PELABELAN ANTIPODAL PADA GRAF SIKEL

Puspa Novita Sari[1], Bambang Irawanto[2], Bayu Surarso[3]
[1,2,3]Jurusan Matematika FSM Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Tembalang Semarang

puspa.novita91@gmail.com
b_irawanto@yahoo.co.id

ABSTRACT. Let G be a graph with diameter d . An antipodal labelings of G is a function f that assigns to each vertex a non-negative integer (label) such that for any two vertices u and v, it is satisfied that $|f(u) - f(v)| \geq d - d(u,v)$, where $d(u,v)$ is the distance between u and v. Let C_n denote the cycle graph on n vertices, antipodal labelings gives an ordering of the vertices $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ by permutation π then determine label of every vertices with $f(x_o), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{n-1})$. Antipodal labelings sustain that antipodal vertices have the same label. The span of an antipodal labeling f is max $\{f(u) - f(v): u, v \in V(G)\}$. The antipodal number for G denoted by $\mathrm{an}(G)$ is the minimum span of an antipodal labeling for G. In this essay we learning step of antipodal labelings for cycle C_n so that antipodal number of cycle graph can be seen.

Keywords : antipodal labeling, cycle graph, diameter, antipodal number.

I. PENDAHULUAN

Teori graf merupakan salah satu ilmu terapan matematika yang hingga kini terus dikembangkan. Salah satu topik yang sangat menarik dalam graf adalah pelabelan graf. Pelabelan graf merupakan suatu fungsi yang memetakan himpunan titik dari suatu graf ke bilangan asli. Pelabelan graf diperkenalkan pertama kali oleh Rosa pada tahun 1967. Pelabelan yang merupakan salah satu masalah penugasan frekuensi (*frequency assignment problem*) adalah pelabelan radio-*k* (*radio k-labeling)*. Pelabelan radio mencakup himpunan terbesar dari pembatasan yang memungkinkan, pembatasan tersebut berlaku untuk pasangan titik pada semua jarak yang mungkin.

Pelabelan radio adalah pelabelan permasalahan graf, diusulkan oleh Chartrand, dimana dapat dianalogikan dengan penetapan frekuensi pada pemancar saluran FM untuk menghindari gangguan sinyal. Pemancar radio yang berdekatan secara geografis harus mempunyai frekuensi yang sangat berbeda, sedangkan pemancar radio dengan perbedaan geografis yang besar dapat mempunyai frekuensi yang hampir sama. Secara umum, dimodelkan dengan memisalkan pemancar sebagai titik pada sebuah graf [1].

Pada kasus $k = \mathrm{diam}(G) - 1$, *k-labeling* dinamakan pelabelan antipodal (*antipodal labeling*). Bilangan antipodal (*antipodal number*) graf G, dinotasikan an(G) yaitu rentang minimum pelabelan antipodal pada G [2]. *Radio labeling* adalah fungsi satu-satu, sedangkan pada pelabelan antipodal, dua simpul pada jarak diam(G) bisa saja mendapat label yang sama. Dengan kata lain, dua simpul yang berhadapan atau antipodal bisa saja mendapat label yang sama [3]. Oleh karena itu, pelabelan jenis ini dinamakan pelabelan antipodal (*antipodal labeling*).

Pelabelan antipodal pada graf sikel pertama kali dipelajari oleh Chartrand, dkk, dimana batas umum $\mathrm{an}(G)$ dapat diperoleh. Pelabelan antipodal pada sikel C_n dipelajari oleh G. Chartrand, D. Erwin, dan P.Zhang (2000), dengan batas bawah $\mathrm{an}(C_n)$ untuk kasus $n \equiv 2 \pmod 4$ telah dibuktikan.

Pada tugas akhir ini akan ditunjukkan batas bawah $\mathrm{an}(C_n)$ untuk kasus $n \equiv 1 \pmod 4$, serta memperbaiki batas bawah dari $\mathrm{an}(C_n)$ untuk kasus $n \equiv 0 \pmod 4$.

II. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pembahasan dalam Tugas Akhir ini dibagi menjadi tiga sub bagian, yaitu pelabelan antipodal pada graf sikel C_n dengan $n \equiv 0 \pmod 4$, $n \equiv 1 \pmod 4$, dan $n \equiv 3 \pmod 4$.

