PROSIDING SEMINAR NASIONAL STATISTIKA
UNIVERSITAS DIPONEGORO 2011
ISBN: 978-979-097-142-4

SISTEM ANTRIAN DENGAN PRIORITAS PELAYANAN

Durratun Ni'amah[1], Sugito[2]

[1)]Alumni Program Studi Statistika FMIPA UNDIP

[2)]Program Studi Statistika FMIPA UNDIP

Abstrak

Dalam model-model antrian, disiplin antrian yang paling sering digunakan adalah *First Come First Serve,* yaitu pelanggan yang datang lebih dahulu akan dilayani terlebih dahulu. Akan tetapi dalam banyak keadaan, tidak hanya disiplin antrian tersebut yang digunakan. Ada banyak disiplin antrian lain, misalnya antrian dengan prioritas pelayanan. Antrian dengan disiplin antrian prioritas merupakan suatu disiplin antrian yang menunjukkan suatu pelayanan akan didahulukan kepada pelanggan dengan prioritas utama, yaitu pelanggan dengan prioritas paling kecil. Dengan menganggap bahwa terdapat *m* tipe pelanggan, maka pelanggan tipe 1 adalah pelanggan dengan prioritas paling tinggi sedangkan pelanggan tipe *m* merupakan prioritas terendah. Dalam sistem antrian dengan prioritas pelayanan, terdapat dua aturan yang dapat digunakan yaitu aturan preemptive dan nonpreemptive. Aturan preemptive tidak menguraikan sistem antriannya secara mendalam, sedangkan aturan nonpreemptive dibagi menjadi dua yaitu sistem dengan pelayanan tunggal dan multichannel. Penulisan model antrian sistem pelayanan tunggal yang disimbolkan $(M_i/M_i/1)$:(NPD/∞/∞) dan pelayanan multichannel yang disimbolkan $(M_i/M/c)$:(NPD/∞/∞) bertujuan untuk menentukan probabilitas steady state dan ukuran kerja sistem model antrian dengan prioritas pelayanan serta menganalisis ukuran kinerja sistem model antrian dengan prioritas pelayanan.

Kata Kunci : Antrian, Prioritas, Pelayanan

1. Pendahuluan

1.1. Pengertian

Antrian ialah suatu garis tunggu dari nasabah (satuan) yang memerlukan layanan dari satu atau lebih pelayan (fasilitas layanan). Suatu proses antrian *(queuing process)* adalah suatu proses yang berhubungan dengan kedatangan seorang pelanggan pada suatu fasilitas pelayanan, kemudian menunggu dalam suatu baris (antrian) jika semua pelayannya sibuk, dan akhirnya meninggalkan fasilitas tersebut *(Bronson, 1991).*

Dalam sistem antrian ada enam komponen dasar yang harus diperhatikan agar penyedia fasilitas pelayanan dapat melayani para pelanggan yang berdatangan, yaitu :

a. Pola Kedatangan

Pola kedatangan para pelanggan biasanya diperhitungkan melalui waktu antar kedatangan, yaitu waktu antara kedatangan dua pelanggan yang berurutan pada suatu fasilitas pelayanan.

ISBN: 978-979-097-142-4

Bila bentuk kedatangan ini tidak disebut secara khusus, maka dianggap bahwa pelanggan tiba satu per satu. Asumsinya ialah kedatangan pelanggan mengikuti suatu proses dengan distribusi probabilitas tertentu. Distribusi probabilitas yang sering digunakan adalah distribusi Poisson, di mana kedatangan bersifat bebas, tidak terpengaruh oleh kedatangan sebelum atau sesudahnya. Asumsi distribusi Poisson menunjukkan bahwa kedatangan pelanggan sifatnya acak dan mempunyai rata-rata kedatangan sebesar *lamda* (λ) (*Kakiay, 2004*).

b. Pola Pelayanan

Pola pelayanan biasanya dicirikan oleh waktu pelayanan *(service time)*, yaitu waktu yang dibutuhkan seorang pelayan untuk melayani seorang pelanggan. Waktu pelayanan *(service time)* adalah lamanya waktu sejak pelayanan diberikan kepada seorang pelanggan sampai selesai pada fasilitas pelayanan. Rata-rata pelayanan *(mean server rate)* diberi simbol μ. Simbol tersebut mewakili rata-rata banyaknya pelanggan yang dapat dilayani dalam satuan (unit) waktu. Sedangkan rata-rata waktu pelayanan *(average service time)* ialah rata-rata waktu yang dipergunakan untuk melayani per pelanggan , diberi simbol $1/\mu$ unit (satuan) (*Kakiay, 2004*).

