

***d*-ALJABAR**

Farida Widiawati dan Suryoto

Program Studi Matematika, Universitas Diponegoro

fardz.idaawdite@gmail.com

ABSTRAK. Dalam makalah ini akan dikaji mengenai *d*-aljabar. Di dalam *d*-aljabar terdapat konsep *edge d*-aljabar dan konsep *d*-transitif. Setiap *d*-aljabar disebut *edge d*-aljabar apabila memenuhi sifat tertentu. Kemudian setiap *d*-aljabar yang memenuhi sifat transitif disebut *d*-transitif.

Kata kunci: *d*-aljabar, *edge d*-aljabar, sifat transitif, *d*-transitif

I. PENDAHULUAN

Pada Tugas Akhir yang disusun oleh Deffyana Prastya Arifani mahasiswa matematika Universitas Diponegoro pada tahun 2010 telah dikaji mengenai *BCK*-aljabar, sedangkan dalam makalah ini akan dikaji mengenai *d*-aljabar yang merupakan generalisasi dari *BCK*-aljabar. Himpunan tak kosong X dengan 0 sebagai elemen khusus dan dilengkapi operasi biner $*$ serta memenuhi aksioma-aksioma tertentu akan membentuk struktur aljabar yang disebut *d*-aljabar. Di dalam *d*-aljabar dibahas mengenai definisi *d*-aljabar dan beberapa hal yang terkait dengan *d*-aljabar seperti *edge d*-aljabar dan *d*-transitif.

II. HASIL DAN PEMBAHASAN

Misalkan X himpunan tak kosong dengan operasi biner $*$ dan 0 sebagai elemen khusus, serta memenuhi aksioma-aksioma tertentu maka akan membentuk struktur aljabar yang disebut *d*-aljabar. Berikut akan diberikan definisi dari *d*-aljabar.

Definisi 2.1

Misalkan X himpunan tak kosong dengan operasi biner $*$ dan 0 sebagai elemen khusus, himpunan X disebut *d*-aljabar jika untuk setiap $x, y \in X$ memenuhi aksioma-aksioma berikut ini.

$$(I) \quad x * x = 0,$$

(II) $0 * x = 0$,

(III) jika $x * y = 0$ dan $y * x = 0$ maka $x = y$.

Berikut akan diberikan contoh dari Definisi 2.1

Contoh 2.1

Misalkan $X = \{ 0, 1, 2 \}$ dan didefinisikan suatu operasi biner $*$ pada X sebagaimana diberikan oleh tabel berikut ini.

Tabel 1 Pendefinisian operasi biner $*$ pada X

*	0	1	2
0	0	0	0
1	2	0	2
2	1	1	0

Akan ditunjukkan bahwa $X = \{ 0, 1, 2 \}$ merupakan d -aljabar.

- (I) Untuk memperlihatkan dipenuhinya aksioma (I), dilakukan dengan membuktikan bahwa $x * x = 0$ untuk setiap $x \in X$. Dari Tabel 1 tampak bahwa $0 * 0 = 0$, $1 * 1 = 0$, dan $2 * 2 = 0$ (dapat dilihat dari diagonal utama tabel) dengan kata lain $x * x = 0$ untuk setiap $x \in X$. Jadi aksioma (I) terpenuhi.
- (II) Untuk memperlihatkan terpenuhinya aksioma (II), dilakukan dengan membuktikan bahwa $0 * x = 0$ untuk setiap $x \in X$. Dari Tabel 1 tampak bahwa $0 * 0 = 0$, $0 * 1 = 0$ dan $0 * 2 = 0$ (dapat dilihat dari baris pertama tabel) dengan kata lain $0 * x = 0$ untuk setiap $x \in X$. Jadi aksioma (II) terpenuhi.
- (III) Untuk memperlihatkan terpenuhinya aksioma (III), diambil sebarang $x, y \in X$. Pembuktian terpenuhinya aksioma (III) diperlihatkan pada tabel berikut ini.

Tabel 2 Pembuktian aksioma (III) pada X dengan operasi biner $*$

x	y	$x * y$	$y * x$
0	0	0	0
0	1	0	2
0	2	0	1
1	0	2	0
1	1	0	0
1	2	2	1
2	0	1	0
2	1	1	2
2	2	0	0

Dari Tabel 2 di atas tampak bahwa aksioma (III) terpenuhi.

Karena semua aksioma d -aljabar terpenuhi maka $X = \{ 0, 1, 2 \}$ yang dilengkapi operasi $*$ seperti yang didefinisikan pada Tabel 1 merupakan d -aljabar.

Setiap d -aljabar yang memenuhi syarat tertentu dapat disebut sebagai *edge* d -aljabar sebagaimana diberikan oleh definisi berikut ini.

