TM-ALJABAR DAN ASPEK-ASPEK TERKAIT

Neni Oktaviani[1], Suryoto[2], Solichin Zaki[3]
[1,2,3]Program Studi Matematika FSM Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Tembalang Semarang

neni_oktaviani@yahoo.co.id
suryotomath@gmail.com

ABSTRACT. Theory of *TM*-algebra is a generalization of *BCK*-algebra and have some relation with other algebra structures such *BCH* -algebra, *BCI* -algebra and *Q* -algebra. G -part of *TM* -algebra and a *p*-semisimple *TM*-algebra are a class of *TM* -algebra who have special conditions. As well as in the other algebra structure, *TM* -algebra also has the concept of *TM*-subalgebra, *TM*-ideal and *TM*-algebra homomorphism.
Keywords : *BCH*-algebra, *BCI*-algebra, *BCK*-algebra, Q-algebra and *TM* -algebra.

I. PENDAHULUAN

Suatu struktur aljabar merupakan himpunan tidak kosong dengan satu atau lebih operasi biner dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Selama ini mungkin hanya diketahui grup dan ring saja yang merupakan salah satu contoh dari struktur aljabar, ternyata masih banyak sekali struktur aljabar baru salah satunya yaitu *TM*-aljabar. *TM*-aljabar merupakan generalisasi dari *BCK*-aljabar. *BCK*-aljabar pertama kali diperkenalkan ke dalam matematika oleh Zahra M.Samaei, Mohammad Ali N. Azadani dan Leila N. Ranjbar pada tahun 2011. *TM*-aljabar pertama kali diperkenalkan ke dalam matematika oleh Megalai, K and Dr.A.Tamilarasi pada tahun 2011 [6].

II. HASIL DAN PEMBAHASAN

Definisi 2.1[6] *Misalkan* X *himpunan tidak kosong dengan operasi biner* "$*$" *dan 0 sebagai elemen khusus. Triple* $(X,*,0)$ *disebut TM-aljabar jika untuk setiap* $x, y, z \in X$ *memenuhi aksioma-aksioma berikut*

(TM1) $x * 0 = x$

(TM2) $(x * y) * (x * z) = z * y.$

Contoh :

Diberikan $X = \{0,1,2,3\}$ dengan 0 sebagai elemen khusus dan dilengkapi dengan operasi biner " $*$ " sebagaimana diberikan oleh Tabel *Cayley* berikut ini.

$*$	0	1	2	3
0	0	3	2	1
1	1	0	3	2
2	2	1	0	3
3	3	2	1	0

Dari tabel di atas$(X,*,0)$merupakan *TM*-aljabar.

Teorema2.2[6] *Jika* $(X,*,0)$ *adalah BCK-aljabar, maka* $(X,*,0)$ *juga merupakan TM-aljabar.*

Bukti :

Diketahui $(X,*,0)$ suatu *BCK*-aljabar. Akan dibuktikan bahwa aksioma (*TM*1) dan (*TM*2) yang dimiliki oleh *TM*-aljabar juga berlaku pada *BCK*-aljabar.

Diambil sebarang $x, y, z \in X$, maka :

(TM1) $x * 0 = x$

Aksioma (*TM*1) terpenuhi.

(TM2) $(x * y) * (x * z) = z * y$

Aksioma (*TM*2) terpenuhi

Kedua aksioma *TM*-aljabar telah terpenuhi, maka benar bahwa setiap *BCK*-aljabar adalah *TM*-aljabar.

Proposisi 2.3[6] *Misalkan* $(X,*,0)$ *suatu TM-aljabar. Untuk setiap* $x, y \in X$ *berlaku :*

(i) $x * x = 0$

(ii) $(x * y) * x = 0 * y$

(iii) $x * (x * y) = y$.

Bukti :

Misalkan $(X, *, 0)$ adalah suatu TM-aljabar.

(i) Akan dibuktikan $x * x = 0$. Diambil sebarang $x \in X$ sedemikian sehingga :

$$\begin{aligned} x * x &= (x * 0) * (x * 0) && \text{dengan Aksioma } (TM1) \\ &= 0 * 0 && \text{dengan Aksioma } (TM2) \\ &= 0 && \text{dengan Aksioma } (TM1) \end{aligned}$$

(ii) Akan dibuktikan $(x * y) * x = 0 * y$. Diambil sebarang $x, y \in X$, sedemikian sehingga :

$$\begin{aligned} (x * y) * x &= (x * y) * (x * 0) && \text{dengan Aksioma } (TM1) \\ &= 0 * y && \text{dengan Aksioma (TM2)} \end{aligned}$$

(iii) Akan dibuktikan $x * (x * y) = y$. Diambil sebarang $x, y \in X$, sedemikian sehingga :

$$\begin{aligned} x * (x * y) &= (x * 0) * (x * y) && \text{dengan Aksioma } (TM1) \\ &= y * 0 && \text{dengan Aksioma } (TM2) \\ &= y && \text{dengan Aksioma } (TM1). \end{aligned}$$

Proposisi 2.4[6] *Jika $(X, *, 0)$ adalah suatu TM-aljabar, maka untuk setiap $x, y, z \in X$ berlaku $(x * y) * z = (x * z) * y$.*

Bukti :

Diketahui $(X, *, 0)$ adalah TM-aljabar.

