s t_c} \\
&+ \frac{4k_s^2}{k_{3/2}} \left[k_s e^{-k_s t_c} \left(\frac{1}{k_s^2 T^2} + \frac{1}{k_s T} \right) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left. - \left(\frac{2}{k_s^2 (T + t_c)^3} + \frac{1}{k_s (T + t_c)^2} \right) \right] \\
&+ \frac{4k_s^2}{k_{3/2}} \left[k_s e^{-k_s (T+t)} [Ei(k_s (T + t_c)) - \right. \\
&\left. - Ei(k_s T)] - \frac{1}{(T + t)} \right] \quad (3.20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C''(t_c) &= f'(t_c) = -k_s^2 (C_s - C_0) e^{-k_s t_c} \\
&+ \frac{4k_s^2}{k_{3/2}} \left[-k_s^2 e^{-k_s t_c} \left(\frac{1}{k_s^2 T^2} + \frac{1}{k_s T} \right) - \right. \\
&\left. \left(\frac{-6}{k_s^2 (T + t_c)^4} + \frac{-2}{k_s (T + t_c)^3} \right) \right] + \frac{4k_s^2}{k_{3/2}} \\
&\left[-k_s^2 e^{-k_s (T+t)} [Ei(k_s (T + t_c)) - Ei(k_s T)] + \right. \\
&\left. \frac{e^{k_s (T+t_c)}}{(T + t_c)} k_s e^{-k_s (T+t)} + \frac{1}{(T + t)^2} \right]
\end{aligned}$$

3.3 Studi kasus

Pada bagian ini dikaji dua studi kasus. Pada kasus 1 data yang digunakan adalah data pada sungai Babon bagian Bendung Karang Roto Semarang[10] dan pada kasus 2 data yang diproses adalah data pada sungai Passaic New Jersey, USA[7].

Pada Lampiran 1 Tabel 5.1 untuk sungai Babon bagian Bendung Karang Roto tersebut diketahui bahwa nilai konsentrasi *BOD* awal

(L_0) orde pertama adalah 18.80 g/m^3 , sedangkan konstanta laju reaksi yang dipakai untuk orde pertama (k_1) adalah 0.140/hari. Nilai saturasi DO (C_s) adalah 9.2 g/m^3 , konsentrasi DO awal (C_0) adalah 6.0 g/m^3 dan konstanta laju *reaerasi* (k_s) adalah 0.6/hari.

Dari data sungai Passaic [7] diketahui bahwa untuk konstanta laju reaksi orde 3/2 ($k_{3/2}$) adalah 0.0259 $(\text{m}^3/\text{g})^{1/2}/\text{hari}$ dan nilai konsentrasi BOD awal (L_0) reaksi BOD orde 3/2 adalah 23 g/m^3 . Nilai saturasi DO (C_s) adalah 9.2 g/m^3 , konsentrasi DO awal (C_0) adalah 6.0 g/m^3 dan konstanta laju *reaerasi* (k_s) adalah 0.6/hari.

3.3.1 Perhitungan konsentrasi BOD dan konsentrasi DO untuk reaksi BOD orde pertama dan 3/2

Perhitungan konsentrasi BOD dan konsentrasi DO untuk reaksi BOD orde pertama dilakukan dengan penghitungan manual untuk persamaan (3.7). Oleh karena perhitungan secara manual membutuhkan waktu yang sangat lama, maka dilakukan perhitungan

secara komputasi dengan menggunakan software Maple. Dalam tulisan ini digunakan Maple versi 9.5.

Dengan cara yang sama dapat dilakukan perhitungan konsentrasi DO untuk reaksi BOD 3/2 pada untuk (3.15).

