NEUTROSOFIK BIGRUP DAN SIFAT-SIFATNYA

Suryoto
Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Matematika UNDIP Semarang
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H., Tembalang, Semarang 50275
email : *suryotomath@gmail.com*

ABSTRAK. Neutrosofik bigrup adalah struktur aljabar yang dibentuk dari dua struktur aljabar berupa grup atau neutrosofik grup. Pada makalah ini, berawal dari konsep neutrosofik grup akan dikaji bentuk yang lebih luas, yaitu struktur neutrosofik bigrup dan aspek terkait serta sifat-sifat khasnya. Dengan memanfaatkan peranan unsur neutrosofik sebagai indeterminate dapat diperlihatkan bahwa sebagian besar sifat-sifat dasar yang berlaku pada grup pada umumnya tidak berlaku pada struktur ini.

Kata Kunci : grup, bigrup, unsur neutrosofik, neutrosofik grup, neutrosofik bigrup.

I. PENDAHULUAN

Istilah neutrosofik berasal dari kata neutrosofi yang merupakan cabang baru dari ilmu filsafat yang mempelajari tentang netralitas sebagai perluasan dari dialektika. Istilah ini pertama kali diperkenalkan oleh Florentin Smarandache [3 & 4], pada tahun 1995 dan berkembang cukup pesat dengan mulai terbukanya jalan baru dalam penelitian di beberapa bidang kajian yang merupakan derivatif dari konsep neutrosofik ini seperti : logika neutrosofik, himpunan neutrosofik, statistika neutrosofik, probabilitas neutrosofik, dan sebagainya.

Pada makalah ini, dikaji konsep neutrosofik yang dikenakan pada struktur aljabar bigrup. Kajian neutrosofik grup sudah banyak dilakukan, terutama oleh Vasantha Kandasamy [1]. Meskipun dibentuk dari grup, sifat-sifat yang berlaku pada struktur neutrosofik ini pada umumnya tidak serta merta mewarisi sifat-sifat yang berlaku pada grup pembentuknya.

Pada konsep bigrup, yang merupakan perumuman dari suatu grup, sifat-sifat yang berlaku di dalam grup, pada umumnya tidak berlaku pada struktur bigrup ini, demikian halnya dengan struktur neutrosofiknya.

II. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pembahasan neutrosofik bigrup, tidak terlepas dari struktur yang lebih sederhana, yaitu neutrosofik grup yang menjadi acuan awal perumuman struktur yang lebih luas. Sebelum membahas beberapa definisi, teorema dan sifat-sifat dasar yang berlaku pada neutrosofik grup, akan diberikan terlebih dahulu pengertian unsur neutrosofik yang memegang peranan penting dalam pembentukan struktur neutrosofik ini.

Unsur neutrosofik dinotasikan dengan adalah suatu indeterminate yang bersifat idempoten terhadap operasi perkalian, yaitu $\cdot = =$.

Definisi 2.1 [1] *Misalkan* (,) *sebarang grup, neutrosofik grup yang dibangun oleh dan dibawah operasi dinotasikan dengan* ( ) = { , }.

Berikut ini diberikan dua contoh dari neutrosofik grup, di mana salah satunya mempunyai struktur grup, sedangkan lainnya tidak.

Contoh 2.2 : Misalkan = = $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, maka terhadap operasi penjumlahan modulo 5, (, +) merupakan grup. Neutrosofik grup

$$( ) = \{ \quad , + \} = \{ + \mid , \}$$

merupakan grup dibawah operasi "+ ". Sementara itu $'$ = $\backslash\{0\}$ terhadap operasi perkalian modulo 5, ($'$,×) merupakan grup dan neutrosofik grup

$$(') = \{ (\backslash\{0\}) \quad ,\times \} = \{ \quad \mid \quad \}$$

bukan merupakan grup terhadap operasi " × ".

Berpangkal pada contoh ini, dipunyai hasil berikut sebagaimana diberikan oleh teorema berikut.

Teorema 2.3 [1] *Misalkan* (,) *sebarang grup dan* ( ) = { , } *neutrosofik grup dari* *, maka*

a. ( ) *pada umumnya bukan merupakan grup*

b. ( ) *senantiasa memuat suatu grup*

Dengan cara serupa, seperti pada struktur grup yang mempunyai subgrup, berikut ini diberikan definisi neutrosofik subgrup dari suatu neutrosofik grup, sebagaimana diberikan oleh definisi berikut.