c. Fasilitas Pelayanan

Fasilitas pelayanan berkaitan erat dengan baris antrian yang akan dibentuk. Desain fasilitas pelayanan ini dapat dibagi dalam tiga bentuk, yaitu :

a) Bentuk series, dalam satu garis lurus ataupun garis melingkar
b) Bentuk paralel, dalam beberapa garis lurus yang antara satu dengan yang lain paralel
c) Bentuk network station, yang dapat didesain secara series dengan pelayanan lebih dari satu pada setiap stasiun. Bentuk ini dapat juga dilakukan secara paralel dengan stasiun yang berbeda-beda (*Kakiay, 2004*).

d. Kapasitas Sistem

Kapasitas sistem adalah jumlah maksimum pelanggan, mencakup yang sedang dilayani dan yang berada dalam antrian, yang dapat ditampung oleh fasilitas pelayanan pada saat yang sama. Sebuah sistem yang tidak membatasi jumlah pelanggan di dalam fasilitas pelayanannya dikatakan memiliki kapasitas tak terhingga, sedangkan suatu sistem yang membatasi jumlah pelanggan yang ada dalam suatu fasilitas pelayanannya dikatakan memiliki kapasitas yang terbatas.

ISBN: 978-979-097-142-4

e. Disiplin Antrian

Menurut Kakiay (2004), disiplin antrian adalah aturan dimana para pelanggan dilayani, atau disiplin pelayanan (*service discipline*) yang mengatur urutan (*order*) para pelanggan menerima pelayanan.

f. Sumber Pemanggilan

Dalam fasilitas pelayanan, yang berperan sebagai sumber pemanggilan dapat berupa mesin maupun manusia. Apabila ada sejumlah mesin yang rusak maka sumber pemanggilan akan berkurang dan tidak dapat melayani pelanggan. Maka Permasalahan yang biasanya terjadi adalah sebagai berikut :

a) Sumber pemanggilan terbatas (*finite calling source*).
b) Sumber pemanggilan tak terbatas (*infinite calling source*) (*Kakiay, 2004*).

1.2. Notasi dan Terminologi

Notasi yang sesuai untuk meringkaskan karakteristik utama dari antrian parallel, secara universal dibakukan dalam format berikut ini

$$(a/b/c/) : (d/e/f)$$

dengan simbol-simbol *a, b, c, d, e, dan f* adalah unsur-unsur dasar dari model ini sebagai berikut

a	=	distribusi kedatangan
b	=	distribusi waktu pelayanan (atau keberangkatan)
c	=	jumlah pelayan parallel ($c = 1, 2, \ldots \infty$)
d	=	peraturan pelayanan (misalnya FCFS, LCFS, SIRO)
e	=	jumlah maksimum yang diijinkan masuk dalam sistem (dalam antrian + dalam pelayanan)
f	=	ukuran sumber pemanggilan

(*Taha, 1996*).

1.3. Distribusi Poisson

Percobaan yang menghasilkan peubah acak X yang bernilai numerik, yaitu banyaknya hasil selama selang waktu tertentu atau dalam daerah tertentu disebut percobaan Poisson. Banyaknya hasil X dalam suatu percobaan Poisson disebut suatu peubah acak Poisson dan distribusi peluangnya disebut distribusi Poisson.

ISBN: 978-979-097-142-4

Distribusi peluang peubah acak Poisson *X*, yang menyatakan banyaknya sukses yang terjadi dalam suatu selang waktu atau daerah tertentu dinyatakan dengan t, diberikan oleh

$$f(x) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}$$

Distribusi Poisson banyak digunakan dalam pengendalian mutu, pertanggungan mutu dan penerapan penerimaan. Disamping itu, beberapa distribusi kontinu yang penting yang digunakan dalam teori keterandalan (reliabilitas) dan teori antrian bergantung kepada proses Poisson.

