SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN DIFUSI ANISOTROPIK

VERA NURMA YUNITA

PROGRAM STUDI MATEMATIKA FSM UNIVERSITAS DIPONEGORO

Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Tembalang Semarang

verre_chan@yahoo.com

ABSTRAK. Persamaan difusi anisotropik adalah salah satu persamaan yang tidak mudah untuk mencari solusi analitik. Pada skripsi ini, penulis membahas solusi dari persamaan difusi anisotropik. Pertama, penulis mendiskritisasi persamaan dengan metode selisih hingga mundur terhadap waktu dan selisih hingga tengah terhadap ruang. Diskritisasi akan membentuk sebuah sistem persamaan linier. Terakhir, sistem persamaan linier tersebut akan diselesaikan dengan metode GMRES untuk menentukan solusi numerik.

Kata kunci : difusi anisotropik, selisih hingga, solusi numerik, GMRES.

I. PENDAHULUAN

Persamaan difusi adalah persamaan diferensial parsial yang menggambarkan dinamika kepadatan bahan menjalani difusi. Sementara persamaan difusi anisotropik adalah salah satu bentuk dari persamaan difusi di mana terdapat unsur koefisien difusi di dalamnya. Jika koefisien difusi tersebut berupa konstanta, maka persamaan menjadi differensial linier atau persamaan panas. Persamaan difusi anisotropik yang akan dibahas adalah persamaan difusi anisotropik berupa persamaan panas dimensi satu.

Tidak semua masalah fisis dalam model matematis dapat diselesaikan secara analistis. Untuk menyelesaikan permasalahan ini biasanya digunakan penyelesaian numeris, di mana persamaan dasar diubah menjadi persamaan yang hanya berlaku pada titik-titik tertentu di dalam domain penyelesaian. Pengubahan persamaan tersebut dapat menggunakan metode elemen hingga ataupun metode beda hingga. Untuk permasalahan satu dimensi, metode yang umum digunakan adalah metode beda hingga karena mudah digunakan dan lebih dahulu dikenal sehingga sifat-sifatnya sudah difahami (Luknanto, 2003).

Sementara untuk menentukan nilai solusi pendekatan sisten linier skala besar digunakan GMRES. GMRES (Generelized Minimal Residual) adalah sebuah metode yang pertama kali diusulkan oleh Saad dan Schultz. Metode GMRES merupakan metode iteratif yang populer untuk menyelesaikan sistem persamaan linier skala besar.

Pada tugas akhir ini akan dibahas penentuan solusi numerik persamaan panas dimensi satu dengan menggunakan metode selisih hingga dan GMRES sebagai metode penyelesaikan sistem persamaan linier skala besar.

Materi pendukung yang berkaitan dengan materi pokok sehingga akan mempermudah pemahaman tentang materi yang disajikan. Bab ini terdiri atas empat subbab yaitu persamaan differensial parsial, deret Taylor, matriks, vektor dan proses Gram - Schmidt.

1.1 Persamaan Differensial Parsial

Jika turunan fungsi bergantung pada lebih dari satu variabel disebut persamaan differensial parsial. Bentuk umum persamaan differensial parsial orde kedua,

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0$$

dengan A, B, C, D, E, F dan G adalah fungsi dari x, y atau konstanta bilangan riil. Macam – macam persamaan differensial parsial :

i. Persamaan Parabolik : $u_t = c^2 u_{xx}$, (persamaan panas dimensi satu)
ii. Persamaan Hiperbolik : $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, (persamaan gelombang dimensi satu)
iii. Persamaan Eliptik : $u_{xx} + u_{yy} = 0$, (persamaan Laplace dimensi dua)

1.2 Deret Taylor

Secara matematis dapat ditulis

$$u(x_i + h) = u(x_i) + \frac{h}{1!}u'(x_i) + \frac{h^2}{2!}u''(x_i) + \cdots + \frac{h^n}{n!}u^{(n)}(x_i) + O^{n+1}$$

dengan h adalah Δx, indeks i merupakan titik grid, indeks n menunjukkan *time step* dan O^{n+1} adalah pemotongan error.