Definisi 2.4 [1] *Misalkan* ( ) = *neutrosofik grup yang dibangun oleh grup dan . Himpunan bagian sejati* ( ) *dari* ( ) *dikatakan neutrosofik subgrup dari* ( ) *jika* ( ) *merupakan neutrosofik grup, yaitu* ( ) *memuat suatu subgrup.*

Contoh 2. 5 : Himpunan ( ) = = {0, 1, , 1 + } merupakan neutrosofik grup atas operasi penjumlahan modulo 2 " + ". Untuk himpunan bagian {0, } dan {0, 1, , 1 + } keduanya merupakan grup terhadap operasi " + ", sehingga keduanya merupakan neutrosofik grup. Akan tetapi keduanya merupakan neutrosofik subgrup semu dari ( ), karena himpunan-himpunan ini tidak mempunyai himpunan bagian sejati yang merupakan grup.

Terkait dengan konsep subgrup dari suatu grup, jika pada teori grup hingga berlaku Teorema Lagrange, tetapi tidak demikian halnya dengan neutrosofik grup hingga, seperti diberikan oleh contoh berikut.

Contoh 2.6 : Himpunan ( ) = {1, 2, 3, 4, , 2 , 3 , 4 } yang dilengkapi dengan operasi " × " merupakan neutrosofik grup. Himpunan bagian

( ) = {1, 4, , 2 , 3 , 4 }

merupakan neutrosofik subgrup dari ( ). Tampak bahwa o ( ) = 8, o ( ) = 6 dan 6 ∤ 8, Teorema Lagrange tidak terpenuhi.

Sebelum membahas lebih lanjut tentang struktur neutrosofik bigrup, akan diberikan lebih dahulu definisi dari bigrup dan juga subbigrup dari suatu bigrup, seperti diberikan oleh definisi berikut.

Definisi 2. 7 [2] *Misalkan suatu himpunan tidak kosong yang dilengkapi dengan dua buah operasi biner dan , = (, ,) dikatakan bigrup, jika terdapat dua himpunan bagian sejati dan dari , sedemikian hingga berlaku*

1. =
2. (,) *merupakan grup*
3. (,) *merupakan grup*

Selanjutnya suatu himpunan bagian tidak kosong dari bigrup = (, ,) disebut subbigrup dari , jika terhadap operasi dan yang berlaku pada , merupakan bigrup.

Beberapa sifat penting dari bigrup antara lain [2] :

1. Jika = (, ,) bigrup dan subbigrup dari , maka pada umumnya (,) dan (,) bukan merupakan grup.
2. Jika = (, ,) bigrup dan himpunan bagian tak kosong dari , maka merupakan subbigrup dari jika dan hanya jika terdapat dua himpunan bagian sejati dan dari , sedemikian hingga berlaku
   a. = , dengan (,) dan (,) keduanya merupakan grup
   b. (∩ ,) subgrup dari (,)
   c. (∩ ,) subgrup dari (,)
3. Jika = (, ,) bigrup berhingga dan subbigrup dari , maka pada umumnya order dari tidak membagi order dari .

4. Jika = (, ,) bigrup berhingga dan subbigrup normal dari , maka pada umumnya order dari tidak membagi order dari .

Berpangkal dari struktur bigrup ini dan unsur neutrosofik , dapat dikontruksi struktur aljabar baru yang dikenal dengan neutrosofik bigrup seperti diberikan oleh definisi berikut.

Definisi 2.8 [1] *Misalkan ( ) = (( ) ( ), ,) suatu himpunan tidak kosong, dengan dua buah operasi biner dan . Himpunan (( ), ,) disebut neutrosofik bigrup, jika dipenuhi kondisi berikut :*

1. ( ) = ( ) ( ), dengan ( ) dan ( ) merupakan himpunan bagian sejati dari ( )

2. (( ),) merupakan neutrosofik grup

3. (( ),) suatu grup.

Selanjutnya, jika ( ) dan ( ) keduanya merupakan neutrosofik grup, maka dikatakan (( ), ,) neutrosofik bigrup kuat. Jika jika ( ) dan ( ) keduanya bukan merupakan neutrosofik grup (hanya berupa grup saja), maka struktur (( ), ,) merupakan bigrup.