Definisi 2.1 [2]

Antipodal labeling graf G adalah suatu fungsi $f : V(G) \to \{0, 1, 2, \dots\}$ sehingga untuk setiap dua titik u dan v berlaku $|f(u) - f(v)| \geq d - d(u, v)$. Dengan d adalah diameter graf G dan $d(u, v)$ adalah jarak antara titik u dan v.

Definisi 2.2 [2]

Rentang (*span*) fungsi f dinotasikan $\mathrm{sp}(f) = \max\{f(u) - f(v) : u, v \in V(G)\}$. Rentang minimum yang berlaku untuk semua *k-labeling* pada graf G dinamakan bilangan Φ_k dan dinotasikan $\Phi_k(G) = \min\{\mathrm{sp}(f)\}$.

Definisi 2.3 [2]

Diberikan himpunan $\{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\} = V(G)$, dimana $x_0, x_1, \dots, x_{n-1} = V(C_n)$ adalah urutan titik pada sikel C_n dan berlaku $0 = f(x_o) \leq f(x_1) \leq f(x_2) \leq \cdots \leq f(x_{n-1})$, sehingga rentang f adalah $f(x_{n-1})$.

Definisi 2.4 [2]

Untuk $i = 0, 1, 2, \dots, n-2$, ditetapkan *distance gap* dan *label gap* sebagai berikut,

$$d_i = d(x_i, x_{i+1}) \text{ dan } f_i = f(x_{i+1}) - f(x_i)$$

Berlaku pernyataan $f_i \geq d - d_i$.

Teorema 2.5 [2]

Untuk setiap tiga titik u, v dan w pada sikel C_n berlaku,

$$d(u,v) + d(v,w) + d(u,w) \leq n.$$

Bukti

Misalkan $d(u,v), d(v,w) \leq d(u,w)$. Jika kedua titik u dan v tersebut terletak pada setengah sikel, maka :

$$d(u,v) + d(v,w) = d(u,w)$$

$$d(u,v) + d(v,w) + d(u,w) = d(u,w) + d(u,w)$$

$$d(u,v) + d(v,w) + d(u,w) = 2\, d(u,w) \leq n$$

Dengan kata lain, $d(u,v) + d(v,w) + d(u,w) \leq n$

Lemma 2.6 [2]

Misalkan f adalah pelabelan antipodal pada C_n, $n \geq 3$, dengan label $f(x_0) \leq f(x_1) \leq \cdots \leq f(x_{n-1})$. Misalkan, $n = 4k + r$, untuk $r = 0,1,3$. Maka untuk $0 \leq i \leq n-3$ berlaku $f(x_{i+2}) - f(x_i) = f_i + f_{i+1} \geq k$.

Bukti

Menurut Definisi 2.4 yaitu $f_i \geq d - d_i$.

Akibatnya diperoleh,

$f(x_{i+1}) - f(x_i) \geq d - d(x_{i+1}, x_i)$,

$f(x_{i+2}) - f(x_{i+1}) \geq d - d(x_{i+2}, x_{i+1})$,

$f(x_{i+2}) - f(x_i) \geq d - d(x_{i+2}, x_i)$, Dengan menjumlahkan ketiga pertidaksamaan tersebut diperoleh,

$$f(x_{i+1}) - f(x_i) + f(x_{i+2}) - f(x_{i+1}) + f(x_{i+2}) - f(x_i)$$
$$\geq d - d(x_{i+1}, x_i) + d - d(x_{i+2}, x_{i+1}) + d - d(x_{i+2}, x_i)$$
$$2\big(f(x_{i+2}) - f(x_i)\big) \geq 3d - \big(d(x_i, x_{i+1}) + d(x_{i+1}, x_{i+2}) + d(x_i, x_{i+2})\big)$$

Akibat dari Teorema 2.5 yaitu $d(x_i, x_{i+1}) + d(x_{i+1}, x_{i+2}) + d(x_i, x_{i+2}) \leq n$.

Sehingga diperoleh $\big(f(x_{i+2}) - f(x_i)\big) \geq [(3d - n)/2]$.

Di lain pihak, $f(x_{i+2}) - f(x_i) = [f(x_{i+2}) - f(x_{i+1})] + [f(x_{i+1}) - f(x_i)]$

$$= f_i + f_{i+1} \geq [(3d - n)/2]$$

Pembahasan berikut yang selanjutnya membuktikan Lemma 2.6 untuk berbagai nilai n yang berbeda.