Karena itu jawaban yang diperoleh hanya berupa pendekatan dari pengambilan beberapa suku dan mengabaikan sisanya. Kesalahan ini disebut dengan kesalahan pemotongan, yang ditulis dalam bentuk:

$$R_n = O(\Delta x^{n+1})$$

Indeks n menunjukkkan bahwa deret yang diperhitungkan adalah sampai pada suku ke-n, sedangkan subskrip $n+1$ menunjukkan bahwa kesalahan pemotongan mempunyai order $n+1$, $O(\Delta x^{n+1})$ notasi berarti bahwa kesalahan pemotongan mempunyai order Δx^{n+1} , atau kesalahan adalah sebanding dengan langkah ruang pangkat $n+1$. kesalahan pemotongan tersebut kecil jika :

1. Interval *x* adalah kecil.
2. Memperhitungkan lebih banyak suku dari deret Taylor.

1.3 Matriks dan Vektor

a. Sparse Matriks

Sparse matriks biasa dikenal sebagai matriks yang memiliki elemen – elemen nol yang banyak.

Contoh :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

b. Basis

Definisi 1.1[1]

Jika $\boldsymbol{V}$ adalah sebarang ruang vektor dan $\boldsymbol{S} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ adalah sebuah himpunan berhingga dari vektor – vektor di dalam $\boldsymbol{V}$, maka $\boldsymbol{S}$ dinamakan sebuah basis dari $\boldsymbol{V}$ jika

i. $\boldsymbol{S}$ bebas linier,

Definisi 1.2[1]

Misalkan $\boldsymbol{V}$ suatu ruang vektor dan $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \boldsymbol{S}$. Himpunan $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ dikatakan bebas linier jika persamaan

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 + \cdots + k_n v_n = 0$$

hanya dapat dipenuhi oleh $k_1 = k_2 = k_3 = \cdots = k_n = 0$.

ii. $\boldsymbol{S}$ merentang di $\boldsymbol{V}$.

Definisi 1.3[1]

Misalkan $\boldsymbol{V}$ suatu ruang vektor dan $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \boldsymbol{S}$. Himpunan $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ dikatakan merentang $\boldsymbol{V}$ jika setiap vektor di $\boldsymbol{V}$ merupakan kombinasi linier dari $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

c. Ruang Perkalian Dalam

Definisi 2.4[1]

Sebuah perkalian dalam *(inner product)* pada ruang vektor V adalah fungsi yang mengasosiasikan bilangan riil $\langle u, v\rangle$ dengan setiap pasang vektor u dan v di dalam V sedemikian rupa sehingga aksioma – aksioma berikut dipenuhi untuk semua vektor u, v, dan w di dalam V dan untuk semua skalar k.

i. $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$

ii. $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$

iii. $\langle ku, v\rangle = k\langle u, v\rangle$

iv. $\langle v, v\rangle \geq 0$ dan $\langle v, v\rangle = 0$ jika dan hanya jika $v = 0$

1.4 Proses Gram Schimdt

Berikut merupakan langkah – langkah untuk menghasilkan basis ortonormal $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ untuk V.

Langkah pertama, misalkan $v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$. Vektor v_1 mempunyai norm 1.

Langkah kedua, untuk membangun sebuah vektor v_2 yang normnya 1 dan ortogonal terhadap v_1, hitung komponen dari u_2 yang ortogonal terhadap ruang w_1 yang direntang oleh v_1 dan kemudian normalisasikan komponen u_2 tersebut,

$$v_2 = \frac{u_2 - \langle u_2, v_1\rangle v_1}{\|u_2 - \langle u_2, v_1\rangle v_1\|}$$

Jika $u_2 - \langle u_2, v_1\rangle v_1 = 0$ maka normalisasi tidak dapat dilakukan. Tetapi ini tidak dapat terjadi karena jika demikian akan diperoleh

$$u_2 = \langle u_2, v_1 \rangle v_1 = \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|u_1\|} u_1$$

yang mengatakan bahwa u_2 merupakan kelipatan dari u_1 yang bertentangan dengan sifat bebas linier dari basis $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$.