Contoh 2.7 : Misalkan ( ) = ( ) ( ), dengan ( ) = { , − , 1, −1} suatu grup terhadap operasi perkalian biasa dan ( ) = {0, 1, 2, 3, 4, , 2 , 3 , 4 } suatu neutrosofik grup terhadap operasi perkalian modulo 5, maka (( ), ×, ×) merupakan neutrosofik bigrup.

Sebagaimana pada neutrosofik grup yang mempunyai substruktur, berupa neutrosofik subgrup, neutrosofik bigrup juga mempunyai substruktur yang serupa, sebagaimana diberikan oleh definisi berikut.

Definisi 2.9 [1] *Misalkan* ( ) = (( ) ( ), ,) *suatu neutrosofik bigrup dan* = *himpunan bagian sejati dari* ( ) = ( ) ( ), *maka* (, ,) *merupakan neutrosofik subbigrup dari* (( ), ,), *jika dipenuhi*

a. = *merupakan neutrosofik bigrup terhadap operasi* *dan* , *yaitu* (,) *merupakan neutrosofik subgrup dari* (( ),) *dan* (,) *merupakan subgrup dari* (( ),) *dan*

b. = ∩ ( ) *dan* = ∩ ( ) *masing-masing merupakan subgrup dari* (( ),) *dan* (( ),).

Sedangkan jika *keduanya bukan merupakan neutrosofik subgrup, maka* = *hanya merupakan subbigrup.*

Untuk lebih memahami dan memperjelas substruktur neutrosofik subbigrup tersebut diberikan contoh berikut.

Contoh 2.8 : Misalkan ( ) = (( ) ( ), ,) suatu neutrosofik bigrup, dengan ( ) = {0, 1, 2, 3, 4, , 2 , 3 , 4 } merupakan neutrosofik grup terhadap operasi perkalian modulo 5 dan ( ) = { | = 1} suatu grup siklik dengan order 8. Misalkan ( ) = (( ) ( ), ,), dengan ( ) = {1, 4, , 4 } ⊂ ( ) neutrosofik grup dan ( ) = {1, , , } ⊂ ( ) suatu grup, maka ( ) = ( ) ( ) merupakan neutrosofik subbigrup dari ( ) = ( ) ( ). Sedangkan untuk = , di mana = {1, 4} ⊂ ( ) dan = {1, }, maka hanyalah subbigrup dari neutrosofik bigrup ( ) = ( ) ( ).

Selanjutnya akan diberikan definisi neutrosofik subbigrup normal dari suatu neutrosofik bigrup. Seperti diberikan oleh definisi berikut.

Definisi 2.10 [1] *Misalkan* ( ) = (( ) ( ), ,) *dan* ( ) = (( ) ( ), ,) *suatu neutrosofik bigrup,* ( ) = (( ) ( ), ,) *dikatakan neutrosofik subbigrup normal dari* ( ), *jika* ( ) *adalah neutrosofik subbigrup dari* ( ) *dan* ( ) *dan* ( ) *masing-masing merupakan subgrup normal dari* ( ) *dan* ( ).

Contoh berikut memberikan adanya neutrosofik subbigrup normal dari suatu neutrosofik grup.

Contoh 2.9 : Misalkan ( ) = (( ) ( ), ,) suatu neutrosofik grup, dengan ( ) = {0, 1, 2, 3, , 2 , 3 , 1 + , 2 + , 3 + , 1 + 2 , 2 + 2 , 3 + 2 , 1 + 3 , 2 + 3 , 3 + 3 } neutrosofik grup terhadap operasi penjumlahan modulo 4 dan ( ) = = {(1), (1 2), (1 3), (2 3), (1 2 3), (1 3 2)} grup simetri orde 3. Misalkan juga ( ) = (( ) ( ), + , ·) dengan ( ) = {0, 2, 2 , 2 + 2 } ⊂ ( ) dan ( ) = {(1), (1 2 3), (1 3 2)} ⊂ ( ), maka ( ) = (( ) ( ), + , ·) merupakan neutrosofik subbigrup normal dari (( ), + , ·) karena ( ) dan ( ) masing-masing merupakan subgrup normal dari ( ) dan ( ).

Selanjutnya akan diberikan contoh, yang memperlihatkan bahwa pada umumnya order dari substruktur neutrosofik subbigrup tidak membagi order dari neutrosofik bigrup-nya, terutama untuk neutrosofik bigrup yang beroder prima.