(Walpole,Ronald.E., 1986)

1.4. Distribusi Eksponensial

Distribusi Eksponensial merupakan bentuk khusus dari distribusi Gamma. Keduanya mempunyai terapan yang luas. Distribusi Eksponensial memiliki peran yang penting dalam teori antrian. Random variabel dari distribusi eksponensial ini banyak dipakai dalam distribusi antrian karena:

a. Mempunyai perkiraan yang mendekati ketepatan *(good approximation)*
b. Mudah penyelesaiannya dengan model-model matematis

Distribusi Gamma yang khusus dengan α = 1 disebut distribusi eksponensial, dengan parameter β, dan fungsi padatnya berbentuk

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} & x > 0 \\ 0 & \text{untuk } x \text{ lainnya} \end{cases}$$

dengan $\beta > 0$

Rataan dan variansi distribusi eksponensial adalah

$\mu = \beta$ dan $\alpha^2 = \beta^2$

(Walpole,Ronald.E., 1986)

1.5. Ukuran Steady State

Menurut Taha H. A. (1996), segera setelah probabilitas steady state dari p_n untuk n pelanggan dalam sistem ditentukan, kita dapat menghitung ukuran-ukuran steady state dari kenerja dari situasi antrian tersebut dengan cara yang sederhana. Ukuran-ukuran kinerja seperti

ISBN: 978-979-097-142-4

ini lalu dapat dipergunakan untuk menganalisis operasi situasi antrian tersebut untuk maksud pembuatan rekomendasi tentang rancangan sistem tersebut.

Ukuran-ukuran kinerja yang terpenting adalah jumlah pelanggan yang menunggu yang diperkirakan, waktu menunggu per pelanggan yang diperkirakan, dan pemanfaatan sarana pelayanan yang diperkirakan.

Notasi dalam steady state:

L_s = jumlah pelanggan yang diperkirakan dalam *sistem*

L_q = jumlah pelanggan yang diperkirakan dalam *antrian*

W_s = waktu menunggu yang diperkiraan dalam *sistem*

W_q = waktu menunggu yang diperkiraan dalam *antrian*

2. Sistem Antrian Dengan Prioritas Pelayanan

Sejauh ini dalam banyak penelitian, sering dianggap bahwa antrian unit pelayanan dilayani berdasarkan aturan yang datang pertama dilayani pertama *(First Come First Serve)*. Jelas, bukan hanya FCFS saja jenis disiplin antrian yang digunakan. Terdapat jenis disiplin antrian lain, misalnya, pelanggan dipilih berdasarkan random/acak *(Service In Random Order /SIRO)* dan juga pelanggan dengan kedatangan terakhir akan dilayani pertama *(Last Come First Serve/LCFS)*.

Pada kenyataanya, selain ketiga jenis disiplin antrian diatas, unit juga dapat dilayani secara prioritas. Pada banyak organisasi, urutan di mana pelanggan akan dilayani tergantung pada tipe pelanggan. Jadi, jika terdapat prioritas tertinggi di dalam suatu sistem antrian, maka pelanggan dengan prioritas tertinggi itu akan lebih dahulu masuk ke dalam layanan sebelum prioritas yang lebih rendah. Sebagai contoh, ruang Unit Gawat Darurat (UGD) pada rumah sakit biasanya akan melayani lebih dahulu pasien dengan keadaan yang serius sebelum melayani pasien di luar ruang UGD. Selain itu, juga pada beberapa sistem komputer, pekerjaan yang lebih lama tidak akan memasuki pelayanan sampai semua pekerjaan yang lebih singkat pada antrian telah diselesaikan. Model-model di mana tipe pelanggan yang akan dilayani melalui pelayanan ditentukan oleh pelayan disebut model antrian prioritas.

(Winston, 2004)

ISBN: 978-979-097-142-4

2.1. Pengertian Sistem Antrian dengan Prioritas Pelayanan

Dalam model-model antrian dengan prioritas, diasumsikan bahwa beberapa antrian yang paralel dibentuk di depan sebuah sarana pelayanan dengan setiap antrian diperuntukkan bagi para pelanggan dengan prioritas tertentu. Jika sarana tersebut memiliki *m* antrian, kita mengasumsikan bahwa antrian 1 memiliki prioritas pelayanan tertinggi, dan antrian *m* adalah untuk para pelanggan dengan prioritas terendah. Laju kedatangan dan pelayanan dapat bervariasi untuk antrian dengan prioritas berbeda. *(Taha, H. A., 1996)*

Pada tingkat kedatangan dapat ditentukan bahwa setiap pelanggan yang berada dalam antrian harus dilayani berdasarkan ”yang pertama datang, juga pertama dilayani” (FCFS). Dalam prioritas pelayanan terdapat dua aturan yang dapat diikuti, yaitu:

1. Aturan Preemptive

   Menunjukkan dimana pelayanan pelanggan dengan prioritas lebih rendah dapat diinterupsi demi seorang pelanggan yang baru tiba dan memiliki prioritas yang lebih tinggi.

