FUNGSI RASIONAL CHEBYSHEV DAN APLIKASINYA PADA APROKSIMASI FUNGSI

Irvan Agus Etioko[1], Farikhin[2], Widowati[3]
[1,2,3]Program Studi Matematika FSM Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Tembalang Semarang

agoes089@gmail.com
farikhin.math.undip@gmail.com

ABSTRACT. A rational Chebyshev function is contructed by using Chebyshev polynomial which change a domain function from closed interval $[-1,1]$ into the semi-infinite interval $[0,\infty)$. In this note, we study some properties of Chebyshev polynomials that are preserved in rational Chebyshev functions. Further, we discuss an its application to approximate a function.
Key Word: Rational Chebyshev Function, Chebyshev Approximation

I. PENDAHULUAN

Terdapat pernyataan yang berkaitan dengan polinomial Chebyshev yaitu "Polinomial Chebyshev sangat lekat di dalam analisis numerik". Pernyataan ini banyak dikaitkan dengan sejumlah matematikawan terkemuka dalam analisis numerik diantaranya adalah Philip Davis dan George Forsythe. Polinomial Chebyshev mengambil peran penting dalam analisis numerik dan perkembangan ilmu pengetahuan modern, diantaranya adalah tentang polinomial ortogonal, aproksimasi polinomial, integrasi numerik dan metode spektral untuk persamaan diferensial parsial. Dengan mempelajari polinomial Chebyshev akan mengarah pada semua bidang dalam analisis numerik. Hal ini berarti bahwa polinomial Chebyshev memberikan pelajar kesempatan untuk mengenal luas berbagai bidang analisis numerik dan matematika. (John C. Mason & David Handscomb, 2003)

II. HASIL DAN PEMBAHASAN

Definisi 2.1. [9] *Diberikan* $x \in [-1,1]$, $y \in [0,\infty)$ *dan* $x = \frac{y-1}{y+1}$. *Didefinisikan fungsi rasional Chebyshev* $R_m(y)$ *dalam fungsi trigonometri sebagai berikut*

$$R_m(y) = T_m\left(\frac{y-1}{y+1}\right) = \cos mt, \qquad m = 0,1,2,\ldots$$

dengan

$$y = cot^2 \frac{t}{2} \; dan \; t = 2\,cot^{-1}\sqrt{y}, \quad y \in [0,\infty), t \in [0,\pi].$$

Teorema 2.2. [9] *Jika terdapat fungsi rasional Chebyshev $R_m(y)$, maka $R_m(y)$ memenuhi persamaan rekursif*

$$R_m(y) = 2\frac{y-1}{y+1}R_{m-1}(y) - R_{m-2}(y), \qquad m = 2,3,\ldots$$

dengan

$$R_0(y) = 1 \; dan \; R_1(y) = \frac{y-1}{y+1}.$$

Bukti.
Diberikan fungsi rasional Chebyshev

$$R_m(y) = \cos mt, \qquad m = 0,1,2,\ldots$$

dengan

$$y = \cot^2 \frac{t}{2}.$$

Diketahui rumus dasar trigonometri sebagai berikut

$$2\cos(a)\cos(b) \quad = \cos(a+b) + \cos(a-b)t,$$

Jika $a = (m-1)t$ dan $b = t$, maka rumus dasar trigonometri tersebut dapat ditulis kembali dalam bentuk berikut

$$\begin{aligned}
2\cos(m-1)t\cos t &= \cos((m-1)+1)t + \cos((m-1)-1)\,t,\\
&= \cos mt + \cos(m-2)\,t,\\
\cos mt &= 2\cos t\cos(m-1)t - \cos(m-2)t,\\
&= 2\,R_1(y)\left(R_{m-1}(y)\right) - R_{m-2}(y),\\
R_m(y) &= 2\,\frac{y-1}{y+1}\,R_{m-1}(y) - R_{m-2}(y), \quad m = 2,3,\ldots.
\end{aligned}$$

■

Definisi 2.3. [3] *Terdapat sebuah himpunan $\{\phi_0,\ldots,\phi_n\}$ dikatakan himpunan ortogonal pada interval $[a,b]$ dengan menggunakan fungsi bobot w jika*

$$\int_a^b w(x)\phi_j(x)\phi_k(x)dx = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ b_k > 0, j = k. \end{cases}$$

