PELABELAN GRACEFUL PADA GRAF DUPLIKASI TITIK DAN GRAF DUPLIKASI SISI DARI GRAF SIKEL C_n

Astri Narindra[1], Bayu Surarso[2], Widowati[3]
[1,2,3]Program Studi Matematika FSM Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Tembalang Semarang

astri.narindra@yahoo.com
bayus@undip.ac.id
wiwied_mathundip@yahoo.com

ABSTRACT. Let $G = (V, E)$ be a simple, finite and undirected graph with a vertex-set V and edge-set E. A graceful labeling of a graph G is an injective mapping f from V to $\{0, 1, 2, \dots, q\}$ such that there is an bijective mapping $f^*(e)$ from E to $\{0, 1, 2, \dots, q\}$ with $f^*(e) = |f(u) - f(v)|$. The graph which admits graceful labeling is called a *gracefull graph*. Duplication of a vertex v_k of graph G produces a new graph by adding a new vertex v'_k in such a way that $N(v'_k) = N(v_k)$. Duplication of an edge $v_i v_{i+1}$ of graph G produces a new graph by adding a new edge $v'_i v'_{i+1}$ in such a way that $N(v'_i) = N(v_i) \cup \{v'_{i+1}\} - \{v_{i+1}\}$ and $(v'_{i+1}) = N(v_{i+1}) \cup \{v'_i\} - \{v_i\}$. In this final project, we derive graceful labeling for duplication of an arbitary vertex in cycle C_n, duplication of an arbitary edge in even cycle C_n and also the *jointsum* of two copies of cycle C_n. From this final project, we know that graph with duplication of an arbitary vertex is graf graceful, then graph with duplication of an edge is graf graceful if n even and also graph *jointsum* of two copies is graph graceful.
Keywords: Graceful labeling, duplication of a vertex, *jointsum*

I. PENDAHULUAN

Pelabelan graph merupakan salah satu topik dalam teori graph. Salah satu macam pelabelan graf yang mengalami perkembangan adalah pelabelan *graceful*. Secara historis, pelabelan *graceful* diperkenalkan pertama kali oleh Rosa [7] pada tahun 1967 dengan nama β-valuation, sedangkan Golomb menyebut plabelan tersebut dengan pelabelan *graceful*.

Beberapa kajian tentang pelabelan *graceful* telah banyak dibahas salah satunya tentang *Some new graceful graphs* oleh Vaidya, S.K. and Bijukumar, L [9].Selain itu pelabelan *graceful* juga dapat dilabelkan pada graf duplikasi titik dan graf duplikasi sisi dari graf sikel C_n serta *jointsum* dua copian dari graf sikel C_n dengan menggabungkan titik copian pertama dengan titik copian kedua dengan sebuah path. Pada tulisan ini, dikaji pelabelan graceful yang dipaparkan oleh [9].

II. HASIL DAN PEMBAHASAN

Definisi 2.1. **[9]** Diberikan titik v_k dari graf G. Sebuah graf baru G_D adalah graf hasil penduplikasian yang diperoleh dengan menduplikasikan titik v_k pada graf G dengan menambahkan titik v'_k dengan $N(v'_k) = N(v_k)$.

Definisi 2.2. **[9]** Diberikan titik v_k dari graf G. Sebuah graf baru G_D adalah graf yang diperoleh dari penduplikasian dari sisi $v_i v_{i+1}$ pada graf G dengan menambahkan sisi baru $v'_i v'_{i+1}$ dengan $N(v'_i) = N(v_i) \cup \{v'_{i+1}\} - \{v_{i+1}\}$ dan $(v'_{i+1}) = N(v_{i+1}) \cup \{v'_i\} - \{v_i\}$.

Definisi 2.3. **[9]** Dengan memperhatikan dua copian dari $\boldsymbol{C_n}$, Graf *Jointsum* dari $\boldsymbol{C_n}$ adalah graf yang diperoleh dengan menghubungkan titik dari copian satu ke titik copian dua dengan menambahkan sisi baru.

Teorema 2.2.1 [9]

Graf hasil duplikasi sebarang titik dari graf sikel C_n merupakan graf graceful.