2. Aturan Non-Preemptive (NP)

   Menunjukkan pelayanan dimana seorang pelanggan, begitu dilayani, hanya akan meninggalkan sarana pelayanan tersebut setelah pelayanan diselesaikan dan tanpa bergantung pada prioritas para pelanggan yang baru tiba.

Aturan preemptive umumnya tidak menguraikan sistem antriannya secara mendalam, sedangkan pada sistem antrian non-preemptive diuraikan melalui pelayanan tunggal dan pelayanan majemuk.

Pada model pelayanan tunggal dapat ditentukan untuk menggunakan distribusi Poisson sebagai tingkat kedatangan pada sistem antrian, sementara pelayanan menggunakan distribusi bebas *(arbitrary distribution).*

Pada kasus pelayanan majemuk sudah ditentukan bahwa kedatangan dan pelayanan mengikuti distribusi Poisson.

(*Kakiay, T.J., 2004*)

2.2. Pelayanan Tunggal Non Preemptive

ISBN: 978-979-097-142-4

Pada aturan non-preemptive, pelayanan seorang pelanggan tidak dapat diinterupsi. Setelah masing-masing pelayanan diselesaikan, pelanggan berikutnya dipilih untuk memasuki pelayanan dengan mengutamakan pelanggan dengan nomor antrian terkecil (dengan tiap prioritas dipilih berdasarkan FCFS). Sebagai contoh, jika terdapat $n = 3$ dengan tiga tipe 2 dan empat tipe 3, pelanggan berikutnya yang memasuki pelayanan merupakan pelanggan tipe 2 yang datang pertama pada tipe kedatangan tersebut.

Pelayanan tunggal dengan aturan non-preemptive dikenal dengan simbol $(M_i/G_i/1):(NPD/\infty/\infty)$. Model pelayanan ini mengikuti sistem pelayanan dengan distribusi bebas.

Dinyatakan $F_i(t)$ sebagai fungsi kumulatif dari distribusi bebas pada waktu pelayanan pada antrian ke-*i* untuk i = 1, 2, ..., m.

Bila rata-rata (mean) = $E_i(t)$, dengan $\text{var}_i(t)$ sebagai varian dan λ_i merupakan tingkat kedatangan dari antrian ke-i per unit waktu, maka juga akan terdapat antrian dalam rangkaian sistem antrian tersebut.

Perumusan yang diuraikan dalam sistem antrian pada umumnya dinyatakan sebagai berikut:

1. $L_s^{(i)}$ = ekspektasi jumlah pelanggan tipe *i* dalam sistem

$$L_s^{(i)} = L_q^{(i)} + \rho_i$$

2. $L_q^{(i)}$ = ekspektasi jumlah pelanggan tipe *i* dalam antrian

$$L_q^{(i)} = \lambda_i . W_q^{(i)}$$

3. $W_q^{(i)}$ = ekspektasi waktu menunggu seorang pelanggan tipe *i* dalam antrian

$$W_q^{(i)} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \left[\lambda_k \left(E_k^2(t) + \text{var}_k(t)\right)\right]}{2(1-\sigma_{\text{i-1}})(1-\sigma_{\text{i}})}$$

4. $W_s^{(i)}$ = ekspektasi waktu menunggu seorang pelanggan tipe *i* dalam sistem

$$W_s^{(i)} = W_q^{(i)} + E_i(t)$$

Dengan pernyataan yang ditunjukkan pada:

ISBN: 978-979-097-142-4

- $\rho_i = \lambda_i . E_i(t)$
- $\sigma_\text{i} = \sum_{k=1}^{n} \rho_k$ untuk n = 1, 2, … m
- $\sigma_0 = 0$