Jika $b_k = 1$ *untuk setiap* $k = 0,1,2,\dots,n$*, maka himpunan dikatakan ortonormal.*

Teorema 2.4. [9] *Jika diberikan fungsi-fungsi rasional Chebyshev* $R_m(y)$ *dan* $R_n(y)$*, maka memenuhi persamaan sebagai berikut*

$$\int_0^\infty R_m(y)R_n(y)p(y)dy = \begin{cases} 0, & (m \neq n) \\ \frac{\pi}{2}, & (m = n) \\ \pi, (m = n = 0) \end{cases}$$

dengan

$$p(y) = \frac{1}{(1+y)\sqrt{y}}.$$

Bukti :

Dari Definisi 2.1 diketahui fungsi-fungsi rasional Chebyshev

$$R_m(y) = \cos mt \ dan \ R_n(y) = \cos nt.$$

terdapat fungsi

$$\int_0^\infty R_m(y)R_n(y)p(y)dy$$

dengan

$$p(y) = \frac{1}{(1+y)\sqrt{y}},$$

sehingga persamaan tersebut dapat dioperasikan sebagai berikut :

untuk $m \neq n$,

$$\int_0^\infty R_m(y)R_n(y)p(y)dy = \int_0^\infty \frac{R_m(y)R_n(y)}{\sqrt{y}(y+1)}dy,$$

$$= -\int_0^\pi \frac{\cos mt \ \cos nt}{cot\frac{t}{2}\left(cot^2\frac{t}{2}+1\right)}\left(-cot\frac{t}{2}\left(1+cot^2\frac{t}{2}\right)dt\right),$$

$$= -\int_{0}^{\pi} \cos mt \cos nt \ (-dt),$$

$$= \int_{0}^{\pi} \cos mt \cos nt \ dt,$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \cos(m+n)t + \cos(m-n)t \, dt,$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(m+n)t}{m+n} + \frac{\sin(m-n)t}{m-n}\right)\Big|_{0}^{\pi},$$

$$= 0,$$

untuk $m = n \neq 0$,

$$\int_{0}^{\infty} R_m(y)R_m(y)P(y)dy = \int_{0}^{\infty} \frac{R_m(y)R_m(y)}{\sqrt{y}(y+1)} dy,$$

$$= -\int_{0}^{\pi} \frac{\cos mt \ \cos mt}{cot\frac{t}{2}\left(cot^2\frac{t}{2}+1\right)}\left(-cot\frac{t}{2}\left(1+cot^2\frac{t}{2}\right)dt\right),$$

$$= -\int_{0}^{\pi} \cos mt \cos mt \ (-dt),$$

$$= \int_{0}^{\pi} \cos mt \cos mt \ dt,$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \cos(m+m)t + \cos(m-m)t \, dt,$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} (\cos(2m)t + 1)dt,$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(2m)t}{2m} + t\right)\Big|_{0}^{\pi},$$

$$= \frac{1}{2}\pi,$$

untuk $m = n = 0$,

$$\int_0^\infty R_0(y)R_0(y)P(y)dy = \int_0^\infty \frac{R_0(y)R_0(y)}{\sqrt{y}(y+1)}dy,$$

$$= -\int_0^\pi \frac{\cos 0t \ \cos 0t}{cot\frac{t}{2}\left(cot^2\frac{t}{2}+1\right)}\left(-cot\frac{t}{2}\left(1+cot^2\frac{t}{2}\right)dt\right),$$

$$= -\int_0^\pi \cos 0 \cos 0 \ (-dt),$$

$$= \int_0^\pi 1 \ dt,$$

$$= \pi.$$

■

Jadi menurut Definisi 2.3, persamaan pada Teorema 2.4 merupakan persamaan orthogonal.