Akan dibuktikan bahwa $(x * y) * z = (x * z) * y, \forall\, x, y, z \in X$. Diambil sebarang $x, y, z \in X$ maka :

$$\begin{aligned} (x * y) * z &= (x * y) * [x * (x * z)] \\ &= (x * z) * y \end{aligned}$$

Definisi 2.5[6] *Misalkan $(X, *, 0)$ adalah TM-aljabar dan S merupakan himpunan bagian tidak kosong dari X, S dikatakan TM-subaljabar dari X jika untuk setiap $x, y \in S$ berlaku $x * y \in S$.*

Definisi2.6[6] *Misalkan* $(X,*,0)$ *adalah TM-aljabar.* G *-bagian dari* X *didefinisikan oleh* $G(X) = \{x \in X \mid 0 * x = x\}$.

Teorema2.7 *Jika* $(X,*,0)$ *TM-aljabar dan* $G(X)$ *adalah* G *-bagian dari TM-aljabar,maka* $G(X)$ *merupakan TM-subaljabar.*

Bukti :

Diketahui $(X,*,0)$ adalah *TM*-aljabar dan Kemudian akan dibuktikan bahwa $G(X)$ merupakan *TM*-subaljabar.

Himpunan $G(X)$ dikatakan *TM*-subaljabar jika untuk setiap $x, y \in G(X)$ maka berlaku $x * y \in G(X)$ atau dengan kata lain akan dibuktikan bahwa $0 * (x * y) = x * y$. Diambil sebarang $x \in G(X)$ dan $y \in G(X)$, sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} 0 * (x * y) &= (0 * x) * (0 * y) \\ &= x * y \end{aligned}$$

Dengan demikian benar bahwa $G(X)$ merupakan *TM*-subaljabar.

Definisi 2.8 [6] *Misalkan* $(X,*,0)$ *adalah suatu TM-aljabar,* I *himpunan bagian tak kosong dari* X*. Himpunan* I *disebut ideal dari* X *jika memenuhi :*

i) $0 \in I$,

ii) jika $x * y \in I$ *dan* $y \in I$ *maka* $x \in I$*, untuk setiap* $x, y \in X$.

Teorema2.9 *Jika* $(X,*,0)$ *TM-aljabar dan* I *adalah ideal dari* X *, maka* I *merupakan TM-subaljabar.*

Bukti :

Diketahui $(X,*,0)$ adalah *TM*-aljabar dan I adalah ideal dari X.

Himpunan I adalah ideal dari X maka :

1. $0 \in I$.
2. Jika $x * y \in I$ dan $y \in I$ maka $x \in I$.

Kemudian akan dibuktikan bahwa I merupakan *TM*-subaljabar.

Berdasarkan Definisi 3.16 (ii) dapat disimpulkan bahwa untuk setiap $x, y \in I$ berlaku $x * y \in I$. Dengan begitu himpunan I merupakan *TM*-subaljabar.

Definisi 2.10 [6] *Misalkan* $(X,*,0)$ *adalah TM-aljabar, maka himpunan bagian dari* X *yang didefinisikan oleh* $B(X) = \{x \in X \mid 0 \leq x\}$ *disebut p-radikal dari* X. *Jika* $B(X) = \{0\}$, *maka* X *adalah TM-aljabar p-semisederhana.*

Proposisi 2.11[6] *Misalkan* $(X,*,0)$ *adalah suatu TM-aljabar. Himpunan* $B(X)$ *adalah ideal dari* X.

Bukti :

Diketahui $(X,*,0)$ adalah *TM*-aljabar. Kemudian akan dibuktikan bahwa $B(X)$ adalah ideal dari X.

$B(X)$ dapat dikatakan ideal dari X bila memenuhi Definisi ideal.

1. $0 \in B(X)$.

Menurut Definisi 3.19, didefinisikan $B(X) = \{x \in X \mid 0 \leq x\}$ sehingga jika diambil $0 \in B(X)$ maka akan selalu memenuhi $0 * 0 = 0$ atau dengan kata lain $0 \leq 0$. Dengan begitu benar bahwa $0 \in B(X)$.