Dari semua perumusan ini akan dapat diperoleh W_q sebagai ekspektasi waktu menunggu di dalam antrian untuk setiap pelanggan dengan prioritas masing-masing, yang dapat dirumuskan melalui:

$$W_q = \sum_{i=1}^{r} \frac{\lambda_i}{\lambda} W_q^{(i)}$$

Dengan pernyataan:

- $\lambda = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$
- $\frac{\lambda_i}{\lambda}$ = Berat Relatif dari $W_q^{(i)}$

Demikian juga hal yang sama dapat dilakukan pada W_s

(*Kakiay, T.J., 2004*)

2.3. Model $(M_i/M_i/1):(NPD/\infty/\infty)$

Model antrian $(M_i/M_i/1):(NPD/\infty/\infty)$ adalah model pelayanan tunggal tanpa kapasitas baik dari kapasitas sistem tersebut maupun kapasitas sumber pemanggilan dengan distribusi kedatangan mengikuti distribusi Poisson. Sedangkan distribusi waktu pelayanan berdistribusi Eksponensial

Dalam model ini para pelanggan tiba dengan tingkat kedatangan rata-rata adalah λ_k. Kecepatan pelayanan per pelayan sama dengan μ_k. Di mana parameter λ_k mengikuti distribusi Poisson. Sedangkan parameter μ_k mengikuti distribusi Eksponensial. Pelayanan dilakukan atas dasar prioritas yaitu pelanggan dengan prioritas tertinggi akan dilayani terlebih dahulu dibandingkan pelanggan dengan prioritas di bawahnya.

Ukuran steady state untuk model $(M_i/M_i/1):(NPD/\infty/\infty)$:

- $W_q^{(i)}$ = ekspektasi waktu menunggu seorang pelanggan tipe i dalam antrian

ISBN: 978-979-097-142-4

$$W_q^{(i)} = \frac{\sum_{k=1}^{r} \frac{\rho_k}{\mu_k}}{(1-\sigma_{\text{i-1}})(1-\sigma_{\text{i}})}$$

- $W_s^{(i)} =$ ekspektasi waktu menunggu seorang pelanggan tipe i dalam sistem

$$W_s^{(i)} = \frac{\mu_i \sum_{k=1}^{r} \frac{\rho_k}{\mu_k} + (1-\sigma_{\text{i-1}})(1-\sigma_{\text{i}})}{\mu_i (1-\sigma_{\text{i-1}})(1-\sigma_{\text{i}})}$$

- $L_q^{(i)} =$ ekspektasi jumlah pelanggan tipe i dalam antrian

$$L_q^{(i)} = \frac{\lambda_i . \sum_{k=1}^{r} \frac{\rho_k}{\mu_k}}{(1-\sigma_{\text{i-1}})(1-\sigma_{\text{i}})}$$

- $L_s^{(i)} =$ ekspektasi jumlah pelanggan tipe i dalam sistem

$$L_s^{(i)} = \frac{\lambda_i . \sum_{k=1}^{r} \frac{\rho_k}{\mu_k} + \rho_i (1-\sigma_{\text{i-1}})(1-\sigma_{\text{i}})}{(1-\sigma_{\text{i-1}})(1-\sigma_{\text{i}})}$$

- $L_q =$ total ukuran ekspektasi jumlah pelanggan dalam sistem

$$L_q = \sum_{i=1}^{r} L_q^{(i)} = \sum_{i=1}^{r} \frac{\lambda_i . \sum_{k=1}^{r} \frac{\rho_k}{\mu_k}}{(1-\sigma_{\text{i-1}})(1-\sigma_{\text{i}})}$$

(*Gross, D and Harris, C. M. 1998*)

2.4. Pelayanan Multichannel Non Preemptive

Pelayanan multichannel dengan aturan non preemptive dikenal dengan simbol $(M_i/M/c):(NPD/\infty/\infty)$, merupakan modal untuk semua pelanggan mendapatkan distribusi waktu pelayanan yang sesuai dengan probabilitasnya.

Semua fasilitas pelayanan akan mengikuti distribusi pelayanan yang identik dengan distribusi eksponensial dengan tingkat rata-rata pelayanan μ. Sedangkan kedatangan pada antrian

ISBN: 978-979-097-142-4

dengan k prioritas akan mengikuti distribusi Poisson pada suatu tingkat rata-rata kedatangan λ_k untuk k = 1, 2, ..., m.