Definisi 2.5. [3] *Terdapat* $\{\phi_0, \dots, \phi_n\}$ *sebagai himpunan fungsi ortogonal pada interval [a,b] dengan fungsi bobot non negatif* $w(x)$. *Bentuk aproksimasi polinomial ortogonal dengan metode kuadrat terkecil pada* $f \epsilon\ C[a,b]$ *adalah*

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \phi_k(x)$$

dengan

$$a_k = \frac{\int_a^b w(x)\phi_k(x)f(x)dx}{\int_a^b w(x)[\phi_k(x)]^2\,(x)dx}.$$

Teorema 2.6. *Jika* $\{R_0, \dots, R_m\}$ *adalah himpunan fungsi rasional Chebyshev pada interval* $[0, \infty)$ *dengan menggunakan fungsi bobot* $p(y) = \left(\sqrt{y}(y+1)\right)^{-1}$, *maka* *bentuk khusus aproksimasi fungsi $f \epsilon \{R_0, \dots, R_m\}$ dengan menggunakan fungsi rasional Chebyshev dengan metode kuadrat terkecil adalah*

$$f(y) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j R_j(y)$$

dengan

$$c_j = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{f(y)R_j(y)}{\sqrt{y}(y+1)} dy. \qquad j = 0,1,2,\dots.m$$

Bukti

Terdapat fungsi polinomial Chebyshev $R_m(y)$ dengan fungsi bobot

$$p(y) = \left((1+y)\sqrt{y}\right)^{-1}.$$

Aproksimasi kuadrat terkecil dari fungsi rasional Chebyshev adalah

$$m = \int_a^b \left[f(y) - \sum_{j=0}^{\infty} c_j R_j(y)\right]^2 p(y)dy$$

$$\frac{\partial m}{\partial c_k} = -2\int_a^b \left[f(y) - \sum_{i=0}^{\infty} c_j R_j(x)\right] R_k(x)p(y)dy \qquad k \le j$$

$$\int_a^b f(y)R_k(x)p(y)dx = \sum_{i=0}^{\infty} c_j \int_a^b R_j(x)R_k(x)p(y)dy$$

$$= c_k \int_a^b {R_k}^2(y)p(y)dy$$

$$c_k = \frac{\int_a^b f(y)R_k(y)\left((1+y)\sqrt{y}\right)^{-1} dy}{\int_a^b R_k^2(y)\left((1+y)\sqrt{y}\right)^{-1} dy}$$

Menurut Teorema 2.4, $\int_a^b (R_k(y))^2 \left((1+y)\sqrt{y}\right)^{-1} dy = \frac{\pi}{2}$ untuk $k > 0$ dan $\int_a^b (R_0(y))^2 \left((1+y)\sqrt{y}\right)^{-1} dy = \pi$ untuk $k = 0$, jadi persamaan diatas dapat ditulis sebagai berikut

$$c_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left((1+y)\sqrt{y}\right)^{-1} f(y)R_k(y)dy\,,\;\; k > 0$$

$$c_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left((1+y)\sqrt{y}\right)^{-1} f(y)R_k(y)dy\,,\;\; k = 0$$

dengan

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j R_j(y) = \frac{1}{2}c_0R_0(y) + c_1R_1(y) + c_2R_2(y) + \cdots \;\;, j \geq 0.$$

■

Contoh

Tunjukkan aproksimasi fungsi $f(y) = 2\text{arccot}\sqrt{y}\,, (\,0 \leq y < \infty)$ menggunakan fungsi rasional Chebyshev dengan metode kuadrat terkecil.

Jawab

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2}c_j &= \int_0^\infty \frac{1}{(1-y)\sqrt{y}} 2\text{arccot}\sqrt{y}\, R_j(y)dy \\
&= \int_0^\pi t\cos jt\; dt \\
&= \left[\frac{t\sin jt}{j} + \frac{\cos jt}{j^2}\right]_0^\pi \\
&= \left[\frac{jt\sin jt + \cos jt}{j^2}\right]_0^\pi \\
&= \left[\frac{(-1)^j - 1}{j^2}\right],
\end{aligned}$$

sedemikian sehingga

$$c_{2k} = 0, c_{2k-1} = -\frac{4}{\pi(2k-1)^2}, \quad (j = 2k, k = 1,2,3, \dots),$$