Bukti :

Diberikan $v_1, v_2, \ldots, v_n$ adalah titik-titik dari graf sikel C_n dan graf G_D adalah graf yang diperoleh dari menduplikasikan sebarang titik dari graf sikel C_n. Misalkan diduplikasikan titik v_k maka terdapat penambahan titik baru yaitu v'_k. Pembuktian teorema tersebut dibagi menjadi 7 kasus sebagai berikut :

Kasus 1: jika $n \equiv 0\ (mod 4)$; $n = 8$

$f\ (v'_k) = 0$

Untuk $\boldsymbol{1 \le k \le \frac{n}{2} - 1}$

$untuk\ 1 \le i \le k$

$$\left.\begin{aligned} f\ (v_i) &= (n+2) - \left(\left(\tfrac{n-(k-i)}{2}\right) + \left(\tfrac{i-(k-2)}{2}\right)\right), \text{ untuk } i \text{ ganjil} \\ &= (n+2) - \left((n-k+i) - \left(\tfrac{i-2}{2}\right)\right), \text{ untuk } i \text{ genap} \end{aligned}\right\} \boxed{k \text{ ganjil}}$$

$$\left.\begin{aligned} f\ (v_i) &= (n+2) - \left((n-k) + \left(\tfrac{i+1}{2}\right)\right), \text{ untuk } i \text{ ganjil} \\ &= (n+2) - \left((n-k) - \left(\tfrac{i}{2}\right)\right), \text{ untuk } i \text{ genap} \end{aligned}\right\} \boxed{k \text{ genap}}$$

$Untuk\ k+1 \le\ i\ \le\ \frac{n}{2} + (k+1)$

$f\ (v_i) = n + 2 - \left(\frac{i-(k+1)}{2}\right)$, jika *k* ganjil dan *i* genap atau

, jika *k* genap dan *i* ganjil

$= \frac{i-k}{2}$, jika *k* ganjil dan *i* ganjil atau

, jika *k* genap dan *i* genap

$Untuk\ \ k+1 \le\ i\ \le\ \frac{n}{2} + (k+1)$

$f\ (v_i) = (n+2) - \left(\frac{(i-k)}{2}\right)$, jika *k* genap dan *i* genap atau

, jika *k* ganjil dan *i* ganjil

$= \frac{i-(k+1)}{2}$, jika *k* ganjil dan *i* genap

Untuk $\boldsymbol{\frac{n}{2} \le k \le n}$

$untuk\ 1 \le i \le k-3$

$$\left.\begin{aligned} f\ (v_i) &= (n+2) - \left(\left(\tfrac{n+k+1}{2}\right) - \left(\tfrac{i-3}{2}\right)\right), \text{ untuk } i \text{ ganjil} \\ &= (n+2) - \left(\left(\tfrac{(n-k)+1}{2}\right) + \left(\tfrac{i-2}{2}\right)\right), \text{ untuk } i \text{ genap} \end{aligned}\right\} \boxed{k \text{ ganjil}}$$

$$\left.\begin{aligned} f\ (v_i) &= (n+2) - \left(\left(\tfrac{n-k}{2}\right) + \left(\tfrac{i-1}{2}\right)\right), \text{ untuk } i \text{ ganjil} \\ &= (n+2) - \left(\left(\tfrac{n+k}{2}\right) - \left(\tfrac{i-4}{2}\right)\right), \text{ untuk } i \text{ genap} \end{aligned}\right\} \boxed{k \text{ genap}}$$

$Untuk\ k-2 \le\ i\ \le\ k$

$$f\ (v_{i=k-2,k}) = (n+2) - \left(\left(\tfrac{(n-k)+i}{2}\right) + \left(\tfrac{i-(k-2)}{2}\right)\right)$$

$$f\ (v_{i=k-1}) = (n+2) - \left((n-k+i) - (i-(k-1))\right)$$

$Untuk\ k + 1 \leq i \leq n$

$f(v_i) = n + 2 - (\frac{i-(k+1)}{2})$, jika k ganjil dan i genap

, jika k genap dan i ganjil

$= \frac{i-k}{2}$, jika k ganjil dan i ganjil

, jika k genap dan i genap

Kasus 2: Jika $n \equiv 0\ (mod 4);\ n \neq 4, n \neq 8$

$f(v'_k) = 0$

Untuk $\boldsymbol{1 \leq k \leq \frac{n-2}{2}}$

untuk $1 \leq i \leq k$

$f(v_i) = \frac{n}{2} + \left(\frac{k+1}{2} - \left(\frac{i-1}{2}\right)\right)$, untuk i ganjil

$= \frac{n}{2} - \left(\frac{k-1}{2} - \left(\frac{i-2}{2}\right)\right)$, untuk i genap

$\boxed{k \text{ ganjil}}$

Untuk $k = \frac{n-2}{2}\ f(v_{i=1}) = (\frac{n}{2} + 1) + \left(\frac{k+1}{2} - \left(\frac{i-1}{2}\right)\right)$