Contoh 2.10 : Misalkan ( ) = (( ) ( ), ,), suatu neutrosofik bigrup dengan ( ) = {0, 1, 2, 3, 4, , 2 , 3 , 4 } neutrosofik grup terhadap operasi perkalian modulo 5 dan ( ) = { | = 1}, grup siklik dengan order 8, maka ( ) = 17. Akan tetapi, neutrosofik bigrup ini mempunyai neutrosofik subbigrup, misalkan diambil ( ) = ( ) ( ), dengan ( ) = {0, 1, 4, , 4 } dan ( ) = {1, }, maka ( ) merupakan neutrosofik subbigrup dari ( ) dengan ( ) = 7 dan berlaku (7, 17) = 1.

Selanjutnya pembahasan akan difokuskan pada struktur neutrosofik bigrup kuat dan sifat-sifatnya, dengan mengingat Definisi 2.7 dan Definisi 2.8, dapat diturunkan definisi untuk struktur neutrosofik kuat ini, seperti diberikan definisi berikut.

Definisi 2.11 *Suatu himpunan* (, ,) *dengan dua operasi biner dan dikatakan neutrosofik bigrup kuat, jika memenuhi*

1. =
2. (,) *neutrosofik grup dan*
3. (,) *neutrosofik grup*

dengan dan himpunan bagian sejati dari .

Sedangkan definisi untuk neutrosofik subbigrup dari suatu neutrosofik bigrup kuat diberikan oleh teorema berikut.

Definisi 2. 12 *Suatu himpunan bagian tak kosong dari suatu neutrosofik bigrup kuat* (, ,) *disebut neutrosofik subbigrup kuat jika merupakan neutrosofik bigrup terhadap operasi dan , yang didefinisikan pada .*

Mengacu dengan sifat-sifat yang berlaku pada struktur bigrup, berikut ini diberikan sifat-sifat serupa dari dari struktur neutrosofik kuat ini, seperti diberikan pada beberapa teorema berikut.

Teorema 2. 13 *Misalkan* (, ,) *suatu neutrosofik bigrup dan suatu neutrosofik subbigrup dari , maka pada umumnya* (,) *dan* (,) *bukan merupakan grup.*

Bukti :

Untuk memperlihatkan hal ini, dipandang neutrosofik bigrup kuat ($, +, \times$), dengan = $\{1, -1, , - \}$ di mana ($, +$) dan ($\{1, -1, , - \}$ $, \times$) keduanya merupakan neutrosofik grup. Selanjutnya dipandang himpunan bagian sejati = = $\{1, -1, , - \}$ 2 2 dari . Terlihat bahwa ($, +, \times$) merupakan neutrosofik subbigrup dari , akan tetapi bukan merupakan grup terhadap operasi " + " maupun operasi " × ".

Selanjutnya akan diberikan teorema yang memberikan karakterisasi kepada neutrosofik subbigrup kuat, seperti dituangkan dalam teorema berikut.

Teorema 2. 14 *Misalkan* (, ,) *suatu neutrosofik bigrup dan suatu himpunan bagian tak kosong dari , maka merupakan neutrosofik subbigrup kuat dari jika dan hanya jika terdapat himpunan bagian sejati dan dari sedemikian hingga berlaku*

1. = , *dengan* (,) *dan* (,) *keduanya merupakan neutrosofik grup*
2. ($\cap$,) *neutrosofik subgrup dari* (,)
3. ($\cap$,) *neutrosofik subgrup dari* (,)

Bukti :

($\Rightarrow$) Misalkan neutrosofik subbigrup dari (, ,), maka terdapat dua himpunan bagian sejati dan dari sedemikian hingga

(1) =

(2) (,) suatu neutrosofik grup

(3) (,) suatu neutrosofik grup

Dengan demikian dapat diambil = $\cap$ dan = $\cap$. Tampak bahwa $\subseteq$ dan $\subseteq$. Selanjutnya menurut kondisi (2) dan (3), berturut-turut (= $\cap$,) merupakan neutrosofik subgrup dari (,) dan (= $\cap$,) merupakan neutrosofik subgrup dari (,).

(⇐) Misalkan kondisi (2) dan (3) dari teorema berlaku, maka untuk memperlihatkan bahwa (, ,) merupakan neutrosofik bigrup kuat, cukup apabila dapat diperlihatkan (∩) (∩) = . Untuk hubungan (∩) (∩) ⊆ senantiasa benar dan untuk inklusi balikannya, misalkan sebarang unsur di . Karena = , maka dari berakibat atau . Lebih lanjut ∩ atau ∩ , yaitu (∩) (∩), hal ini berarti ⊆ (∩) (∩). Dengan demikian benar bahwa (∩) (∩) = .