dan

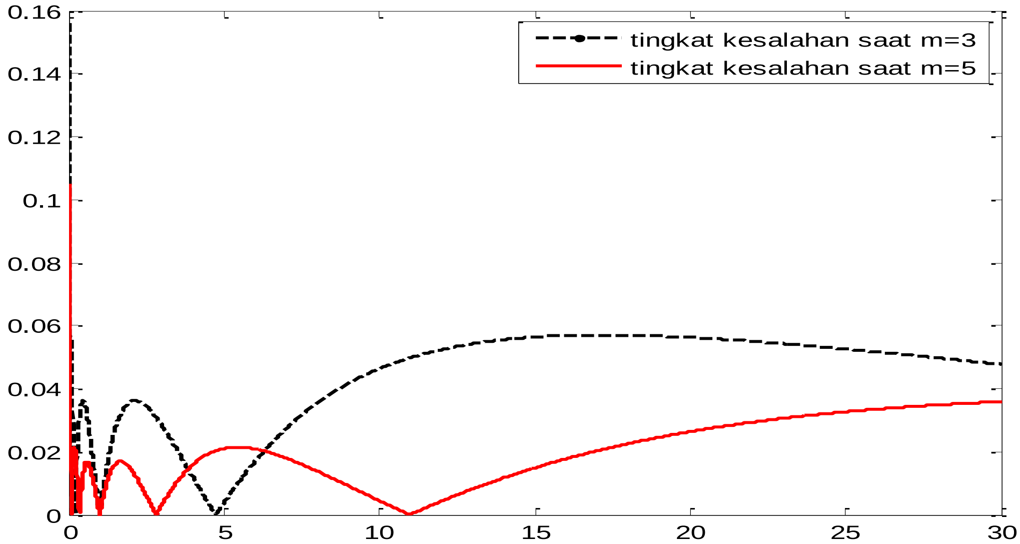
$$c_0 = \pi.$$

Oleh karena itu, aproksimasi dari fungsi $f(y) = 2\text{arccot}\sqrt{y}$ adalah

$$2\text{arccot}\sqrt{y} = \frac{\pi}{2}R_o(y) - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{R_{2k-1}}{(2k-1)^2}.$$

dengan menggunakan program komputasi Matlab, diperoleh tingkat kesalahan dan grafik kesalahan sebagai berikut ($m = j =$ derajat polinomial)

$m = 3$				$m = 5$			
y	$f(y)$	$P_3(y)$	$eror$	y	$f(y)$	$P_5(y)$	$eror$
0	3.1416	2.9855	0.1561	0	3.1416	3.0364	0.1052
1.0000	1.5708	1.5708	0	1.0000	1.5708	1.5708	0
2.0000	1.2310	1.2669	0.0359	2.0000	1.2310	1.2164	0.0146
3.0000	1.0472	1.0756	0.0285	3.0000	1.0472	1.0502	0.0030
4.0000	0.9273	0.9393	0.0120	4.0000	0.9273	0.9431	0.0158
5.0000	0.8411	0.8372	0.0038	5.0000	0.8411	0.8620	0.0209
6.0000	0.7752	0.7583	0.0169	6.0000	0.7752	0.7961	0.0209
7.0000	0.7227	0.6954	0.0273	7.0000	0.7227	0.7408	0.0181
8.0000	0.6797	0.6443	0.0353	8.0000	0.6797	0.6936	0.0139
9.0000	0.6435	0.6020	0.0415	9.0000	0.6435	0.6528	0.0093
10.0000	0.6126	0.5664	0.0462	10.0000	0.6126	0.6171	0.0046
11.0000	0.5857	0.5360	0.0497	11.0000	0.5857	0.5857	0.0001
12.0000	0.5621	0.5097	0.0523	12.0000	0.5621	0.5579	0.0042
13.0000	0.5411	0.4869	0.0542	13.0000	0.5411	0.5330	0.0081
14.0000	0.5223	0.4668	0.0555	14.0000	0.5223	0.5107	0.0116
15.0000	0.5054	0.4490	0.0564	15.0000	0.5054	0.4906	0.0148
16.0000	0.4900	0.4331	0.0569	16.0000	0.4900	0.4723	0.0176
17.0000	0.4759	0.4188	0.0570	17.0000	0.4759	0.4557	0.0202
18.0000	0.4630	0.4060	0.0570	18.0000	0.4630	0.4405	0.0225
19.0000	0.4510	0.3943	0.0567	19.0000	0.4510	0.4265	0.0245
20.0000	0.4400	0.3837	0.0563	20.0000	0.4400	0.4137	0.0263
21.0000	0.4297	0.3740	0.0557	21.0000	0.4297	0.4018	0.0279
22.0000	0.4201	0.3651	0.0551	22.0000	0.4201	0.3908	0.0293
23.0000	0.4111	0.3568	0.0543	23.0000	0.4111	0.3806	0.0306
24.0000	0.4027	0.3492	0.0535	24.0000	0.4027	0.3710	0.0317
25.0000	0.3948	0.3422	0.0526	25.0000	0.3948	0.3622	0.0326
26.0000	0.3873	0.3356	0.0517	26.0000	0.3873	0.3538	0.0335
27.0000	0.3803	0.3295	0.0507	27.0000	0.3803	0.3460	0.0342
28.0000	0.3736	0.3238	0.0497	28.0000	0.3736	0.3387	0.0348
29.0000	0.3672	0.3185	0.0487	29.0000	0.3672	0.3318	0.0354
30.0000	0.3612	0.3135	0.0477	30.0000	0.3612	0.3253	0.0358



