PELABELAN *CORDIAL* DAN *GRACEFUL* PADA *ARBITRARY SUPERSUBDIVISION* GRAF *PATH* DAN *STAR*

Kornelia Paskatria Cahayani[1], R. Heri Soelistyo U[2], Solichin Zaki[3]
[1,2,3]Program Studi Matematika FSM Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Tembalang Semarang

corneliacahayani@yahoo.com

ABSTRACT. Let G=(V,E) be a path graph and star graph with simple, finite, connected, and undirected graph with p vertices and q edges. A graph H is said to be a *supersubdivision* of G if H is obtained from G by replacing every edge e_i of G by complete bipartite graph K_{2,m_i} for some m_i, $1 \leq i \leq q$ in such a way that the ends e_i are merged with the two vertices of the 2-vertices part of K_{2,m_i} after removing the edge e_i from G. A *supersubdivision* H of G is said to be an *arbitrary supersubdivision* of G if every edge of G is replaced by an arbitrary $K_{2,m}$ where m may vary for each edge arbitrarily. A *arbitrary supersubdivision* of path and star is said *cordial* if admits *cordial* labeling. A *arbitrary supersubdivision* of path and star is said *graceful* if injection from the vertices of $f : V(G) \rightarrow \{0,1,2,...,q\}$ such that label of every edge are distinct.

Key words: *cordial* labeling, *graceful* labeling, *supersubdivision* of graphs, *arbitrary supersubdivision* of graphs, path, and star.

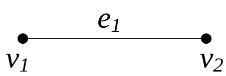
I. PENDAHULUAN

Pelabelan graf adalah suatu pemberian nilai (dengan bilangan bulat positif) pada titik atau sisi dari graf atau keduanya sehingga memenuhi kondisi tertentu. Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Sadlàčk (1964), kemudian Stewart (1966), Kotzig dan Rosa (1970). Ada banyak jenis pelabelan yang telah dikembangkan, diantaranya adalah pelabelan *graceful*. Dalam pengembangan pelabelan *graceful*, dikenal pula pelabelan *cordial*. Graf *arbitrary supersubdivision* dapat dilabeli dengan pelabelan *cordial* dan *graceful.*

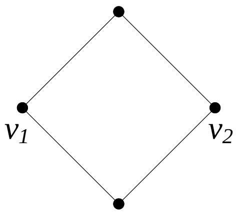
II. HASIL DAN PEMBAHASAN

Definisi 2.1. [11] Graf H dengan himpunan titik $\{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$ dan himpunan sisi $\{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\}$ disebut *supersubdivision* pada G jika H adalah graf yang diperoleh dari G dengan mengganti setiap sisi e_i pada G menjadi graf bipartit lengkap K_{2,m_i} untuk beberapa m_i dimana $1 \leq i \leq q$ sedemikian sehingga titik - titik ujung e_i digabung dengan 2 titik dari titik K_{2,m_i} setelah menghapus sisi e_i pada graf G.

Contoh

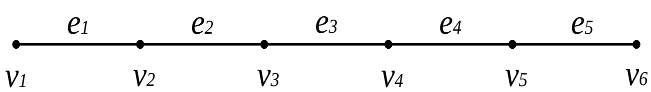


Gambar di atas ditunjukan sebuah Path P_2 dengan titik v_1, v_2 dan sisi e_1. Sisi e_1 pada Path P_2, untuk $m_1 = 2$, akan diganti menjadi graf bipartit lengkap $K_{2,2}$. Sedemikian sehingga akan menjadi graf *supersubdivision* sebagai berikut.

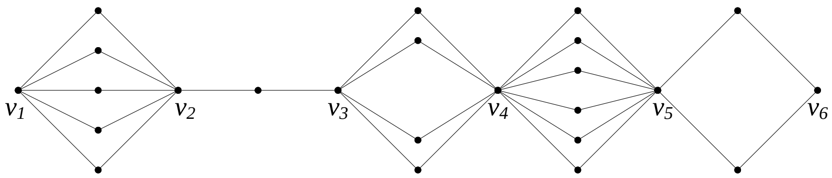


Definisi 2.2 [11] *Supersubdivision* H pada graf G dikatakan *arbitrary supersubdivision* pada G jika setiap sisi G diganti dengan graf bipartit lengkap $K_{2,m}$ dimana m bilangan bulat positif dan m boleh berbeda untuk setiap sisi dari G.

