Jurnal Sains & Matematika (JSM)
Volume 16, Nomor 1, Januari 2008

ISSN0 854-0675
Artikel Penelitian: 21-25

Taksiran Jumlah Gagal pada Renewal untuk Waktu Kontinu dan Diskrit

Sudarno
Laboratorium Statistika, Jurusan Matematika, FMIPA, Undip, Semarang

ABSTRACT---We will encounter event in production process that the system or component get breakdown. The solution is that the system or component should be repaired or put new component in order to production process can be continued. This event is renewal processes. The event will get failure and repair time distributions. This paper will determine avaibility and expected number of failures. The time scale are continuous and discrete time. Computation and graph by MATLAB 7.0. These results that on continuous time, the failure and repair time are exponential distributions. The avaibility and the expected number of renewals are exponential functions, but in long time the avaibility will converge to a constant. If value of times is greather then the expected number of failures is greather but the avaibility is lower, up to a constant. Mean while on dicrete time, the falure is nomal distribution. When value of time is higher then the expected number of failure is higher, too.

Key words: *Renewal, Avaibility, Expected number of failures.*

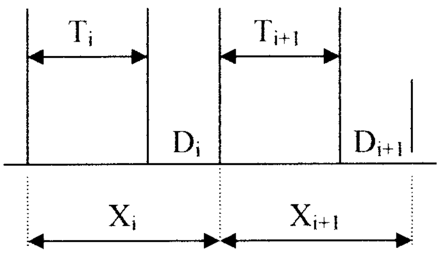
PENDAHULUAN

Dalam sistem produksi dijumpai peralatan atau komponen yang mengalami kerusakan (gagal). Sehingga perlu perbaikan untuk melanjutkan proses produksi. Proses yang semacam ini merupakan proses renewal. Secara definisi dapat dikatakan bahwa jika barisan variabel acak nonnegatif berdistribusi sembarang identik dan independen, maka proses menghitung pergantian disebut proses renewal[1,2]. Pada proses renewal setiap kali terjadi kegagalan, terus diperbaiki sampai komponen berfungsi lagi dan proses dilanjutkan lagi. Hal-hal yang diperhatikan adalah jumlah gagal, distribusi waktu gagal, dan distribusi waktu perbaikan.

Sedangkan reliabilitas dipergunakan untuk mengukur peluang sistem mampu hidup sampai minimal waktu yang telah ditentukan. Misal semua komponen dalam sistem mula-mula bekerja, peluang sistem bekerja pada waktu tertentu disebut avaibilitas pada waktu tersebut. Avaibiltas dapat dipandang untuk mengukur reliabilitas pada sistem yang sedang dirawat atau dioperasikan. Dijumpai avaibiltas steady-state yaitu avaibilitas sistem untuk interval waktu jangka panjang [3]. Selain itu akan dibahas taksiran jumlah gagal (*renewal*) dengan pendekatan parametric, karena distribusi waktu gagal diketahui. Taksiran jumlah gagal biasa dipergunakan untuk menetukan jadwal perawatan, pencegahan yang rusak, uji penerimaan reliabilitas, waktu garansi [4,5]. Pada tulisan ini ingin ditentukan avaibilitas dan taksiran jumlah gagal beserta sifa-sifatnya dengan distribusi waktu gagal adalah eksponensial untuk interval waktu kontinu. Sedangkan untuk interval waktu diskrit dicari taksiran jumlah gagal dengan waktu gagal berdistribusi normal.

Analisis Avaibilitas pada Renewal

Suatu sistem atau komponen bila terjadi kegagalan, terus diperbaiki maka akan menjadi seolah-olah baru lagi. Misal T_i menyatakan lamanya periode berfungsi ke-i dan D_i menyatakan waktu berhenti sistem untuk perbaikan atau penggantian ke-i. Maka didapat barisan variabel acak $\{X_i = T_i + D_i\}$, $i = 1,2,\ldots$ seperti ditunjukkan di dalam Gambar 1. di bawah ini.



Gambar 1. Proses Renewal dengan Perbaikan

Diasumsikan T_i adalah berdistribusi identik dan independen yang mempunyai fungsi distribusi kumulatif W(t) dan fungsi padat peluang w(t). Sedangkan D_i adalah berdistribusi identik dan independen mempunyai fungsi distribusi kumulatif G(t) dan fungsi padat peluang g(t). Maka X_i adalah berdistribusi identik dan independen mempunyai fungsi densitas proses renewal f(t) merupakan konvolusi dari w dan g[6]. Jadi,

$$\ell f(t) = \ell w(t)\, \ell g(t) \qquad (1)$$

atau

$$f^*(s) = w^*(s)\, g^*(s) \qquad (2)$$

Oleh sebab itu,

$$m^*(s) = \frac{w^*(s)\, g^*(s)}{1 - w^*(s)\, g^*(s)} \qquad (3)$$

Sehingga M*(s) diperoleh dengan

$$M^*(s) = \frac{w^*(s)\, g^*(s)}{s[1 - w^*(s)\, g^*(s)]} \qquad (4)$$

Berdasarkan persamaan di atas akan dapat ditentukan M(t), yaitu invers Laplace dari M*(s).