Dengan meneruskan cara ini maka akan didapat sebuah himpunan ortonormal dari vektor – vektor $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Karena V berdimensi n dan karena tiap – tiap himpunan ortonormal bebas linier, maka himpunan $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ merupakan sebuah basis untuk V.

II. HASIL DAN PEMBAHASAN

2.1 Diskritisasi Persamaan Difusi Anisotropik dengan Metode Selisih Hingga

Pada bab ini akan dibahas mengenai solusi dari persamaan difusi anisotropik. Diketahui bentuk umum dari persamaan difusi anisotropik adalah

$$\frac{\partial u\,(x,t)}{\partial t} = \nabla[D(u,x)\nabla u(x,t)] \qquad 3.1$$

dengan $u\,(x,t)$ adalah densitas pada ruang x dan waktu t, $D\,(u,x)$ adalah koefisien difusi di ruang x, dan ∇ adalah operator Laplace,

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}$$

Persamaan difusi anisotropik yang akan dibahas adalah persamaan difusi anisotropik pada dimensi satu. Koefisien difusi $D(u,x)$ adalah konstanta, maka persamaan menjadi differensial linier atau persamaan panas. Berikut akan ditentukan solusi analitik dari persamaan panas.

Bentuk umum persamaan panas adalah

$$\frac{\partial u\,(x,t)}{\partial x} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \;, 0 \le x \le l, t > 0 \qquad 3.2$$

dengan c^2 adalah konstanta dan bergantung pada sifat material. Agar solusi dari masalah ada dan tunggal, dibutuhkan kondisi – kondisi berikut :

i. Kondisi awal $u(x,0) = f(x), 0 \le x \le l$

ii. Kondisi batas $u(0,t) = T_1$, $u(l,t) = T_2, t > 0$

dengan solusi analitik persamaan tersebut adalah

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n\, e^{-c^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

konstanta B_n harus memenuhi persamaan

$$u(x,0)=f(x), 0\le x\le l$$

agar

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{l}=f(x)$$

Pada tugas akhir ini hanya akan membahas solusi numerik persamaan anisotropik dimensi satu menggunakan gabungan pendekatan dua metode yaitu selisih hingga mundur terhadap waktu dan selisih hingga tengah terhadap ruang (*backward time* - *central space method*).

$$\frac{u(x_i,t_j)-u(x_i,t_{j-1})}{\Delta t}=c^2\frac{u(x_{i+h},t_j)-2u(x_i,t_j)+u(x_{i-h},t_j)}{h^2}$$

Substitusikan persamaan selisih hingga mundur pada waktu dan persamaan selisih hingga tengah pada ruang ke persamaan panas satu dimensi diperoleh

$$w_{i,j-1}=(1+2\alpha)w_{i,j}-\alpha w_{i+1,j}+\alpha w_{i-1,j}.$$

dengan $\alpha=\frac{c^2\Delta t}{h^2}$, sehingga menghasilkan sistem persamaan linier

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}}=\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}-\boldsymbol{1}}$$

2.2 Solusi Sistem Persamaan Linier dengan GMRES

Dalam subbab ini akan dibahas satu algoritma untuk mencari basis subruang Krylov. Dalam hal ini, notasi $\mathbf{R}^{n\times n}$ dan $\mathbf{R}^n$ berturut-turut menyatakan himpunan semua matriks real berukuran $n\times n$ dan himpunan semua matriks real berukuran $n\times 1$.

Definisi 3.1[8]

Diberikan $\mathbf{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ dan $\mathbf{b}\in\mathbf{R}^n$. Subruang yang direntang oleh himpunan m vektor

$$\{\mathbf{b},\mathbf{Ab},\mathbf{A}^2\mathbf{b},\ldots,\mathbf{A}^{m-1}\mathbf{b}\}$$

disebut *subruang Krylov*.