(1) Pada kasus $n = 4k$

Misalkan f adalah pelabelan antipodal pada $C_n, n \geq 3$. Pada kasus $n = 4k$ berlaku $d = \frac{n}{2} = \frac{4k}{2} = 2k$.

Akibatnya $f_i + f_{i+1} \geq \frac{3d - n}{2} = \frac{3.2k - 4k}{2} = \frac{6k - 4k}{2} = \frac{2k}{2} = k$.

(2) Pada kasus $n = 4k + 1$

Misalkan f adalah pelabelan antipodal pada $C_n, n \geq 3$. Pada kasus $n = 4k + 1$ berlaku $d = \frac{n}{2} = \frac{4k+1}{2} = 2k + \frac{1}{2}$.

Akibatnya $f_i + f_{i+1} \geq \frac{3d - n}{2} = \frac{3\left(2k + \frac{1}{2}\right) - (4k+1)}{2} = \frac{6k + \frac{3}{2} - 4k - 1}{2} = \frac{2k + \frac{1}{2}}{2} = k + \frac{1}{4} = k$

(3) Pada kasus $n = 4k + 3$

Misalkan f adalah pelabelan antipodal pada $C_n, n \geq 3$. Pada kasus $n = 4k + 3$ berlaku $d = \frac{n-1}{2} = \frac{4k+3-1}{2} = \frac{4k+2}{2} = 2k + 1$.

Akibatnya $f_i + f_{i+1} \geq \frac{3d - n}{2} = \frac{3(2k+1) - (4k+3)}{2} = \frac{6k + 3 - 4k - 3}{2} = \frac{2k}{2} = k$

Akibat 2.7 [2]

Diberikan fungsi f adalah pelabelan antipodal pada C_n. Andaikan $n = 4k + r$ untuk beberapa $n \geq 3$ dan $r = 0,1,3$, maka bilangan antipodal pada sikel C_n memenuhi,

(1) $\mathrm{an}(C_n) \geq k(2k - 1)$, jika $r = 0$.

(2) $\mathrm{an}(C_n) \geq 2k^2$, jika $r = 1$.

(3) $\mathrm{an}(C_n) \geq k(2k+1)$, jika $r = 3$.

Bukti

Misalkan f adalah pelabelan antipodal pada C_n. Maka menurut Definisi 2.3, rentang f adalah $f(x_{n-1})$.

$$f(x_{n-1}) = 0 + f(x_1) - f(x_1) + f(x_2) - f(x_2) + \cdots + f(x_{n-2}) - f(x_{n-2}) + f(x_{n-1}) - f(x_{n-1})$$

Karena $f(x_0) = 0$, akibatnya

$$f(x_{n-1}) = [f(x_1) - f(x_0)] + [f(x_2) - f(x_1)] + \cdots + [f(x_{n-2}) - f(x_{n-3})] + [f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})]$$

Menurut Definisi 2.4 yang menyatakan $f_i = f(x_{i+1}) - f(x_i)$

Akibatnya $f(x_{n-1}) = f_0 + f_1 + \ldots + f_{n-2}$.

Pembuktian selanjutnya dengan menggunakan beberapa teorema dan lemma berikut untuk berbagai nilai n yang berbeda.

A. Pelabelan Antipodal pada Graf Sikel C_n untuk $n \equiv 0 \pmod 4$

Pada sikel C_{4k}, diameter sikel dinotasikan $d = \mathrm{diam}(C_{4k}) = 2k$. Langkah-langkah pelabelan antipodal pada sikel C_{4k} didefinisikan sebagai berikut.

i. Beri urutan setiap titik pada C_{4k} dengan $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{4k-2}, x_{4k-1}$. Dengan ketentuan $\pi(0) = 0$, dan untuk $1 \leq i \leq 2k$,

$$\pi(2i) = \begin{cases} (\pi(2i-2) + k) \bmod n, & \text{jika } i \text{ bilangan ganjil;} \\ (\pi(2i-2) + k + 1) \bmod n, & \text{jika } i \text{ bilangan genap.} \end{cases}$$

$\pi(2i+1) = (\pi(2i) + 2k) \bmod n$, untuk $1 \leq i \leq 2k-1$.

ii. Beri label setiap titik pada C_{4k} dengan $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_{4k-2}), f(x_{4k-1})$. Untuk $1 \leq i \leq 2k$ berlaku ketentuan sebagai berikut.

$$f(x_0) = 0 \text{ dan } f(x_{2i}) = \begin{cases} f(x_{2i-2}) + k, & \text{jika } i \text{ bilangan ganjil} \\ f(x_{2i-2}) + k + 1, & \text{jika } i \text{ bilangan genap} \end{cases}$$

$f(x_{2i+1}) = f(x_{2i})$, untuk $1 \leq i \leq 2k-1$.