Selanjutnya didefinisikan avaibilitas A(t) yaitu peluang komponen akan berfungsi pada waktu t. Jika tidak ada perbaikan, maka $R(t) = A(t) = 1 - W(t)$. Komponen dapat berfungsi pada waktu t kemungkinan: komponen hidup terus dari awal (tidak ada perbaikan dalam (0,t]) dengan peluang R(t), atau terjadi renewal (perbaikan) terakhir terjadi pada waktu x, $0 < x < t$, dan komponen telah hidup sejak waktu itu [7]. Peluang yang bersesuaian dengan kasus ke dua adalah

$$\int_0^t R(t-x)\, m(x)\, dx .$$

Dengan demikian,

$$A(t) = R(t) + \int_0^t R(t-x)\, m(x)\, dx .$$

Dengan mengambil transformasi Laplace didapat

$$\begin{aligned} A^*(s) &= R^*(s) + R^*(s)\, m^*(s) \\ &= R^*(s)[1 + m^*(s)] \end{aligned} \qquad (5)$$

Dengan mengganti Persamaan (3) ke dalam Persamaan (5) menghasilkan

$$\begin{aligned} A^*(s) = R^*(s) &= \left[1 + \frac{w^*(s)\, g^*(s)}{1 - w^*(s)\, g^*(s)}\right] \\ &= \frac{R^*(s)}{1 - w^*(s)\, g^*(s)} \end{aligned}$$

Tetapi $R(t) = 1 - W(t)$ dan transformasi Laplacenya adalah

$$\begin{aligned} R^*(s) &= \frac{1}{s} - W^*(s) \\ &= \frac{1}{s} - \frac{w^*(s)}{s} = \frac{1 - w^*(s)}{s} \end{aligned}$$

Jadi,

$$A^*(s) = \frac{1 - w^*(s)}{s[1 - w^*(s)\, g^*(s)]} \qquad (6)$$

Sedangkan avaibilitas *steady-state* A adalah $A = \lim_{t \to \infty} A(t)$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Avaibiltas dan Taksiran Jumlah Gagal Waktu Kontinu

Misal distribusi waktu gagal dan waktu perbaikan adalah berdistribusi eksponensial. Ingin ditentukan densitas renewal, fungsi renewal atau taksiran jumlah gagal, avaibilitas dan avaibiltas dalam kondisi steady-state. Misal $w(t)$ dan $g(t)$, masing-masing menggambarkan distribusi waktu gagal dan waktu perbaikan. Maka

$$w(t) = \lambda\, e^{-\lambda t}$$

$$g(t) = \mu\, e^{-\mu t}$$

Transformasi Laplace dari dua fungsi di atas adalah:

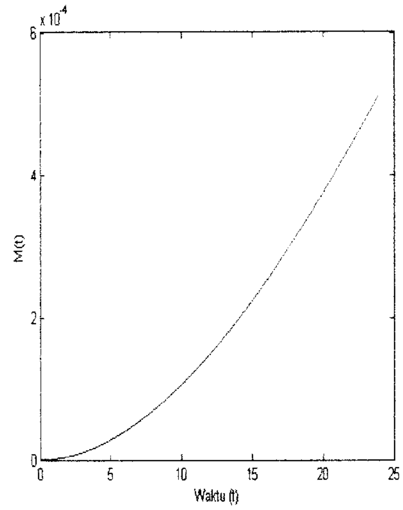
$$w^*(s) = \frac{\lambda}{s + \lambda} \qquad (7)$$

$$g^*(s) = \frac{\mu}{s + \mu} \qquad (8)$$

Berdasarkan persamaan (3), maka densitas renewal didapat

$$m^*(s) = \frac{w^*(s)\, g^*(s)}{1 - w^*(s)\, g^*(s)} = \frac{\lambda \mu}{s[s + (\lambda + \mu)]}$$

atau



Gambar 3. Jumlah renewal waktu (0,24]

Dalam grafik tersebut terlihat bahwa jika waktu naik berimplikasi jumlah *renewal* juga ikut naik. Selanjutnya untuk mengetahui hubungan antara avaibilitas dan jumlah *renewal* (gagal) terhadap waktu disajikan dalam tabel di bawah ini[8]:

Tabel 1. Avaibilitas dan Jumlah gagal kontinu

Nomor	T	A(t)	M(t)
1	0	1,0005	0
2	10	1,0000	1,0548e-004
3	100	0,9990	0,0045
4	1000	0,9990	0,0585
5	10000	0,9990	0,5985
6	100000	0,9990	5,9985

Berdasarkan tabel di atas dapat dikatakan bahwa dengan bertambahnya waktu, maka avaibilitasnya menurun mencapai angka konstan, tetapi taksiran jumlah gagal makin naik. Dengan hasil ini dapat diprediksi dan diketahui hubungan antara avaibilitas terhadap taksiran jumlah gagal berdasarkan waktu. Sehingga kemungkinan yang muncul dapat diprediksi atau diantisipasi.