Analisis untuk kasus multichannel sangat mirip dengan model untuk single channel kecuali bahwa sekarang harus diasumsikan bahwa layanan diatur oleh distribusi eksponensial identik untuk prioritas masing-masing di setiap saluran c. Untuk multichannel harus diasumsikan bahwa tidak ada perbedaan waktu pelayanan antara prioritas.

Ukuran kinerja sistem:

- $W_q^{(i)}$ = ekspektasi waktu menunggu seorang pelanggan tipe i dalam antrian

$$W_q^{(i)} = \frac{\left[c\mu \left(c!(1-\rho)\sum_{n=0}^{c-1}\frac{(cp)^{n-c}}{n!} + 1 \right) \right]^{-1}}{(1-\sigma_{\text{i-1}})(1-\sigma_{\text{i}})}$$

- $L_q^{(i)}$ = ekspektasi jumlah pelanggan tipe i dalam antrian

$$L_q^{(i)} = \frac{\lambda_i \left[c\mu \left(c!(1-\rho)\sum_{n=0}^{c-1}\frac{(cp)^{n-c}}{n!} + 1 \right) \right]^{-1}}{(1-\sigma_{\text{i-1}})(1-\sigma_{\text{i}})}$$

- $L_s^{(i)}$ = ekspektasi jumlah pelanggan tipe i dalam sistem

$$L_s^{(i)} = \frac{\lambda_i \left[c\mu \left(c!(1-\rho)\sum_{n=0}^{c-1}\frac{(cp)^{n-c}}{n!} + 1 \right) \right]^{-1} + \rho_i (1-\sigma_{\text{i-1}})(1-\sigma_{\text{i}})}{(1-\sigma_{\text{i-1}})(1-\sigma_{\text{i}})}$$

- $W_s^{(i)}$ = ekspektasi waktu menunggu seorang pelanggan tipe i dalam sistem

$$W_s^{(i)} = \frac{\lambda \left[c\mu \left(c!(1-\rho)\sum_{n=0}^{c-1}\frac{(cp)^{n-c}}{n!} + 1 \right) \right]^{-1} + \rho (1-\sigma_{\text{i-1}})(1-\sigma_{\text{i}})}{\lambda(1-\sigma_{\text{i-1}})(1-\sigma_{\text{i}})}$$

- W_q = nilai harapan banyaknya pelanggan yang pada seluruh prioritas

$$W_q = \sum_{i=1}^{r} \frac{\lambda_i}{\lambda} \frac{\left[c\mu \left(c!(1-\rho)\sum_{n=0}^{c-1}\frac{(cp)^{n-c}}{n!} + 1 \right) \right]^{-1}}{(1-\sigma_{\text{i-1}})(1-\sigma_{\text{i}})}$$

ISBN: 978-979-097-142-4

- L_q = ekspektasi jumlah pelanggan yang menunggu untuk semua antrian paralel

$$L_q = \frac{\lambda\left[c\mu\left(c!(1-\rho)\sum_{n=0}^{c-1}\frac{(cp)^{n-c}}{n!}+1\right)\right]^{-1}}{(1-\sigma_{i-1})(1-\sigma_i)}$$

Untuk $\lambda = \sum_{i=1}^{r}\lambda_i$

(*Gross, D and Harris, C. M. 1998*).

3. Kesimpulan

Adapun kesimpulan dari penulisan makalah ini adalah sebagai berikut :

1. Antrian dengan prioritas pelayanan merupakan salah satu disiplin antrian yang kerap ditemui dalam kehidupan sehari-hari. Terdapat dua macam tipe disiplin antrian ini yaitu preemptive dan nonpreemptive.
2. Ukuran kinerja sistem untuk model antrian $(M_i/M_i/1):(NPD/\infty/\infty)$ sebagai berikut :

$$W_q^{(i)} = \frac{\sum_{k=1}^{r}\frac{\rho_k}{\mu_k}}{(1-\sigma_{i-1})(1-\sigma_i)}$$

$$W_s^{(i)} = \frac{\mu_i\sum_{k=1}^{r}\frac{\rho_k}{\mu_k}+(1-\sigma_{i-1})(1-\sigma_i)}{\mu_i(1-\sigma_{i-1})(1-\sigma_i)}$$

$$L_q^{(i)} = \frac{\lambda_i.\sum_{k=1}^{r}\frac{\rho_k}{\mu_k}}{(1-\sigma_{i-1})(1-\sigma_i)}$$

$$L_s^{(i)} = \frac{\lambda_i.\sum_{k=1}^{r}\frac{\rho_k}{\mu_k}+\rho_i(1-\sigma_{i-1})(1-\sigma_i)}{(1-\sigma_{i-1})(1-\sigma_i)}$$

$$L_q = \sum_{i=1}^{r}\frac{\lambda_i.\sum_{k=1}^{r}\frac{\rho_k}{\mu_k}}{(1-\sigma_{i-1})(1-\sigma_i)}$$

