

KAJIAN FUNGSI $nls()$ DAN $fSRR()$ TERHADAP MODEL MICHAELIS-MENTEN PADA REGRESI NONLINIER

Sudarno¹

¹)Program Studi Statistika FMIPA Undip

dsghani@gmail.com

Abstrak

Model sebaran data perlu ditentukan untuk mengetahui sifat-sifat dari perubahan data terhadap waktu atau urutan. Untuk mendapatkannya perlu metode atau fungsi yang tepat. Model Michaelis-Menten merupakan fungsi nonlinier. Untuk mendapatkan fungsi taksirannya dipergunakan fungsi $nls()$ dan $fSRR()$. Agar dapat diketahui fungsi mana yang lebih baik untuk prediksi jangka panjang maka dengan melihat perbandingan nilai jumlah kuadrat galatnya. Demikian pula pada invers model Michaelis-Menten yang berupa fungsi regresi linier. Dengan memilih metode yang tepat akan didapat taksiran model yang terbaik. Sehingga hasil prediksinya mempunyai nilai bias yang kecil bahkan tidak ada.

Kata kunci: Model Michaelis-Menten, Fungsi $nls()$ dan $fSRR()$, Jumlah kuadrat galat.

1. Pendahuluan

Dalam peristiwa yang terjadi di alam, terdapat hubungan antar variabel. Sehingga secara fungsional dapat dibuat model. Misalkan hubungan fungsional regresi dengan model:

$$y = f(x, \beta) + \varepsilon \quad (1)$$

dengan:

y merupakan respon, x merupakan prediktor, β merupakan parameter yang akan dicari, sedangkan ε merupakan galat yang diasumsikan berdistribusi normal yang mempunyai rata-rata 0 dan ragam konstan σ^2 . Yang akan dicari adalah prediksi dari Persamaan (1) di atas, yaitu

$$E(y | x) = f(x, \beta) \quad (2)$$

Dalam hal ini merupakan suatu fungsi nonlinier yang nilainya ditentukan oleh prediktor dan parameter fungsi. Oleh karena itu perlu mencari nilai parameter yang terbaik, agar fungsi yang dihasilkan representatif. Dalam Mathew dan Fink (2004) dikatakan bahwa untuk mendapatkan fungsi nonlinier dapat dilakukan dengan cara mentransformasi dari fungsi nonlinier menjadi fungsi linier. Setelah itu dikembalikan ke bentuk fungsi nonlinier. Dengan fungsi linier akan dapat dengan mudah ditentukan taksiran parameter yang belum diketahui. Mengapa

menggunakan jalur fungsi linier, karena lebih mudah dan didukung oleh perangkat lunak yang banyak.

Untuk mendapatkan statistik fungsi nonlinier yang baik, dalam Chapra (2008) ditunjukkan bahwa dapat menggunakan fungsi fSRR(). Sedangkan pada Bates dan Chambers (1992) dinyatakan bahwa untuk mendapatkan fungsi nonlinier dapat menggunakan fungsi nls(). Selain itu juga terdapat pada Venables et al. (2002a) dan Dalgaard (2002) yang mengulas penggunaan fungsi glm() penerapannya pada *generalized linear models*. Ingin diketahui taksiran model nonlinier terbaik Michaelis-Menten dengan menggunakan fungsi nls() dan fSRR(). Selain itu juga ingin mendapatkan taksiran invers model linier terbaik Michaelis-Menten dengan menggunakan fungsi glm() dan fSRR(). Dengan cara melihat besarnya perbandingan nilai yang dihasilkan dari jumlah kuadrat galatnya. Jika dihasilkan taksiran model yang tepat, maka akan didapatkan hasil prediksi yang akurat untuk jangka panjang.

2. Fungsi nls() dan fSRR() pada Model Michaelis-Menten

Model Michaelis-Menten adalah model fungsi tidak linier dengan persamaan:

$$f(X, (a, b)) = \frac{aX}{b + X} \quad (3)$$

Ingin ditentukan parameter a dan b menggunakan fungsi nls() dan fSRR(). Fungsi nls() dijalankan menggunakan perangkat lunak R, sedangkan fungsi fSRR() dijalankan menggunakan perangkat lunak MATLAB.

Jika diketahui data seperti ditampilkan dalam table berikut ini.