Contoh



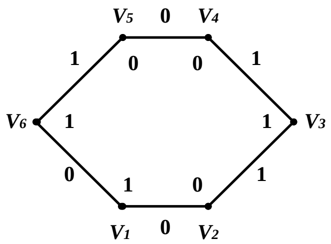
Pada gambar di atas ditunjukan sebuah Path P_6 dengan titik v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 dan sisi e_1, e_2, e_3, e_4, e_5. Bila sisi e_i pada path P_6 diganti dengan sebarang $K_{2,m}$ misalkan $m_1 = 5, m_2 = 1, m_3 = 4, m_4 = 6, m_5 = 2$. Maka diperoleh graf *arbitrary supersubdivision* sebagai berikut.



Definisi 2.3 [11] Misal G = (V(G),E(G)) merupakan suatu graf. Pemetaan $f : V(G) \to \{0,1\}$ disebut dengan pelabelan titik biner pada G dan $f(v)$ disebut label titik v pada G.

Untuk sisi $e = uv$, pelabelan sisi *induced* adalah pemetaan $f^*: E(G) \to \{0,1\}$ yang didefinisikan dengan $f^*(e) = |f(u) - f(v)|$.

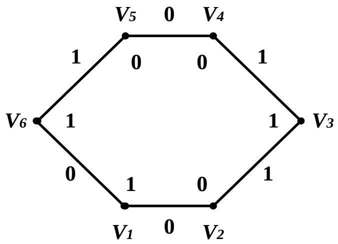
Contoh



Definisi 2.4 [11] Pelabelan titik biner pada graf G disebut pelabelan *cordial* jika memenuhi $|v_f(0) - v_f(1)| \leq 1$ dan $|e_f(0) - e_f(1)| \leq 1$. Graf G disebut *cordial* jika memenuhi pelabelan *cordial.*

Banyaknya titik pada G yang berlabel 0 dan 1 dinotasikan berturut-turut dengan $v_f(0)$ dan $v_f(1)$. Banyaknya sisi pada G yang berlabel 0 dan 1 dinotasikan berturut-turut dengan $e_f(0)$ dan $e_f(1)$.

Contoh



Teorema 2.5[11] *Arbitrary supersubdivision* pada graf P_n adalah *cordial*.

Bukti.

Misal path P_n dengan himpunan titik $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ dan e_i merupakan sisi yang menghubungkan titik v_i dengan v_{i+1} dimana $1 \le i \le n-1$. Graf G adalah *arbitrary supersubdivision* pada graf P_n yang diperoleh dengan mengganti sisi e_i pada path P_n dengan graf bipartit lengkap K_{2,m_i}; dimana m_i adalah bilangan bulat positif. Himpunan titik - titik bipartit lengkap K_{2,m_i} dinotasikan dengan v'_{ij}; $1 \le i \le n-1, 1 \le j \le m_i$.

Pelabelan titik $f: V(G) \to \{0,1\}$ dibagi menjadi 2 kasus yaitu sebagai berikut.

Kasus 1, *n* genap

Pelabelan titik v_i pada graf *arbitrary supersubdivision* didefinisikan sebagai berikut.

$$f(v_i) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ untuk } i \text{ ganjil} \\ 1 \text{ untuk } i \text{ genap} \end{array} \right\} 1 \le i \le n$$

Pelabelan titik v'_{ij} $(1 \le i \le n-1,\ 1 \le j \le m_i)$ dilakukan secara berselang-seling 0 dan 1 dimulai dari 0.

Banyaknya titik v'_{ij} untuk *n* genap didefinisikan sebagai berikut.

$$\alpha = \sum_{1}^{n-1} m_i = m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_{n-1}$$

Dari rumusan banyaknya titik v'_{ij} yang diperoleh, dibagi menjadi 2 kasus sebagai berikut.