ISBN: 978-979-097-142-4

3. Ukuran kinerja sistem untuk model antrian $(M_i/M/c):(NPD/\infty/\infty)$ sebagai berikut :

$$W_q^{(i)} = \frac{\left[c\mu \left(c!(1-\rho)\sum_{n=0}^{c-1}\frac{(cp)^{n-c}}{n!} + 1 \right) \right]^{-1}}{(1-\sigma_{i-1})(1-\sigma_i)}$$

$$L_q^{(i)} = \frac{\lambda_i \left[c\mu \left(c!(1-\rho)\sum_{n=0}^{c-1}\frac{(cp)^{n-c}}{n!} + 1 \right) \right]^{-1}}{(1-\sigma_{i-1})(1-\sigma_i)}$$

$$L_s^{(i)} = \frac{\lambda_i \left[c\mu \left(c!(1-\rho)\sum_{n=0}^{c-1}\frac{(cp)^{n-c}}{n!} + 1 \right) \right]^{-1} + \rho_i(1-\sigma_{i-1})(1-\sigma_i)}{(1-\sigma_{i-1})(1-\sigma_i)}$$

$$W_s^{(i)} = \frac{\lambda \left[c\mu \left(c!(1-\rho)\sum_{n=0}^{c-1}\frac{(cp)^{n-c}}{n!} + 1 \right) \right]^{-1} + \rho(1-\sigma_{i-1})(1-\sigma_i)}{\lambda(1-\sigma_{i-1})(1-\sigma_i)}$$

$$W_q = \sum_{i=1}^{r}\frac{\lambda_i}{\lambda}\frac{\left[c\mu \left(c!(1-\rho)\sum_{n=0}^{c-1}\frac{(cp)^{n-c}}{n!} + 1 \right) \right]^{-1}}{(1-\sigma_{i-1})(1-\sigma_i)}$$

$$L_q = \frac{\lambda \left[c\mu \left(c!(1-\rho)\sum_{n=0}^{c-1}\frac{(cp)^{n-c}}{n!} + 1 \right) \right]^{-1}}{(1-\sigma_{i-1})(1-\sigma_i)}$$

Untuk $\lambda = \sum_{i=1}^{r}\lambda_i$

Daftar Pustaka

Aminudin. 2005. *Prinsip-Prinsip Riset Operasi*. Erlangga. Jakarta.

Bronson, R. 1991. *Teori dan Soal-Soal Operation Reserch*. Erlangga. Jakarta.

Gross, D and Harris, C. M. 1998. *Fundamental of Queueing Theory Third Edition*. New York : John Wiley and Sons, INC.

Kakiay, T. J., 2004, *Dasar Teori Antrian Untuk Kehidupan Nyata*, Penerbit Andi, Yogyakarta.

ISBN: 978-979-097-142-4

Praptono. 1986. *Pengantar Proses Stokastik I.* Jakarta: Universitas Terbuka.

Saaty, T. L. 1961. *Elements of Queuing Theory With Applications.* New York: The Maple Press Company.

Subagyo, P. 1984. *Dasar-Dasar Operation Research*. BPFE. Yogyakarta.

Supranto, J. 2006. *Riset Operasi untuk Pengambilan Keputusan.* Jakarta : PT Gramedia.

Taha, H.A., 1996, *Riset Operasi Jilid 2***,** Binarupa Aksara, Jakarta.

Walpole,R. E., 1986. *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan.* Bandung: Institut Teknologi Bandung.

Winston, W. L. 2004. *Introduction to Probability Models 4th edition.* Canada : Indiana University.

http://telecom.ee.itb.ac.id/~hend/ET6040/AntrianLain.ppt. diakses tanggal 29 April 2010