Definisi 2.2 [5]

Misalkan $(X, *, 0)$ adalah d -aljabar. Untuk suatu $x \in X$ didefinisikan $x * X = \{x * a \mid a \in X\}$, X disebut *edge* d -aljabar jika untuk setiap $x \in X$ berlaku $x * X = \{0, x\}$.

Berikut akan diberikan contoh dari Definisi 2.2

Contoh 2.2

Berdasarkan Contoh 2.1 telah diperlihatkan bahwa $X = \{0, 1, 2\}$ adalah suatu d -aljabar dengan operasi biner $*$ pada X yang telah diberikan pada Tabel 1. Selanjutnya akan dilihat apakah X merupakan *edge* d -aljabar.

Misalkan diambil $x = 1$ dari Tabel 1 nampak bahwa $1 * 0 = 2$, $1 * 1 = 0$, dan $1 * 2 = 2$ (dapat dilihat dari baris kedua tabel). Ini berarti bahwa $1 * X \neq \{0, 1\}$. Dengan kata lain terdapat suatu $x \in X$ sehingga $x * X \neq \{0, x\}$. Sehingga dapat

disimpulkan bahwa X dengan operasi biner $*$ pada X yang telah diberikan pada Tabel 1 bukan merupakan $edge\ d$ -aljabar.

Kemudian akan diberikan contoh $edge\ d$ -aljabar sebagai berikut.

Contoh 2.3

Misalkan $X = \{0, 1, 2\}$ dan didefinisikan suatu operasi $*$ pada X sebagaimana diberikan oleh tabel berikut ini.

Tabel 3 Pendefinisian operasi biner $*$ pada X

$*$	0	1	2
0	0	0	0
1	1	0	1
2	2	2	0

Dengan cara yang sama dengan Contoh 2.1 dapat dibuktikan bahwa $X = \{0, 1, 2\}$ yang dilengkapi operasi $*$ seperti didefinisikan pada Tabel 3 merupakan d -aljabar. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa X adalah $edge\ d$ -aljabar yaitu untuk setiap $x \in X$ berlaku $x * X = \{0, x\}$. Untuk memperlihatkan bahwa X adalah $edge\ d$ -aljabar, diambil sebarang $x \in X$ dan perhitungan selengkapnya akan diberikan pada tabel berikut.

Tabel 4 Pembuktian $edge\ d$ -aljabar pada X

x	a	$x * a$
0	0	0
0	1	0
0	2	0
1	0	1
1	1	0
1	2	1
x	a	$x * a$
2	0	2
2	1	2

2	2	0
---	---	---

Dari Tabel 4 tampak bahwa untuk setiap $x \in X$ berlaku $x * X = \{x, 0\}$. Jadi $X = \{0, 1, 2\}$ yang dilengkapi operasi biner $*$ seperti didefinisikan pada Tabel 3 merupakan *edge d*-aljabar.

Berikut diberikan sifat yang berlaku pada *edge d*-aljabar sebagaimana diberikan pada lemma dan proposisi berikut ini.

Lemma 2.3

Jika $(X; *, 0)$ adalah *edge d*-aljabar, maka untuk setiap $x \in X$ berlaku $x * 0 = x$.

Bukti:

Diketahui $(X, *, 0)$ adalah *edge d*-aljabar. Akan ditunjukkan bahwa $x * 0 = x$ untuk setiap $x \in X$.

Diambil sebarang $x \in X$.

Terdapat dua kasus yaitu $x = 0$ dan $x \neq 0$.

a. Untuk $x = 0$, maka $0 * 0 = 0$.

b. Untuk $x \neq 0$

Mengingat bahwa $(X, *, 0)$ adalah *edge d*-aljabar maka untuk setiap $x \in X$ berlaku $x * 0 = x$ atau $x * 0 = 0$.

Andaikan $x * 0 = 0$. Dilain pihak, dengan mengingat bahwa $0 * x = 0$ maka menurut aksioma (III) haruslah $x = 0$ (bertentangan dengan $x \neq 0$). Jadi haruslah $x * 0 = x$.

Sehingga dapat disimpulkan bahwa jika $(X, *, 0)$ adalah *edge d*-aljabar maka untuk setiap $x \in X$ berlaku $x * 0 = x$. ■

Proposisi 2.4

Jika $(X, *, 0)$ adalah *edge d*-aljabar, maka untuk setiap $x, y \in X$ berlaku $(x * (x * y)) * y = 0$.

Bukti:

Diketahui $(X, *, 0)$ adalah *edge d*-aljabar. Akan ditunjukkan bahwa $(x * (x * y)) * y = 0$ untuk setiap $x, y \in X$.

Diambil sebarang $x, y \in X$.

