

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu ilmu terapan matematika yang hingga kini terus dikembangkan. Hal ini dikarenakan dominasi sistem jaringan yang digunakan oleh masyarakat umum, perusahaan, maupun instansi pemerintahan memerlukan efektifitas dan efisiensi dalam setiap aktifitasnya. Secara luas dikatakan, sebuah jaringan adalah sebuah sistem yang melibatkan aliran atau perpindahan komoditas. Jaringan-jaringan ini dapat dimodelkan ke dalam kesatuan matematika yang disebut graf. Representasi visual dari graf adalah dengan menyatakan objek sebagai noktah, bulatan, atau titik, sedangkan hubungan antara objek dinyatakan dengan garis. Salah satu topik yang sangat menarik dalam graf adalah pelabelan graf.

Pelabelan graf merupakan suatu fungsi yang memetakan himpunan titik dari suatu graf ke bilangan asli. Pelabelan graf diperkenalkan pertama kali oleh Rosa pada tahun 1967. Pelabelan yang merupakan salah satu masalah penugasan frekuensi (*frequency assignment problem*) adalah pelabelan radio- k (*radio k -labeling*). Pelabelan radio mencakup himpunan terbesar dari pembatasan yang memungkinkan, pembatasan tersebut berlaku untuk pasangan titik pada semua jarak yang mungkin.

Pelabelan radio adalah pelabelan permasalahan graf, diusulkan oleh Chartrand, dimana dapat dianalogikan dengan penetapan frekuensi pada pemancar saluran FM untuk menghindari gangguan sinyal. Pemancar radio yang berdekatan secara geografis harus mempunyai frekuensi yang sangat berbeda, sedangkan pemancar radio dengan perbedaan geografis yang besar dapat mempunyai frekuensi yang hampir sama. Secara umum, dimodelkan dengan memisalkan pemancar sebagai titik pada sebuah graf [3].

Pada pelabelan radio- k (*radio k -labeling*), dengan kasus tertentu yaitu $k = 1$, *1-labeling* merupakan pewarnaan titik yang lazim digunakan. Pada kasus lainnya dengan $k = 2$, *2-labeling* sama dengan *distance two labeling* atau *$L(2,1)$ -labeling*. Pelabelan jenis ini sering dikenal dengan pelabelan jarak, dimana pembatasan ditetapkan pada label dengan perbedaan antara dua titik dengan jarak 1 atau 2. Sedangkan pada kasus $k = \text{diam}(G)$, pelabelannya dikenal dengan *radio labeling* atau *multi level distance labeling*. Bilangan $\Phi_{\text{diam}(G)}$ suatu graf G dinamakan *radio number* suatu graf G , yang dinotasikan $\text{rn}(G)$.

Pada kasus $k = \text{diam}(G) - 1$, *k -labeling* dinamakan pelabelan antipodal (*antipodal labeling*). Bilangan antipodal (*antipodal number*) graf G , dinotasikan $\text{an}(G)$ yaitu rentang minimum pelabelan antipodal pada G [5]. *Radio labeling* adalah fungsi satu-satu, sedangkan pada pelabelan antipodal, dua simpul pada jarak $\text{diam}(G)$ bisa saja mendapat label yang sama. Dengan kata lain, dua simpul yang berhadapan atau antipodal bisa saja mendapat label yang sama [7]. Oleh

karena itu, pelabelan jenis ini dinamakan pelabelan antipodal (*antipodal labeling*).

Pelabelan antipodal pada graf sikel pertama kali dipelajari oleh Chartrand, dkk, dimana batas umum $an(G)$ dapat diperoleh. Sedangkan pada path P_n , nilai eksak $an(P_n)$ ditemukan oleh Khennoufa dan Togni (2005). Pelabelan antipodal pada sikel C_n dipelajari oleh G. Chartrand, D. Erwin, dan P.Zhang (2000), dengan batas bawah untuk $an(C_n)$ telah ditunjukkan. Di sisi lain, untuk kasus $n \equiv 2 \pmod{4}$ telah dibuktikan bahwa $an(C_n)$ adalah suatu nilai eksak.

Pada tugas akhir ini akan dibuktikan bahwa batas bawah $an(C_n)$ untuk kasus $n \equiv 1 \pmod{4}$, serta memperbaiki batas bawah dari $an(C_n)$ untuk kasus $n \equiv 0 \pmod{4}$.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, permasalahan yang diangkat dalam tugas akhir ini adalah sebagai berikut :

- i. Bagaimana langkah-langkah dalam pelabelan antipodal pada graf sikel.
- ii. Bagaimana menentukan bilangan antipodal (*antipodal number*) untuk graf sikel.

1.3 Pembatasan Masalah

Dalam tugas akhir ini pembahasan dibatasi mengenai :

- i. Pelabelan antipodal dan graf khusus sederhana yang dibahas dalam tugas akhir ini adalah graf sikel C_n .
- ii. Batas bawah yang dibahas pada tugas akhir ini hanya untuk sikel C_n dengan $n \equiv 0 \pmod{4}$, $n \equiv 1 \pmod{4}$, dan $n \equiv 3 \pmod{4}$. Batas bawah untuk sikel C_n dengan $n \equiv 2 \pmod{4}$ tidak dibahas karena telah dibuktikan oleh G. Chartrand, D. Erwin, dan P. Zhang pada jurnal "Radio Antipodal Colorings of Cycles".

1.4 Tujuan Penulisan

Adapun tujuan penulisan dari tugas akhir ini yaitu :

- i. Merumuskan langkah-langkah dalam pelabelan antipodal pada graf sikel serta sifat-sifat yang terkandung didalamnya.
- ii. Mengkaji pelabelan antipodal pada graf sikel sehingga dapat diketahui *antipodal number* atau bilangan antipodal

1.5 Metode Penulisan

Metode yang digunakan dalam penyusunan tugas akhir ini adalah metode tinjauan pustaka (*study literature*). Metode ini dilakukan dengan mengumpulkan informasi dari beberapa buku dan jurnal seperti yang tertera dalam daftar pustaka.

Pustaka utama yang digunakan adalah [5]. Dalam tugas akhir ini, penulis akan menjelaskan mengenai pelabelan antipodal pada graf sikel dan sifat-sifatnya serta akan merumuskan langkah-langkah pelabelan antipodal pada sikel.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan dalam tugas akhir ini terbagi menjadi empat bab yang dimulai dengan bab pendahuluan dan diakhiri dengan bab penutup.

Bab I merupakan pendahuluan yang memuat latar belakang permasalahan, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan penulisan, metode pembahasan dan sistematika penulisan.

Bab II merupakan teori penunjang yang digunakan dalam pembahasan tugas akhir ini meliputi graf, teori bilangan, fungsi dan permutasi, serta pelabelan antipodal pada graf sikel.

Bab III merupakan pembahasan tentang hasil utama dari tugas akhir ini yang menjelaskan tentang pelabelan antipodal pada sikel beserta batas bawahnya dan diberikan beberapa definisi dan teorema yang berkaitan dengan pelabelan antipodal pada sikel.

Bab IV merupakan bab penutup yang berisi tentang kesimpulan dari pembahasan yang telah dilakukan.