2. Jika $x * y \in B(X)$ dan $y \in B(X)$ maka $x \in B(X)$.

Karena $x * y \in B(X)$ dan $y \in B(X)$, maka $0 * (x * y) = 0$ dan $0 * y = 0$. Selanjutnya,

$$
\begin{aligned}
0 * (x * y) = 0 &\Leftrightarrow (0 * x) * (0 * y) = 0 \\
&\Leftrightarrow (0 * x) * 0 = 0 \\
&\Leftrightarrow (0 * 0) * x = 0 \\
&\Leftrightarrow 0 * x = 0
\end{aligned}
$$

Karena $0 * x = 0$, sehingga benar bahwa jika $x * y \in B(X)$ dan $y \in B(X)$ maka $x \in B(X)$.

Proposisi 2.12 *Misalkan* $(X,*,0)$ *TM-aljabar.* $G(X)$ *adalah* G*-bagian dari TM-aljabar dan* $B(X)$ *merupakan TM-aljabar p-semisederhana, maka berlaku kondisi berikut,* $G(X) \cap B(X) = \{0\}$.

Bukti :

Diketahui $(X,*,0)$ *TM*-aljabar dan $G(X) = \{x \in X \mid 0 * x = x\}$, $B(X) = \{0\}$.

Akan ditunjukkan berlakunya kondisi $G(X) \cap B(X) = \{0\}$.

Berdasarkan Proposisi, kita tahu bahwa $0 \in G(X)$ dan menurut yang diketahui $B(X) = \{0\}$. Dengan demikian kondisi $G(X) \cap B(X) = \{0\}$ terpenuhi.

Teorema 2.13 *Misalkan* $(X, *, 0)$ *adalah suatu TM-aljabar. Himpunan* $B(X)$ *merupakan TM-subaljabar.*

Bukti :

Diketahui $(X, *, 0)$ adalah *TM*-aljabar. Kemudian akan dibuktikan bahwa $B(X)$ merupakan *TM*-subaljabar.

Untuk membuktikan bahwa $B(X)$ merupakan *TM*-subaljabar maka untuk setiap $x, y \in B(X)$ berlaku $x * y \in B(X)$ atau dengan kata lain akan dibuktikan bahwa $0 * (x * y) = 0$. Dengan menggunakan Proposisi 3.5 (v) pada *TM*-aljabar maka benar bahwa $B(X)$ merupakan *TM*-subaljabar.

Definisi 2.14[6] *Misalkan* $(X, *_1, 0_X)$ *dan* $(Y, *_2, 0_Y)$ *adalah TM-aljabar. Suatu pemetaan* $f: X \to Y$ *disebut homomorfisma jika :*

$$f(x *_1 y) = f(x) *_2 f(y), \forall x, y \in X.$$

Definisi 2.15[6] *Misalkan* $f: X \to Y$ *adalah suatu homomorfisma dari TM-aljabar, maka dapat didefinisikan* $image$ *dari* f *yaitu* $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ *dan peta balik* $f^{-1}(Y) = \{x \in X \mid f(x) = y, \forall y \in Y\}$.

Proposisi 2.16[6] *Misalkan* $f: X \to Y$ *adalah suatu homomorfisma dari TM-aljabar, maka berlaku :*

i) $f(0_X) = 0_Y$

ii) Jika $x *_1 y = 0_X$, $\forall x, y \in X$ *maka* $f(x) *_2 f(y) = 0_Y$.

Bukti :

i) Misalkan $f : X \to Y$ adalah suatu homomorfisma *TM*-aljabar. Akan dibuktikan bahwa $f(0_X) = 0_Y$, maka :

$f(0_X) = f(0_X *_1 0_X)$	dengan Proposisi 3.2 (i)
$\quad = f(0_X) *_2 f(0_X)$	dengan Definisi 3.24

$= 0_Y$ dengan Proposisi 3.2 (i)

ii) Misalkan $f : X \to Y$ adalah suatu homomorfisma *TM*-aljabar dan berlaku $x *_1 y = 0_X,\ \forall x, y \in X$. Diambil sebarang $x, y \in X$ maka :

$f(x) *_2 f(y) = f(x *_1 y)$ dengan Definisi 3.24

$= f(0_X)$ yang diketahui

$= 0_Y$ dengan Proposisi 3.26 (i)

Proposisi 2.17[6] *Misalkan* $(X, *_1, 0_x)$ *dan* $(Y, *_2, 0_y)$ *adalah TM-aljabar dan B adalah ideal dari* Y. *Jika* $f: X \to Y$ *adalah homomorfisma TM-aljabar, maka* $f^{-1}(B)$ *adalah ideal dari* X.