Tabel 1. Data Model Michaelis-Menten

Nomor	X	Y
1	3,7652	15,3458
2	6,3816	25,7294
3	9,4503	33,6507
4	20,1892	75,9218
5	28,5741	80,5369
6	40,8304	95,2706
7	47,2863	98,8247
8	106,6712	100,4398
9	204,3916	115,7194
10	210,7284	120,3826

Dalam kajian ini galat diasumsikan memenuhi syarat asumsi. Pertama akan dicari parameter a dan b menggunakan fungsi $nls()$ dengan nilai awal $a = 120$ dan $b = 20$, didapat hasil olahan sebagai berikut:

Parameters:

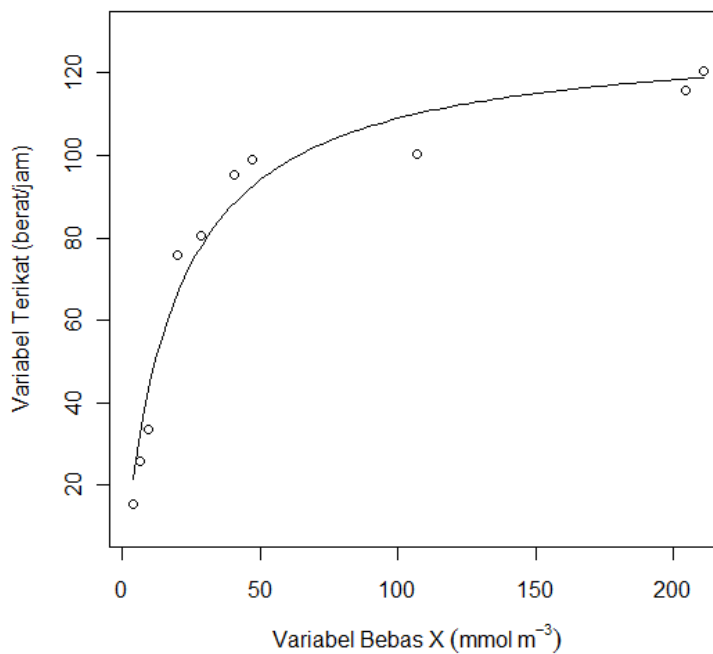
	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
b	18.907	3.151	6.0	0.000323 ***
a	129.533	6.139	21.1	2.67e-08 ***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Berdasarkan olahan di atas maka parameter signifikan, sehingga dapat diambil keputusan bahwa taksiran model Michaelis-Menten adalah

$$\hat{Y} = \frac{129,533 X}{18,907 + X} \quad (4)$$

Adapun plot grafiknya seperti di bawah ini:



Gambar 1. Plot Data dan Kurva Taksiran Model Michaelis-Menten

Sedangkan jika menggunakan menggunakan fungsi fSSR() dengan nilai awal $a = 120$ dan $b = 20$, didapat hasil sebagai berikut:

$$a = 90,6029 \text{ dan } b = 24,4914$$

Berdasarkan hasil ini berarti bahwa taksiran model Michaelis-Menten adalah

$$\hat{Y} = \frac{90,6029 X}{24,4914 + X} \quad (5)$$

Untuk mengetahui kebaikan model dalam hal prediksi jangka panjang, maka dibandingkan besarnya jumlah kuadrat galat dari kedua taksiran model seperti yang ditabelkan berikut ini:

Tabel 2. Nilai Prediksi dan Jumlah Kuadrat Galat dari Fungsi nls()

Nomor	X	Y	\hat{Y}	$(Y - \hat{Y})^2$
1	3,7652	15,3458	21,5011	37,8873
2	6,3816	25,7294	32,6854	48,3861
3	9,4503	33,6507	43,1819	90,8444
4	20,1892	75,9218	66,9724	80,0912
5	28,5741	80,5369	78,0810	6,0315
6	40,8304	95,2706	88,7166	42,9544
7	47,2863	98,8247	92,7374	37,0552
8	106,6712	100,4398	110,3455	98,1236
9	204,3916	115,7194	118,9432	10,3928
10	210,7284	120,3826	119,2482	1,2869
Jumlah				453,0534

dan

Tabel 3. Nilai Prediksi dan Jumlah Kuadrat Galat dari Fungsi fSRR()

Nomor	X	Y	\hat{Y}	$(Y - \hat{Y})^2$
-------	---	---	-----------	-------------------

1	3,7652	15,3458	12,0688	10,7387
2	6,3816	25,7294	18,7222	49,1002
3	9,4503	33,6507	25,2191	71,0913
4	20,1892	75,9218	40,9303	1224,406
5	28,5741	80,5369	48,7773	1008,670
6	40,8304	95,2706	56,6235	1493,600
7	47,2863	98,8247	59,6791	1532,381
8	106,6712	100,4398	73,6778	716,2025
9	204,3916	115,7194	80,9024	1212,224
10	210,7284	120,3826	81,1636	1528,127
Jumlah				8856,5409

Berdasarkan nilai jumlah kuadrat galat dari kedua fungsi dapat diputuskan bahwa untuk memprediksi kasus ini taksiran model Michaelis-Menten yang terbaik adalah menggunakan fungsi nls().