Selanjutnya, subruang Krlov m vektor yang direntang oleh $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ dan $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$ dinotasikan dengan

$$K_m(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{\mathbf{b}, \mathbf{Ab}, \mathbf{A}^2\mathbf{b}, ..., \mathbf{A}^{m-1}\mathbf{b}\} \ . \blacklozenge$$

Bilangan asli m menyatakan banyaknya vektor dalam $K_m(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Tidak ada jaminan bahwa m vektor dalam $K_m(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ bebas linear. Oleh karena itu, dimensi $K_m(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ sama dengan atau kurang dari m. Secara khusus, $\dim(K_1(\mathbf{A}, \mathbf{b})) = 1$ dengan $\dim(X)$ menyatakan dimensi ruang vektor X .

Algoritma Arnoldi adalah salah satu algoritma untuk mencari basis subruang Krylov $K_m(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Algoritma Arnoldi merupakan modifikasi algoritma Gram-Schmidt untuk mencari vektor-vektor ortogonal dari himpunan vektor yang diberikan. Algoritma Arnoldi dituliskan sebagai berikut.

Algoritma 1 (Algoritma Arnoldi)

Input : $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$, dan bilangan asli $m < n$

1. Hitung $\mathbf{v_1} = \dfrac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|}$
2. Untuk $j = 1, 2, ..., m$, kerjakan

   2.1. untuk $k = 1, 2, ..., j$, kerjakan

   2.1.1. hitung $h_{k,j} = \mathbf{v}_k^T \mathbf{A} \mathbf{v}_j$

   2.2. $\mathbf{u}_j = \mathbf{A}\mathbf{v}_j - \sum_{k=1}^{j} h_{k,j} \mathbf{v}_k$

   2.3. $h_{j+1,j} = \|\mathbf{u}_j\|$

   2.4. Jika $h_{j+1,j} = 0$ maka stop

   2.5. $\mathbf{v}_{j+1} = \dfrac{\mathbf{u}_j}{h_{j+1,j}}$
3. Stop.

Jika Algoritma 1 dikerjakan, maka diperoleh dua matriks berikut

(1). matriks Hessenberg

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & h_{1,3} & h_{1,4} & h_{1,5} & \cdots & h_{1,m-1} & h_{1,m} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & h_{2,3} & h_{2,4} & h_{2,5} & \cdots & h_{2,m-1} & h_{2,m} \\ 0 & h_{3,2} & h_{3,3} & h_{3,4} & h_{3,5} & \cdots & h_{3,m-1} & h_{3,m} \\ 0 & 0 & h_{4,3} & h_{4,4} & h_{4,5} & \cdots & h_{4,m-1} & h_{4,m} \\ 0 & 0 & 0 & h_{5,4} & h_{5,5} & \cdots & h_{5,m-1} & h_{5,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \ddots & h_{m-1,m-1} & h_{m-1,m} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & h_{m,m-1} & h_{m,m} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{m\times m}$$

(2). matriks $\mathbf{V}=[\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_m]$.

Vektor-vektor kolom matriks $\mathbf{V}$ merupakan basis untuk subruang Krylov $K_m(\mathbf{A},\mathbf{b})$. Untuk selanjutnya, matriks Hessenberg yang dihasilkan oleh algoritma Arnoldi dinotasikan dengan $\mathbf{H}$. Teorema berikut memperlihatkan hubungan antara matriks input dan matriks output dalam Algoritma 1.

Perhatikan vektor-vektor elemen subruang Krylov $K_m(\mathbf{A},\mathbf{r}_0)$ dengan $\mathbf{r}_0=\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x}_0$. Untuk setiap vektor $\mathbf{x}\in\mathbf{x}_0+K_m(\mathbf{A},\mathbf{r}_0)$ dapat ditulis $\mathbf{x}\in\mathbf{x}_0+\mathbf{V}_m\mathbf{y}^{(m)}$ untuk suatu vektor $\mathbf{y}^{(m)}\in\mathbf{R}^m$ dan $\mathbf{V}_m=\mathbf{V}$ matriks basis yang dihasilkan oleh Algoritma 1.