$f(v_i) = \frac{n}{2} - \left(\frac{k}{2} - \left(\frac{i-1}{2}\right)\right)$, untuk i ganjil

$= \frac{n}{2} + \left(\frac{k}{2} - \left(\frac{i-2}{2}\right)\right)$, untuk i genap

$\boxed{k \text{ genap}}$

Untuk $k + 1 \leq i \leq \frac{n}{2} + k + 1$

$f(v_i) = n + 2 - (\frac{i-(k+1)}{2})$, jika k ganjil dan i genap atau

, jika k genap dan i ganjil

$= \frac{i-k}{2}$, jika k ganjil dan i ganjil atau

, jika k genap dan i genap atau

$f(v_i) = n + 2 - (\frac{i-k}{2})$, untuk $i = \frac{n}{2} + k + 2$

Untuk $\frac{n}{2} + k + 3 \leq i \leq n$

$f(v_i) = (n + 2) - (\frac{i+(2-k)}{2})$, jika k ganjil dan i ganjil atau

, jika k genap dan i genap

$= \frac{i-(k+1)}{2}$, jika k ganjil dan i genap atau

, jika k genap dan i ganjil

Untuk $\boldsymbol{\frac{n}{2} \leq k \leq n}$

untuk $1 \leq i \leq k - \frac{n-2}{2}$

$f(v_i) = (n + 2) - \left(\left(\frac{n+k+1}{2}\right) - \left(\frac{i-3}{2}\right)\right)$, untuk i ganjil

$= (n + 2) - \left(\left(\frac{(n-k)+1}{2}\right) + \left(\frac{i-2}{2}\right)\right)$, untuk i genap

$\boxed{k \text{ ganjil}}$

$f(v_i) = (n + 2) - \left(\left(\frac{n-k}{2}\right) + \left(\frac{i-1}{2}\right)\right)$, untuk i ganjil

$= (n + 2) - \left(\left(\frac{n+k}{2}\right) - \left(\frac{i-4}{2}\right)\right)$, untuk i genap

$\boxed{k \text{ genap}}$

Untuk $i = \left(k - \frac{n-2}{2}\right) + 1$, $f(v_i) = (n - k) + (i + 2)$

Untuk $\left(k - \frac{n-2}{2}\right) + 2 \leq i \leq k$

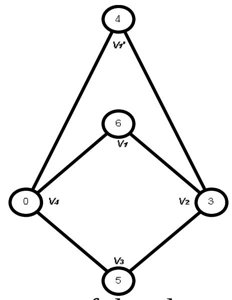
$f(v_i) = (n + 2) - \left((n - k) + (k - 2) - \left(\frac{i-(k-3)}{2}\right)\right)$, untuk i ganjil

$= (n + 2) - \left((n - k) + \left((i - 4) - \left(\frac{i-(k-2)}{2}\right)\right)\right)$, untuk i genap

Untuk $k + 1 \leq i \leq n$

$f\ (v_i)\ = (\ n + 2) - (\frac{i-(k+1)}{2})$, jika k ganjil dan i genap atau
, jika k genap dan i ganjil
$= \frac{i-k}{2}$, jika k ganjil dan i ganjil atau
, jika k genap dan i genap

Kasus 3. Jika $n\ =\ 4$, untuk pelabelan graceful pada graf C_4 .tidak mengacu pada aturan pelabelan graceful manapun dan berdiri sendiri seperti ditunjukkan pada Gambar 1.



Gambar 1. Pelabelan graceful pada graf duplikasi titik dari graf C_4

Kasus 4. Jika $n\ \equiv\ 1\ (mod 4)$
$f\ (v'_k)\ =\ 0$

$\boldsymbol{untuk\ 1 \le k \le \frac{n+1}{2}}$

$untuk\ 1 \le i \le k$

$$\left.\begin{array}{ll} f\ (v_i)\ =\ (n + 2) - \left(\left(\frac{(n-k)+1}{2}\right) + \left(\frac{i-1}{2}\right)\right) & \text{, untuk } i \text{ genap} \\ \quad\quad\ =\ (n + 2) - \left(\left(\frac{n+k}{2}\right) - \left(\frac{i-3}{2}\right)\right) & \text{, untuk } i \text{ ganjil} \end{array}\right\} \boxed{k \text{ ganjil}}$$

$$\left.\begin{array}{ll} f\ (v_i)\ =\ (n + 2) - \left(\left(\frac{(n-k)+1}{2}\right) + \left(\frac{i-1}{2}\right)\right) & \text{, untuk } i \text{ ganjil} \\ \quad\quad\ =\ (n + 2) - \left(\left(\frac{n+k+1}{2}\right) - \left(\frac{i-2}{2}\right)\right) & \text{, untuk } i \text{ genap} \end{array}\right\} \boxed{k \text{ genap}}$$