Ada dua kasus yaitu untuk $x = 0$ dan $x \neq 0$.

a. Untuk $x = 0$, diperoleh

$$\begin{aligned} (x * (x * y)) * y &= (0 * (0 * y)) * y && \text{karena } x = 0 \\ &= (0 * 0) * y && \text{dengan aksioma (II)} \\ &= 0 * y && \text{dengan aksioma (II)} \\ &= 0 && \text{dengan aksioma (II)} \end{aligned}$$

b. Untuk $x \neq 0$

Mengingat bahwa X adalah $edge$ d -aljabar maka $x * y = 0$ atau $x * y = x$.

Untuk $x * y = 0$, maka

$$\begin{aligned} (x * (x * y)) * y &= (x * 0) * y && \text{karena } x * y = 0 \\ &= x * y && \text{dengan Lemma 3.4} \\ &= 0 && \text{karena } x * y = 0 \end{aligned}$$

Untuk $x * y = x$ maka

$$\begin{aligned} (x * (x * y)) * y &= (x * x) * y && \text{karena } x * y = x \\ &= 0 * y && \text{dengan aksioma (I)} \\ &= 0 && \text{dengan aksioma (II)} \end{aligned}$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa jika $(X, *, 0)$ adalah $edge$ d -aljabar maka berlaku

$$(x * (x * y)) * y = 0 \text{ untuk setiap } x, y \in X. \quad \blacksquare$$

Setiap d -aljabar yang memenuhi syarat tertentu disebut d -transitif. Berikut diberikan definisi dari d -transitif sebagaimana diberikan oleh definisi berikut ini.

Definisi 2.5

Setiap d -aljabar $(X, *, 0)$ disebut d -transitif asalkan untuk setiap $x, y, z \in X$ berlaku jika $x * z = 0$ dan $z * y = 0$ maka $x * y = 0$.

Untuk memperjelas definisi diatas akan diberikan contoh sebagai berikut.

Contoh 2.4

Berdasarkan Contoh 2.1 telah diperlihatkan bahwa $X = \{0,1,2\}$ adalah suatu d -aljabar dengan suatu operasi biner $*$ pada X yang telah diberikan pada Tabel 1.

Selanjutnya akan diperlihatkan bahwa X merupakan d -transitif. Untuk memperlihatkan bahwa X adalah d -transitif, dilakukan dengan membuktikan bahwa jika $x * z = 0$ dan $z * y = 0$ maka $x * y = 0$ untuk setiap $x, y, z \in X$.

Diambil sebarang $x, y, z \in X$ dan pembuktian selengkapnya diberikan pada tabel berikut.

Tabel 5 Pembuktian d -transitif pada X

x	y	z	$x * z$	$z * y$	$x * y$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	2	0
0	0	2	0	1	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
0	1	2	0	1	0
0	2	0	0	0	0
0	2	1	0	2	0
0	2	2	0	0	0
1	0	0	2	0	2
1	0	1	0	2	2
1	0	2	2	1	2
1	1	0	2	0	0
1	1	1	0	0	0
1	1	2	2	1	0
1	2	0	2	0	2
1	2	1	0	2	2
1	2	2	2	0	2
2	0	0	1	0	1
2	0	1	1	2	1
x	y	z	$x * z$	$z * y$	$x * y$
2	0	2	0	1	1
2	1	0	1	0	1

2	1	1	1	0	1
2	1	2	0	1	1
2	2	0	1	0	0
2	2	1	1	2	0
2	2	2	0	0	0

Dari Tabel 5 nampak bahwa jika $x * z = 0$ dan $z * y = 0$ maka $x * y = 0$. Jadi X merupakan d -transitif.

III. KESIMPULAN

Himpunan tak kosong X dengan 0 sebagai elemen khusus dan tunggal kemudian dilengkapi operasi biner $*$ serta memenuhi aksioma-aksioma tertentu akan membentuk struktur aljabar yang disebut d -aljabar. Setiap d -aljabar disebut sebagai *edge* d -aljabar apabila untuk setiap elemen di dalam d -aljabar dioperasikan dengan semua elemen dalam d -aljabar tersebut akan menghasilkan elemen khusus atau elemen itu sendiri. Sedangkan setiap d -aljabar disebut d -transitif apabila untuk setiap $x, y, z \in X$ dimana X adalah sebuah d -aljabar akan berlaku jika $x * z = 0$ dan $z * y = 0$ maka $x * y = 0$.

IV. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Chandramouleeswaran, M. and N. Kandaraj. 2011. *Derivations On d-algebras*. International Journal Of Mathematical Sciences And Applications, vol. 1, no. 1. <http://ijmsa.yolasite.com/resources/13.pdf> (12 Oktober 2011)
- [2] Neggers, J. and Hee Sik Kim. 1999. *On d-algebras*. Math. Slovaca, vol.49, no.1, hal:19-26. http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/129981/MathSlov_49-1999-1_3.pdf (13 Oktober 2011)