Algoritma 2. (Algoritma GMRES)

1. Pilih titik awal $\boldsymbol{x_0}\in\boldsymbol{R^k}$ dan hitung

   $$\boldsymbol{r_0}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x_0} \text{ dan } \boldsymbol{v_1}=\frac{\boldsymbol{r_0}}{\|\boldsymbol{r_0}\|}$$
2. Konstruksikan vektor ortonormal $\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2},\dots,\boldsymbol{v_k}$ dengan algoritma 1.
3. Tentukan vektor $\boldsymbol{\bar{y}}\in\boldsymbol{R^k}$ agar diperoleh $\|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\bar{y}}\|\le\min_{\bar{x}\in R^k}\|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\bar{x}}\|$
4. $\boldsymbol{x_k}=\boldsymbol{x_0}+\|\boldsymbol{r_0}\|\boldsymbol{V_k}\boldsymbol{\bar{y}}$ dengan $\boldsymbol{V_k}=\{\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2},\dots,\boldsymbol{v_k}\}$

III. KESIMPULAN

Dari pembahasan yang telah diuraikan pada bab sebelumnya, dapat tunjukan bahwa solusi numerik dari persamaan difusi anisotropik

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\nabla[D(u,x)\nabla u(x,t)]$$

dengan $u\,(x,t)$ adalah densitas pada ruang x dan waktu t, $D\,(u,x)$ adalah koefisien difusi di ruang x, dan ∇ adalah operator Laplace,

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}$$

khususnya persamaan panas dimensi satu

$$\frac{\partial u\,(x,t)}{\partial x} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ,0 \le x \le l, t > 0$$

dengan metode selisih hingga mundur terhadap waktu dan selisih hingga tengah terhadap ruang (*backward time - central space method)* menghasilkan persamaan

$$w_{i,j-1} = (1+2\alpha)w_{i,j} - \alpha w_{i+1,j} + \alpha w_{i-1,j}$$

dengan solusi berupa sistem persamaan linier sebagai berkut:

$$\boldsymbol{A w_{i,j}} = \boldsymbol{w_{i,j-1}}$$

Untuk memudahkan penyelesaian sistem persamaan linier di atas digunakan Algoritma GMRES. Algoritma GMRES dapat digunakan untuk menentukan solusi sistem persamaan linier skala besar.

Dalam tugas akhir ini pembahasan mengenai solusi numerik hanya terbatas pada persamaan difusi anisotropik dimensi satu. Metode yang digunakan juga merupakan gabungan dua skema metode selisih hingga. Oleh karena itu, tugas akhir ini dapat dikembangkan mengenai solusi persamaan difusi anisotropik secara umum, meliputi persamaan difusi anisotropik dimensi 2 dan seterusnya. Atau dapat juga dengan menggabungkan dua skema lain pada metode selisih hingga sehingga dapat dibandingkan hasilnya.

IV. DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, Howard. 2005. *Aljabar Linier Elementer Edisi Ketiga*. Surabaya. Erlangga

[2] Antoulas, A. C. 2005. *Approximation of Large Scale Dynamical Systems*. Philadelphia. SIAM.

[3] Bjorck, Ake. 1996. *Numerical Methods for Least Squares Problems*. SIAM.

[4] Froberg, Carl – Erick. 1965. *Introduction to Numerical Analysis Second Edition*. Addison – Wisley Publishing Company. USA.

[5] Iyengar, S. R. K, Jain, R. K. 2009. *Numerical Methods*. New Age International Publisher.

[6] Iyengar, S. R. K, Jain, M. K, and Jain, R. K. *Numerical Methods (Problem and Solutions).* New Delhi. New Age International.

[7] Lui, S. H. 2011. *Numerical Analysis of Partial Differential Equations*. Canada. Wiley.

[8] Saad, Yousef. 2003. Iterative *Methods For Sparse Linier Systems, Second Edition*. Philadelphia. SIAM.