$Untuk\ k + 1 \le\ i\ \le \left(\frac{n+1}{2}\right) + (k-1)$

$f\ (v_i)\ = n + 2 - (\frac{i-(k+1)}{2})$, jika k ganjil dan i genap atau
, jika k genap dan i ganjil
$= \frac{i-k}{2}$, jika k ganjil dan i ganjil atau
, jika k genap dan i genap

$Untuk\ \left(\frac{n+3}{2}\right) + k - 1 \le\ i\ \le\ n$

$f\ (v_i)\ = (\ n + 2) - (\frac{i-k)}{2})$, jika k ganjil dan i ganjil atau
, jika k genap dan i genap
$= \frac{i-(k-1)}{2}$, jika k ganjil dan i genap atau
, jika k genap dan i ganjil

$\boldsymbol{untuk\ \frac{n+3}{2} \le k \le n}$

$untuk\ 1 \le i \le k - \frac{n+1}{2}$

$$\left.\begin{array}{ll} f\ (v_i)\ =\ (n + 2) - \left(\left(\frac{(n-k+i)-1}{2}\right)\right) & \text{, untuk } i \text{ ganjil} \\ \quad\quad\ = (n + 2) - \left(\left(\frac{(n+k)-(i-2)}{2}\right)\right) & \text{, untuk } i \text{ genap} \end{array}\right\} \boxed{k \text{ ganjil}}$$

$$\left.\begin{array}{ll} f\ (v_i)\ =\ (n + 2) - \left(\left(\frac{n+k+1}{2}\right) - \left(\frac{i-3}{2}\right)\right) & \text{, untuk } i \text{ ganjil} \end{array}\right\} \boxed{k \text{ genap}}$$

$= (n + 2) - \left(\left(\frac{n-k+1}{2}\right) + \left(\frac{i-2}{2}\right)\right)$, untuk *i* genap

$Untuk\ \left(k + 1 - \frac{n+1}{2}\right) \leq\ i\ \leq\ k$

$$\left.\begin{array}{ll} f\ (v_i) = (n + 2) - \left(\left(\frac{n+k+1}{2}\right) - \left(\frac{i-2}{2}\right)\right), & \text{untuk } i \text{ genap} \\ \quad\quad = (n + 2) - \left(\left(\frac{n-k+1}{2}\right) + \left(\frac{i-1}{2}\right)\right), & \text{untuk } i \text{ ganjil} \end{array}\right\} \boxed{k \text{ genap}}$$

$$\left.\begin{array}{ll} f\ (v_i) = (n + 2) - \left(\left(\frac{n-k}{2}\right) + \left(\frac{i}{2}\right)\right), & \text{untuk } i \text{ genap} \\ \quad\quad = (n + 2) - \left(\left(\frac{n+k}{2}\right) - \left(\frac{i-3}{2}\right)\right), & \text{untuk } i \text{ ganjil} \end{array}\right\} \boxed{k \text{ ganjil}}$$

$Untuk\ \ k + 1\ \leq\ i\ \leq\ n$

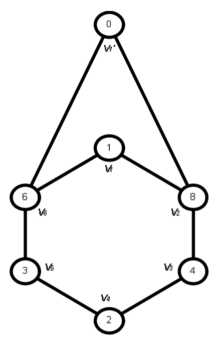
$f\ (v_i)\ = (\ n + 2) - (\ \frac{i-(k+1)}{2}\ )$, jika *k* ganjil dan *i* genap atau

, jika *k* genap dan *i* ganjil

$= \frac{i-k}{2}$, jika *k* ganjil dan *i* ganjil atau

, jika *k* genap dan *i* genap

Kasus 5. Jika $n\ \equiv\ 2\ (mod\ 4), n\ =\ 6$**,** graf berkorespondensi dan merupakan pelabelan graceful seperti yang ditunjukkan pada gambar berikut.