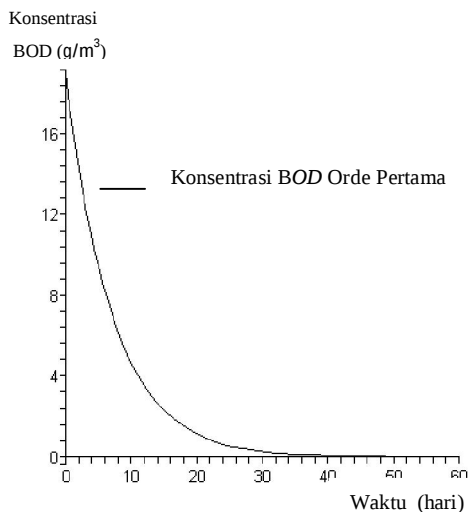
Nilai konsentrasi DO untuk reaksi BOD orde pertama pada sungai sungai Babon bagian Bendung Karang Roto dan orde 3/2 pada sungai Passaic New Jersey, USA dengan Maple disajikan dalam Tabel 3.1 sebagai berikut

Tabel 3.1 Konsentrasi BOD dan DO Orde Pertama pada sungai Babon Bagian Bendung Karang Roto Semarang

t	Perhitungan DO menggunakan reaksi BOD orde pertama	
	L (g/m^3)	C (g/m^3)
0	18.80	6.000
1	16.3439	5.6097
2	14.2087	5.6351
3	12.3524	5.857390
4	10.7387	6.1604
5	9.3358	6.4842
6	8.1161	6.7987
7	7.0558	7.0903

Tabel 3.2 Konsentrasi *BOD* dan *DO* untuk reaksi *BOD* Orde pertama dan 3/2 pada sungai Passaic (data set 2)

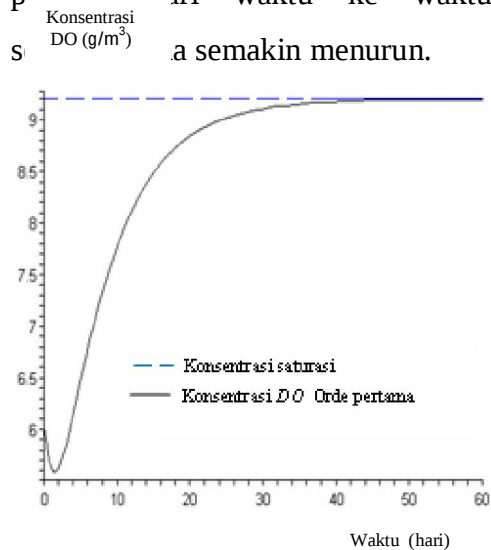
<i>t</i>	Perhitungan <i>DO</i> menggunakan reaksi <i>BOD</i> orde pertama		Perhitungan <i>DO</i> menggunakan reaksi <i>BOD</i> orde 3/2	
	<i>L</i> (g/m ³)	<i>C</i> (g/m ³)	<i>L</i> (g/m ³)	<i>C</i> (g/m ³)
0	19.500	6	23.000	6.000
1	17.054	5.617	20.388	5.497
2	14.915	5.636	18.198	5.534
3	13.045	5.847	16.342	5.804
4	11.409	6.138	14.757	6.153
5	9.978	6.451	13.391	6.508
6	8.726	6.756	12.207	6.838
7	7.632	7.041	11.173	7.131



Gambar 3.1
Grafik konsentrasi *BOD* Orde pertama sungai Babon Karang Roto Semarang

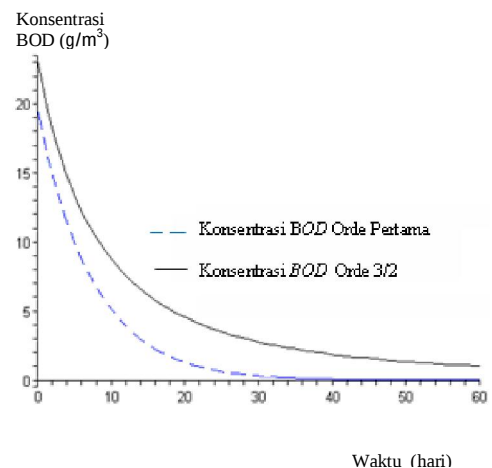
Pada Gambar 3.1 dapat dilihat bahwa konsentrasi *BOD* orde

pertama dari waktu ke waktu semakin menurun.