Subkasus 1, α genap

Banyaknya titik pada *arbitrary supersubdivision* graf P_n yang berlabel 0 dan 1 adalah

$$v_f(0) = v_f(1) = \frac{n}{2} + \frac{\alpha}{2} = \frac{n+\alpha}{2}$$

Subkasus 2, α ganjil

Banyaknya titik pada graf *arbitrary supersubdivision* yang berlabel 0 dan 1 adalah

$$v_f(0) = v_f(1) + 1 = \frac{n}{2} + \frac{\alpha+1}{2} = \frac{n+\alpha+1}{2}$$

Karena pelabelan v_i berselang – seling antara 0 dan 1 demikian juga pelabelan v'_{ij} juga berselang – seling antara 0 dan 1, dan karena pelabelan sisi $e = uv$, didefinisikan dengan $f(e) = |f(u) - f(v)|$, maka hal ini berakibat $e_f(0) = e_f(1) = \alpha$. Sehingga, $|e_f(0) - e_f(1)| = |\alpha - \alpha| = 0$.

Kasus 2, *n* ganjil

Pelabelan titik v_i pada graf *arbitrary supersubdivision* didefinisikan sebagai berikut.

$$f(v_i) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ untuk } i \text{ ganjil} \\ 1 \text{ untuk } i \text{ genap} \end{array} \right\} 1 \le i \le n$$

Pelabelan titik v'_{ij} adalah sebagai berikut. Pelabelan titik v'_{ij} $(1 \le i \le n-1,$ $1 \le j \le m_i)$ dilakukan secara berselang - seling 0 dan 1 dimulai dari 1.

Banyaknya titik v'_{ij} untuk *n* genap didefinisikan sebagai berikut.

$$\alpha = \sum_{1}^{n-1} m_i = m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_{n-1}$$

Dari rumusan banyaknya titik v'_{ij} yang diperoleh, dibagi menjadi 2 kasus sebagai berikut..

Subkasus 1, α genap

Banyaknya titik pada graf *arbitrary supersubdivision* yang berlabel 0 dan 1 adalah

$$v_f(0) = v_f(1) + 1 = \frac{n+1}{2} + \frac{\alpha}{2} = \frac{n+\alpha+1}{2}$$

Subkasus 2, α ganjil

Banyaknya titik pada graf *arbitrary supersubdivision* yang berlabel 0 dan 1 adalah

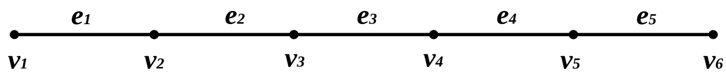
$$v_f(0) = v_f(1) = \frac{n+1}{2} + \frac{\alpha+1}{2} - 1 = \frac{n+\alpha}{2}$$

Karena pelabelan v_i berselang – seling antara 0 dan 1 demikian juga pelabelan v'_{ij} juga berselang – seling antara 0 dan 1, dan karena pelabelan sisi $e = uv$, didefinisikan dengan $f(e) = |f(u) - f(v)|$, maka hal ini berakibat $e_f(0) = e_f(1) = \alpha$. Sehingga, $|e_f(0) - e_f(1)| = |\alpha - \alpha| = 0$.

Dari kedua kasus di atas dapat dirangkum kondisi titik dan sisi *arbitrary supersubdivision* pada graf P_n .

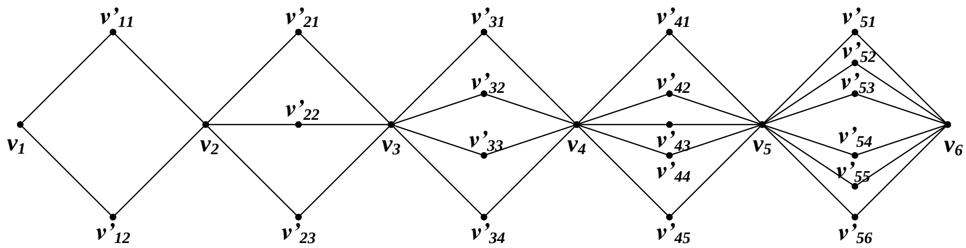
n	α	**Syarat Titik**	**Syarat Sisi**
genap	genap	$v_f(0) = v_f(1)$	$e_f(0) = e_f(1)$
	ganjil	$v_f(0) = v_f(1) + 1$	$e_f(0) = e_f(1)$
ganjil	genap	$v_f(0) = v_f(1) + 1$	$e_f(0) = e_f(1)$
	ganjil	$v_f(0) = v_f(1)$	$e_f(0) = e_f(1)$