Gambar 2. Pelabelan Graceful Graf C_6

Kasus 6. Jika $n\ \equiv\ 2\ (mod\ 4)\ ;\ n\ \ \neq\ 6$

$f\ (v'_k)\ =\ 0$

Untuk $\mathbf{1 \leq k \leq \frac{n-2}{2}}$

untuk $1 \leq i \leq k$

$$\left.\begin{array}{ll} f\ (v_i)\ =\ (n + 2) - \left(\left(\frac{(n+k)-1}{2}\right) - \left(\frac{i-2}{2}\right)\right), & \text{untuk } i \text{ genap} \\ \quad\quad =\ (n + 2) - \left(\left(\frac{n-k-1}{2}\right) + \left(\frac{i-1}{2}\right)\right), & \text{untuk } i \text{ ganjil} \end{array}\right\} \boxed{k \text{ ganjil}}$$

$$\left.\begin{array}{ll} f\ (v_i)\ =\ (n + 2) - \left(\left(\frac{(n+k)}{2}\right) - \left(\frac{i-1}{2}\right)\right), & \text{untuk } i \text{ ganjil} \\ \quad\quad =\ (n + 2) - \left(\left(\frac{n-k}{2}\right) + \left(\frac{i-2}{2}\right)\right), & \text{untuk } i \text{ genap} \end{array}\right\} \boxed{k \text{ genap}}$$

Untuk $k + 1 \leq\ i\ \leq \left(\frac{n+4}{2}\right) + (k - 1)$

$f\ (v_i)\ = n + 2 - (\ \frac{i-(k+1)}{2}\ )$, jika *k* ganjil dan *i* genap atau

, jika *k* genap dan *i* ganjil

$= \frac{i-k}{2}$, jika *k* ganjil dan *i* ganjil atau

, jika *k* genap dan *i* genap

Untuk $i = \frac{n+4}{2} + k, f\ (v_i)\ \ =\ \frac{i-k+1}{2}$

Untuk $\left(\frac{n+4}{2}\right) + k + 1 \le i \le n$

$f(v_i) = (n+2) - \left(\frac{(i-k-2)}{2}\right)$, jika k ganjil dan i ganjil atau

, jika k genap dan i genap

$= \frac{i+(k-1)}{2}$, jika k ganjil dan i genap atau

, jika k genap dan i ganjil

Untuk $\frac{n}{2} \le k \le n$

untuk $1 \le i \le k - \frac{n-2}{2}$

$$\left.\begin{array}{ll} f(v_i) = (n+2) - \left(\left(\frac{(n+k+3)}{2} - \frac{(i-1)}{2}\right)\right), & \text{untuk } i \text{ ganjil} \\ \quad = (n+2) - \left(\left(\frac{(n-k)+1}{2} + \frac{(i-2)}{2}\right)\right), & \text{untuk } i \text{ genap} \end{array}\right\} \boxed{k \text{ ganjil}}$$

$$\left.\begin{array}{ll} f(v_i) = (n+2) - \left(\left(\frac{n-k}{2}\right) + \left(\frac{i-1}{2}\right)\right), & \text{untuk } i \text{ ganjil} \\ \quad = (n+2) - \left(\left(\frac{n+k}{2} - \left(\frac{i-4}{2}\right)\right)\right), & \text{untuk } i \text{ genap} \end{array}\right\} \boxed{k \text{ genap}}$$

Untuk $i = k - \frac{n-4}{2}, f(v_i) = \frac{(n-k)+i+1}{2}$

Untuk $\left(k - \frac{n-2}{2}\right) + 2 \le i \le k$

$f(v_i) = (n+2) - \left(\left(\frac{(n-k)+(i-2)}{2}\right)\right)$, untuk i genap

$= (n+2) - \left(\left(\frac{(n+k)-(i-1)}{2}\right)\right)$, untuk i ganjil

Untuk $k + 1 \le i \le n$

$f(v_i) = (n+2) - \left(\frac{i-(k+1)}{2}\right)$, jika k ganjil dan i genap atau

, jika k genap dan i ganjil

$= \frac{i-k}{2}$, jika k ganjil dan i ganjil atau

, jika k genap dan i genap

Kasus 7. Jika $n \equiv 3 \ (mod\ 4)$

$f(v'_k) = 0$

Untuk $1 \le k \le \frac{n+1}{2}$

untuk $1 \le i \le k$

$$\left.\begin{array}{ll} f(v_i) = (n+2) - \left(\left(\frac{n-k}{2}\right) + \left(\frac{i}{2}\right)\right), & \text{untuk } i \text{ genap} \\ \quad = (n+2) - \left(\left(\frac{n+k}{2}\right) - \left(\frac{i-3}{2}\right)\right), & \text{untuk } i \text{ ganjil} \end{array}\right\} \boxed{k \text{ ganjil}}$$

$$\left.\begin{array}{ll} f(v_i) = (n+2) - \left(\left(\frac{(n-k+1)}{2}\right) + \left(\frac{i-1}{2}\right)\right), & \text{untuk } i \text{ ganjil} \\ \quad = (n+2) - \left(\left(\frac{n+k+1}{2}\right) - \left(\frac{i-2}{2}\right)\right), & \text{untuk } i \text{ genap} \end{array}\right\} \boxed{k \text{ genap}}$$