Bukti Akibat 2.7 (1)

Misalkan $n = 4k$ maka n adalah bilangan genap. Menurut Lemma 2.6 yang menyatakan bahwa untuk kasus $n = 4k$ berlaku $f_i + f_{i+1} \geq k$, akibatnya berlaku pertidaksamaan berikut ini,

$$
\begin{aligned}
f_0 + f_1 &\geq k \\
f_2 + f_3 &\geq k \\
&\vdots \\
f_{n-4} + f_{n-3} &\geq k
\end{aligned}
$$

Pada fungsi antipodal f_{n-3}, bilangan indeks $n-3$ adalah bilangan ganjil, sebab n adalah bilangan genap. Jika pertidaksamaan-pertidaksamaan tersebut dijumlahkan maka akan diperoleh,

$$f_0 + f_1 + f_2 + \cdots + f_{n-4} + f_{n-3} \geq k\left(\frac{(n-3)+1}{2}\right) \geq k\left(\frac{n-2}{2}\right)$$

Menurut Definisi 2.4 yang menyatakan $f_i = f(x_{i+1}) - f(x_i)$.

Sehingga diperoleh $f_{n-2} = f(x_{n-1}) - f(x_{n-2}) = f(x_{4k-1}) - f(x_{4k-2})$

$$= f(x_{2(2k-1)+1}) - f\big(x_{2(2k-1)}\big)$$

Menurut bahasan sebelumnya diperoleh $f(x_{2i+1}) = f(x_{2i})$, akibatnya $f_{n-2} = f_{4k-2} = f(x_{2(2k-1)+1}) - f\big(x_{2(2k-1)}\big) = 0$.

Sehingga diperoleh,

$$
\begin{aligned}
&f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + \cdots + f_{n-8} + f_{n-7} + f_{n-6} + f_{n-5} + f_{n-4} + f_{n-3} + f_{n-2} \\
&\qquad \geq k\left(\frac{n-2}{2}\right) + 0 \geq k\left(\frac{n-2}{2}\right) \geq k\left(\frac{4k-2}{2}\right) \geq k(2k-1)
\end{aligned}
$$

Akibatnya, $\mathrm{an}(C_{4k}) \geq k(2k-1)$.

B. *Pelabelan Antipodal pada Graf Sikel C_n untuk $n \equiv 1 \pmod 4$*

Pada sikel C_{4k+1}, diameter sikel dinotasikan $d = \mathrm{diam}(C_{4k+1}) = 2k$. Pelabelan antipodal pada sikel C_{4k+1} dibagi menjadi dua kasus. Langkah-langkah pelabelan antipodal pada sikel C_{4k+1} didefinisikan sebagai berikut.

1. Jika k adalah bilangan ganjil.
   i. Beri urutan setiap titik pada C_{4k+1} dengan $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{4k}, x_{4k+1}$. Dengan ketentuan sebagai berikut.

$\pi(2i) = ki \bmod n$ untuk $i = 0,1,2,\ldots,2k$

$\pi(1) = \pi(4k) + k = 3k - \dfrac{k-1}{2}$

$\pi(2i+1) = (\pi(2i-1) + k) \bmod n$ untuk $i = 1,2,\ldots,2k-1$

ii. Beri label setiap titik pada C_{4k+1} dengan $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{4k}), f(x_{4k+1})$. Dengan ketentuan sebagai berikut.

$f(x_{2i}) = ki$ untuk $i = 0,1,2,\ldots,2k$

$f(x_{2i+1}) = \frac{k-1}{2} + ki$ untuk $i = 0,1,2,\ldots,2k-1$

2. Jika k adalah bilangan genap
   i. Beri urutan setiap titik pada C_{4k+1} dengan $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{4k}, x_{4k+1}$. Dengan ketentuan sebagai berikut.