Contoh

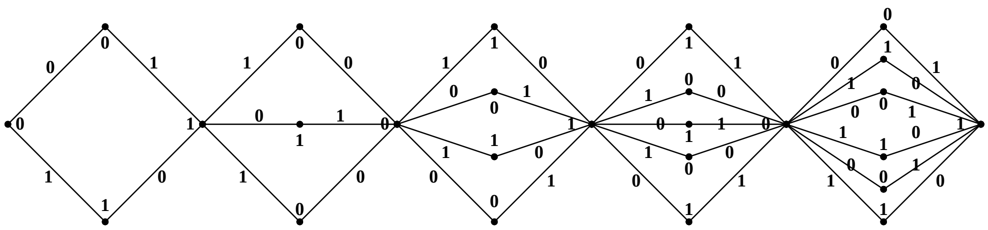


Path P_6

Tiap sisi e_i akan diganti dengan graf bipartit lengkap K_{2,m_i} , m_i =*2,3,4,5,6.* Sehingga graf P_6 berubah menjadi graf *arbitrary supersubdivision* berikut.



Setelah melalui proses pelabelan titik v_i dan titik v'_{ij} kemudian dilanjutkan dengan pelabelan sisi, maka diperoleh pelabelan *arbitrary supersubdivision* pada graf P_6 adalah sebagai berikut.



Pada pelabelan titik dan sisi di atas, diperoleh $v_f\ (0) = v_f\ (1) = 13$ dan $e_f\ (0) = e_f\ (1) = \ 20$.

Teorema 2.6 [11] *Arbitrary supersubdivision* pada graf $K_{1,n}$ adalah *cordial*.

Bukti:

Misal $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ merupakan himpunan titik pada $K_{1,n}$,v_0 adalah titik puncak dan e_i merupakan sisi yang menghubungkan titik v_0 dengan v_i dimana $1 \leq i \leq n$. Graf G adalah graf *arbitrary supersubdivision* dari $K_{1,n}$ yang diperoleh dengan mengganti sisi e_i pada $K_{1,n}$ dengan graf bipartit lengkap K_{2,m_i} dimana m_i adalah bilangan bulat positif. Himpunan titik - titik bipartit lengkap K_{2,m_i} dinotasikan dengan v'_{ij}; $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m_i$.

Pelabelan titik $f: V(G) \rightarrow \{0,1\}$ pada graf *arbitrary supersubdivision* didefinisikan sebagai berikut.

$f(v_0) = 0$

$f(v_i) = 1, 1 \leq i \leq n$

Pelabelan titik v'_{ij} $(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m_i)$ dilakukan dengan memberi label 0 pada *n* titik pertama dan sisanya dilanjutkan pemberian label secara berselang - seling 0 dan 1 dimulai dari 1.

Banyaknya titik v'_{ij} pada *arbitrary supersubdivision* graf $K_{1,n}$ didefinisikan sebagai berikut.

$$\alpha = \sum_{1}^{n} m_i = m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n$$

Dari rumusan banyaknya titik v'_{ij} yang diperoleh, banyaknya label titik dan sisi dibagi menjadi 2 kasus sebagai berikut.

Kasus 1, n genap

Banyaknya titik pada *arbitrary supersubdivision* graf $K_{1,n}$ yang berlabel 0 dan 1 didefinisikan sebagai berikut.

Untuk

- α genap maka diperoleh

$$v_f(0) = v_f(1) + 1 = \frac{n+\alpha+2}{2}$$

- α ganjil maka diperoleh

$$v_f(0) = v_f(1) = \frac{n+\alpha+1}{2}$$

Karena banyaknya titik pada v_i dan v'_{ij} yang berlabel 0 dan 1 sama, dan karena pelabelan sisi $e = uv$, didefinisikan dengan $f(e) = |f(u) - f(v)|$, maka hal ini berakibat $e_f(0) = e_f(1) = \alpha$. Sehingga, $|e_f(0) - e_f(1)| = |\alpha - \alpha| = 0$.

Kasus 2, n ganjil

Banyaknya titik pada *arbitrary supersubdivision* graf $K_{1,n}$ yang berlabel 0 dan 1 didefinisikan sebagai berikut.