Untuk $k + 1 \le i \le \left(\frac{n+1}{2}\right) + (k-1)$

$f(v_i) = n + 2 - \left(\frac{i-(k+1)}{2}\right)$, jika k ganjil dan i genap atau

, jika k genap dan i ganjil

$= \frac{i-k}{2}$, jika k ganjil dan i ganjil atau

, jika k genap dan i genap

Untuk $\left(\frac{n+1}{2}\right) + k \le i \le n$

$f(v_i) = (n+2) - \left(\frac{(i-k)}{2}\right)$, jika k ganjil dan i ganjil atau

, jika k genap dan i genap

$= \frac{i-k+1}{2}$, jika k ganjil dan i genap atau

, jika k genap dan i ganjil

Untuk $\frac{n+3}{2} \leq k \leq n$

untuk $1 \leq i \leq k - \frac{n+1}{2}$

$$\left.\begin{aligned} f(v_i) &= (n+2) - \left(\left(\frac{(n-k)}{2} + \frac{(i-1)}{2}\right)\right), \text{ untuk } i \text{ ganjil} \\ &= (n+2) - \left(\left(\frac{n+k}{2} - \frac{(i-4)}{2}\right)\right), \text{ untuk } i \text{ genap} \end{aligned}\right\} \boxed{k \text{ ganjil}}$$

$$\left.\begin{aligned} f(v_i) &= (n+2) - \left(\left(\frac{n+k+1}{2}\right) - \left(\frac{i-1}{2}\right)\right), \text{ untuk } i \text{ ganjil} \\ &= (n+2) - \left(\left(\frac{n-k+1}{2} + \left(\frac{i-2}{2}\right)\right)\right), \text{ untuk } i \text{ genap} \end{aligned}\right\} \boxed{k \text{ genap}}$$

Untuk $\left(k - \frac{n+1}{2}\right) + 1 \leq i \leq k$

$$\begin{aligned} f(v_i) &= (n+2) - \left(\left(\frac{n-k+i}{2}\right)\right) \\ &= (n+2) - \left(\left(\frac{(n+k)-(i+3)}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

Untuk $k + 1 \leq i \leq n$

$f(v_i) = (n+2) - \left(\frac{i-(k+1)}{2}\right)$, jika k ganjil dan i genap atau

, jika k dan i ganjil

$= \frac{i-k}{2}$, jika k ganjil dan i ganjil atau

, jika k genap dan i genap

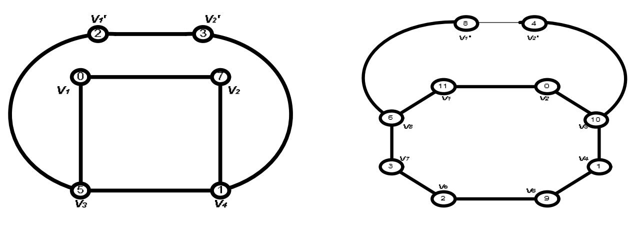
Teorema 2.2.2

Duplikasi dari sebarang sisi pada sikel C_n dengan n genap merupakan pelabelan graceful.

Bukti [9]:

Diberikan $v_1, v_2, \ldots, v_n$ adalah titik-titik dari graf sikel C_n dimana n adalah genap dan graf G adalah graf yang diperoleh dari duplikasi sebarang sisi dari C_n. Tanpa mengurangi keumuman diasumsikan bahwa $e' = v'_1 v'_2$ merupakan penambahan sisi baru dari hasil duplikat sisi $e = v_1 v_2$ pada C_n. Pembuktian teorema tersebut dibagi menjadi 3 kasus sebagai berikut :

Kasus 1**.** Jika $n = 4 \, dan \, n = 8$. Pelabelan untuk korespondesni graf pada C_4 dan C_8 menjadi terpisah dan untuk pelabelan graceful C_4 dan C_8 ditunjukkan pada Gambar 3.