   $\pi(2i) = ki \bmod n$ untuk $i = 0,1,2,\ldots,2k$

   $\pi(1) = 2k + 1$

   $$\pi(2i+1) = \begin{cases} (\pi(2i-1) + k) \bmod n, & \text{jika } i \text{ bilangan ganjil} \\ (\pi(2i-1) + k + 1) \bmod n, & \text{jika } i \text{ bilangan genap} \end{cases}$$

   ii. Beri label setiap titik pada C_{4k+1} dengan $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{4k}), f(x_{4k+1})$. Dengan ketentuan sebagai berikut.

   $f(x_{2i}) = ki$ untuk $i = 0,1,2,\ldots,2k$

   $f(x_1) = 0$

   $$f(x_{2i+1}) = \begin{cases} f(x_{2i-1}) + k, & \text{jika } i \text{ adalah bilangan ganjil} \\ f(x_{2i-1}) + k + 1, & \text{jika } i \text{ adalah bilangan genap} \end{cases}$$

Bukti Akibat 2.7 (2)

Misalkan $n = 4k + 1$, akibatnya bilangan n adalah suatu bilangan ganjil. Menurut Lemma 2.6 yang menyatakan bahwa untuk kasus $n = 4k + 1$ berlaku $f_i + f_{i+1} \geq k$. Akibatnya berlaku pertidaksamaan berikut ini,

$$\begin{aligned} f_0 + f_1 &\geq k \\ f_2 + f_3 &\geq k \\ &\vdots \\ f_{n-3} + f_{n-2} &\geq k \end{aligned}$$

Pada fungsi antipodal f_{n-2}, bilangan indeks $n-2$ adalah bilangan ganjil, sebab n adalah bilangan ganjil. Jika pertidaksamaan-pertidaksamaan tersebut dijumlahkan maka akan diperoleh,

$$f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_{n-3} + f_{n-2} \geq k\left(\frac{(n-2)+1}{2}\right) \geq k\left(\frac{n-1}{2}\right)$$

Rentang fungsi f dinyatakan dengan,

$$f(x_{n-1}) = f_0 + f_1 + \ldots + f_{n-3} + f_{n-2} \geq k\left(\frac{n-1}{2}\right) = k\left(\frac{4k}{2}\right) \geq k(2k) \geq 2k^2$$

Akibatnya, $\mathrm{an}(C_{4k+1}) \geq 2k^2$.

C. *Pelabelan Antipodal pada Graf Sikel C_n untuk $n \equiv 3 \ (mod\ 4)$*

Pada sikel C_{4k+3}, diameter sikel dinotasikan $d = \mathrm{diam}(C_{4k+3}) = 2k+1$. Langkah-langkah pelabelan antipodal pada sikel C_{4k+3} didefinisikan sebagai berikut.

i. Beri urutan setiap titik pada C_{4k+3} dengan $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{4k+1}, x_{4k+2}$. Untuk $1 \leq i \leq 2k+1$ berlaku ketentuan sebagai berikut.

$$\pi(0) = 0$$

$$\pi(2i) = \begin{cases} (\pi(2i-2)+k+1) \bmod n, & \text{jika } i \text{ bilangan ganjil;} \\ (\pi(2i-2)+k) \quad \bmod n, & \text{jika } i \text{ bilangan genap.} \end{cases}$$

Untuk $1 \leq i \leq 2k$ berlaku ketentuan sebagai berikut,

$$\pi(1) = 2k+2 \text{ dan } \pi(2i+1) = (\pi(2i-1)+k+1) \bmod n$$

ii. Beri label setiap titik pada C_{4k+3} dengan $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_{4k+1}), f(x_{4k+2})$. Untuk $1 \leq i \leq 2k$ berlaku ketentuan sebagai berikut.

$$f(x_0) = 0 \text{ dan } f(x_{2i}) = \begin{cases} f(x_{2i-2})+k, & \text{jika } i \text{ bilangan ganjil} \\ f(x_{2i-2})+k+1, & \text{jika } i \text{ bilangan genap} \end{cases}$$

$$f(x_{2i+1}) = i(k+1), \text{ untuk } 1 \leq i \leq 2k.$$

Bukti Akibat 2.7 (3)