Gambar: Grafik perbandingan kesalahan contoh

Keterangan gambar:

Garis hitam (garis putus-putus) adalah kesalahan pendekatan dengan derajat rasional Chebyshev $m = 3$ dan garis merah (garis penuh) adalah kesalahan pendekatan dengan derajat $m = 5$.

III. KESIMPULAN

Dari pembahasan yang telah diuraikan pada bab sebelumnya, dapat tunjukan bahwa fungsi rasional Chebyshev merupakan transformasi dari fungsi polinomial Chebyshev dan mewarisi sifat-sifatnya. Aproksimasi fungsi menggunakan fungsi rasional Chebyshev dengan metode kuadrat terkecil, akan lebih akurat atau akan semakin kecil kesalahan pendekatanya jika deret rasional Chebyshev yang digunakan semakin panjang.

IV. UCAPAN TERIMA KASIH

Banyak pihak yang telah membantu dalam penyelesaian Tugas Akhir ini. Oleh karena itu, rasa hormat dan terimakasih penulis ingin sampaikan kepada :

1. Farikhin, S.Si, M.Si, Ph.D selaku dosen pembimbing I yang telah membimbing dan mengarahkan penulis dalam penyusunan Tugas Akhir ini.

2. Dr. Widowati, S.Si, M.Si selaku dosen pembimbing II yang juga telah membimbing dan mengarahkan penulis dalam penyusunan Tugas Akhir ini.
3. Semua pihak yang telah membantu hingga selesainya tugas akhir ini, yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu. Semoga Allah membalas segala kebaikan yang telah diberikan.

V. DAFTAR PUSTAKA

[1] Bartle, Robert G & Sherbert, Donald R. 2000. *Introduction to Real Analysis, Third Edition*. New York. Jhon Wiley & Sons, Inc.

[2] Boyd, Jhon P. 1987. *Orthogonal Rational Function on a Semi-infinte Interval.* Journal of Computational Physics 70, 63-88.

[3] Burden, R.L & Faires, J.D. 1989. *Numerical Analysis* .Boston. Pws-Kent Publishing Company.

[4] Dorn, Wiliiam S & McCracken, Daniel D. 1972. *Numerical Methods with Fortan IV Case Studies.* New York.Jhon Wiley & Sons, Inc.

[5] Natanson, I.P. 1965. *Constructive Function Theory, Vol.II :Approximation In Mean* . New York. Frederick Ungar Publishing Co., Inc.

[6] Mason, J.C & D.C Handscomb. 2002. *Chebyshev Polynomials*. New York. A CRC Press Company.

[7] Mohd, Ismail & Farikhin. 2011. *Orthogonal Function Based on Chebyshev Polynomials*. MATEMATIKA, Volume 27, Number 1, 97-107.

[8] Royden, H.L. 2005. *Real Analysis* , *Third Edition*. New Delhi. Prentice-Hall, Inc.

[9] Shahini, M. & K. Parand. 2009. *Rational Chebyshev pseudospectral approach for solving Thomas_fermi equation.* Physics Letters A 373, 210-213.