Selanjutnya untuk neutrosofik bigrup kuat yang berhingga, Teorema Lagrange tidak dipenuhi, sebagaimana kondisi ini juga tidak berlaku pada struktur bigrup berhingga. Hal ini seperti diberikan oleh teorema-teorema berikut.

Teorema 2. 15 *Misalkan* (, ,) *suatu neutrosofik bigrup dan suatu neutrosofik subbigrup sejati dari , maka order dari pada umumnya tidak membagi order dari .*

Bukti :

Untuk memperlihatkan hal ini, dipandang neutrosifik bigrup = , dengan = {0, 1, 2, , 2 , 1 + , 1 + 2 , 2 + , 2 + 2 } neutrosofik grup terhadap operasi perkalian modulo 3 dan = {1, 2, 3, 4, , 2 , 3 , 4 } neutrosofik grup terhadap operasi perkalian modulo 5, maka diperoleh ( ) = 17. Selanjutnya pandang himpunan bagian sejati = = {0, 1, 2, , 2 } {1, 4, , 4 } dari , dengan = {0, 1, 2, , 2 } ⊆ dan = {1, 4, , 4 } ⊆ , maka merupakan neutrosofik subbigrup sejati dari dan ( ) = 9. Terakhir diperoleh bahwa ( ) = 9∤17 = ( ).

Teorema 2.16 *Misalkan* (, ,) *suatu neutrosofik bigrup kuat dan suatu neutrosofik subbigrup normal dari , maka order dari pada umumnya tidak membagi order dari .*

Bukti :

Dipandang neutrosofik bigrup = , dengan = $\{0, 1, 2, 3, \ , 2\ , 3\ , 1 + \ , 2 + \ , 3 + \ , 1 + 2\ , 2 + 2\ , 3 + 2\ , 1 + 3\ , 2 + 3\ , 3 + 3\ \}$ neutrosofik grup terhadap operasi penjumlahan modulo 4 dan = $\{0, 1, 2, 3, 4, \ , 2\ , 3\ , 4\ \}$ neutrosofik grup terhadap operasi perkalian modulo 5, maka ( ) = 25. Selanjutnya diambil = , dengan = $\{0, 2, 2\ , 2 + 2\ \}$ neutrosifik subgrup dari (,)+ dan = $\{0, 1, 4, \ , 4\ \}$ neutrosofik subgroup dari (,×), maka merupakan neutrosofik subbigrup normal kuat dari dengan ( ) = 9. Terlihat bahwa ( ) = 9 tidak membagi ( ) = 25.

III. KESIMPULAN

Dari hasil pembahasan dapat disimpulkan bahwa, sifat-sifat yang berlaku pada grup klasik, pada umumnya tidak berlaku pada struktur neutrosofik grup/bigrup. Akan tetapi dari beberapa sifat dasar yang berlaku pada bigrup, pada dasarnya masih berlaku juga pada struktur neutrosofik bigrup, di antaranya : neutrosofik subbigrup dari suatu neutrosofik bigrup, tidak menuntut himpunan bagiannya merupakan grup terhadap operasi-operasi yang berlaku pada struktur tersebut, selain itu Teorema Lagrange pada umunya tidak berlaku pada struktur neutrosofik grup/bigrup ini.

IV. DAFTAR PUSTAKA

1. Kandasamy, W. B. V & Florentin Smarandache, “Some Neutroshopic Algebraic Structures and Neutroshopic N – Algebraic Structures”, Hexis, Phoenix – Arizona, 2006. http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/eBooks-otherformats.htm

2. Kandasamy, W. B. V., "Bialgebraic Structures and Smarandache Bialgebraic Structures", American Research Press, Rehoboth, New Mexico, 2002. http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/NearRings.pdf
3. Proceedings of The First International Conference on Neutrosophy, Neutroshopic Logic, Neutroshophic Set, Neutroshopic Probability and Statistics, University of New Mexico, Gallup, 1 – 3 Desember 2001, ISBN : 1 – 931233 – 67 – 5.
4. Smarandache, Florentin, "A Unifying Field in Logics : Neutroshopic Logic. Neutroshopy, Neutroshophic Set, Neutroshopic Probability", American Research Press, Rehoboth, New Mexico, 2003.