Karena $n = 4k+3$ maka n adalah bilangan ganjil. Menurut Lemma 2.6 yang menyatakan bahwa untuk kasus $n = 4k+3$ berlaku,

$$f_i + f_{i+1} \geq k$$

Akibatnya berlaku pertidaksamaan berikut ini,

$$f_0 + f_1 \quad \geq k$$

$f_2 + f_3 \qquad \geq k$

$\vdots$

$f_{n-3} + f_{n-2} \geq k$

Pada fungsi antipodal f_{n-2}, bilangan indeks $n-2$ adalah bilangan ganjil, sebab n adalah bilangan ganjil. Jika pertidaksamaan-pertidaksamaan tersebut dijumlahkan maka akan diperoleh,

$$f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_{n-3} + f_{n-2} \geq k\left(\frac{(n-2)+1}{2}\right) \geq k\left(\frac{n-1}{2}\right)$$

Rentang fungsi f dinyatakan dengan,

$$f(x_{n-1}) = f_0 + f_1 + \ldots + f_{n-3} + f_{n-2} \geq k\left(\frac{n-1}{2}\right) \geq k\left(\frac{4k+3-1}{2}\right) \geq k(2k+1)$$

Akibatnya, $\mathrm{an}(C_{4k+3}) \geq k(2k+1)$.

III. KESIMPULAN

Pelabelan antipodal memungkinkan dua simpul yang saling antipodal atau berhadapan mendapat label yang sama. Bilangan antipodal adalah rentang minimum pelabelan, akibatnya jika diberikan suatu himpunan $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\} = V(G)$, dimana $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1} = V(C_n)$ adalah urutan dan berlaku $0 = f(x_o) \leq f(x_1) \leq f(x_2) \leq \cdots \leq f(x_{n-1})$, maka bilangan antipodal pelabelan f adalah $f(x_{n-1})$.

Pada pelabelan antipodal graf sikel, diperoleh langkah-langkah sebagai berikut. Nyatakan banyaknya simpul sebagai $n = 4k + r$, kemudian tentukan $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ pada simpul-simpul sikel C_n. Untuk nilai r yang ditentukan berdasarkan $n = 4k + r$, akan diperoleh simpul-simpul $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ berdasarkan formula yang berbeda-beda untuk nilai $r = 0,1,3$. Langkah selanjutnya adalah menentukan label setiap simpul $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ dengan $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{n-1})$. Hasil pelabelan $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{n-1})$ ditentukan berdasarkan formula yang berbeda-beda untuk nilai $r = 0,1,3$.

Batas bawah untuk pelabelan antipodal pada graf sikel C_n dengan $n = 4k + r$ untuk $n \geq 3$ dan $0 \leq r \leq 3$ adalah,

$$\mathrm{an}(C_n) \geq \begin{cases} k(2k-1), & \text{jika } r = 0 \\ 2k^2, & \text{jika } r = 1 \\ k(2k+1), & \text{jika } r = 3 \end{cases}$$

IV. UCAPAN TERIMA KASIH

Banyak pihak yang telah membantu dalam penyelesaian Tugas Akhir ini. Oleh karena itu, rasa hormat dan terimakasih penulis ingin sampaikan kepada :

1. Drs. Solichin Zaki, M.Kom selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Matematika Universitas Diponegoro.
2. Bapak Bambang Irawanto, S.Si, M.Si selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan bimbingan, arahan, dan nasehat-nasehatnya selama ini.
3. Bapak Bayu Surarso, M.Sc, PhD, selaku dosen pembimbing II yang juga telah membimbing dan mengarahkan penulis hingga selesainya Tugas Akhir ini.
4. Semua pihak yang telah membantu hingga selesainya tugas akhir ini, yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu. Semoga Allah SWT membalas segala kebaikan yang telah Anda berikan kepada penulis, Amin.

V. DAFTAR PUSTAKA

[1] Puspitasari, Ambar. 2012. *Skripsi Bilangan Radio pada Graf Gear*. UNDIP. Semarang.

[2] Su-tzu Juan, Justie and Daphne Der-Fen Liu. 2012. *Antipodal Labelings for Cycles*. Ars Combinatoria Vol.103, hal : 81-96.

[3] William, Albert and Kenneth, Charles Robert. 2011. *Radio Antipodal Number of Certain Graphs*. J. Comp. & Math. Sci. Vol.2 (6), hal : 868-872.