Untuk

- α genap maka diperoleh

$$v_f(0) = v_f(1) = \frac{n+\alpha+1}{2}$$

- α ganjil maka diperoleh

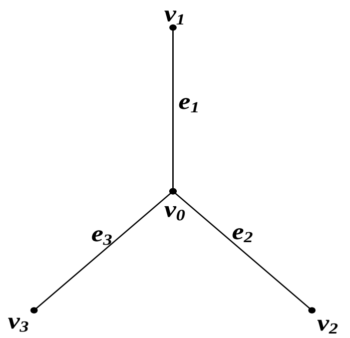
$$v_f(0) = v_f(1) + 1 = \frac{n+\alpha+2}{2}$$

. Karena banyaknya titik pada v_i dan v'_{ij} yang berlabel 0 dan 1 sama, dan karena pelabelan sisi $e = uv$, didefinisikan dengan $f(e) = |f(u) - f(v)|$, maka hal ini berakibat $e_f(0) = e_f(1) = \alpha$. Sehingga, $|e_f(0) - e_f(1)| = |\alpha - \alpha| = 0$.

Dari kedua kasus di atas dapat dirangkum kondisi titik dan sisi *arbitrary supersubdivision* pada graf $K_{1,n}$.

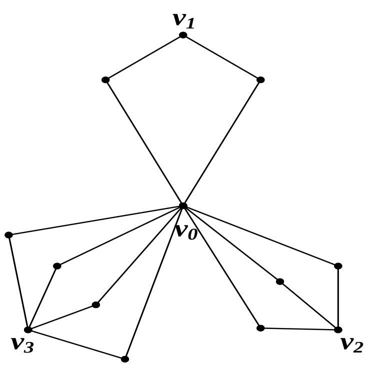
n	α	**Syarat Titik**	**Syarat Sisi**
genap	genap	$v_f(0) = v_f(1) + 1$	$e_f(0) = e_f(1)$
	ganjil	$v_f(0) = v_f(1)$	$e_f(0) = e_f(1)$
ganjil	genap	$v_f(0) = v_f(1)$	$e_f(0) = e_f(1)$
	ganjil	$v_f(0) = v_f(1) + 1$	$e_f(0) = e_f(1)$

Contoh

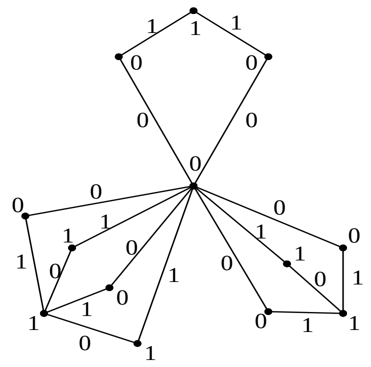


Graf $K_{1,3}$

Tiap sisi e_i akan diganti dengan graf bipartit lengkap K_{2,m_i} , m_i =2,3,4. Sehingga graf $K_{1,3}$ berubah menjadi graf *arbitrary supersubdivision* berikut.



Setelah melalui proses pelabelan titik v_i dan titik v'_{ij} kemudian dilanjutkan dengan pelabelan sisi, maka diperoleh pelabelan *arbitrary supersubdivision* pada graf $K_{1,3}$ adalah sebagai berikut.



Pada pelabelan titik dan sisi diatas, diperoleh $v_f\ (0) = 7$, $v_f\ (1) = 6$, dan $e_f\ (0) = e_f\ (1) = 9$

Definisi 2.7 [4] Pelabelan *graceful* pada graf *G* adalah pemetaan injektif $f: V(G) \to \{0,1,2,\ldots,q\}$ sedemikian sehingga jika label sisi e = *uv* didefinisikan dengan $f(e) = |f(u) - f(v)|$, maka label setiap sisi akan berbeda.

Dengan demikian, pelabelan *graceful* merupakan salah satu bentuk pelabelan pada titik sedangkan label sisinya menjadi akibat dari adanya label titik.

Teorema 2.8 [10] *Arbitrary supersubdivision* pada graf P_n adalah *graceful*.

Bukti:

Misal graf P_n dengan himpunan titik $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ dan e_i merupakan sisi yang menghubungkan titik v_i dengan v_{i+1} dimana $1 \leq i \leq n-1$. Graf G adalah graf *arbitrary supersubdivision* dari path P_n yang diperoleh dengan mengganti sisi e_i pada path P_n dengan graf bipartit lengkap K_{2,m_i}; dimana m_i adalah bilangan bulat positif. Himpunan titik - titik bipartit lengkap K_{2,m_i} dinotasikan dengan v'_{ij}; $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m_i$, dan M merupakan banyaknya sisi pada *arbitrary supersubdivision* graf P_n.