Gambar 3. Pelabelan Graceful Graf C_4 dan C_8

Kasus 2. Jika $n \equiv 0 \ (mod 4)$; $n \neq 4, n \neq 8$

Pelabelan titik $f : V \rightarrow \{0, 1, \ldots, n+3\}$ untuk graf sikel C_n didefinisikan sebagai berikut :

$$f(v'_1) = \frac{n}{2} + 4$$

$$f(v'_2) = \frac{n}{2}$$

Untuk $1 \leq i \leq \frac{n}{2} + 2$

$f(v_i) = (n+3) - (\frac{i-1}{2})$, untuk *i* ganjil

$= \frac{i-2}{2}$, untuk *i* genap

$f(v_i) = \frac{i-1}{2}$, untuk $i = \frac{n}{2} + 3$

Untuk $\frac{n}{2} + 4 \leq i \leq n-1$

$f(v_i) = (n+3) - \frac{i}{2}$, untuk *i* genap

$= \frac{i-1}{2}$, untuk *i* ganjil

$f(v_n) = \frac{n}{2} + 2$

Kasus 3. Jika $n \equiv 2 \ (mod 4)$

Pelabelan titik $f : V \rightarrow \{0, 1, \dots, n+3\}$ untuk graf sikel C_n didefinisikan sebagai berikut :

$f(v'_1) = \frac{n}{2} - 1$

$f(v'_2) = \frac{n}{2}$

Untuk $1 \leq i \leq \frac{n}{2} + 2$

$f(v_i) = (n+3) - (\frac{i-1}{2})$, untuk *i* ganjil

$= \frac{i-2}{2}$, untuk *i* genap

Untuk $\frac{n}{2} + 3 \leq i \leq n$

$f(v_i) = (n+3) - \frac{i+2}{2}$, untuk *i* genap

$= \frac{i-3}{2}$, untuk *i* ganjil

Teorema 2.2.3

Jointsum dari dua copian pada sikel C_n merupakan pelabelan graceful.

Bukti [9]:

Dinotasikan titik salinan pertama dari C_n dengan $v_1, v_2, \dots, v_n$ dan titik salinan dua dengan $v_{n+1}, v_{n+2}, v_{n+3} \dots, v_{2n}$. Gabungan dua salinan dari C_n dengan sisi baru akan menjadi graf yang resultan. Tanpa mengurangi keumuman, diasumsikan sisi baru dengan $v_n v_{n+1}$, jadi $v_1, v_2, \dots, v_n$; $v_{n+1}, v_{n+2}, v_{n+3} \dots, v_{2n}$ akan membentuk spanning path di G.

Pembuktian teorema tersebut dibagi menjadi 4 kasus sebagai berikut :

Kasus 1. Jika $n \equiv 0 \ (mod 4)$

Pelabelan titik $f : V \rightarrow \{0, 1, \dots, 2n+1\}$ untuk graf sikel C_n didefinisikan sebagai berikut :

$Untuk\ i \leq \frac{n}{2} - 1$

$f(v_i) = \frac{n+i+1}{2}$, untuk *i* ganjil

$= \frac{3}{2}n - (\frac{i}{2} - 1)$, untuk *i* genap

$Untuk\ \frac{n}{2} \leq i \leq n-1$

$f(v_i) = \frac{3}{2}n - \frac{i}{2}$, untuk *i* genap

$= \frac{n+i+1}{2}$, untuk *i* ganjil

$Untuk\ i = n$; $f(v_i) = 0$

$Untuk\ n + 1 \leq i \leq \frac{3}{2}n$

$f(v_i) = (2n + 1) - (\frac{i-n-1}{2})$, untuk *i* ganjil

$= \frac{i-n}{2}$, untuk *i* genap

$Untuk\ \frac{3n+2}{2} \leq i \leq 2n$

$f\,(v_i) = (2n + 1) - (\frac{i-n+1}{2})$, untuk *i* ganjil

$= \frac{i-n}{2}$, untuk *i* genap

Kasus 2. Jika $n \equiv 1\ (mod\ 4)$

Pelabelan titik $f : V \rightarrow \{0, 1, \ldots, 2n+1\}$ untuk graf sikel C_n didefinisikan sebagai berikut :

$f\,(v_1) = 0$

$Untuk\ 2 \leq i \leq \frac{n-1}{2}$

$f\,(v_i) = n + \frac{i+1}{2}$, untuk *i* ganjil

$= (n + 1) - \frac{i}{2}$, untuk *i* genap

Untuk $\frac{n+1}{2} \leq i \leq n-1$

$f\,(v_i) = (n+1) + \frac{i+1}{2}$, untuk *i* ganjil

$= n + \frac{i+2}{2}$, untuk *i* genap

Untuk $n \leq i \leq 2n$

$f\,(v_i) = (2n+1) - \frac{i-n}{2}$, untuk *i* ganjil

$= (\frac{i+1-n}{2})$, untuk *i* genap

Kasus 3. Jika $n \equiv 2\ (mod 4)$

Pelabelan titik $f : V \rightarrow \{0, 1, \ldots, 2n+1\}$ untuk graf sikel C_n didefinisikan sebagai berikut :