3. Fungsi glm() dan fSRR() pada Invers Model Michaelis-Menten

Model Michaelis-Menten dapat ditulis

$$f(X, (a, b)) = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{b}{a} \frac{1}{X}} = \frac{1}{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \frac{1}{X}} \quad (6)$$

Sehingga fungsi kebalikannya atau invers menjadi

$$V(U, (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 U \quad (7)$$

dengan

$$\hat{\beta}_0 = \frac{1}{a}, \hat{\beta}_1 = \frac{b}{a} \quad \text{dan} \quad U = \frac{1}{X} \quad (8)$$

Jadi persamaannya merupakan fungsi regresi linier sederhana. Berdasarkan data pada Tabel 1., didapat nilai variable bebas U dan variable terikat V seperti disajikan pada table berikut:

Tabel 4. Data Invers Model Michaelis-Menten

Nomor	U	V
-------	---	---

1	0,2656	0,0652
2	0,1567	0,0389
3	0,1058	0,0297
4	0,0495	0,0132
5	0,0350	0,0124
6	0,0245	0,0105
7	0,0212	0,0101
8	0,0094	0,0100
9	0,0049	0,0086
10	0,0048	0,0083

Dengan menggunakan fungsi `glm()` didapat olahan:

Parameters:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	0.0077200	0.0003659	21.099	2.67e-08 ***
I(1/X)	0.1459601	0.0192264	7.592	6.35e-05 ***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Berdasarkan olahan di atas maka parameter signifikan, sehingga dapat diambil keputusan bahwa taksiran invers model Michaelis-Menten adalah

$$\hat{V} = 0,00772 + 0,14596 U \quad (9)$$

Sedangkan dengan menggunakan fungsi `fSSR()` didapat olahan bahwa

$$\hat{\beta}_0 = 0,0059 \text{ dan } \hat{\beta}_1 = 0,2187$$

Berdasarkan olahan di atas dapat diambil keputusan bahwa taksiran invers model Michaelis-Menten adalah

$$\hat{V} = 0,0059 + 0,2187 U \quad (10)$$

Selanjutnya akan dihitung besarnya jumlah kuadrat galat untuk mengukur kebaikan model dalam prediksi. Seperti tersaji pada tabel di bawah ini:

Table 5. Nilai Prediksi dan Jumlah Kuadrat Galat dari Fungsi glm()

Nomor	U	V	\hat{V}	$(V - \hat{V})^2$
1	0,2656	0,0652	0,0498	0,0002
2	0,1567	0,0389	0,0335	0,0000
3	0,1058	0,0297	0,0259	0,0000
4	0,0495	0,0132	0,0174	0,0000
5	0,0350	0,0124	0,0153	0,0000
6	0,0245	0,0105	0,0137	0,0000
7	0,0212	0,0101	0,0132	0,0000
8	0,0094	0,0100	0,0114	0,0000
9	0,0049	0,0086	0,0107	0,0000
10	0,0048	0,0083	0,0107	0,0000
Jumlah				0,0002