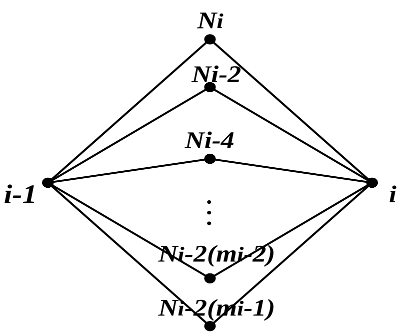
Banyaknya titik v'_{ij} pada graf *arbitrary supersubdivision* didefinisikan sebagai berikut.

$$\alpha = \sum_{1}^{n} m_i = m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_{n-1}$$

Banyaknya sisi pada graf *arbitrary supersubdivision* didefinisikan sebagai berikut.

$$M = 2\ \alpha = 2\ (m_1 + m_2 + \dots + m_{n-1})$$

Pelabelan dilakukan pada setiap graf *supersubdivision* dari P_n secara berurutan untuk masing - masing i dimana $1 \leq i \leq n-1$ yang ditunjukan pada gambar berikut ini.



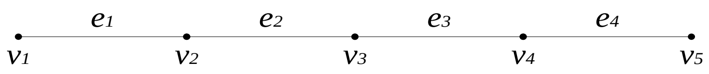
Label titik pada graf *supersubdivision* K_{2,m_i} di atas didefinisikan sebagai berikut.

$$N_1 = M$$

$$N_i = M - 2\ (m_1 + m_2 + \dots + m_{i-1}) + (i-1), \qquad 2 \leq i \leq n-1$$

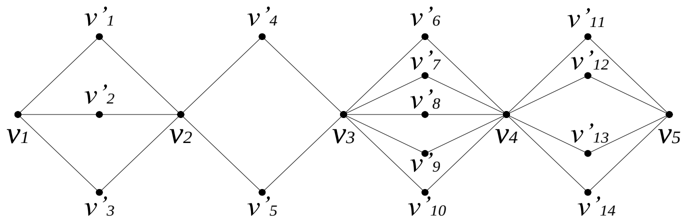
Label titik pada masing – masing K_{2,m_i} adalah berbeda untuk $1 \leq i \leq n-1$ dan memenuhi pemetaan injektif $f: V(G) \to \{0,1,2,\dots,M\}$ sedemikian sehingga untuk setiap sisi e_i mempunyai label sisi $|f(u) - f(v)|$ yang semuanya berbeda juga.

Contoh

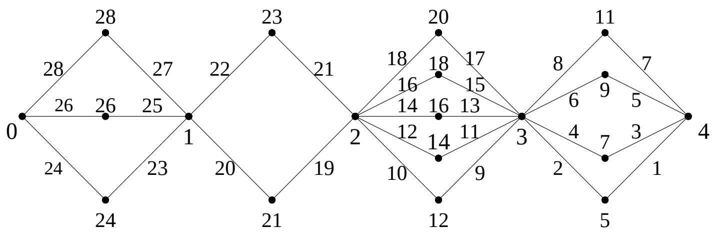


Path P_5

Tiap sisi e_i akan diganti dengan graf bipartit lengkap K_{2,m_i} , m_i = *3,2,5,4*. Sehingga graf P_5 berubah menjadi graf *arbitrary supersubdivision* berikut.



Setelah melalui proses pelabelan titik v_i dan titik v'_{ij} kemudian dilanjutkan dengan pelabelan sisi, maka diperoleh pelabelan *graceful arbitrary supersubdivision* pada graf P_5 adalah sebagai berikut.



Label titik *arbitrary supersubdivision* pada graf P_5 memenuhi pemetaan *injektif* $f: V(G) \to \{0,1,2,\dots,28\}$ sedemikian sehingga untuk setiap sisi mempunyai label sisi yang semuanya berbeda juga.

Teorema 2.9 [6] *Arbitrary supersubdivision* pada graf $K_{1,n}$ adalah *graceful*.