Taksiran Jumlah Gagal Waktu Diskrit

Dibicarakan sistem atau komponen yang diamati diberlakukan untuk interval waktu diskrit. Misalnya pengamatan setiap minggu, setiap bulan, atau setiap tahun. Dengan asumsi jika terjadi kegagalan pada sistem, maka sistem tersebut cepat-cepat diperbaiki, diganti komponen baru dan proses dilanjutkan lagi. Ingin ditentukan taksiran jumlah gagal pada akhir interval untuk waktu diskrit, yaitu waktu (minggu) ke-T. Dalam hal ini terdapat T kemungkinan cara untuk mendapatkan gagal dalam minggu ke-T. Taksiran jumlah gagal pada akhir minggu ke-T, $M(T)$ diperoleh dengan cara:

$M(T)$ = jumlah taksiran gagal yang terjadi dalam interval $(0,T)$ bila gagal pertama terjadi dalam minggu pertama × peluang gagal pertama yang terjadi dalam interval (0,1) + ... + jumlah taksiran gagal yang terjadi dalam interval $(0,T)$ bila gagal pertama terjadi dalam minggu ke-T × peluang gagal pertama yang terjadi dalam interval $(T\text{-}1,T)$. Sedangkan peluang gagal pertama terjadi dalam interval (t_1,t_2) = $\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt$, dengan $f(t)$ merupakan fungsi padat peluang dari t. Jadi, taksiran jumlah gagal pada akhir minggu ke-T adalah

$$M(T) = [1 + M(T-1)] \int_0^1 f(t)\,dt + \cdots + [1 + M(0)] \int_{T-1}^{T} f(t)\,dt \qquad (13)$$

Karena $M(0) = 0$, maka secara umum taksiran jumlah gagal pada periode waktu T didapat sebagai berikut:

$$M(T) = \sum_{i=0}^{T-1} [1 + M(T-i-1)] \int_i^{i+1} f(t)\,dt \qquad (14)$$

dengan $T \geq 1$, dan M(0) = 0.

Bila sistem diamati setiap minggu dan diasumsikan distribusi waktu gagal adalah berdistribusi normal dengan rataan = 2 dan simpangan baku = 1 minggu. Berdasarkan Persamaan (14), maka dapat ditentukan taksiran jumlah gagal pada akhir minggu ke-T, yang hasil komputasinya disajikan pada tabel berikut ini[7]:

Tabel 2. Taksiran jumlah gagal diskrit

Nomor	T	M(T)
1	0	0
2	1	0,1311
3	2	0,4944
4	3	0,9335
5	4	1,2933
6	5	1,6568

Berdasarkan tabel di atas dapat dikatakan bahwa seiring bertambahnya waktu, maka taksiran jumlah gagal makin besar juga. Dengan hasil ini dapat diprediksi jumlah gagal berdasarkan kapan waktu terjadi. Sehingga dapat dipersiapkan segala sesuatu yang diperlukan kelak, dengan harapan proses produksi berjalan dengan lancar.

KESIMPULAN

Proses *renewal* dengan perbaikan yang mana distribusi waktu gagal dan distribusi waktu perbaikan adalah berdistribusi eksponensial. Maka untuk waktu kontinu, avaibilitas dan taksiran jumlah gagal juga merupakan fungsi eksponensial. Hasilnya adalah dengan bertambahnya waktu, maka avaibilitasnya menurun, untuk jangka panjang avaibilitas akan mencapai suatu angka konstan, tetapi untuk taksiran jumlah gagal akan makin naik nilainya. Dengan hasil ini dapat diprediksi dan diketahui hubungan antara avaibilitas terhadap taksiran jumlah gagal berdasarkan waktu. Sehingga kemungkinan kejadian yang muncul dapat diprediksi atau diantisipasi.

Sedangkan untuk waktu diskrit, distribusi waktu gagal diasumsikan berdistribusi normal. Hasil yang didapat bahwa dengan bertambahnya waktu diskrit, maka taksiran jumlah gagal makin besar juga. Oleh karena itu dapat diprediksi jumlah gagal berdasarkan waktu yang terjadi. Sehingga dapat dipersiapkan segala sesuatu yang diperlukan, dengan harapan proses produksi dapat berjalan dengan lancar.

DAFTAR PUSTAKA

1. Ross, S.M., 1997, *Introduction to Probability Models*, Sixth Edition, Academic Press, New York.
2. Ross, S.M., 1996, *Stochastic Processes*, Second Edition, John Wiley & Sons, Inc., New York.
3. Natarajan, A.M., and Tamilarasi, A., 2005, *Probability Random Processes and Queuing Theory*, New Age International Publishers, New Delhi.
4. Elsayed, E.A., 1996, *Reliability Engineering*, Addison Wesley Longman, Inc., Massachusetts.
5. Jardine, A.K.S., 1983, *Maintenance, Replacement, and Reliability*, John Wiley, New York.
6. Spiegel, M.R., 1990, *Laplace Transforms*, Schaum Publishing, Co., New York.
7. Trivedi, 1992, *Probability and Statistics with Reliability, Queueing, and Computer Science Applications*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall.
8. Moore, H., 2007, *MATLAB for Engineers*, Pearson Prentice Hall, Inc., New Jersey.