Gambar 3.2
Grafik konsentrasi *DO* Orde pertama sungai Babon Karang Roto Semarang

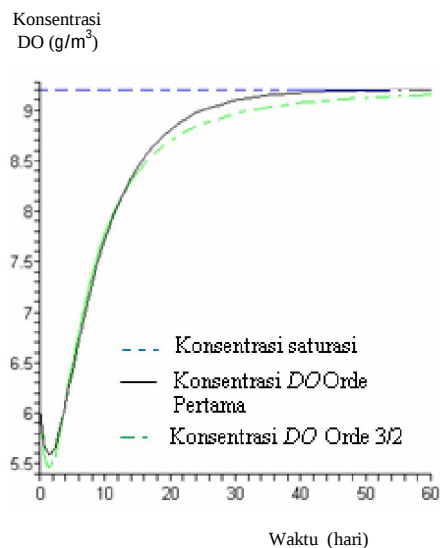
Pada Gambar 3.2 konsentrasi *DO* minimum untuk reaksi *BOD* orde pertama pada sungai Babon bagian Bendung Karang Roto terjadi ketika $t_c=1.382$ sehingga nilai konsentrasi *DO* minimumnya adalah $C(1.382)=5.5852$.



Gambar 3.3 Grafik konsentrasi *BOD* Orde pertama dan Orde 3/2

Sungai Passaic New Jersey

Pada Gambar 3.3 dapat dilihat bahwa konsentrasi *BOD* orde pertama dan orde 3/2 dari waktu ke waktu semakin lama semakin menurun.



Gambar 3.4 Grafik konsentrasi *DO* reaksi *BOD* Orde pertama dan 3/2 sungai Passaic New Jersey USA

Pada sungai Passaic New Jersey USA waktu kritis reaksi *BOD* orde pertama terjadi ketika $t_c=1.402$ sehingga nilai konsentrasi *DO* minimumnya adalah $C(1.402) = 5.591$, sedangkan waktu kritis untuk reaksi *BOD* orde 3/2 terjadi ketika $t_c= 1.364$ sehingga nilai konsentrasi *DO* minimumnya adalah $C(1.364) = 5.469$. Konsentrasi *DO* nilainya

semakin lama mendekati 9.2. Hal ini berarti bahwa nilainya akan selalu dibawah atau mendekati nilai konsentrasi saturasinya.

IV. PENUTUP

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya, maka dapat ditarik kesimpulan bahwa Transformasi Laplace digunakan untuk mempermudah penentuan persamaan *DO*. Persamaan konsentrasi *DO* untuk reaksi *BOD* orde 3/2 memuat integral eksponensial yang dapat dihitung dengan dua bentuk deret ekspansinya. Pada persamaan *DO* untuk reaksi *BOD* orde 3/2, dapat digunakan metode transformasi Laplace dan integral konvolusi.

V. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Abramowicz, M. and Stegun, I. A., 1965, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publ., New York, 1046 pp.
- [2] Asmat. 2006. *Penentuan Pengontrol yang Menstabilkan Sistem Berdasarkan Faktorisasi Koprime*. Semarang: Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Diponegoro.

- [3] http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_integrals_of_exponential_function. Diakses tanggal 15 Desember 2008
- [4] <http://www.google.co.id/url?sa=t&source=web&ct=res&cd=8&url=%3A%2F>
[The Convolution Integral](#). Diakses tanggal 17 Desember 2008.
- [5] Jolankai, Geza. 1997. *Basic River Water Quality Model*. Paris : UNESCO.
- [6] Kartono. 1994. *Penuntun Belajar Persamaan Diferensial*. Yogyakarta : Andi Offset.
- [7] Le, Trieu Van. 2005. *Water Quality Modeling for Unconventional BOD*. The Department of Civil and Environmental Engineering.
- [8] McIntyre, Neil. 2004. *Analysis of Uncertainty in River Water Quality Modelling*. London :Department of Civil and Environmental Engineering.
- [9] Monoarfa, Winarni. 2002. *Dampak Pembangunan bagi Kualitas Air di Kawasan Pesisir Pantai Losari Makassar*. Jurnal Science& technology vol.3 No. 3.
- [10] Wiwoho. 2005. *Model Identifikasi Daya Tampung Beban Cemaran Sungai Dengan QUAL2E (Studi Kasus Sungai Babon)*. Semarang: Program Magister Ilmu Lingkungan Program Pasca Sarjana Universitas Diponegoro.