Bukti:

Misal $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ merupakan himpunan titik pada $K_{1,n}$,v_0 adalah titik puncak dan e_i merupakan sisi yang menghubungkan titik v_0 dengan v_i

dimana $1 \leq i \leq n$. Graf G adalah *arbitrary supersubdivision* dari graf $K_{1,n}$ yang diperoleh dengan mengganti sisi e_i pada $K_{1,n}$ dengan graf bipartit lengkap K_{2,m_i} dimana m_i adalah bilangan bulat positif. Misalkan v'_k merupakan titik K_{2,m_i} dan $1 \leq k \leq (m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n)$.

Banyaknya titik v'_k pada graf *arbitrary supersubdivision* didefinisikan sebagai berikut.

$$\alpha = \sum_{1}^{n} m_i = m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n$$

Banyaknya titik pada graf *arbitrary supersubdivision* didefinisikan sebagai berikut.

$$p = |V(G)| = \alpha + n + 1$$

Banyaknya sisi pada graf *arbitrary supersubdivision* didefinisikan sebagai berikut

$$q = |E(G)| = 2\,\alpha$$

Pelabelan *graceful* titik v_i pada graf *arbitrary supersubdivision* didefinisikan sebagai berikut.

$$f(v_0) = 0$$

$$f(v_j) = \left(2\sum_{i=1}^{n-j} m_i\right) + 1, \quad 1 \leq j \leq n-1$$

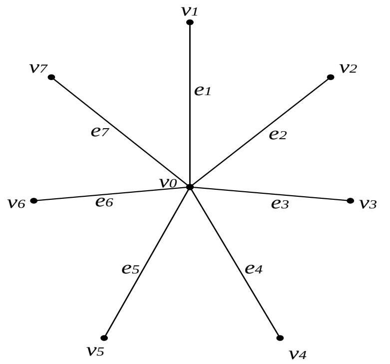
$$f(v_n) = 1$$

Pelabelan titik u_k pada graf *arbitrary supersubdivision* didefinisikan sebagai berikut.

$$f(v'_k) = 2k, \qquad 0 \leq k \leq (m_1 + m_2 + \cdots + m_n)$$

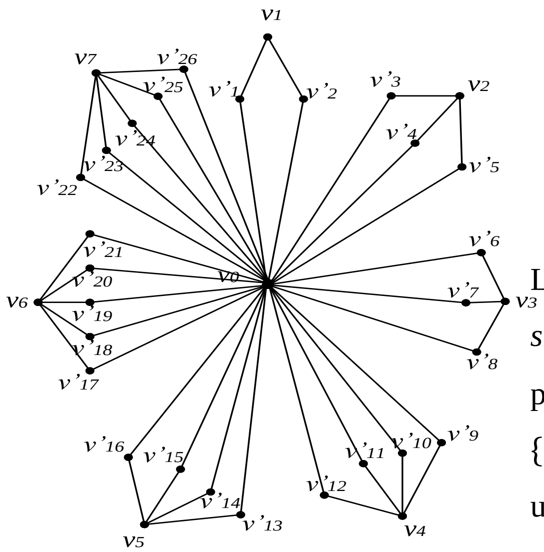
Llabel titik v_i dan titik v'_k adalah berbeda untuk $1 \leq i \leq n$, $1 \leq k \leq (m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n)$ dan memenuhi pemetaan injektif $f: V(G) \to \{0,1,2,\ldots,M\}$ sedemikian sehingga untuk setiap sisi e_i mempunyai label sisi $|f(u) - f(v)|$ yang semuanya berbeda juga.

Contoh

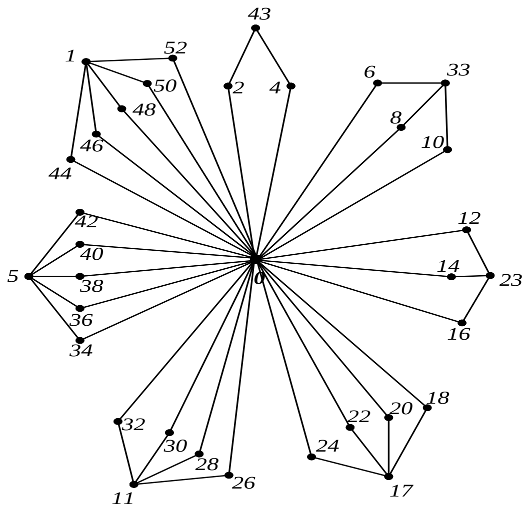


Graf $K_{1,7}$

Tiap sisi-sisi e_i akan diganti dengan graf bipartit lengkap K_{2,m_i} , m_i =*2,3,3,4,4,5,5*.