Bukti :

Diketahui $(X, *_1, 0_x)$ dan $(Y, *_2, 0_y)$ adalah suatu *TM*-aljabar dan $f: X \to Y$ adalah homomorfisma *TM*-aljabar serta *B* adalah ideal dari Y. Akan dibuktikan bahwa $f^{-1}(B)$ adalah ideal dari X.

Karena B ideal dari Y maka :

i) $0_y \in B$

ii) Jika $f(x *_1 y) \in B$ dan $f(y) \in B$ maka $f(x) \in B$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $f^{-1}(B)$ adalah ideal dari X, dimana:

$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) = y,\ \forall y \in B\}$.

Himpunan $f^{-1}(B)$ dikatakan ideal dari X jika memenuhi Definisi 3.16 :

1. $0_x \in f^{-1}(B)$.

   $f^{-1}(B) \neq \emptyset$, sebab $f(0_x) = 0_y \in B$, maka $0_x \in f^{-1}(B)$.

2. Jika $x *_1 y \in f^{-1}(B)$ dan $y \in f^{-1}(B)$ maka $x \in f^{-1}(B)$ sehingga berlaku $f(x *_1 y) \in B$ dan $f(y) \in B$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $x \in f^{-1}(B)$.

Karena B ideal dan $f(y) \in B$ maka $f(x) \in B$ yang berakibat $x \in f^{-1}(B)$.

Kedua aksioma ideal *TM*-aljabar terpenuhi dengan demikian terbukti bahwa $f^{-1}(B)$ ideal dari X.

III. KESIMPULAN

Dari pembahasan yang telah diuraikan dapt disimpulakan bahwa teori *TM*-aljabar merupakan perumuman *BCK*-aljabar. *TM*-aljabar juga berkaitan dengan struktur aljabar yang lain seperti *BCH*-aljabar, *BCI*-aljabar, dan *Q*-aljabar. Beberapa konsep dalam *TM*-aljabar masing-masing saling mempunyai keterkaitan.Seperti halnya $B(X)$ yaitu *TM*-aljabar *p*-semisederhana yang juga merupakan *TM*-subaljabar. Konsep $G(X)$ yang merupakan G-bagian dari *TM*-aljabar juga mempunyai kaitan dengan konsep yang lain seperti *TM*-subaljabar dan ideal *TM*-aljabar. Kaitan antara $G(X)$ dengan *TM*-subaljabar dan ideal *TM*-aljabar bisa dijadikan sebuah teorema yang menyatakan bahwa setiap $G(X)$ juga merupakan *TM*-subaljabar, begitu pula kaitan antara $G(X)$ dengan ideal *TM*-aljabar.

IV. UCAPAN TERIMA KASIH

Banyak pihak yang telah membantu dalam penyelesaianTugasAkhir ini. Oleh karena itu, rasa hormat dan terima kasih penulis ingin sampaikan kepada :

1. Bapak Suryoto, S.Si, M.Si selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan bimbingan, arahan, dan nasehat-nasehatnya selama ini,
2. Bapak Drs. Solichin Zaki, M.Kom, selaku dosen pembimbing II yang juga telah membimbing dan mengarahkan penulis hingga selesainya Tugas Akhir ini,
3. Semua pihak yang telah membantu hingga selesainya tugas akhir ini, yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu. Semoga Allah SWT membalas segala kebaikan yang telah Anda berikan

V. DAFTAR PUSTAKA

[1] Dar. K.H and Akram, Muhammad. 2006. *On Endomorphisms of BCH algeba*s. Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser.

[2] Deffyana Prastya Arifani. 2010. *Skripsi Semi-Homomorfisma BCK-Aljabar*. UNDIP. Semarang.

[3] Desrimarolisa Dwi Anggrainy. 2010. *Q-Aljabar*. UNDIP. Semarang.

[4] Dewi Yunitasari. 2010. *Skripsi BCK-Aljabar hiper*. UNDIP.Semarang.

[5] Gilbert, Jimmie and Linda Gilbert. *Elements Of Modern Algebra*. Third Edition, PWS-KENT Publishing Company. Boston.

[6] Megalai, K and Dr.A.Tamilarasi. *TM-algebras-An Introduction*, IJCA (2010), hal : 1-7.

[7] Lipschutz, Seymour, 1981 , *Schaum's Outline of Theory and Problems of Set Theory and Related Topics* , McGraw-Hill Book Company,Singapore.

[8] Nony Aprilia, 2009. *Skripsi BCI*-aljabar. UNDIP. Semarang.