$Untuk\ 1 \leq i \leq n-2$

$f\,(v_i) = \frac{i}{2}$, untuk *i* genap

$= (2n+1) - \frac{i-1}{2}$, untuk *i* ganjil

$f\,(v_{n-1}) = f\,(v_{n-3}) - f\,(v_{n-2}) - 1$

$f\,(v_n) = 0$

Untuk $n + 1 \leq i \leq \frac{3n}{2} - 1$

$f\,(v_i) = \frac{i-1}{2}$, untuk *i* ganjil

$= (2n+1) - \frac{i-4}{2}$, untuk *i* genap

$f\,(v_i) = \frac{i+1}{2}$, untuk $i = \frac{3n}{2}$

Untuk $\frac{3n}{2} + 1 \leq i \leq \frac{3n}{2} + 2$

$f\,(v_i) = \frac{i+2}{2}$, untuk *i* genap

$= (2n+1) - \frac{i-5}{2}$, untuk *i* ganjil

Untuk $\frac{3n}{2} + 3 \leq i \leq 2n$

$f\,(v_i) = (2n+1) - \frac{i-5}{2}$, untuk *i* ganjil

$= \frac{i+4}{2}$, untuk *i* genap

Kasus 4. Jika $n \equiv 3\ (mod\ 4)$

Pelabelan titik $f : V \rightarrow \{0, 1, \ldots, 2n+1\}$ untuk graf sikel C_n didefinisikan sebagai berikut :

Untuk $1 \leq i \leq \frac{n-1}{2}$

$f\ (v_i)\ =\ \frac{3(n+1)}{2} - \frac{i+1}{2}$, untuk *i* ganjil

$=\ \frac{n+i+1}{2}$, untuk *i* genap

$Untuk\ (n+1)/2\ \leq\ i\ \leq\ n-2$

$f\ (v_i)\ =\ \frac{3(n+1)}{2} - \frac{i+2}{2}$, untuk *i* genap

$=\ \frac{n+i+2}{2}$, untuk *i* ganjil

$f\ (v_{n-1})\ =\ 0$

$Untuk\, n\ \leq\ i\ \leq\ 2n$

$f\ (vi\ \ =\ (2n+\ 1) - \frac{i-n}{2}$, untuk *i* ganjil

$=\ \frac{i+1-n}{2}$, untuk *i* genap

III. KESIMPULAN

Dari pembahasan yang telah diuraikan pada bab sebelumnya dapat disimpulkan bahwa graf hasil duplikasi sebarang titik dari graf sikel C_n merupakan graf graceful, graf hasil duplikasi sebarang sisi pada graf sikel C_n dengan n genap merupakan graf graceful, graf hasil dua copian dari graf sikel C_n yang disebut sebagai $Jointsum$ merupakan graf graceful.

.

IV. DAFTAR PUSTAKA

[1] Acharya B. D., *Construction of certain infinite families of graceful graph from a given graceful graph*, Def. Sci.J., 32(3)(1982), 231-236.

[2] Barrientos, Christian., *The Gracefulness of union of cycles and complete bipartite graphs*, J. Combin. Math. Combin. Compt. 52(2005), 69-78.

[3] Eshghi, Kourosh. *Introduction to Graceful Graphs*. Sharif University of Technology. 2002

[4] Gallian J. A., *A dynamic survey of graph labeling*, The Electronics Journal of Combinatorics, (2010), 32-61.

[5] Harary F., *Graph theory*, Addison Wesley, Reading, Massachusetts, 1994.

[6] Lipshutz, Seymour dan Marc Lars Lipson., *Matematika Diskrit*, Mc Graw Hill Bok Co., Salemba Teknika.

[7] Rosa. A, *On certain valuations of the vertices of a graph,Theory of graphs,*International Symposium, Rome, July (1966), Gordon and Breach, New York and Dunod Paris(1967), 349-355.

[8] Sekar C., *Studies in Graph Theory*, Ph.D Thesis, Madurai Kamaraj University, 2002.

[9] Vaidya, S. K, Bijukumar, L, *Some new graceful graphs*, Int. J. of mathematics and soft comp.,1(1)(2011) 37-45.