Setelah melalui proses pelabelan titik v_i dan titik v'_k , maka diperoleh pelabelan *graceful arbitrary supersubdivision* pada graf $K_{1,7}$ adalah sebagai berikut.



Label titik pada *arbitrary supersubdivision* graf $K_{1,7}$ memenuhi pemetaan injektif $f: V(G) \rightarrow \{0,1,2,\ldots,52\}$ sedemikian sehingga untuk setiap sisi mempunyai label sisi yang semuanya berbeda juga.

III. KESIMPULAN

Dari pembahasan yang telah diuraikan, dapat diambil kesimpulan bahwa *Arbitrary supersubdivision* pada graf *path* dan *star* dapat dilabeli dengan pelabelan *cordial* dan *graceful*.

IV. UCAPAN TERIMA KASIH

Banyak pihak yang telah membantu dalam penyelesaian Tugas Akhir ini. Oleh karena itu, rasa hormat dan terima kasih penulis ingin sampaikan kepada :

1. R. Heri Soelistyo Utomo, S.Si, M.Si selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan bimbingan, arahan, dan nasehat-nasehatnya selama ini,
2. Solichin Zaki, M.Kom selaku dosen pembimbing II yang juga telah membimbing dan mengarahkan penulis hingga selesainya Tugas Akhir ini,
3. Semua pihak yang telah membantu hingga selesainya tugas akhir ini, yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu. Semoga Allah membalas segala kebaikan yang telah Anda berikan kepada penulis, Amin.

V. DAFTAR PUSTAKA

[1]Abdussakir, 3 November 2008, *Graph Labelling*, Abdussakir's Blog. http://abdussakir.wordpress.com (diakses pada tanggal 26 Februari 2013)

[2] Bartle, Robert G. dan Donald R. Sherbert. 2000. "*Introduction to Real Analysis Third Edition*". New York : John Willey and Sons.

[3]Chartrand, G. dan Lesniak, L. 1996. "*Graphs & Digraphs*, 3 *ed*", Chapman & Hill. London.

[4]Gayathri, B dan Vanitha, V, Directed Edge-Graceful Labelling of Cycle and Star Related Graph, *International Journal of Mathematics and Soft Computing*, Vol. 1, No.1 (2011), 89 – 104.

[5] Howard Anton dan Chris Rorres. 1988. "*Penerapan Aljabar Liniear".* Erlangga. Jakarta.

[6] Kathiresan K M dan Amutha S, Arbitrary Supersubdivision of Stars are Graceful, *Indian J.Pure Appl. Math.,* Vol: 35 (2004) No: 1, Hal: 81-84.

[7] Listiyana, Erly, Susilo Haryanto dan Lucia Ratnasari. 2008. "*Langkah – Langkah Penentuan Suatu Barisan sebagai Suatu Grafik dengan Dasar Teorema Havel – Hakimi : Jurnal Matematika*". Vol 11(2008), No 2, Hal: 60-64.

[8]Munir, Rinaldi. 2007. "*Matematika Diskrit"*. Bandung: Informatika Bandung.

[9] Rosen, Kenneth H. 2007. "*Discrete Mathematics and Its Applications Sixth Edition* ". New York : McGRAW-HILL BOOK COMPANY.

[10] Sethuraman, G dan Selvaraju P, Gracefulness of Arbitrary Supersubdivision of Graphs, *Indian J. Pure Appl. Math.,* Vol: 32(2001), No: 7, Hal: 1059-1-64.

[11] Vaidya, S K dan Kanani K, Some New Results on Cordial Labeling in the Context of Arbitrary Supersubdivision of Graph, *Applied Mathematical Sciences,* Vol. 4 (2010) No. 47, 2323 – 2329.

[12] Wilson, J. Robin dan John J. Watskin. 1990. "*Graphs An Introductory Approach"*. New York : University Course Graphs, Network, and Design.