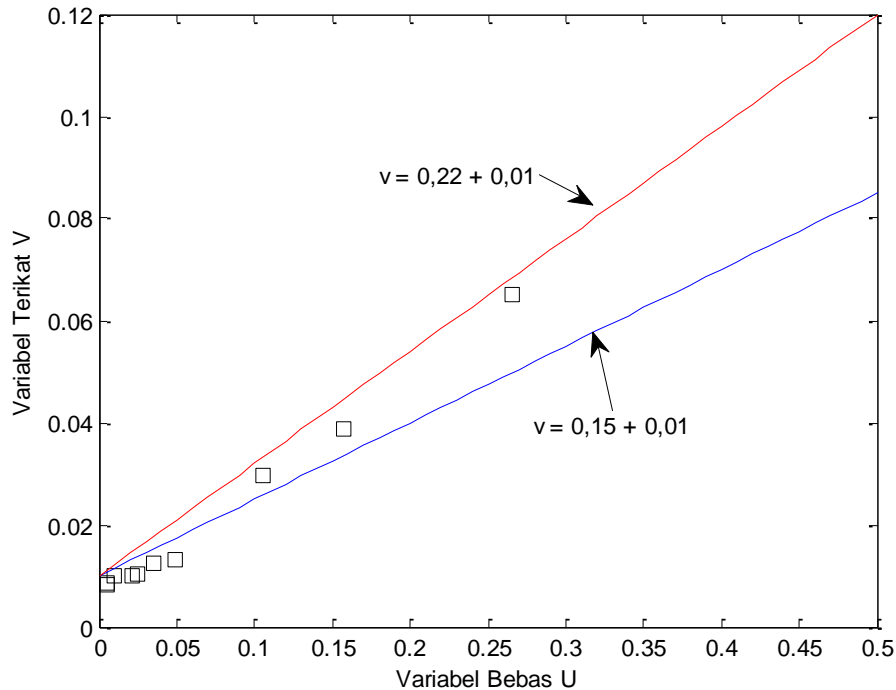
dan

Table 6. Nilai Prediksi dan Jumlah Kuadrat Galat dari Fungsi fSRR()

Nomor	U	V	\hat{V}	$(V - \hat{V})^2$
1	0,2656	0,0652	0,0684	0,0000
2	0,1567	0,0389	0,0445	0,0000
3	0,1058	0,0297	0,0333	0,0000
4	0,0495	0,0132	0,0209	0,0001
5	0,0350	0,0124	0,0177	0,0000
6	0,0245	0,0105	0,0154	0,0000
7	0,0212	0,0101	0,0147	0,0000
8	0,0094	0,0100	0,0121	0,0000
9	0,0049	0,0086	0,0111	0,0000
10	0,0048	0,0083	0,0111	0,0000
Jumlah				0,0001

Berdasarkan nilai jumlah kuadrat galat dari kedua fungsi dapat diputuskan bahwa untuk memprediksi model invers Michaelis-Menten yang terbaik adalah menggunakan fungsi fSSR().

Adapun dapat diperjelas dengan tampilan gambar di bawah ini. Terlihat bahwa taksiran nilai variable terikat V untuk jangka panjang akan menjauh dari nilai realita.



Gambar 2. Plot Data dan Kurva Taksiran Invers Model Michaelis-Menten.

4. Kesimpulan

Model Michaelis-Menten merupakan fungsi nonlinier. Untuk mendapatkannya perlu menggunakan fungsi dengan ukuran jumlah kuadrat galat terkecil. Berdasarkan hasil olahan sebaiknya menggunakan fungsi $nsI()$ dengan persamaan regresi $\hat{Y} = \frac{129,533 X}{18,907 + X}$, sedangkan untuk menaksir model invers Michaelis-Menten sebaiknya menggunakan fungsi $fSSR()$ dengan persamaan regresi liniernya adalah $\hat{V} = 0,0059 + 0,2187 U$. Dengan memilih metode yang terbaik akan didapat taksiran model yang akurat. Implikasinya dihasilkan ketepatan nilai prediksi yang tinggi.

Daftar Pustaka

- Bates, D.M. and Chambers, J.M., (1992) *Statistical Model in S (Nonlinear Models)*, Chapman and Hall, Boca Raton.
- Chambers, J.M., (2008) *Software for Data Analysis: Programming with R*, Springer-Verlag, New York.
- Chapra, S.C., (2008) *Applied Numerical Methods with MATLAB for Engineers and Scientists*, Second Edition, McGraw-Hill, Inc., New York.
- Dalgaard, P. (2002) *Introductory Statistics with R*, Springer-Verlag, New York.
- Mathew, J.H. and Fink, K.D., (2004) *Numerical Methods Using MATLAB*, Fourth Edition, Pearson Prentice Hall, Inc., New Jersey.
- Moore, H., (2007) *MATLAB for Engineers*, Perason Prentice Hall, Inc., New Jersey.
- Ott, R.L., (1993) *Introduction to Statistical Methods and Data Analysis*, Fourth Edition, Wadsworth, Inc., California.
- Ritz, C. and Streibig, J.C., (2008) *Nonlinear Regression with R*, Springer Science+Business Media, LLC, Denmark.
- Sheater, S.J., (2009) *A Modern Approach to Regression with R*, Springer-Verlag, New York.
- Venables, W.N. and Ripley, B.D. (2002a) *Modern Applied Statistics with S*, Fourth Edition, Springer, New York.